Нелинейная динамика. 2011. Т. 7. № 3. С. 577–599.
Полнотекстовая версия в свободном доступе
http://nd.ics.org.ru

УДК: 532.5
MSC 2010: 37J60, 37J35, 53D17, 70E18, 70F25, 70H45

Деформации канонической скобки Пуассона для неголономных систем Чаплыгина и Борисова – Мамаева – Фёдорова при нулевой константе площадей. I

А. В. Цыганов

Рассматриваются неголономные системы Чаплыгина и Борисова – Мамаева – Фёдорова в частном случае, когда фазовое пространство эквивалентно кокасательному расслоению к двумерной сфере. Соответствующие пуассоновы структуры определяются L-тензорами на сфере с ненулевым кручением, что является обобщением известной конструкции деформаций канонических скобок Пуассона в теории Эйзенхарта – Бененти – Туриэля.

Ключевые слова: неголономная механика, шар Чаплыгина, скобки Пуассона

1. Введение

Следуя [1], рассмотрим динамически несимметричное уравновешенное твердое тело со сферической поверхностью, которое катится без проскальзывания по поверхности второй неподвижной сферы радиуса a. В подвижной системе координат, связанной с главными осями шара, угловой момент шара относительно точки касания имеет вид

$$M = (\mathbf{I} + d\mathbf{E})\omega - d(\gamma, \omega)\gamma, \quad d = mb^2. \tag{1.1}$$

Получено 26 апреля 2011 года
После доработки 29 сентября 2011 года

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (11-01-00354), программы «Государственная поддержка ведущих научных школ» (НШ-3797.2010.1) и гранта Правительства РФ для государственной поддержки научных исследований, проводимых под руководством ведущих ученых в российских образовательных учреждениях ВПО (дог. № 11.G34.31.0039).

Цыганов Андрей Владимирович
andrey.tsiganov@gmail.com
Санкт-Петербургский государственный университет
199034, Россия, г. Санкт-Петербург, Университетская наб., 7-9

Здесь ω — вектор угловой скорости, m — масса, $\mathbf{I} = \mathrm{diag}(I_1, I_2, I_3)$ — тензор инерции и b — радиус подвижной сферы, $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ — единичный вектор нормали к сфере в точке контакта, а $\mathbf{E}$ — единичная матрица. Скобки $(\,.\,,\,.\,)$ обозначают обычное скалярное произведение трехмерных векторов.

Отношение (1.1) можно переписать следующим образом:

$$\omega = \Big(\mathbf{A} + d\,\mathrm{g}(\gamma)\,\mathbf{A}\,\big(\gamma\otimes\gamma\big)\,\mathbf{A}\Big)M = \mathbf{A}_g\,M, \tag{1.2}$$

где

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0\\ 0 & a_2 & 0\\ 0 & 0 & a_3\end{pmatrix} = (\mathbf{I} + d\mathbf{E})^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{I_1+d} & 0 & 0\\ 0 & \dfrac{1}{I_2+d} & 0\\ 0 & 0 & \dfrac{1}{I_3+d}\end{pmatrix}, \tag{1.3}$$

и

$$\mathrm{g}(\gamma) = \frac{1}{1 - d(\gamma, \mathbf{A}\gamma)}.$$

Уравнения движения зависят от отношения радиусов сфер $\kappa = a/(a+b)$

$$\dot{M} = M\times\omega, \quad \dot{\gamma} = \kappa\gamma\times\omega, \tag{1.4}$$

где $\times$ обозначает векторное произведение. При любом κ уравнения движения (1.4) обладают интегралами движения

$$H_1 = (M,\omega), \quad H_2 = (M,M), \quad C_1 = (\gamma,\gamma) \tag{1.5}$$

и инвариантной мерой

$$\mu = \sqrt{g(\gamma)}\,\mathrm{d}\gamma\,\mathrm{d}M. \tag{1.6}$$

Если $\kappa = \pm 1$, то существует еще один интеграл движения

$$C_2 = (\gamma, \mathbf{B}M), \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_1 & 0 & 0\\ 0 & b_2 & 0\\ 0 & 0 & b_3\end{pmatrix} = \mathrm{tr}\,\mathbf{A}^{-1} + (\kappa - 1)\mathbf{A}^{-1}. \tag{1.7}$$

При $\kappa = 1$ мы получаем систему Чаплыгина [7], описывающую качение без проскальзывания динамически несимметричного уравновешенного шара по неподвижной горизонтальной плоскости. Для данной системы в работах [2, 4] построена пуассонова структура, приводящая уравнения движения к конформно-гамильтоновой форме.

