



УДК: 531.36,531.395

MSC 2010: 70E50,70H14,70K28

О нелинейном уравнении Мейсснера

А. П. Маркеев

Изучается нелинейное уравнение движения системы типа «маятник». От классического уравнения математического маятника оно отличается наличием параметрического возмущения: соответствующая рассматриваемому уравнению потенциальная энергия «маятника» — двухступенчатая, периодическая, кусочно-постоянная функция времени. Уравнение зависит от двух параметров, характеризующих среднее значение по времени параметрического возмущения и глубину его «пульсации». Величины этих параметров произвольны. Существует два положения равновесия, отвечающих висящему и опрокинутому «маятнику». Рассматривается задача об их устойчивости. В первом приближении она приводит к необходимости анализа известного линейного уравнения Мейсснера. Проведено подробное исследование этого уравнения, дополняющее и уточняющее уже известные результаты, и решена нелинейная задача об устойчивости равновесий.

Ключевые слова: параметрические колебания, устойчивость, резонанс, отображение

1. Введение

Рассмотрим материальную систему с одной степенью свободы, движение которой описывается дифференциальным уравнением

$$\frac{d^2q}{dt^2} + (\alpha + \beta\varphi(t)) \sin q = 0, \quad (1.1)$$

где α и β — постоянные величины произвольных знаков, а $\varphi(t)$ — двухступенчатая, 2π -периодическая по t , кусочно-постоянная функция, задаваемая в пределах одного периода

Получено 16 июня 2011 года

Принято к печати 9 августа 2011 года

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (11-01-00322), Программы поддержки ведущих научных школ (НШ-3797.2010.1) и гранта Правительства РФ для государственной поддержки научных исследований, проводимых под руководством ведущих ученых в российских образовательных учреждениях ВПО (дог. № 11.G34.31.0039).

Маркеев Анатолий Павлович

markeev@ipmnet.ru

Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН

119526, Россия, г. Москва, пр. Вернадского, д. 101, корп. 1



выражением

$$\varphi(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } 0 \leq t < \pi, \\ -1, & \text{если } \pi \leq t < 2\pi. \end{cases} \quad (1.2)$$

Уравнение (1.1) описывает, например, движение маятника, представляющего собой обладающую электрическим зарядом материальную точку, прикрепленную к одному из концов невесомого твердого стержня, другой конец которого шарнирно закреплен в неподвижной точке. Движение происходит в фиксированной вертикальной плоскости, проходящей через эту неподвижную точку. Силовое поле образовано наложением однородного поля тяжести и электрического поля, вектор напряженности которого вертикален и постоянен по величине, направление же его в моменты времени, кратные π , меняется на противоположное.

Линеаризованное уравнение (1.1)

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + (\alpha + \beta\varphi(t))q = 0 \quad (1.3)$$

называется уравнением Мейсснера. Оно впервые рассматривалось в статье [1], где исследовались колебания упругих систем с переменной жесткостью (элементов конструкций электровозов со спарниками [1–3]). К рассмотрению уравнения (1.3) приводит, в частности, исследование колебаний в механических, электрических и электромеханических системах, когда изменение параметров системы происходит при помощи релейного управления [4, 5].

В статье [1] показано существование параметрического резонанса и дано графическое представление областей устойчивости и неустойчивости. Исследование Е. Мейсснера было продолжено в работах других исследователей (библиографию соответствующих публикаций 20-х годов прошлого века см. в монографии [3]; перечисление ряда более поздних работ имеется, например, в книгах [6, 7]). В статье [8] рассматривалась устойчивость стержней при различных кусочно-постоянных динамических нагрузках, в частности и при отличающихся от двухступенчатых нагрузок, рассмотренных в [1].

Наиболее полная картина областей устойчивости решения $q = 0$ уравнения Мейсснера (1.3) получена Ван дер Полем и М. Стреттом [9, 10]. Результаты их исследований неоднократно цитировались и всесторонне обсуждались в научной литературе (см., например, монографии [2, 3]).

Уравнение (1.3) легко интегрируется, причем в элементарных функциях. Вероятно, по этой причине это уравнение часто упоминается в учебной литературе [4, 11–14]. Обычно это связано с пояснением явления параметрического резонанса в линейных системах дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами.

Нелинейное уравнение Мейсснера (1.1) допускает два положения равновесия $q = 0$ и $q = \pi$. Цель статьи — решение нелинейной задачи об устойчивости этих равновесий. Попутно будет необходимо более подробно, нежели это сделано до сих пор, рассмотреть и линейное уравнение (1.3).

Заметим, что уравнение (1.1) не изменяется при одновременной замене t на $\pi + t$ и β на $-\beta$. Поэтому в плоскости параметров α, β области устойчивости и неустойчивости симметричны относительно оси $\beta = 0$ и при анализе устойчивости можно считать, что $\beta \geq 0$.

Отметим еще, что уравнение (1.1) не изменяется при одновременной замене t на $\pi + t$, q на $\pi + q$ и α на $-\alpha$. Отсюда следует, что области устойчивости (неустойчивости) равновесия $q = \pi$ получаются из областей устойчивости (неустойчивости) равновесия $q = 0$ путем их зеркального отражения относительно оси $\alpha = 0$. Поэтому в дальнейшем при построении областей устойчивости и неустойчивости можно ограничиться рассмотрением равновесия $q = 0$.



2. О способе исследования

При анализе устойчивости воспользуемся алгоритмом, разработанным в статье [15]. Положив $p = dq/dt$, уравнение (1.1) можно записать в виде двух канонических уравнений с функцией Гамильтона

$$H = \frac{1}{2}p^2 - (\alpha + \beta\varphi(t)) \cos q. \quad (2.1)$$

В окрестности положения равновесия функция H представляется сходящимся рядом по формам H_{2m} четных степеней (не зависящие от q и p слагаемые отброшены)

$$H = H_2(q, p, t) + H_4(q, t) + \dots + H_{2m}(q, t) + \dots, \quad (2.2)$$

причем

$$H_2 = \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}(\alpha + \beta\varphi(t))q^2, \quad H_4 = -\frac{1}{24}(\alpha + \beta\varphi(t))q^4. \quad (2.3)$$

Пусть q_0, p_0 — начальные значения величин q, p при $t = 0$. Функции $q = q(q_0, p_0, t), p = p(q_0, p_0, t)$, удовлетворяющие дифференциальным уравнениям движения, задают [16] каноническое унивалентное преобразование $q_0, p_0 \rightarrow q, p$ (отображение T).

Правые части уравнений движения разрывны при $t = \pi$. Функции же $q = q(q_0, p_0, t), p = p(q_0, p_0, t)$ будут непрерывны при всех t . Отображение T за период времени от $t = 0$ до $t = 2\pi$ можно представить как композицию канонического преобразования $q_0, p_0 \rightarrow q_1, p_1$ за время от $t = 0$ до $t = \pi$ (отображение $T^{(1)}$) и канонического преобразования $q_1, p_1 \rightarrow q, p$ за время от $t = \pi$ до $t = 2\pi$ (отображение $T^{(2)}$).

Пусть $x_{ij}^{(k)}(t)$ — элементы матриц фундаментальных решений линейризованных уравнений движения, удовлетворяющие начальным условиям $x_{ij}^{(k)}(0) = \delta_{ij}$ ($\delta_{ij} = 1$, если $i = j$, и $\delta_{ij} = 0$, если $i \neq j$). Верхний индекс k соответствует отображению $T^{(k)}$ ($k = 1, 2$).

