Известия Института математики и информатики. Ижевск. 2002. Ґ2(25)

УДК 517.97

© **М. Г. Юсиф-заде**
imi@uni.udm.ru

ОПТИМАЛЬНАЯ СТАБИЛИЗАЦИЯ ЛИНЕЙНЫХ УПРАВЛЯЕМЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

Ключевые слова: управляемая термоядерная реакция, динамические процессы с распределенными параметрами, оптимальная стабилизация, согласованность.

Abstract. The invention of the controllable thermonuclear reaction was one of the most actual problems of the XX century. In this work even the simplest model of the optimum stabilization shows that the invention of the closed controllable dynamic system with reverse motion allows us to achieve the point in the most effective way.

В работе рассматриваются задачи оптимальной стабилизации линейных управляемых динамических процессов параболического типа, в предположении, что распределенное управление и граничные управления линейно зависят от наблюдаемых параметров. Сформулировано основное утверждение об оптимальной стабилизации, полученное с помощью второго метода Ляпунова и в результате найдены достаточные условия разрешимости задачи о стабилизации для линейных систем параболического типа. Это утверждение дополняет соответствующие результаты работ [1, 2] и отличается от этих результатов присутствием сенсорного наблюдателя (см. ниже).

Рассмотрим управляемый динамический процесс с распределенными параметрами, который в области

$$\Omega = \{0 \leqslant x \leqslant 1, \quad t_0 \leqslant t < \infty\}$$

описывается функцией $q(x,t)$, удовлетворяющей внутри области основному уравнению

$$\frac{\partial q}{\partial t} = a(x,t)\frac{\partial^2 q}{\partial x^2} + b(t)u(x,t), \quad (x,t) \in \Omega, \tag{1}$$

граничным и начальным условиям

$$q(0,t) = v_0(t), \quad q(1,t) = v_1(t), \quad t \in \mathbb{R}_+ \doteq [0,+\infty), \tag{2}$$

$$q(x,0) = \varphi(x), \quad x \in I \doteq [0,1], \tag{3}$$

где $a(x,t) \geqslant \delta > 0$ при $(x,t) \in \Omega$,

$$\lim_{x\to 0+} a(x,t) = b_0(t), \quad \lim_{x\to 1-} a(x,t) = b_1(t),$$

$b(\cdot), b_0(\cdot), b_1(\cdot) \in C(\mathbb{R}_+)$.

Будем предполагать, что $\varphi(\cdot) \in KC(I)$, где $KC(I)$ — пространство кусочно непрерывных функций на отрезке I; в качестве распределенных управлений $u(x,t)$ допускаются любые функции из $KC(\Omega)$; граничные управляющие функции $v_0(t)$ и $v_1(t)$ принадлежат $KC(\mathbb{R}_+)$.

Решение задачи (1) – (3) при фиксированных $u(x,t)$, $v_0(t)$ и $v_1(t)$ понимается в классическом смысле как элемент пространства $C(\Omega) \cap KC^{2,1}(\Omega)$, где

$$KC^{2,1}(\Omega) = \left\{ q \in C(\Omega)\colon \frac{\partial q}{\partial x} \in C(\Omega), \quad \frac{\partial q}{\partial t}, \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} \in KC(\Omega) \right\}.$$

Здесь функции $u(x,t)$, $v_0(t)$ и $v_1(t)$ могут трактоваться как управления или как заданные фиксированные функции. Если $u(x,t)$ — распределенное управление, а $v_0(t)$ и $v_1(t)$ — фиксированные функции, то задачу управления для динамического процесса (1) – (3) будем обозначать через T_u; если $v_0(t)$ и $v_1(t)$ — граничные управления, а $u(x,t)$ — заданная фиксированная функция, то будем использовать обозначение T_v; если $u(x,t)$, $v_0(t)$ и $v_1(t)$ — управляющие функции, то соответствующую задачу управления будем обозначать T_{uv}.

Под выходом динамического процесса будем понимать функцию сенсорного наблюдения

$$y(t) = c(t)q(x(t), t), \quad x(t) \in I, \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{4}$$

предоставляющую нам достоверную информацию о текущем состоянии процесса в каждый момент времени t. Здесь непрерывные функции $t \to c(t)$ и $t \to x(t)$ заданы, $c(t) > 0$, $x(t) \in [0, 1]$, и с физической точки зрения функция $t \to x(t)$ представляет пространственную координату нагреваемого стержня в момент времени t, в которой происходит замер характеристики $c(t)q(x(t), t)$, пропорциональной температуре $q(x(t), t)$ нагреваемого стержня.

