УДК 517.934

© **Л. И. Родина, Е. Л. Тонков**
imi@uni.udm.ru, elt@udman.ru

КРИТЕРИЙ ПОЛНОЙ УПРАВЛЯЕМОСТИ ЛИНЕЙНОЙ НЕСТАЦИОНАРНОЙ СИСТЕМЫ В КРИТИЧЕСКОМ СЛУЧАЕ[1]

Ключевые слова: линейные нестационарные управляемые системы, пространство управляемости, полная управляемость.

Abstract. We investigate the conditions when the linear nonstationary system is totally controllable at the segment or does not possess this property.

Пусть $\mathbb{R}^n$ — стандартное евклидово пространство размерности n, x^*y — скалярное произведение векторов x, y из $\mathbb{R}^n$ ($*$ — знак транспонирования), $|x| \doteq \sqrt{x^*x}$ — норма вектора $x \in \mathbb{R}^n$, $\mathrm{Lin}(q^1 \dots q^r)$ — линейная оболочка векторов $q^1 \dots q^r \in \in \mathbb{R}^n$. Векторы-столбцы обозначаются латинскими буквами, векторы-строки — греческими (таким образом, запись ξx означает скалярное произведение векторов ξ и x). Далее, $\mathbb{M}(n,m)$ — пространство $(n \times m)$-матриц, если $n = m$, то пишем $\mathbb{M}(n)$; $C^k(X,Y)$ — пространство k раз непрерывно дифференцируемых функций из X в Y.

Будем отождествлять систему

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \quad (A,B) \in C(\mathbb{R}, \mathbb{M}(n)) \times C(\mathbb{R}, \mathbb{M}(n,m))$$

с функцией $t \to S(t) \doteq (A(t), B(t)) \in \mathbb{M}(n, n+m)$, ее задающей. В качестве допустимых управлений системы S берутся ограниченные измеримые функции $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$. Допустимым решением

[1]Работа поддержана Конкурсным центром фундаментального естествознания (грант E 00–1.0–5).

системы S с условием $x(t_0) = x_0$ называется абсолютно непрерывная функция $x(t) = x(t, t_0, x_0)$, почти всюду на $I \doteq [t_0, t_1]$ удовлетворяющая системе S при некотором допустимом $u(\cdot)$.

Состояние x_0 системы S называется управляемым на I, если найдется допустимое решение $x(t, t_0, x_0)$ системы S, удовлетворяющее условию $x(t_1, t_0, x_0) = 0$. Все управляемые на I состояния системы S образуют линейное подпространство $L(S)$ в $\mathbb{R}^n$, называемое пространством управляемости системы S на I.

Пусть $S \in C^{n-1}(\mathbb{R}, \mathbb{M}(n, n+m))$. Построим матрицы

$$K_0(t, S) = B(t), \ldots, K_i(t, S) = A(t)K_{i-1}(t, S) - \dot{K}_{i-1}(t, S) \qquad (1)$$

и матрицу $K(t, S) \doteq \big(K_0(t, S) \ldots K_{n-1}(t, S)\big)$. Н. Н. Красовским [1, с. 148] получено следующее достаточное условие полной управляемости системы S : *если найдется момент времени* $t^* \in I$, *что* $\operatorname{rank} K(t^*, S) = n$, *то система* S *вполне управляема на* I. В работе [2] показано, что если функция $t \to S(t)$ аналитическая, то условие $\operatorname{rank} K(t^*, S) = n$ не только достаточно, но и необходимо для полной управляемости системы S. В связи с этими результатами возникает следующий вопрос: если $\operatorname{rank} K(t, S) \leqslant n - 1$ при всех $t \in I$ и функция $t \to S(t)$ не является аналитической (но имеет достаточное число производных), то при каких дополнительных условиях система S вполне управляема на I? Исследование этой задачи содержится в работах А. А. Левакова [3] и С. А. Минюка [4] (см. также монографию И. В. Гайшуна [5]). Данная работа дополняет результаты работ [1–5] и посвящена изучению условий, при которых система S вполне управляема на I либо не обладает этим свойством.