Введем обозначение

$$S_4^{(k)}(q_{k-1}, p_{k-1}) = - \int_0^\pi H_4(x_{11}^{(k)}(t) q_{k-1} + x_{12}^{(k)}(t) p_{k-1}, t) dt \quad (k = 1, 2). \quad (2.4)$$

Согласно [15], отображения $T^{(1)}$ и $T^{(2)}$ задаются, соответственно, равенствами

$$\begin{pmatrix} q_1 \\ p_1 \end{pmatrix} = \mathbf{X}^{(1)} \begin{pmatrix} q_0 - \frac{\partial S_4^{(1)}}{\partial p_0} + \dots \\ p_0 + \frac{\partial S_4^{(1)}}{\partial q_0} + \dots \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

и

$$\begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} = \mathbf{X}^{(2)} \begin{pmatrix} q_1 - \frac{\partial S_4^{(2)}}{\partial p_1} + \dots \\ p_1 + \frac{\partial S_4^{(2)}}{\partial q_1} + \dots \end{pmatrix}. \quad (2.6)$$

В правых частях равенств (2.5) и (2.6) $\mathbf{X}^{(k)}$ ($k = 1, 2$) — матрицы, образованные элементами $x_{ij}^{(k)}(t)$, вычисленными при $t = \pi$, а многоточиями обозначены совокупности членов выше третьей степени относительно q_0, p_0 и q_1, p_1 соответственно.

Отображение T сохраняет площадь и имеет неподвижную точку $q_0 = 0, p_0 = 0$. Задача об устойчивости равновесия $q = 0$ системы, описываемой уравнением (1.1), эквивалентна задаче об устойчивости неподвижной точки $q_0 = 0, p_0 = 0$ отображения T . Подставив в (2.6) выражения q_1, p_1 из (2.5), получим следующую запись отображения T :

$$\begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} = \mathbf{X} \begin{pmatrix} q_0 - \frac{\partial S_4}{\partial p_0} + \dots \\ p_0 + \frac{\partial S_4}{\partial q_0} + \dots \end{pmatrix}, \quad (2.7)$$

где

$$S_4(q_0, p_0) = S_4^{(1)}(q_0, p_0) + S_4^{(2)}(x_{11}^{(1)}(\pi)q_0 + x_{12}^{(1)}(\pi)p_0, x_{21}^{(1)}(\pi)q_0 + x_{22}^{(1)}(\pi)p_0), \quad (2.8)$$

а многочленами обозначены совокупности слагаемых выше третьей степени относительно q_0, p_0 . Через \mathbf{X} в (2.7) обозначено произведение матриц $\mathbf{X}^{(2)}\mathbf{X}^{(1)}$. Ее элементы в дальнейшем обозначаем через x_{ij} без указания значения аргумента $t = \pi$.

Характеристическое уравнение матрицы \mathbf{X} записывается в виде

$$\varrho^2 - 2a\varrho + 1 = 0, \quad (2a = x_{11} + x_{22}). \quad (2.9)$$

Корни этого уравнения (мультипликаторы) зависят от параметров задачи α и β .

При выполнении неравенства $|a| > 1$ оба мультипликатора вещественны, причем один из них имеет модуль, больший единицы. В этом случае изучаемое положение равновесия неустойчиво. И не только в линейном приближении, но и в строгой нелинейной постановке задачи [17].

При $|a| \leq 1$ мультипликаторы ϱ могут быть записаны в виде $\varrho_{1,2} = \exp(\pm i2\pi\lambda)$, где λ — вещественное число, причем

$$\cos 2\pi\lambda = a. \quad (2.10)$$

Если для некоторого натурального числа k справедливо равенство $\varrho^k = 1$, то говорят, что имеет место резонанс порядка k .

Если $|a| < 1$, то мультипликаторы $\varrho_{1,2}$ — различные комплексно-сопряженные числа, модули которых равны единице. В этом случае имеет место устойчивость в первом (линейном) приближении. Случай $|a| = 1$ отвечает границам областей устойчивости и неустойчивости в пространстве параметров задачи. Здесь реализуется резонанс первого (когда $a = 1, \varrho_1 = \varrho_2 = 1, \lambda$ — целое число) или второго (когда $a = -1, \varrho_1 = \varrho_2 = -1, \lambda$ — полуцелое число) порядков. При этом, в зависимости от свойств матрицы \mathbf{X} , равновесие может быть устойчивым или неустойчивым в линейном приближении. Отметим, что в последних двух случаях, когда $|a| \leq 1$, строгое решение задачи об устойчивости требует рассмотрения нелинейного отображения (2.7).

3. Явные выражения для матриц $\mathbf{X}^{(k)}$ и форм $S_4^{(k)}$ ($k = 1, 2$)

Содержащаяся в (2.3) функция $\varphi(t)$ кусочно-постоянна. Поэтому для нужных при получении отображения (2.7) матриц $\mathbf{X}^{(k)}$ и форм $S_4^{(k)}$ несложно найти явные выражения.

Множество $G = \{-\infty < \alpha < \infty, \beta \geq 0\}$ рассматриваемых значений параметров α, β разбивается на три области G_1, G_2 и G_3 (см. рис. 1):

$$\begin{aligned} G_1 &= \{\alpha + \beta \geq 0, \alpha - \beta \geq 0, \beta \geq 0\}, & G_2 &= \{\alpha + \beta \geq 0, \alpha - \beta \leq 0, \beta \geq 0\}, \\ G_3 &= \{\alpha + \beta \leq 0, \alpha - \beta \leq 0, \beta \geq 0\}. \end{aligned} \quad (3.1)$$



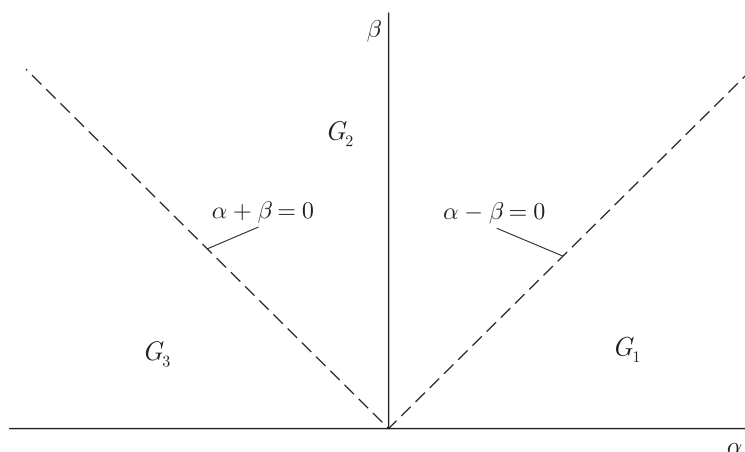


Рис. 1. Области G_1, G_2 и G_3 значений параметров α, β .