При $\kappa = -1$ интегрируемость уравнений движения была доказана в работе [1], а явные квадратуры предъявлены в [5]. Данную систему мы и будем называть системой Борисова–Мамаева–Фёдорова или, для краткости, БМФ-системой, так как в работе [1] были найдены интегралы движения, а в [5] построены переменные разделения, квадратуры, проведен качественный и бифуркационный анализ данной системы.

При $d = 0$ и $\kappa = \pm 1$ уравнения движения (1.4) описывают волчок Эйлера и его модификации [1, 4, 5], которые являются гамильтоновыми интегрируемыми системами с известными скобками Пуассона.

При $(\gamma,\gamma)=1$, используя соотношение (1.1)

$$M=\mathbf{I}\omega-d\gamma\times(\gamma\times\omega), \tag{1.8}$$

интегралы движения можно переписать в следующем виде:

$$\begin{aligned} H_1&=(M,\omega)=(\omega,\mathbf{J}\omega)+d(\gamma,\omega)^2,\\ H_2&=(M,M)=(\mathbf{J}\omega,\mathbf{J}\omega)+2d(\mathbf{J}\omega,\gamma)(\gamma,\omega)+d^2(\gamma,\omega)^2, \end{aligned} \tag{1.9}$$

где $\mathbf{J}=\mathbf{A}^{-1}$. Интегралы движения (1.9) отличаются от формулы (2.4) из работы [5], так же как и знак перед d в определении M (1.8).

Все основные результаты работ [3–5] были получены с помощью так называемой процедуры гамильтонизации по Чаплыгину, которая состоит из следующей последовательности преобразований:

1. перейти от исходных шести уравнений движения (1.4) к двум уравнениям движения на двумерном конфигурационном пространстве (сфере Пуассона), используя сфероконические координаты u,v;
2. с помощью замены времени привести эти два уравнения на конфигурационном пространстве к гамильтоновым уравнениям;
3. изменив координаты u,v на u',v', переписать полученные после замены времени уравнения на конфигурационном пространстве в форме Лагранжа;
4. используя уравнения Лагранжа, ввести дополнительные лагранжевы переменные p'_u и p'_v и, тем самым, получить новую гамильтонову систему на новом фазовом пространстве;
5. изучить свойства полученной новой системы и попытаться перенести полученную информацию на исходную неголономную систему.

Нисколько не умаляя достоинств данного метода, заметим, что, даже для гамильтоновых интегрируемых систем, замены времени общего вида подчас полностью меняют все геометрические характеристики системы, такие как инвариантная мера, лагранжево расслоение, пуассонова структура, переменные разделения, уравнение Лакса, классическая r-матрица и т. д. (см., например, [10, 12, 14] и ссылки в этих работах). Для неголономных систем подобные явные и неявные изменения инвариантных характеристик динамических систем подробно обсуждаются в работе [9].

Поэтому нашей первой целью в данной работе является воспроизведение полученных ранее в [3–5] координат разделения при помощи совершенно другого метода вычислений. Тем самым мы докажем, что в процессе гамильтонизации по Чаплыгину используются «хорошие» в некотором смысле преобразования времени. Второй нашей целью является изучение структур бивекторов Пуассона, связанных с неголономными системами, в частности получение деформаций конструкции Туриэля [19], которые никогда ранее не встречались при изучении гамильтоновых систем.

Именно по этой причине для данной нам системы уравнений (1.4) мы предлагаем отказаться от замены времени и, вместо этого, решать уравнения

$$PdC_{1,2}=0,\quad (PdH_1,dH_2)\equiv\{H_1,H_2\}=0,\quad [P,P]=0, \tag{1.10}$$

где $[.\,,.]$ — скобка Схоутена, относительно неизвестного нам бивектора Пуассона P.