Т е о р е м а 1. *Имеет место неравенство*

$$\dim L(S) \geqslant \max_{t \in I} \operatorname{rank} K(t, S).$$

Далее, если при некотором $r \geqslant 1$

$$\operatorname{rank} K(t, S) \equiv \operatorname{rank}\big(K_0(t, S) \ldots K_{r-1}(t, S)\big) \equiv rm \leqslant n - m,$$

то $\dim L(S) = rm$.

Т е о р е м а 2. *Пусть* $b^1(t)\dots b^m(t)$ — *столбцы матрицы* $B(t)$, $q_0^i(t)=b^i(t)$, $q_k^i(t)=A(t)q_{k-1}^i(t)-\dot q_{k-1}^i(t)$, $k=2\dots n-1$. *Если для каждого* $i=1\dots m$ *и для всех* $t\in I$ *найдутся целые числа* r *и* $r_1\dots r_m$, *что* $r\leqslant n-1$, $1\leqslant r_i\leqslant r\leqslant r_1+\ldots+r_m$,

$$\operatorname{rank}(q_{n-1}^i(t)\dots q_0^i(t))\equiv\operatorname{rank}(q_{r_i-1}^i(t)\dots q_0^i(t))\equiv r_i$$

и $\operatorname{rank}K(t,S)\equiv r$, *то* $\dim L(S)=r$.

Системы $S=(A,B)$ и $S^0=(F,G)$ называются подобными, если существует матрица подобия $U(t)$, т.е. непрерывно дифференцируемая функция $t\to U(t)\in\mathbb{M}(n)$, что $\det U(t)\neq 0$ и

$$F(t)=U^{-1}(t)A(t)U(t)-U^{-1}(t)\dot U(t),\quad G(t)=U^{-1}(t)B(t),\quad t\in I.$$

Если системы S и S^0 подобны, то $L(S)=U(t_0)L(S^0)$.

Пусть $S_{1\dots p}=(A,b_1\dots b_p)$, $S_{1\dots p,i}=(A,b_1\dots b_p,b_i)$, где i – одно из чисел $p+1\dots m$, $K(t,S_{1\dots p})=(K_0(t,S_{1\dots p})\dots K_{n-1}(t,S_{1\dots p}))$, $K^r(t,S_{1\dots p})=(K_0(t,S_{1\dots p})\dots K_{r-1}(t,S_{1\dots p}))$.

Т е о р е м а 3. *Предположим, что:*
а) $\operatorname{rank}K(t,S_1)$ *не зависит от* t *и для каждого* $i=2\dots m$ *выполнено неравенство* $r_1\doteq\operatorname{rank}K(t,S_1)\leqslant\operatorname{rank}K(t,S_i)$, $t\in I$;
б) *для каждого* $p=2\dots m$ *и любого* $i\in\{p\dots m\}$ $\operatorname{rank}K(t,S_{1\dots p})$ *не зависит от* t *и* $\operatorname{rank}K(t,S_{1\dots p})\leqslant\operatorname{rank}K(t,S_{1\dots p-1,i})$, $t\in I$.
Пусть $r_p=\operatorname{rank}K(t,S_{1\dots p})-r_{p-1}-\dots-r_1$, $p=2\dots m$, (*тем самым* $0\leqslant r_i\leqslant r\doteq r_1+\dots+r_m\leqslant n$). *Тогда среди систем, подобных* S, *существует система* S^0 *вида*

$$\begin{cases}\dot y^{\,1}=P_{11}(t)y^1+P_{12}(t)y^2+\dots+P_{1,m+1}(t)y^{\,m+1}+\sum\limits_{i=1}^m d_i^1(t)u_i,\\ \qquad\dot y^{\,2}=P_{22}(t)y^2+\dots+P_{2,m+1}(t)y^{m+1}+\sum\limits_{i=2}^m d_i^2(t)u_i,\\ \qquad\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \qquad\dot y^{\,m}=P_{mm}(t)y^{\,m}+P_{m,m+1}(t)y^{\,m+1}+d_m^m(t)u_m,\\ \qquad\qquad\dot y^{\,m+1}=P_{m+1,m+1}(t)y^{\,m+1},\end{cases}$$

где $y^i \in \mathbb{R}^{r_i}$, $i = 1 \dots m$, $y^{m+1} \in \mathbb{R}^{n-r}$, *все матрицы* $P_{ii}(t)$ — *верхние треугольные и каждая система* $\dot{y}^i = P_{ii}(t)y^i + d_i^i(t)u_i$ (*рассматриваемая в* $\mathbb{R}^{r_i}$) *вполне управляема на любом отрезке, содержащемся в отрезке* I. *Тем самым размерность пространства управляемости* $L(S, I)$ *системы* S *на* I *равна* $r \doteq r_1 + \ldots + r_m$.