Положим

$$x_1 = \pi\sqrt{\alpha + \beta}, \quad x_2 = \pi\sqrt{\alpha - \beta}, \quad y_1 = \pi\sqrt{-\alpha - \beta}, \quad y_2 = \pi\sqrt{\beta - \alpha}. \quad (3.2)$$

В области G_1 имеем:

$$\mathbf{X}^{(k)} = \begin{vmatrix} \cos x_k & \frac{\pi}{x_k} \sin x_k \\ -\frac{x_k}{\pi} \sin x_k & \cos x_k \end{vmatrix} \quad (k = 1, 2), \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned} S_4^{(k)}(q_{k-1}, p_{k-1}) &= \frac{x_k}{768\pi}(\sin 4x_k + 8 \sin 2x_k + 12x_k)q_{k-1}^4 - \\ &- \frac{1}{192}(\cos 4x_k + 4 \cos 2x_k - 5)q_{k-1}^3 p_{k-1} - \frac{\pi}{128x_k}(\sin 4x_k - 4x_k)q_{k-1}^2 p_{k-1}^2 + \\ &+ \frac{\pi^2}{192x_k^2}(\cos 4x_k - 4 \cos 2x_k + 3)q_{k-1} p_{k-1}^3 + \frac{\pi^3}{768x_k^3}(\sin 4x_k - 8 \sin 2x_k + 12x_k)p_{k-1}^4. \end{aligned} \quad (3.4)$$

В области G_2 матрица $\mathbf{X}^{(1)}$ и функция $S_4^{(1)}(q_0, p_0)$ вычисляются по формулам (3.2)–(3.4), а

$$\mathbf{X}^{(2)} = \begin{vmatrix} \operatorname{ch} y_2 & \frac{\pi}{y_2} \operatorname{sh} y_2 \\ \frac{y_2}{\pi} \operatorname{sh} y_2 & \operatorname{ch} y_2 \end{vmatrix}, \quad (3.5)$$

$$\begin{aligned} S_4^{(2)}(q_1, p_1) &= -\frac{y_2}{768\pi}(\operatorname{sh} 4y_2 + 8 \operatorname{sh} 2y_2 + 12y_2)q_1^4 - \\ &- \frac{1}{192}(\operatorname{ch} 4y_2 + 4 \operatorname{ch} 2y_2 - 5)q_1^3 p_1 - \frac{\pi}{128y_2}(\operatorname{sh} 4y_2 - 4y_2)q_1^2 p_1^2 - \\ &- \frac{\pi^2}{192y_2^2}(\operatorname{ch} 4y_2 - 4 \operatorname{ch} 2y_2 + 3)q_1 p_1^3 - \frac{\pi^3}{768y_2^3}(\operatorname{sh} 4y_2 - 8 \operatorname{sh} 2y_2 + 12y_2)p_1^4. \end{aligned} \quad (3.6)$$

В области G_3 матрица $\mathbf{X}^{(2)}$ вычисляется по формуле (3.5), а

$$\mathbf{X}^{(1)} = \begin{vmatrix} \operatorname{ch} y_1 & \frac{\pi}{y_1} \operatorname{sh} y_1 \\ \frac{y_1}{\pi} \operatorname{sh} y_1 & \operatorname{ch} y_1 \end{vmatrix}. \quad (3.7)$$

Выражения для форм $S_4^{(k)}$ ($k = 1, 2$) в области g_3 не выписываем, так как они в дальнейшем не потребуются.

4. Анализ линейной задачи об устойчивости

Из (3.1)–(3.7) можно найти явные выражения для величины a , входящей в характеристическое уравнение (2.9). Получаем

в области G_1

$$a = \cos x_1 \cos x_2 - \frac{1}{2} \left(\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} \right) \sin x_1 \sin x_2, \quad (4.1)$$

в области G_2

$$a = \cos x_1 \operatorname{ch} y_2 - \frac{1}{2} \left(\frac{x_1}{y_2} - \frac{y_2}{x_1} \right) \sin x_1 \operatorname{sh} y_2, \quad (4.2)$$

в области G_3

$$a = \operatorname{ch} y_1 \operatorname{ch} y_2 + \frac{1}{2} \left(\frac{y_1}{y_2} + \frac{y_2}{y_1} \right) \operatorname{sh} y_1 \operatorname{sh} y_2. \quad (4.3)$$

В других обозначениях выражения (4.1)–(4.3) для величины a неоднократно выписывались в научной и учебной литературе [1–14].

Неустойчивость равновесия для значений параметров из области G_3 . В области G_3 изучаемое равновесие неустойчиво. Этот вывод следует из рассмотрения линейного приближения, так как величина (4.3) в этой области превосходит единицу. Исключение составляет точка $\alpha = \beta = 0$, в которой $a = 1$, но в этой точке уравнение (1.1) переходит в уравнение $d^2q/dt^2 = 0$ и неустойчивость равновесия $q = 0$ очевидна.

Об устойчивости в первом приближении в областях G_1 и G_2 . Из соотношений (3.2) и (4.1), (4.2) следуют явные выражения для величины a через исходные параметры задачи α, β . Это позволяет довольно просто получить разбиение областей G_1 и G_2 на области неустойчивости и устойчивости в первом приближении. Множества этих областей счетны. Общая их картина представлена на рисунке 2 для $-4.5 < \alpha < 19.5, 0 < \beta < 24$. На рисунке 3 приведен увеличенный фрагмент, отвечающий более узкой области изменения параметров: $-3 \leq \alpha \leq 3, 0 \leq \beta \leq 6$.

Области устойчивости на рисунках 2 и 3 заштрихованы. В этих областях и на их границах $|a| \leq 1$. В незаштрихованных областях $|a| > 1$. Для значений α и β из этих областей изучаемое равновесие неустойчиво (не только в первом приближении, но и в силу полных нелинейных уравнений возмущенного движения). Опишем более подробно области устойчивости и неустойчивости и их границы.

Случай малых значений β . Из (3.2), (4.1) следует, что в предельном случае $\beta = 0$

$$a = \cos 2\pi\sqrt{\alpha}. \quad (4.4)$$



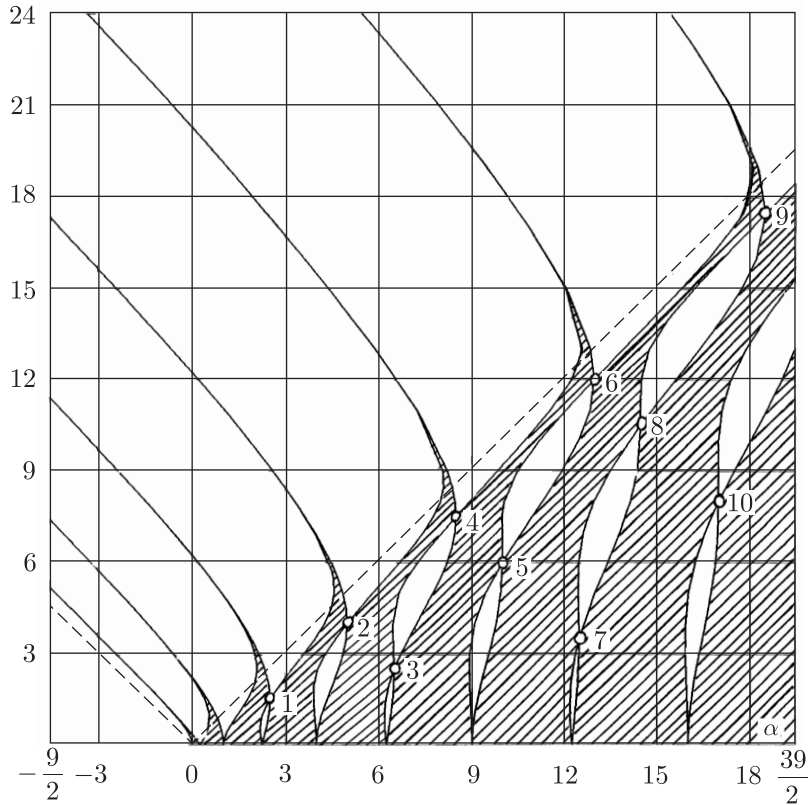


Рис. 2. Общий вид областей устойчивости и неустойчивости.