Система уравнений (1.10) даже при $C_2 = 0$ имеет бесконечно много решений [13, 17]. Таким образом, для того чтобы конструктивно получить хоть одно решение, мы будем вынуждены отказаться от инвариантности и искусственно сузить пространство поиска решений.

1.1. Сферические координаты

Для того чтобы сузить пространство поиска, мы воспользуемся концепцией бивекторов Пуассона натурального вида на римановых многообразиях [17]. Для этого мы перейдем от исходного фазового пространства к кокасательному расслоению к единичной сфере Пуассона.

Уравнения (1.4) инвариантны к преобразованию $\gamma \to a\gamma$. Это позволяет нам использовать сферу Пуассона единичного радиуса в качестве конфигурационного пространства и, тем самым, избежать решения первых двух уравнений $P\,dC_{1,2} = 0$ системы (1.10), используя немного измененные переменные Эйлера

$$\begin{aligned}
\gamma_1 &= \sin\phi\sin\theta, \qquad & M_1 &= \frac{1}{b_1}\left(\frac{\sin\phi}{\sin\theta}\big(\cos\theta\,p_\phi + p_\psi\big) - \cos\phi\,p_\theta\right),\\
\gamma_2 &= \cos\phi\sin\theta, \qquad & M_2 &= \frac{1}{b_2}\left(\frac{\cos\phi}{\sin\theta}\big(\cos\theta\,p_\phi + p_\psi\big) + \sin\phi\,p_\theta\right),\\
\gamma_3 &= \cos\theta, \qquad & M_3 &= -\frac{p_\phi}{b_3},
\end{aligned} \tag{1.11}$$

так что

$$C_1 = (\gamma, \gamma) = 1, \quad C_2 = (\gamma, \mathbf{B}M) = p_\psi.$$

Оставшиеся в системе (1.10) уравнения по-прежнему имеют бесконечно много решений [13]. Для того чтобы найти хоть одно частное решение, мы положим

$$C_2 = (\gamma, \mathbf{B}M) = p_\psi = 0. \tag{1.12}$$

В этом случае интегралы движения $H_{1,2}$ (1.5) являются функциями натурального вида, и поэтому мы можем воспользоваться концепцией бивекторов Пуассона натурального вида [17].

Если $\kappa = 1$, то координаты (ϕ, θ) в (1.11) являются обычными сферическими координатами на поверхности единичной сферы S^2, так как в этом случае можно положить

$$\kappa = 1, \quad b_1 = b_2 = b_3 = \operatorname{tr}\mathbf{A}^{-1} = 1.$$

При $\kappa = -1$ мы будем использовать параметры b_k вместо I_k, J_k и a_k для того, чтобы получить более менее компактные выражения. Например,

$$\kappa = -1, \quad a_1 = \frac{2}{b_2 + b_3}, \quad a_2 = \frac{2}{b_1 + b_3}, \quad a_3 = \frac{2}{b_1 + b_2}.$$

После замены координат (1.11), при $\kappa = \pm 1$ мы получаем две динамические системы на общем четырехмерном фазовом пространстве $\mathcal{M}$, которое топологически эквивалентно кокасательному расслоению T^*S^2 к единичной сфере. Для того чтобы проиллюстрировать разницу между системой Чаплыгина и БМФ-системой, мы выпишем по одному уравнению движения

$$\kappa = 1, \qquad \dot\theta = \frac{(a_1-a_2)\sin 2\phi}{2}\left(\frac{\cos\theta}{\sin\theta} - \frac{\mathrm{g}(a_3 - a_1\sin^2\phi - a_2\cos^2\phi)\sin 2\theta}{2}\right)p_\phi -$$
$$- \left(\frac{\mathrm{g}(a_1-a_2)^2\sin^2 2\phi\sin^2\theta}{4} + a_1\cos^2\phi + a_2\sin^2\phi\right)p_\theta,$$

$$\kappa = 1, \qquad \dot\theta = \frac{1}{b_1b_2(b_1+b_3)(b_2+b_3)}\left[\left(\frac{b_3(b_1-b_2)\sin 2\phi\cos\theta}{\sin\theta} - \right.\right.$$
$$\left. - \frac{\mathrm{g}(b_1-b_2)\big(b_3(b_1^2\cos^2\phi + b_2^2\sin^2\phi) - b_1^2b_2^2\big)\sin 2\phi\sin 2\theta}{b_3(b_1+b_2)(b_1+b_3)(b_2+b_3)}\right)p_\phi +$$
$$\left. + \left(2\big(b_3(b_1\sin^2\phi + b_2\cos^2\phi) + b_1b_2\big) - \frac{\mathrm{g}b_3(b_1-b_2)^2}{(b_1+b_3)(b_2+b_3)\sin^2 2\phi\sin^2\theta}\right)p_\theta\right]$$