Т е о р е м а 4. *Пусть для всех* $t \in I$ *найдутся целые числа* r *и* $r_1 \dots r_m$, *что* $1 \leqslant r_i \leqslant r \leqslant r_1 + \ldots + r_m$, $\operatorname{rank} K(t, S_i) = r_i$ *и* $\operatorname{rank} K(t, S) \equiv r$. *Тогда* $L(S) = K(t_0, S)\mathbb{R}^{nm}$ *и* $\dim L(S) = r$.

Л е м м а 1. *Пусть* $\operatorname{rank} K(t, S) = r$, $\operatorname{rank} K(t, S_i) = r_i$ *для всех* $t \in (t_0, t_1)$, *тогда*

а) *матрица* $K(t, S)$ *имеет* r *столбцов* $k_{i_1}(t) \dots k_{i_r}(t)$, *линейно независимых в* $\mathbb{R}^n$ *для каждого* $t \in I$, *за возможным исключением не более, чем счетного числа точек* $\{\tau_1, \tau_2 \dots\}$;

б) $L(S) = \operatorname{Lin}(\ell_1(t_0) \dots \ell_r(t_0))$, *где векторы* $\ell_1(t) \dots \ell_r(t)$ *получены из* $k_{i_1}(t) \dots k_{i_r}(t)$ *в результате применения процесса ортогонализации Шмидта.*

З а м е ч а н и е 1. Если $\operatorname{rank} K(t, S) \equiv r$, $t \in I$, то равенство $L(S) = \operatorname{Lin}(\ell_1(t_0) \dots \ell_r(t_0))$ также выполнено, но в этом случае для построения пространства управляемости достаточно найти линейную оболочку векторов $k_{i_1}(t_0) \dots k_{i_r}(t_0)$.

Л е м м а 2. *Предположим, что отрезок* $I = [t_0, t_1]$ *разбит точками* $t_0 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_m < \tau_{s+1} = t_1$ *на интервалы* (τ_k, τ_{k+1}) *и для каждого из отрезков* $I_k \doteq [\tau_k, \tau_{k+1}]$ *пространство* $L(S, I_k)$ *совпадает с* $\operatorname{Lin}(\ell_1(\tau_k) \dots \ell_{r_k}(\tau_k))$. *Тогда*

$$L(S, I) = \operatorname{Lin} X(t_0, \tau_k)\big(\ell_1(\tau_k) \dots \ell_{r_k}(\tau_k)\big),$$

где $X(t_0, t)$ — *матрица Коши системы* $\dot{x} = A(t)x$, $k = 0 \dots s$.

Т е о р е м а 5. *Пусть на каждом из интервалов* (t_0, τ) *и* (τ, t_1) *для любого* $i = 1 \dots m$ *ранги* $K(t, S_i)$ *не зависят от* t.

Если $\operatorname{rank} K(t,S) = r_1$ *при всех* $t \in (t_0,\tau)$ *и* $\operatorname{rank} K(t,S) = r_2$ *при всех* $t \in (\tau,t_1)$, *то условие*

$$\operatorname{Lin}\bigl(\ell_1(\tau-0)\dots\ell_{r_1}(\tau-0), \ell_1(\tau+0)\dots\ell_{r_2}(\tau+0)\bigr) = \mathbb{R}^n$$

является необходимым и достаточным условием полной управляемости системы S *на отрезке* I.

З а м е ч а н и е 2. Из теоремы 5 очевидно следует, что если $r_1 + r_2 < n$, то $\dim L(S,I) < n$.