Отсюда и из равенства $|a| = 1$ получаем, что в плоскости α, β кривые, являющиеся границами областей устойчивости и неустойчивости, исходят из точек $(\alpha_s, 0)$ оси $\beta = 0$, в которых

$$\alpha_s = \frac{s^2}{4} \quad (s = 0, 1, 2, \dots). \tag{4.5}$$

На границах, исходящих из точек $(\alpha_s, 0)$, при нечетном s имеем $a = -1$ (резонанс второго порядка), на граничных кривых, отвечающих четным s , $a = 1$ (резонанс первого порядка).

Область устойчивости, переходящую при $\beta \rightarrow 0$ в интервал $s^2/4 < \alpha < (s + 1)^2/4$ оси $\beta = 0$, обозначим через $g_s (s = 0, 1, 2, \dots)$. На рисунке 2 показаны фрагменты первых девяти таких областей. Внутри областей устойчивости выполняется неравенство $|a| < 1$.

Левая граница γ_0 области g_0 исходит из точки $(0, 0)$ и при малых значениях β задается уравнением

$$\gamma_0: \alpha = -\frac{\pi^2}{12}\beta^2 + \frac{\pi^6}{1512}\beta^4 - \frac{107\pi^{10}}{9979200}\beta^6 + \frac{26711\pi^{14}}{122594472000}\beta^8 + O(\beta^{10}). \tag{4.6}$$

Первый член ряда (4.6) получен в статье [9].

Участки границ областей неустойчивости, исходящих из точек $(\alpha_s, 0)$ ($s = 1, 2, \dots$) оси $\beta = 0$, обозначим в области малых значений β через γ'_s, γ''_s . При нечетном s они задаются



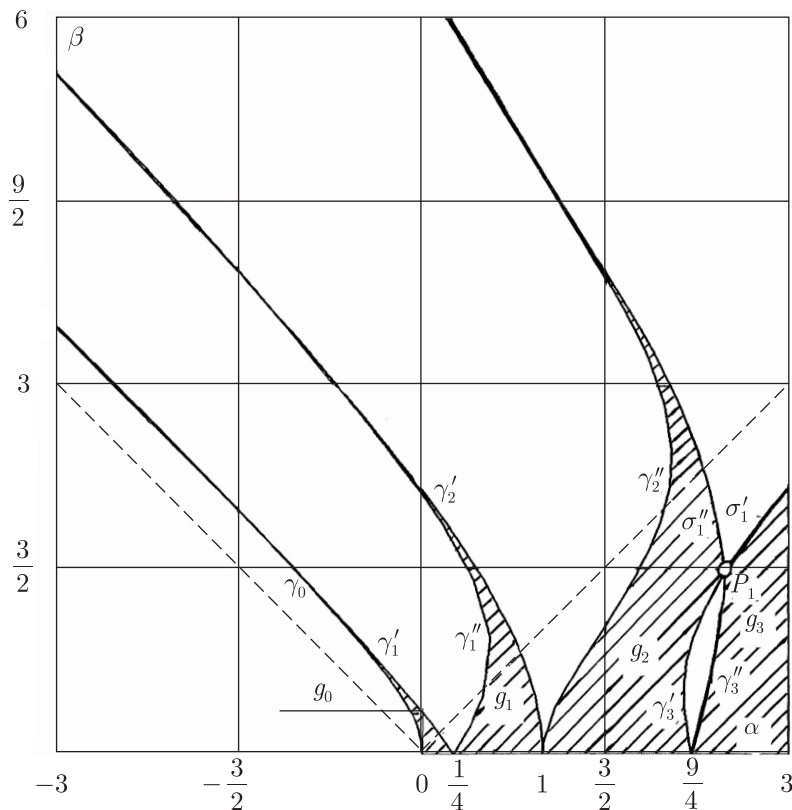


Рис. 3. Фрагмент рис. 2.

уравнениями

$$\alpha = \frac{s^2}{4} \mp \frac{2}{s\pi}\beta + \frac{s^2\pi^2 - 12}{s^4\pi^2}\beta^2 \pm \frac{3s^4\pi^4 + 20s^2\pi^2 - 480}{3s^7\pi^3}\beta^3 + \frac{4(15s^4\pi^4 + 56s^2\pi^2 - 2016)}{3s^{10}\pi^4}\beta^4 + O(\beta^5). \quad (4.7)$$

Здесь верхний знак соответствует кривой γ'_s , а нижний — кривой γ''_s .

При четном s ($s \neq 0$) границы областей неустойчивости при малых β таковы:

$$\gamma'_s: \alpha = \frac{s^2}{4} - \frac{1}{s^2}\beta^2 + \frac{s^2\pi^2 - 36}{3s^6}\beta^4 - \frac{s^4\pi^4 - 400s^2\pi^2 + 14400}{60s^{10}}\beta^6 + \frac{s^6\pi^6 - 2184s^4\pi^4 + 456960s^2\pi^2 - 14676480}{2520s^{14}}\beta^8 + O(\beta^{10}), \quad (4.8)$$

$$\gamma''_s: \alpha = \frac{s^2}{4} + \frac{3}{s^2}\beta^2 - \frac{s^2\pi^2 + 84}{3s^6}\beta^4 + \frac{s^4\pi^4 + 720s^2\pi^2 + 31680}{60s^{10}}\beta^6 - \frac{s^6\pi^6 + 5880s^4\pi^4 + 1048320s^2\pi^2 + 31449600}{2520s^{14}}\beta^8 + O(\beta^{10}). \quad (4.9)$$

Разложения (4.7)–(4.9) с точностью до вторых степеней β включительно получены ранее [13].



Отметим, что при нечетном s граничные кривые γ'_s и γ''_s мало отличаются от отрезков прямых, пересекающихся в точке $(\alpha_s, 0)$. А если s четно, то они мало отличаются от участков парабол, соприкасающихся в точке $(\alpha_s, 0)$.

Двойные точки границ областей устойчивости и неустойчивости. Границы областей параметрического резонанса, исходящие из точки $(\alpha_s, 0)$, при увеличении β могут пересечься в одной или нескольких точках. Это приводит к своеобразному «перекручиванию» областей неустойчивости (см. рис. 2).

Анализ показывает, что в области G_2 двойных точек нет. Все они лежат внутри области G_1 , причем их множество счетно. На граничных кривых, исходящих из точек $(0, 0)$, $(1/4, 0)$ и $(1, 0)$, двойных точек нет.

Координаты двойных точек $P_i(\alpha_0, \beta_0)$ ($i = 1, 2, 3, \dots$) находятся из первых двух равенств (3.2) и систем уравнений

$$a(x_1, x_2) = \pm 1, \quad \frac{\partial a(x_1, x_2)}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial a(x_1, x_2)}{\partial x_2} = 0, \quad (4.10)$$

где функция $a(x_1, x_2)$ определена равенством (4.1). Верхний и нижний знаки в (4.10) берутся в случае четного и нечетного s соответственно.