и предъявим выражения для второго интеграла движения в сферических координатах:

$$\kappa = 1, \qquad H_2 = \frac{1}{\sin^2\theta}p_\phi^2 + p_\theta^2,$$

$$\kappa = -1, \qquad H_2 = \left(\frac{(b_1^2\cos^2\phi + b_2^2\sin^2\phi)\cos^2\theta}{b_1^2b_2^2\sin^2\theta} + \frac{1}{b_3^2}\right)p_\phi^2 + \frac{(b_1^2-b_2^2)\sin 2\phi\cos\theta}{b_1^2b_2^2\sin\theta}p_\phi p_\theta +$$
$$+ \frac{b_1^2\sin^2\phi + b_2^2\cos^2\phi}{b_1^2b_2^2}p_\theta^2.$$

Очевидно, что любые вычисления для БМФ-системы требуют значительно бо́льших усилий и вычислительных ресурсов по сравнению с системой Чаплыгина.

2. Инвариантные формы объема и скобки Пуассона

Рассмотрим гладкое симплектическое многообразие $\mathcal{M}$ с симплектической формой Ω, которая в терминах координат Дарбу

$$z = (q,p) = (q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n)$$

имеет стандартный вид

$$\Omega = \mathrm{d}p_1 \wedge dq_1 + \ldots \mathrm{d}p_n \wedge dq_n. \tag{2.1}$$

По теореме Лиувилля, форма объема Ω^2 инвариантна относительно любых гамильтоновых диффеоморфизмов многообразия $\mathcal{M}$.

Для любой другой инвариантной относительно гамильтоновых потоков формы объема μ на том же самом многообразии $\mathcal{M}$, мы можем найти соответствующую ей симплектическую форму Ω_μ, взяв формальный квадратный корень из μ, так как

$$\mu = \Omega_\mu^2. \tag{2.2}$$

В рассматриваемом нами случае инвариантная форма $\mu = \sqrt{\mathrm{g}}\,\lambda$ (1.6) инвариантна относительно негамильтонового потока (1.4), и поэтому мы получим различные деформации формального корня (2.2). Для описания этих деформаций нам будет удобнее работать не с симплектическими формами, а с соответствующими им бивекторами Пуассона.

Для этого мы перепишем канонический бивектор Пуассона P, отвечающий форме Ω (2.1), в следующем тензорном виде:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & L_{ij} \\ -L_{ij} & \sum\limits_{k=1}^{n} \left(\dfrac{\partial L_{ki}}{\partial q_j} - \dfrac{\partial L_{kj}}{\partial q_i} \right) p_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{Id} \\ -\mathrm{Id} & 0 \end{pmatrix}, \tag{2.3}$$

где L является единичным (1,1) тензорным полем на конфигурационном пространстве.

Мы используем это несколько непривычное определение по нескольким причинам. Например, согласно [19], любое (1,1) тензорное поле с нулевым кручением $L'(q_1, \ldots, q_n)$ на конфигурационном пространстве Q с координатами $q_1, \ldots, q_n$ задает бивектор Пуассона P' на всем фазовом пространстве $\mathcal{M}$:

$$P' = \begin{pmatrix} 0 & L'_{ij} \\ -L'_{ij} & \sum\limits_{k=1}^{n} \left(\dfrac{\partial L'_{ki}}{\partial q_j} - \dfrac{\partial L'_{kj}}{\partial q_i} \right) p_k \end{pmatrix}. \tag{2.4}$$

Соответствующие скобки Пуассона имеют вид

$$\{q_i, q_j\}' = 0, \quad \{q_i, p_j\}' = L'_{ij}, \quad \{p_i, p_j\}' = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial L'_{ki}}{\partial q_j} - \frac{\partial L'_{kj}}{\partial q_i} \right) p_k.$$