Рассматриваемая здесь задача T_{uv} об оптимальной стабилизации состоит в том, чтобы найти такие управления

$$\widehat{u}(x, t) = \widehat{U}(x, t)y(t), \quad \widehat{v}_0(t) = \widehat{V}_0(t)y(t) \quad \text{и} \quad \widehat{v}_1(t) = \widehat{V}_1(t)y(t), \tag{5}$$

при которых тривиальное решение $q \equiv 0$ было бы асимптотически устойчивым и функционал $J(0, q(\cdot, \cdot))$, где

$$J(\vartheta, q(\cdot, \cdot)) = \int_{\vartheta}^{\infty} (J_1(t, q(\cdot, \cdot)) + J_2(t, u(\cdot, \cdot)) + J_3(t, v_0(t), v_1(t)))\, dt,$$

$$J_1(t, q(\cdot, \cdot)) = \int_0^1 \alpha(x, t)q^2(x, t)\, dx,$$

$$J_2(t, u(\cdot, \cdot)) = \int_0^1 \beta(x, t)u^2(x, t)\, dx,$$

$$J_3(t, v_0, v_1) = \xi_{00}(t)v_0^2 + 2\xi_{01}(t)v_0v_1 + \xi_{11}(t)v_1^2,$$

принимал наименьшее возможное значение. Здесь $\alpha(x, t) \geqslant 0$, $\alpha(x, t) \not\equiv 0$, $\beta(x, t) \geqslant 0$, $\beta(x, t) \not\equiv 0$, $J_3(t, v_0, v_1) \geqslant 0$ для всех $v_0^2 + v_1^2 > 0$ и всех $t \geqslant 0$, причем $J_3(t, v_0, v_1) \not\equiv 0$, $t \geqslant 0$.

Т е о р е м а 1. *Пусть для начально-краевой задачи T_{uv} существуют функционал Ляпунова $\mathfrak{L}: \mathbb{R}_+ \times KC^{2,1}(\Omega) \to \mathbb{R}$ и*

допустимые управления (5), *удовлетворяющие следующим условиям:*
а) *функционал* $\mathfrak{L}$ *определенно положителен, т. е.* $\mathfrak{L}(t, q(\cdot,\cdot)) \geqslant 0$, *причем* $\mathfrak{L}(t, q(\cdot,\cdot)) = 0$ *лишь при* $q(x,t) \equiv 0$;
б) *справедливо равенство* $M(t, \widehat{q}(\cdot,\cdot)) = 0$, *где* $\widehat{q}(\cdot,\cdot)$ — *решение задачи* (1)–(3) *при управлениях* (5),

$$M(t, q(\cdot,\cdot)) = \frac{d\mathfrak{L}(t, q(\cdot,\cdot))}{dt}\Big|_{q=q(\cdot,\cdot)} + J(t, q(\cdot,\cdot))$$

— *полная производная функционала* $\mathfrak{L}$ *на решении*

$$q(t,x) = q(t,x,u(\cdot,\cdot),v_0(\cdot),v_1(\cdot))$$

задачи (1)–(3) *при управлениях* $u(\cdot,\cdot)$, $v_0(\cdot)$, $v_1(\cdot)$;
в) *для любых*

$$u(x,t) = U(x,t)y(t), \quad v_0(t) = V_0(t)y(t) \quad \text{и} \quad v_1(t) = V_1(t)y(t) \quad (6)$$

справедливо неравенство $M(t, q(\cdot,\cdot)) \geqslant 0$.

Тогда управления (5) *являются решением задачи* T_{uv} *об оптимальной стабилизации и имеет место равенство*

$$\mathfrak{L}(\vartheta, \widehat{q}(\cdot,\cdot)) = \inf_{U,V_0,V_1} J(\vartheta, q(\cdot,\cdot)),$$

где нижняя грань берется по всем управлениям вида (6).

Аналогичные утверждения имеют место для задач T_u и T_v.

* * *

1. Бутковский А. Г. Методы управления системами с распределенными параметрами. М.: Наука, 1975. 568 с.
2. Егоров А. И. Оптимальное управление тепловыми и диффузионными процессами. М.: Наука, 1978. 464 с.