Анализ уравнений (4.10) показал, что координаты α_0, β_0 двойных точек задаются равенствами

$$\alpha_0 - \beta_0 = m^2, \quad \alpha_0 + \beta_0 = \begin{cases} (m + 2n - 1)^2, & \text{если } a = -1 \text{ (} s \text{ нечетно),} \\ (m + 2n)^2, & \text{если } a = 1 \text{ (} s \text{ четно),} \end{cases} \quad (4.11)$$

где m, n — натуральные числа.

В область изменения параметров α, β , показанную на рисунке 2, попадают десять двойных точек:

$$P_1(5/2, 3/2), \quad P_2(5, 4), \quad P_3(13/2, 5/2), \quad P_4(17/2, 15/2), \quad P_5(10, 6),$$

$$P_6(13, 12), \quad P_7(25/2, 7/2), \quad P_8(29/2, 21/2), \quad P_9(37/2, 35/2), \quad P_{10}(17, 8).$$

На рисунке 2 эти точки обозначены числами $1, 2, \dots, 10$. В области параметров, представленной на рисунке 3, существует одна двойная точка P_1 .

Вычисления показывают, что вблизи двойной точки $P_i(\alpha_0, \beta_0)$ уравнения границ σ'_i, σ''_i областей неустойчивости задаются разложениями:

$$\sigma'_i: \alpha = \alpha_0 + \frac{\beta_0}{\alpha_0}(\beta - \beta_0) + \frac{3(\alpha_0^2 - \beta_0^2)}{4\alpha_0^3}(\beta - \beta_0)^2 + O((\beta - \beta_0)^3), \quad (4.12)$$

$$\sigma''_i: \alpha = \alpha_0 - \frac{\alpha_0}{4(\alpha_0^2 - \beta_0^2)}(\beta - \beta_0)^2 + O((\beta - \beta_0)^3). \quad (4.13)$$

В малой окрестности двойной точки $P_i(\alpha_0, \beta_0)$ кривая σ'_i мало отличается от отрезка прямой, проходящей через эту точку и составляющей угол $\text{arctg}(\beta_0/\alpha_0)$ с горизонтальной осью; кривая же σ''_i представляет собой участок параболы, лежащей слева от точки $P_i(\alpha_0, \beta_0)$ и имеющей в этой точке вертикальную касательную (для иллюстрации см. окрестность точки P_1 на рис. 3).

Об интервалах устойчивости в частных случаях $\alpha = \beta$ и $\alpha = 0$. Области устойчивости g_s ($s = 0, 1, 2, \dots$) являются односвязными и, начинаясь на оси $\beta = 0$,



они, при увеличении β , нигде не оканчиваются внутри областей G_1 и G_2 . При больших значениях β области устойчивости становятся очень узкими, а их границы асимптотически стремятся к кривым, для которых тангенс угла наклона касательной к горизонтальной оси равен -1 .

Каждая из областей g_s по одному разу пересекается прямой $\alpha = \beta$, разделяющей области G_1 и G_2 , и по одному разу — вертикальной прямой $\alpha = 0$. Опишем соответствующие интервалы устойчивости на этих прямых.

Из соотношений (3.2) и (4.1), (4.2) следует, что при $\alpha = \beta$ величина a задается равенством

$$a = \cos 2x - x \sin 2x, \quad (4.14)$$

где

$$x = \frac{\pi\sqrt{2\alpha}}{2}. \quad (4.15)$$

Прямая $\alpha = \beta$ высекает из области устойчивости g_s интервалы устойчивости

$$\alpha_s^{(l)} < \alpha < \alpha_s^{(r)} \quad (s = 0, 1, 2 \dots), \quad (4.16)$$

где $\alpha_s^{(l)} = s^2/2$, а $\alpha_s^{(r)}$ — ближайший к $\alpha_s^{(l)}$ и превосходящий его по величине корень уравнения $x \operatorname{tg} x = 1$ (где x задается соотношением (4.15)) в случае четного s и уравнения $\operatorname{tg} x = -x$ в случае нечетного s .

Показанные на рисунке 2 первые семь интервалов устойчивости на прямой $\alpha = \beta$ таковы:

$$(0, 0.15), \quad \left(\frac{1}{2}, 0.834\right), \quad (2, 2.378), \quad \left(\frac{9}{2}, 4.8917\right), \quad (8, 8.3973), \quad \left(\frac{25}{2}, 12.9\right), \quad (18, 18.4016).$$

Из (4.14), (4.15) следует, что при $s \rightarrow \infty$ ширина интервалов устойчивости стремится к своей предельной величине, равной $4/\pi^2$.

На прямой $\alpha = 0$ имеем

$$a = \operatorname{ch}(\pi\sqrt{\beta}) \cos(\pi\sqrt{\beta}). \quad (4.17)$$

Интервалы устойчивости на этой прямой задаются неравенствами

$$\beta_s^{(l)} < \beta < \beta_s^{(r)} \quad (s = 0, 1, 2 \dots). \quad (4.18)$$

Интервал с номером s содержит внутри себя точку $(0, (2s+1)^2/4)$, в которой $a = 0$. Левая граница интервала (4.18) $\beta_s^{(l)}$ — корень уравнения $a = 1$ при четном s и уравнения $a = -1$ при s нечетном. А правая граница $\beta_s^{(r)}$, наоборот, — корень уравнения $a = 1$ при s нечетном и уравнения $a = -1$ при s четном.

Первые пять интервалов устойчивости на прямой $\alpha = 0$ имеют вид

$$(0, 0.3562), \quad (2.2326, 2.2669), \quad (6.2488, 6.2512), \quad (12.2499, 12.25), \quad (20.2499, 20.25).$$

При увеличении s ширина интервалов устойчивости уменьшается. При достаточно больших s она экспоненциально мала и близка к величине

$$\frac{8 \exp(-\pi/2)}{\pi} \exp(-\pi s).$$

Линейная нормализация отображения (2.7). Из (3.3) и (3.5) получаем выражения для элементов матрицы \mathbf{X} линеаризованного отображения (2.7).



В области G_1 :

$$\begin{aligned} x_{11} &= \cos x_1 \cos x_2 - \frac{x_1}{x_2} \sin x_1 \sin x_2, & x_{12} &= \frac{\pi}{x_1} \sin x_1 \cos x_2 + \frac{\pi}{x_2} \cos x_1 \sin x_2, \\ x_{21} &= -\frac{x_1}{\pi} \sin x_1 \cos x_2 - \frac{x_2}{\pi} \cos x_1 \sin x_2, & x_{22} &= \cos x_1 \cos x_2 - \frac{x_2}{x_1} \sin x_1 \sin x_2. \end{aligned} \quad (4.19)$$

В области G_2 :

$$\begin{aligned} x_{11} &= \cos x_1 \operatorname{ch} y_2 - \frac{x_1}{y_2} \sin x_1 \operatorname{sh} y_2, & x_{12} &= \frac{\pi}{x_1} \sin x_1 \operatorname{ch} y_2 + \frac{\pi}{y_2} \cos x_1 \operatorname{sh} y_2, \\ x_{21} &= -\frac{x_1}{\pi} \sin x_1 \operatorname{ch} y_2 + \frac{y_2}{\pi} \cos x_1 \operatorname{sh} y_2, & x_{22} &= \cos x_1 \operatorname{ch} y_2 + \frac{y_2}{x_1} \sin x_1 \operatorname{sh} y_2. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Сделаем в отображении (2.7) линейную замену переменных

$$q = n_{11}Q + n_{12}P, \quad p = n_{21}Q + n_{22}P \quad (d = n_{11}n_{22} - n_{12}n_{21} \neq 0), \quad (4.21)$$

приводящую матрицу линеаризованного отображения к вещественной нормальной форме \mathbf{J} .