Равенство нулю кручения поля L' необходимо и достаточно для того, чтобы бивектор P' (2.4) был бивектором Пуассон, совместным с каноническим бивектором P, т. е.

$$[P, P] = [P', P] = [P', P'] = 0.$$

Напомним, что тензорное (1,1) поле A имеет нулевое кручение, если

$$T_A(X, Y) \equiv \mathcal{L}_{AX}\, AY - A\Big(\mathcal{L}_{AX}\, Y + \mathcal{L}_{AY}\, X - A\mathcal{L}_X\, Y \Big) = 0, \quad \forall X, Y$$

для всех векторных полей X, Y. Здесь $\mathcal{L}$ — производная Ли.

Одна из возможных деформаций конструкции Туриэля [19] предложена в работе [17] и связана с изучением систем со старшими по импульсам интегралами движения. Далее мы рассмотрим другие деформации данной конструкции, возникающие и для системы Чаплыгина, и для БМФ-системы.

В нашем случае $n = 2$ и в качестве переменных Дарбу на фазовом пространстве $\mathcal{M} = T^*S^2$ мы будем использовать стандартные сферические координаты (1.11):

$$q_1 = \phi, \quad q_2 = \theta, \quad p_1 = p_\phi, \quad p_2 = p_\theta. \tag{2.5}$$

Если $d = 0$ и $\kappa = \pm 1$, то мы имеет гамильтоновы системы с постоянной инвариантной мерой, так что в обоих случаях уравнения движения $H_{1,2}$ (1.5) находятся в инволюции относительно канонических скобок Пуассона

$$\{H_1, H_2\} = (PdH_1, dH_2) = 0, \quad d = 0, \quad \kappa = \pm 1,$$

где P — канонический бивектор Пуассона (2.3). Именно эти скобки мы должны получать в пределе $d \to 0$ и для системы Чаплыгина, и для БМФ-системы.

2.1. Случай $\kappa = 1$

Если $d \neq 0$ и $\kappa = 1$, то, подставляя тензорное поле с нулевым кручением

$$L_g = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{g}}}\, L = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{g}}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{2.6}$$

в определение (2.4), мы получим искомое решение наших геометрических уравнений (1.10):

$$P_g = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{g}}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ * & 0 & 0 & 1 \\ * & * & 0 & -\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial \ln \mathrm{g}}{\partial \theta} p_\phi - \dfrac{\partial \ln \mathrm{g}}{\partial \phi} p_\theta\right) \\ * & * & * & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.7}$$

Замечание 1. Это выражение для бивектора Пуассона можно связать с хорошо известным правилом преобразования модулярных векторных полей

$$X_{g\mu} = X_\mu - X_{\ln g},$$

отвечающих формам объема μ и $\nu = g\mu$ [8, 20].

Замечание 2. В пределе $d \to 0$ функция $\mathrm{g} \to 1$ стремится к единице и, тем самым, как и положено, в пределе мы получаем исходный канонический бивектор Пуассона $P_g \to P$.

В терминах исходных физических переменных (γ, M) бивектор Пуассона P_g (2.7) был получен в работе [2]. Там же можно найти следующее

Предложение 1 ([2]). *Интегралы движения $H_{1,2}$ (1.5) находятся в инволюции относительно скобок Пуассона, задаваемых бивектором Пуассона P_g,*

$$\{H_1, H_2\}_g = 0, \quad d > 0, \quad \kappa = 1.$$

Соответствующая форма объема

$$\nu = P_g^{-2} = -2\mathrm{g}\,\mathrm{d}q\mathrm{d}p$$

инвариантна относительно нового гамильтонова потока с новым временем t_g, определяемым соотношением

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t_g}\, z_k = \{H_1, z_k\}_g, \quad k = 1, \ldots, 4.$$

Старое и новое время связаны следующим образом:

$$\mathrm{d}t_g \simeq \sqrt{\mathrm{g}}\,\mathrm{d}t, \tag{2.8}$$

так как при $\kappa = 1$ исходные уравнения движения имеют вид

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\, z_k = \frac{\sqrt{\mathrm{g}}}{2}\{H_1, z_k\}_g. \tag{2.9}$$

Подобное преобразование времени (2.8) было предложено Чаплыгиным [7]. В настоящее время подобный процесс замены времени для неголономных систем часто называется гамильтонизацией (см. [2, 4, 5, 9]).