С л е д с т в и е 1. *Пусть отрезок* I *допускает разбиение точками* $t_0 = \tau_0 < \ldots < \tau_{s+1} = t_1$ *на конечное число интервалов* (τ_i,τ_{i+1}), *на каждом из которых* $\operatorname{rank} K(t) \equiv r_i$, $r_i \leqslant n-1$, *ранги* $K(t,S_i)$, $i = 1\dots m$ *не зависят от* t. *Если существует такая точка* $\tau_j \in \{\tau_1\dots\tau_s\}$, *что*

$$\operatorname{Lin}(\ell_1(\tau_j-0)\dots\ell_{r_j}(\tau_j-0), \ell_1(\tau_j+0)\dots\ell_{r_{j+1}}(\tau_j+0)) = \mathbb{R}^n,$$

то система S *вполне управляема на отрезке* I.

Отметим теперь, что если $\operatorname{rank} K(t,S) \equiv r_i$ на (τ_{i-1},τ_i), то для каждого фиксированного $t \in (\tau_{i-1},\tau_i)$ найдутся $n-r_i$ линейно независимых векторов $p_1(t)\dots p_{n-r_i}(t)$, $|p_j(t)| = 1$, ортогональных столбцам матрицы $K(t,S)$. Более того, $p_1(t)\dots p_{n-r_i}(t)$ можно выбрать так, что при каждом фиксированном i векторы

$$p_j(\tau_i+0) \doteq \lim_{t\to\tau_i+0} p_j(t), \quad j = 1\dots n-r_i$$

также линейно независимы (например, их можно взять ортогональными). Аналогичным свойством обладают векторы

$$p_j(\tau_i-0) \doteq \lim_{t\to\tau_i-0} p_j(t), \quad j = 1\dots n-r_i.$$

Т е о р е м а 6. *Пусть найдется* $\tau \in (t_0,t_1)$, *что на каждом из интервалов* (t_0,τ) *и* (τ,t_1) *для каждого* $i = 1\dots m$ *ранг матрицы* $K(t,S_i)$ *не зависит от* t, $\operatorname{rank} K(t) = r_1$ *при* *всех* $t \in (t_0, \tau)$ *и* $\operatorname{rank} K(t) = r_2$ *при всех* $t \in (\tau, t_1)$, $r_i \leqslant n-1$, $i = 1, 2$. *Тогда условие линейной независимости векторов*

$$p_1(\tau - 0) \dots p_{n-r_1}(\tau - 0), p_1(\tau + 0) \dots p_{n-r_2}(\tau + 0)$$

является необходимым и достаточным условием полной управляемости системы S *на отрезке* I.

С л е д с т в и е 2. *Предположим, что отрезок* I *разбит точками* $t_0 = \tau_0 < \ldots < \tau_{s+1} = t_1$ *на конечное число интервалов* (τ_i, τ_{i+1}), *на каждом из которых* $\operatorname{rank} K(t) \equiv r_i$, $r_i \leqslant \leqslant n-1$, *ранги* $K(t, S_i)$, $i = 1 \dots m$ *не зависят от* t. *Если существует точка* $\tau_j \in \{\tau_1 \dots \tau_s\}$, *что векторы*

$$p_1(\tau_j - 0) \dots p_{n-r_j}(\tau_j - 0), p_1(\tau_j + 0) \dots p_{n-r_{j+1}}(\tau_j + 0)$$

линейно независимы, то система S *вполне управляема на* I.

Приведенные здесь утверждения планируется опубликовать с полными доказательствами в журнале ґДифференциальные уравненияЄ.

Список литературы

1. Красовский Н. Н. Теория управления движением. М.: Наука, 1968. 476 с.
2. Chang A. An algebraic characterization of controllability // IEEE Trans. Aut. Control. 1965. Vol. 10, Ѓ 1. P. 112–114.
3. Леваков А. А. К управляемости линейных нестационарных систем // Дифференц. уравнения. 1987. Т. 23, Ѓ 5. С. 798–806.
4. Минюк С. А. К теории полной управляемости линейных нестационарных систем // Дифференц. уравнения. 1990. Т. 26, Ѓ 3. С. 414–420.
5. Гайшун И. В. Введение в теорию линейных нестационарных систем. Минск: Ин-т матем. НАН Беларуси, 1999. 408 с.