Замена (4.21) является каноническим преобразованием с валентностью c , равной d^{-1} . В новых переменных отображение сохраняет площадь и может быть записано в виде, аналогичном (2.7):

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} Q \\ P \end{pmatrix} &= \mathbf{J} \begin{pmatrix} Q_0 - \frac{\partial F_4}{\partial P_0} + \dots \\ P_0 + \frac{\partial F_4}{\partial Q_0} + \dots \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (4.22)$$

где многоточиями обозначены совокупности членов выше третьей степени относительно Q_0, P_0 , а F_4 — форма четвертой степени относительно Q_0, P_0 :

$$F_4(Q_0, P_0) = cS_4(n_{11}Q_0 + n_{12}P_0, n_{21}Q_0 + n_{22}P_0) \equiv \sum_{\nu+\mu=4} f_{\nu\mu}Q_0^\nu P_0^\mu. \quad (4.23)$$

Целесообразно рассмотреть несколько случаев.

1. Пусть параметры α и β лежат внутри какой-либо из областей g_s ($s = 0, 1, 2, \dots$) устойчивости в первом приближении. В этом случае $|a| < 1$ и нормальная форма линеаризованного отображения задает поворот на угол $2\pi\lambda$:

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \cos 2\pi\lambda & \sin 2\pi\lambda \\ -\sin 2\pi\lambda & \cos 2\pi\lambda \end{pmatrix}. \quad (4.24)$$

Величина λ определяется из уравнения (2.10) с учетом того, что она непрерывна по β и при $\beta = 0$ равна $\sqrt{\alpha}$ (см. уравнение (1.3) при $\beta = 0$):

$$\lambda = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \arccos a + \frac{s}{2}, & \text{если } s = 0, 2, 4, \dots, \\ -\frac{1}{2\pi} \arccos a + \frac{s+1}{2}, & \text{если } s = 1, 3, 5, \dots \end{cases} \quad (4.25)$$

В замене переменных (4.21) можно положить

$$n_{11} = -\sqrt{\frac{|x_{12}|}{|\sin 2\pi\lambda|}}, \quad n_{12} = 0, \quad n_{21} = \frac{x_{11} - x_{22}}{2x_{12}} \sqrt{\frac{|x_{12}|}{|\sin 2\pi\lambda|}}, \quad n_{22} = -\sqrt{\frac{|\sin 2\pi\lambda|}{|x_{12}|}}. \quad (4.26)$$

Отметим, что величины x_{12} и $\sin 2\pi\lambda$ внутри области устойчивости не могут обратиться в нуль [18].

2. Теперь рассмотрим преобразование (4.21) и матрицу \mathbf{J} для значений параметров α, β , принадлежащих границам областей устойчивости и неустойчивости, где $a = -1$ или 1 . Попутно получим выводы об устойчивости в линейном приближении для границ всех этих областей.

2.1. Рассмотрим сначала двойные точки $P_i(\alpha_0, \beta_0)$ ($i = 1, 2, 3, \dots$). Из (4.11), (3.2), (4.19) следует, что в двойных точках преобразование (4.21) является тождественным, так как в них матрица \mathbf{X} уже имеет нормальную форму. В двойных точках кривых $a = -1$ имеем

$$\mathbf{X} = \mathbf{J} = \left\| \begin{array}{cc} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{array} \right\|, \quad (4.27)$$

а в двойных точках кривых $a = 1$

$$\mathbf{X} = \mathbf{J} = \left\| \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \right\|. \quad (4.28)$$

Так как матрицы (4.27) и (4.28) диагональные, то изучаемое положение равновесия при значениях параметров α_0, β_0 , отвечающих любой из двойных точек $P_i(\alpha_0, \beta_0)$ ($i = 1, 2, 3, \dots$), устойчиво в первом (линейном) приближении.

2.2. Для значений параметров α и β , принадлежащих границам $a = \pm 1$, имеем $x_{11} + x_{22} = \pm 2$. Кроме того, всегда выполняется равенство $x_{11}x_{22} - x_{12}x_{21} = 1$ (условие симплектичности матрицы \mathbf{X} в сохраняющем площадь отображении (2.7)). Поэтому если на границах $a = \pm 1$ произведение $x_{12}x_{21}$ внедиагональных элементов матрицы \mathbf{X} равно нулю, то $x_{11} = x_{22} = \pm 1$. Отсюда и из выражений (4.19), (4.20) для элементов матрицы \mathbf{X} можно получить, что в области G_2 равенство $x_{12}x_{21} = 0$ невозможно, а в области G_1 оно реализуется только в рассмотренных выше двойных точках $P_i(\alpha_0, \beta_0)$ ($i = 1, 2, 3, \dots$).

Вне двойных точек на граничных кривых $a = -1$ можно, следуя [15], положить

$$n_{11} = x_{12}, \quad n_{12} = 0, \quad n_{21} = -1 - x_{11}, \quad n_{22} = 1. \quad (4.29)$$

Матрица \mathbf{J} в преобразованном отображении (4.22) имеет вид жордановой клетки

$$\mathbf{J} = \left\| \begin{array}{cc} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{array} \right\|. \quad (4.30)$$

На границах $a = 1$ можно положить

$$n_{11} = x_{12}, \quad n_{12} = 0, \quad n_{21} = 1 - x_{11}, \quad n_{22} = 1, \quad (4.31)$$

и матрица \mathbf{J} в (4.22) будет иметь вид такой жордановой клетки

$$\mathbf{J} = \left\| \begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{array} \right\|. \quad (4.32)$$



Из (4.30) и (4.32) следует, что для значений параметров α, β , лежащих на границах областей устойчивости $a = \pm 1$, рассматриваемое равновесие неустойчиво в первом приближении. Исключения составляют только двойные точки $P_i(\alpha_0, \beta_0)$ ($i = 1, 2, 3, \dots$), в которых, как показано выше, имеет место устойчивость в первом приближении.

5. Результаты нелинейного исследования

При $|a| \leq 1$ для строгого решения задачи об устойчивости необходим нелинейный анализ.

Задача об устойчивости исследуемого равновесия эквивалентна задаче об устойчивости неподвижной точки $Q_0 = 0, P_0 = 0$ отображения (4.22), получаемого из отображения (2.7) в результате его линейной нормализации. Условия устойчивости и неустойчивости можно, следуя [15], выразить через коэффициенты $f_{\nu\mu}$ формы четвертой степени (4.23). Эти коэффициенты вычисляются по формулам (2.8), (3.2)–(3.6), (4.25), (4.26) и (4.29), (4.31).

Случай, когда параметры α, β лежат внутри областей g_s ($s = 0, 1, 2, \dots$) устойчивости в первом приближении. Здесь надо различать резонансные и нерезонансные значения параметров. Поскольку в правой части равенства (4.22) члены второй степени относительно Q_0, P_0 отсутствуют, резонанс третьего порядка оказался несущественным. В каждой из областей g_s есть один из резонансов четвертого порядка, для которого $4\lambda = 2s + 1$ ($s = 0, 1, 2, \dots$); величина λ вычисляется по формулам (3.2), (4.1), (4.2), (4.25). При малых β кривые резонансов четвертого порядка задаются уравнениями

$$\alpha = \frac{(2s+1)^2}{16} + \frac{4}{(2s+1)^2} \left[1 - \frac{4(-1)^s}{\pi(2s+1)} \right] \beta^2 + O(\beta^4).$$

На рисунках 2 и 3 кривые резонансов четвертого порядка не изображены.

