Известия Института математики и информатики. Ижевск. 2002. №2(25)

УДК 519.21

© **М. П. Тройников**
troynikov@udm.ru

О СРЕДНЕКВАДРАТИЧНЫХ ПОКАЗАТЕЛЯХ ЛИНЕЙНЫХ СТАЦИОНАРНЫХ СИСТЕМ ИТО

Ключевые слова: стохастические дифференциальные уравнения, показатели Ляпунова, среднеквадратичная устойчивость.

Abstract. Characteristic exponents of square mean norms are studed for the solutions of linear systems of Ito differential equations with constant coefficients. It is stated that typical system has only a one exponent.

Рассматривается линейная система дифференциальных уравнений Ито

$$\dot{x}(t) = \big(A + \sum_{r=1}^{d} \dot{w}_r(t) B_r\big) x(t), \quad t \geqslant 0, \tag{1}$$

где $x(t)$ — n-мерный вектор фазовых координат, $A, B_1 \ldots B_d$ — квадратные матрицы размера n, $\dot{w}_1(t) \ldots \dot{w}_d(t)$ — независимые стандартные белые шумы.

Среднеквадратичный показатель $\lambda_2(x) = \overline{\lim\limits_{t\to\infty}}\ \frac{1}{t} \ln(\mathbf{E}\|x(t)\|^2)^{\frac{1}{2}}$ решения $x(t)$ вычисляется по формуле $\lambda_2(x) = \frac{1}{2}\lambda(q)$ через показатель Ляпунова матрицы $q(t) = \mathbf{E}[x(t)x^\top(t)]$ вторых моментов. Динамика $q(t)$ определяется стационарным линейным дифференциальным уравнением

$$\dot{q} = 2Lq,$$

где оператор L действует в пространстве $\mathbb{S}$ симметрических матриц по правилу $Lq = \dfrac{1}{2}(Aq + qA^\top + \sum\limits_{r=1}^{d} B_r q B_r^\top)$, $q \in \mathbb{S}$.

Это уравнение порождает семейство эволюционных операторов $T_t = e^{2Lt}\colon \mathbb{S} \to \mathbb{S}$ $(t \geqslant 0)$, сохраняющих конус $\mathbb{S}^+$ неотрицательно определенных матриц.

Оказывается, что число λ — показатель Ляпунова системы (1) только в случае, когда при всех $t > 0$ число $\mu_t = e^{2\lambda t}$ является собственным значением оператора T_t, которому соответствует собственный вектор из конуса $\mathbb{S}^+$ (такие собственные векторы называются позитивными). Отсюда следует, что множество среднеквадратических показателей системы (1) состоит из собственых значений оператора L, для которых существует собственный вектор $q_\lambda \in \mathbb{S}^+$.

Теорема 1. *Пусть матрицы* $A, B_1, \dots, B_d$ *не имеют нетривиального общего инвариантного вещественного подпространства. Тогда спектр среднеквадратических показателей системы* (1) *состоит из одного значения, равного максимальному вещественному собственному значению оператора* L.

В условиях теоремы для всех решений системы (1) справедлива оценка

$$C_1 e^{2\lambda t}\mathbf{E}\|x(0)\|^2 \leqslant \mathbf{E}\|x(t)\|^2 \leqslant C_2 e^{2\lambda t}\mathbf{E}\|x(0)\|^2,$$

где положительные константы C_1 и C_2 зависят только от матриц $A, B_1, \dots, B_d$. Доказательство теоремы основано на исследовании позитивных собственных значений эволюционных операторов T_t. Таких значений найдется не более n. Следовательно, число показателей Ляпунова системы (1) не может быть более n. Если оператор $T : \mathbb{S} \to \mathbb{S}$, сохраняющий конус $\mathbb{S}^+$, имеет несколько позитивных собственных значений, то найдется собственный вектор, лежащий на границе конуса $\mathbb{S}^+$. Для операторов T_t, определяемых оператором L, существование таких собственных векторов возможно только в случае, когда семейство матриц $A, B_1, \dots, B_d$ имеет общее нетривиальное инвариантное вещественное подпространство.