

УДК 517.934

© Ю. В. Мастерков
imi@uni.udm.ru

К НЕОБХОДИМЫМ И ДОСТАТОЧНЫМ УСЛОВИЯМ УПРАВЛЯЕМОСТИ В МАЛОМ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ¹

Ключевые слова: локальная управляемость, управляемость в малом.

Abstract. We obtained the necessary and sufficient conditions of local controllability over the nonlinear system. These results are also applied in the critical case when the system of linear approximation of the nonlinear system don't locally controllable.

Рассматривается система

$$\dot{x} = f_0(x) + u f_1(x), \quad (x, u) \in \mathbb{R}^n \times [-1, 1], \quad (1)$$

где $f_0(0) = 0$, $f_1(0) = b \neq 0$, и функции $f_0(x)$, $f_1(x)$ голоморфны в некоторой окрестности начала координат. Предполагается, что $\text{rank}(b, Ab, A^2b, \dots, A^{n-1}b) \geq n - 1$, где $A = (\partial f_0(x)/\partial x)_{x=0}$, т. е. не исключается так называемый критический случай, когда соответствующая система линейного приближения $\dot{x} = Ax + bu$ не является локально управляемой.

О п р е д е л е н и е 1. [1]. Система (1) называется управляемой в малом, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для любого $|x_0| < \varepsilon$ существуют момент времени $\tau \in (0, \infty)$ и допустимое решение $x(t) = x(t, u(\cdot))$, $t \in [0, \tau]$ системы (1), удовлетворяющие условиям: $x(0) = x_0$, $x(\tau) = 0$, $|x(t)| \leq \varepsilon$ для всех $t \in [0, \tau]$.

¹Работа поддержана Конкурсным центром фундаментального естествознания (грант Е 00-1.0-5).

Через $x = x_-(t)$ и $x = x_+(t)$, $t \in [0, \tau)$ обозначим решения системы (1), отвечающие управлениям $u_+(t) \equiv 1$ и $u_-(t) \equiv -1$ и начальному условию $x_-(0) = x_+(0) = 0$. Введем в рассмотрение функцию

$$s(x) \doteq \det[f_0(x), f_1(x) \dots f_{n-1}(x)],$$

где

$$f_i(x) = [f_0(x), f_{i-1}(x)] \doteq (\partial f_0(x)/\partial x)f_{i-1}(x) - (\partial f_{i-1}(x)/\partial x)f_0(x).$$

Отметим, что функции $s(x), f_2(x), f_3(x) \dots f_{n-1}(x)$ будут также голоморфны в некоторой окрестности начала координат, причем $f_i(0) = A^{i-1}b$ при $i = 1 \dots n-1$.

Т е о р е м а 1. Пусть $\text{rank}(b, Ab, A^2b \dots A^{n-1}b) \geq n-1$. Система (1) управляема в малом в том и только том случае, если существует такое $\tau > 0$, что

$$s(x_+(t))s(x_-(t)) < 0 \text{ для всех } t \in (0, \tau). \quad (2)$$

Теорема 1 существенно усиливает результаты работы [2], в которой доказано, что условие (2) является достаточным для управляемости в малом системы (1).

* * *

1. Тонков Е. Л. Управляемость нелинейной системы по линейному приближению // Прикладная математика и механика. 1974. Т. 38, Г 4. С. 599–606.
2. Мастерков Ю. В. Некоторые вопросы управляемости нелинейных систем // Известия Института математика и информатики УдГУ. Ижевск, 1999. Вып. 2(17). С. 41–101.