Введем обозначения

$$k = 8(3f_{40} + f_{22} + 3f_{04}), \quad k_1 = -8(f_{40} - f_{22} + f_{04}), \quad k_2 = 8(f_{13} - f_{31}). \quad (5.1)$$

Если параметры α, β лежат внутри области устойчивости в первом приближении и не попадают на кривые резонансов четвертого порядка, то при выполнении неравенства

$$k \neq 0 \quad (5.2)$$

положение равновесия устойчиво [15].

Если же параметры α, β принадлежат резонансной кривой четвертого порядка, то достаточным условием устойчивости является выполнение неравенства

$$k^2 - k_1^2 - k_2^2 > 0. \quad (5.3)$$

Случай малых значений β . Если $\beta \ll 1$, то величины (5.1) можно получить в виде разложений по степеням β :

$$k = 2\pi + O(\beta^2),$$

$$k_1 = \frac{128}{(2s+1)^5} [(2s+1)\pi - 4(-1)^s] \beta^2 + O(\beta^4), \quad k_2 = -\frac{32(-1)^s}{(2s+1)^3} \beta + O(\beta^3).$$

Из этих разложений видно, что внутри областей g_s устойчивости в первом приближении при достаточно малых β условия (5.2), (5.3) выполнены и, следовательно, изучаемое равновесие устойчиво.

С л у ч а й $\alpha = \beta$. На прямой $\alpha = \beta$ внутри каждого из интервалов (4.16) устойчивости в первом приближении существует одна точка, в которой реализуется резонанс четвертого порядка. Резонансные значения α — корни уравнения $a(\alpha) = 0$, где функция $a(\alpha)$ определяется соотношениями (4.14), (4.15).

Для величины k из (5.1) можно получить следующее выражение:

$$k = \frac{\pi}{32} \frac{[4x(2 + \cos 4x) + 13 \sin 2x \cos 2x]^2 + \sin^2 2x(23 + 41 \sin^2 2x)^2}{(2 + \cos 4x) \sin 2x[(1 - x^2) \sin 2x + 2x \cos 2x]},$$

где x выражается через α посредством равенства (4.15). Числитель этого выражения обращается в нуль только при $\alpha = 0$, поэтому в каждом из интервалов (4.16) для всех нерезонансных значений α выполнено условие устойчивости (5.2).

В резонансных точках интервалов (4.16) имеем

$$k = -\frac{\pi}{4} \frac{\cos^4 2x + \cos^2 2x - 8}{\sin^2 2x}, \quad k_1 = \frac{\pi}{12} \frac{(\sin^4 2x - 4 \cos^2 2x)(6 - \sin^2 2x \cos^2 2x)}{\sin^2 2x(1 + \cos^2 2x)^2},$$

$$k_2 = -\frac{\pi \sigma}{3} \frac{\cos 2x(\cos^4 2x - \cos^2 2x + 6)}{(1 + \cos^2 2x)^2}, \quad \sigma = \text{sign}(\sin 2x),$$

и левая часть выражения (5.3) получается такой:

$$k^2 - k_1^2 - k_2^2 = \frac{\pi^2}{36} \frac{(5 + \cos^2 2x)(3 - \cos^2 2x)(9 - 2 \cos^4 2x - \cos^2 2x)}{\sin^4 2x}.$$

Ясно, что правая часть этого равенства положительна и условие устойчивости (5.3) при всех резонансах четвертого порядка выполнено.

Численная проверка условий устойчивости (5.2), (5.3) проводилась для диапазона изменения параметров α и β , соответствующего рисунку 2. Оказалось, что всюду в областях g_s ($s = 0, 1, 2, \dots$) устойчивости в первом приближении условия (5.2), (5.3) выполнены и, следовательно, изучаемое положение равновесия является устойчивым и в строгой нелинейной постановке задачи.

Случай, когда параметры α, β лежат на границах областей g_s ($s = 0, 1, 2, \dots$). Сначала приведем результаты аналитического исследования в нескольких отличающихся один от другого частных случаях граничных значений параметров.

Двойные точки. В двойных точках $P_i(\alpha_0, \beta_0)$ ($i = 1, 2, 3, \dots$) матрица \mathbf{X} в отображении (2.7) задается равенством (4.27) (когда $a = -1$) или равенством (4.28) (когда $a = 1$), а функция S_4 , как показывают вычисления по формулам (2.8), (3.2)–(3.4), (4.11), будет такой:

$$S_4(q_0, p_0) = \frac{\pi}{32} (\alpha_0 q_0^4 + 2q_0^2 p_0^2 + \frac{\alpha_0}{\alpha_0^2 - \beta_0^2} p_0^4).$$

Ввиду знакоопределенности функции $S_4(q_0, p_0)$ уравнение $S_4(\sin \psi, \cos \psi) = 0$ не имеет вещественных корней. Согласно [15], отсюда следует, что во всех двойных точках исследуемое равновесие устойчиво по Ляпунову.

Малые значения β . Если значения параметров α и β принадлежат границам областей g_s ($s = 0, 1, 2, \dots$) и не равны их значениям α_0 и β_0 , отвечающим двойным точкам, то для строгого решения вопроса об устойчивости достаточно выяснить знак коэффициента f_{40} формы (4.23). Если

$$f_{40} < 0, \tag{5.4}$$



то положение равновесия устойчиво по Ляпунову. При обратном знаке в неравенстве (5.4) имеет место неустойчивость [15].

Вычисления показывают, что на границе γ_0 области g_0 (см. рис. 3), задаваемой при малых β уравнением (4.6), выражение для коэффициента f_{40} можно представить в виде

$$f_{40} = \frac{\pi^6}{6}\beta^2 + O(\beta^4). \quad (5.5)$$

При достаточно малых β величина f_{40} положительна и, следовательно, имеет место неустойчивость.

Выпишем выражения для f_{40} на левых и правых границах γ'_s и γ''_s областей неустойчивости, исходящих (см. рис. 2 и 3) из точек $(s^2/4, 0)$ оси $\beta = 0$ и задаваемых при малых β уравнениями (4.7) (в случае нечетного s) и уравнениями (4.8), (4.9) (в случае четного s). Если s — нечетное число, то

$$f_{40} = \pm \frac{16\pi}{s^7}\beta^3 + O(\beta^4), \quad (5.6)$$

где верхний знак отвечает границе γ'_s , а нижний — границе γ''_s . Если же s — четное число, то на границе γ'_s имеем

$$f_{40} = -\frac{32\pi^4}{s^{10}}\beta^6 + O(\beta^7), \quad (5.7)$$

а на границе γ''_s —

$$f_{40} = \frac{8\pi^6}{s^{12}}\beta^8 + O(\beta^9). \quad (5.8)$$

Из (5.6)–(5.8) следует, что, если s нечетно, то при достаточно малых β на левых границах γ'_s имеет место неустойчивость, а на правых границах γ''_s — устойчивость. Если же s четно, то, наоборот, на левых границах γ'_s будет устойчивость, а на правых границах γ''_s — неустойчивость.

