УДК 517.934

© **Н.В. Милич**
nmilitch@mail.ru

О СУЩЕСТВОВАНИИ ПОЗИЦИОННОГО УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ ЗАДАЧИ БЫСТРОДЕЙСТВИЯ[1]

Ключевые слова: позиционное управление, задача быстродействия, линейные управляемые системы.

Abstract. Non-stationary control system is considered. The conditions are given under which time-optimal positional control constructed for linear system is positional control for a certain family of nonlinear systems.

Рассмотрим возмущенную нестационарную управляемую систему

$$\dot{x} = A(t)x + b(t)u + w(t,x), x \in \mathbb{R}^n, \quad |u| \leqslant 1, \tag{1}$$

где функции $A: \mathbb{R} \to \mathbb{M}(n)$ и $b: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ являются непрерывными, функция $w: \mathbb{R}^{1+n} \to \mathbb{R}^n$ удовлетворяет условиям Каратеодори и $w(t,0) \equiv 0$. Допустимыми будем считать все измеримые управления $u(\cdot)$, не превосходящие по модулю единицы. Для сопряженной линейной системы $\dot{\psi} = -\psi A(t)$, соответствующей системе (1), построим фундаментальную систему решений $\{\psi_i(t)\}_i$ и функцию $\sigma(t)$, определяемую как длина максимального промежутка $[t, t+\sigma)$, на котором функции $\xi_i(t) = \psi_i(t)b(t)$ имеют не более $n-1$ нуля без учета кратности. Многообразие $\mathcal{N}^{1+k}$ состоит из всех точек расширенного фазового пространства $\mathbb{R}^{1+n}$, которые переводятся на ось $Ot \doteq \{(t,0)\colon t \in \mathbb{R}\}$ при помощи оптимального в смысле быстродействия программного

[1]Работа поддержана Конкурсным центром фундаментального естествознания (грант Е 00–1.0–5).

управления, равного ± 1 и имеющего k переключений. Многообразие $\mathcal{N}^{1+k}$ состоит из многообразий $\mathcal{N}_{+}^{1+k}$ и $\mathcal{N}_{-}^{1+k}$, которым отвечают оптимальные управления, начинающиеся с $+1$ и -1 соответственно. Множество $N^k(t)$ является сечением многообразия $\mathcal{N}^{1+k}$ при фиксированном t. Зададим функцию $v(t,x)$ как $+1$ на $\mathcal{N}_{+}^{1+k}$ и как -1 на $\mathcal{N}_{-}^{1+k}$.

Пусть $\theta > 0$. Обозначим символом $\mathfrak{D}_\theta$ расширенное множество управляемости линейной системы $\dot{x} = A(t)x + b(t)u$ за время θ, т. е. множество всех точек (t,x) множества $\mathbb{R}^{1+n}$, которые можно перевести за время θ на ось Ot при помощи допустимого управления. Непрерывная функция $w : \mathbb{R}^{1+n} \to \mathbb{R}^n$ называется допустимой в $\mathfrak{D}_\theta$, если существует такое $\alpha > 0$, что выполнены следующие условия:

1) для всех $(t,x) \in \mathfrak{D}_\theta$ производная функции быстродействия Θ по направлению вектора $w(t,x)$ $\dfrac{\partial\Theta(t,x)}{\partial x} w(t,x) \leqslant 1 - \alpha$;

2) для всех $k = 1,\ldots,n-1$ и всех $q = (t,x) \in \mathcal{N}^{1+k}$ таких, что $w(t,x)$ принадлежит касательному пространству $T_x N^k(t)$, производная вдоль многообразия $N^k(t)$ $d_x\Theta(t,x)w(t,x) \leqslant 1 - \alpha$.

Т е о р е м а 1. [1]. *Пусть выполнены следующие условия:* 1) $\sigma(t) > 0$; 2) *существует такое* $\theta > 0$, *что* $\mathfrak{D}_\theta \subset \mathfrak{D}_{\sigma(t)}$; 3) *функция* $w(t,x)$ *допустима в* $\mathfrak{D}_\theta$. *Тогда найдется такое положительное* $\theta_1 \leqslant \theta$, *что управление* $v(t,x)$ *является позиционным для системы* (1) *в* $\operatorname{int}\mathfrak{D}_{\theta_1}$. *Это означает, что для каждой точки* $(t_0,x_0) \in \mathfrak{D}_{\theta_1}$ *найдется момент времени* $\vartheta(t_0,x_0) < \infty$ *такой, что соответствующее решение Филиппова* $x(t,t_0,x_0)$ *системы* (1) *с начальным условием* $x(t_0) = x_0$ *существует и* $x(t_0+\vartheta(t_0,x_0),t_0,x_0) = 0$. *Более того, для каждого* $\varepsilon > 0$ *существует* $\delta > 0$ *такое, что если* $|w(t,x)| \leqslant \delta$ *для* $(t,x) \in \mathfrak{D}_{\theta_1}$, *то* $|\Theta(t,x) - \vartheta(t,x)| \leqslant \varepsilon$.

* * *

1. Милич Н. В. Позиционное управление возмущенной системой, близкой к докритической // Известия Института математики и информатики УдГУ. Ижевск, 2000. Вып. 2(19). С. 38–53.