Границы областей устойчивости и неустойчивости в окрестности двойных точек P_i ($i = 1, 2, 3, \dots$). На границах σ'_i , задаваемых уравнениями (4.12),

$$f_{40} = \mp \frac{\pi^6 \beta_0^3}{512 \alpha_0^4 (\alpha_0^2 - \beta_0^2)} (\beta - \beta_0)^5 + O((\beta - \beta_0)^6), \quad (5.9)$$

а на границах σ''_i , задаваемых уравнениями (4.13),

$$f_{40} = \pm \frac{\pi^4 \alpha_0 \beta_0^3}{32 (\alpha_0^2 - \beta_0^2)^3} (\beta - \beta_0)^3 + O((\beta - \beta_0)^4). \quad (5.10)$$

В (5.9), (5.10) верхний знак соответствует случаям, когда двойная точка $P_i(\alpha_0, \beta_0)$ лежит на пересечении границ области неустойчивости, исходящей из точки $(s^2/4, 0)$ оси $\beta = 0$ при s нечетном, а нижний — при s четном. В первом случае имеем резонанс второго порядка ($2\lambda = s, a = -1$), а во втором — резонанс первого порядка ($\lambda = s/2, a = 1$).

Из (5.9), (5.10) и сформулированных выше условий устойчивости и неустойчивости следует, что если s нечетно, то в достаточной близости к точке $P_i(\alpha_0, \beta_0)$ на кривой σ'_i при $\beta > \beta_0$ будет устойчивость, а при $\beta < \beta_0$ — неустойчивость; на кривой σ''_i при $\beta > \beta_0$ будет неустойчивость, а при $\beta < \beta_0$ — устойчивость.

Если же s — четное число, то картина «зеркально симметричная»: на кривой σ_i' при $\beta > \beta_0$ будет неустойчивость, а при $\beta < \beta_0$ — устойчивость; на кривой σ_i'' при $\beta > \beta_0$ будет устойчивость, при $\beta < \beta_0$ — неустойчивость.

Граничные точки интервалов (4.16). В точках $\alpha_s^{(l)}$ имеем

$$f_{40} = \mp \frac{\pi^4 \alpha}{32}, \quad (5.11)$$

а в точках $\alpha_s^{(r)}$

$$f_{40} = \mp \frac{\pi^2 x^4 (3x^4 + 11x^2 + 6)}{48(1 + x^2)^3}. \quad (5.12)$$

В (5.11) и (5.12) верхний знак берется, когда число s нечетно, а нижний — когда s четно. В (5.12) величина x выражается через α при помощи равенства (4.15).

Из (5.11), (5.12) видно, что при нечетном s в обеих граничных точках интервалов (4.16) выполняется условие (5.4) и, следовательно, здесь изучаемое равновесие устойчиво. Если же s четно, то в граничных точках имеет место неустойчивость.

Для произвольных точек (α, β) , лежащих на границах областей устойчивости g_s ($s = 0, 1, 2, \dots$) и не совпадающих ни с одной из двойных точек $P_i(\alpha_0, \beta_0)$ ($i = 1, 2, 3, \dots$), условие устойчивости (5.4) проверялось численно. Оказалось, что на обеих (правой и левой) границах областей g_s имеет место неустойчивость, если s четно, и устойчивость, если s нечетно.

6. Заключение

Кратко сформулируем результаты проведенного анализа (для иллюстрации см. рис. 2 и 3).

При любых значениях параметров α, β , лежащих внутри или на границах областей g_s , положение равновесия $q = 0$ системы, описываемой уравнением (1.1), устойчиво по Ляпунову, если номер s области g_s — нечетное число.

Если s — четное число, то устойчивость имеет место для значений параметров α, β , лежащих внутри областей g_s . На границах же областей равновесие неустойчиво; исключения составляют только двойные точки P_i ($i = 1, 2, 3, \dots$), в которых имеет место устойчивость по Ляпунову.

Список литературы

- [1] Meissner E. Ueber Schüttelerscheinungen in Systemen mit periodisch veränderlicher Elastizität // Schweizerische Bauzeitung, 1918, b. 72, no. 11, s. 95–98.
- [2] Ден-Гартог Дж. П. Механические колебания. М.: Физматлит, 1960. 580 с.
- [3] Тимошенко С. П. Колебания в инженерном деле. М.: Физматлит, 1967. 444 с.
- [4] Пановко Я. Г. Введение в теорию механических колебаний. М.: Физматлит, 1971. 240 с.
- [5] Чечурин С. Л. Параметрические колебания и устойчивость периодического движения. Л.: ЛГУ, 1983. 219 с.
- [6] Болотин В. В. Динамическая устойчивость упругих систем. М.: Гостехиздат, 1956. 600 с.
- [7] Вибрации в технике: В 6 тт.: Т. 1: Колебания линейных систем: Справочник / В. В. Болотин (ред.). 2-е изд., испр. и доп. М.: Машиностроение, 1999. 504 с.



- [8] Макушин В. М. Динамическая устойчивость деформированного состояния упругих стержней // Тр. МВТУ им. Баумана, 1947, разд. 3, с. 1–83.
- [9] Van der Pol B., Strutt M. J. O. On the stability of solutions of Mathieu's equation // Philos. Mag., 1928, Ser. 7, vol. 5, pp. 18–38.
- [10] Стретт М. Д. О. Функции Ляме, Матье и родственные им в физике и технике. Харьков–Киев: Гос. изд-во Украины, 1935. 238 с.
- [11] Стрелков С. П. Введение в теорию колебаний. М.: Физматлит, 1964. 437 с.
- [12] Обморшев А. Н. Введение в теорию колебаний. М.: Физматлит, 1965. 276 с.
- [13] Арнольд В. И. Математические методы классической механики. М.: Физматлит, 1974. 431 с.
- [14] Голубев Ю. Ф. Теоретическая механика. М.: МГУ, 2000. 719 с.
- [15] Маркеев А. П. Об одном способе исследования устойчивости положений равновесия гамильтоновых систем // Изв. РАН. МТТ, 2004, № 6, с. 3–12.
- [16] Маркеев А. П. Теоретическая механика. М.–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2007. 592 с.
- [17] Малкин И. Г. Теория устойчивости движения. М.: Наука, 1966. 530 с.
- [18] Маркеев А. П. Линейные гамильтоновы системы и некоторые задачи об устойчивости движения спутника относительно центра масс. М.–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2009. 396 с.

On nonlinear Meissner's equation

Anatoly P. Markeev

A. Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, Russian Academy of Sciences
pr. Vernadskogo 101-1, Moscow, 119526, Russia
markeev@ipmnet.ru

A nonlinear equation of motion for a pendulum-type system is investigated. It differs from the classical equation of a mathematical pendulum in the presence of a parametric disturbance. The potential energy of the «pendulum» is a two-stage periodic step function of time. The equation depends on two parameters that characterize the time-averaged value of a parametric disturbance and the depth of its «ripple». These parameters can take on arbitrary values. There exist two equilibrium configurations corresponding to the hanging and inverse «pendulum». The problem of stability of these equilibria is considered. In the first approximation it necessitates an analysis of the well-known linear Meissner equation. A detailed investigation of this equation is carried out supplementing and specifying the known results. The nonlinear problem of stability of equilibria is solved.

MSC 2010: 70E50, 70H14, 70K28

Keywords: parametric oscillations, stability, resonance, mapping

Received June 16, 2011, accepted August 9, 2011

Citation: *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2011, vol. 7, no. 3, pp. 531–547 (Russian)