Замечание 3. Одним из наиболее важных глобальных инваринтов пуассоновых многообразий является модулярный класс. Этот инвариант описывает препятствия к существованию меры на пуассоновом многообразии $\mathcal{M}$, которая была бы инвариантна относительно всех гамильтоновых диффеоморфизмов [8, 20]. Фактически же этот класс описывает и препятствия к гамильтонизации динамических систем на пуассоновом многообразии $\mathcal{M}$.

Для пуассонова многообразия $\mathcal{M}$ с бивектором Пуассона P соответствующий модулярный класс является элементом первой группы пуассоновых когомологий. В разделе 3 мы предъявим некоторые элементы второй группы пуассоновых когомологий P', которые позволят нам найти операторы рекурсии и переменные разделения без замены времени.

2.2. Случай $\kappa = -1$

Легко проверить, что при $\kappa = -1$ интегралы движения $H_{1,2}$ (1.5) не коммутируют относительно скобок Пуассона, отвечающих бивектору P_g (2.7),

$$\{H_1, H_2\}_g \neq 0, \quad d > 0, \quad \kappa = -1,$$

несмотря на то, что инвариантная форма (1.6) не зависит от κ. Таким образом, нам придется найти другую деформацию канонических скобок Пуассона, применимую к БМФ-системе.

Попробуем решить наши уравнения

$$(PdH_1, dH_2) \equiv \{H_1, H_2\} = 0, \quad [P, P] = 0 \tag{2.10}$$

методом грубой силы, используя для решения сходную с (2.7) подстановку

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & f(\phi,\theta) & 0 \\ * & 0 & 0 & h(\phi,\theta) \\ * & * & 0 & u(\phi,\theta)\,p_\phi + v(\phi,\theta)\,p_\theta \\ * & * & * & 0 \end{pmatrix}.$$

Решая полученную таким образом переопределенную систему алгебро-дифференциальных уравнений, мы получим

Предложение 2. *При $\kappa = -1$ интегралы движения $H_{1,2}$ (1.5) находятся в инволюции относительно скобок Пуассона, задаваемых бивектором Пуассона*

$$P_\eta = \begin{pmatrix} 0 & L_{\eta ij} \\ -L_{\eta ij} & \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \left((1+\eta) \frac{\partial L_{\eta ki}}{\partial q_j} - \frac{1}{(1+\eta)} \frac{\partial L_{\eta kj}}{\partial q_i} \right) p_k \end{pmatrix}, \tag{2.11}$$

где

$$L_\eta = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{g}}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1+\eta \end{pmatrix} \tag{2.12}$$

— *тензорное поле с ненулевым, в отличие от конструкции Туриэля, кручением и*

$$\eta = \frac{2d\left(b_3^2 - (b_1+b_2)b_3 + b_1 b_2\right)\sin^2\theta}{b_3^2\left((b_1+b_2) - 2d\right)}.$$

Тензорное поле L_η можно считать дополнительной деформацией поля L_g (2.6) для системы Чаплыгина с помощью функции η, зависящей только от θ и параметров d и b_k. Очевидно, что

$$\lim_{d\to 0}\eta = 0, \quad \text{и} \quad \lim_{d\to 0} P_\eta = P.$$

Кроме этого, $\eta = 0$ для осесимметричного шара при $b_3 = b_1$ или $b_3 = b_2$. Физический смысл функции $\eta(\theta)$, равно как и геометрическая природа деформации (2.11), нам пока не известны.

Бивектор Пуассона P_η (2.11) можно представить в следующем виде

$$P_\eta = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{g}}}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ * & 0 & 0 & (1+\eta) \\ * & * & 0 & -\dfrac{1}{2}\left((1+\eta)\dfrac{\partial \ln \mathrm{g}}{\partial\theta}p_\phi - \dfrac{\partial \ln \mathrm{g}}{\partial \phi}p_\theta\right) \\ * & * & * & 0 \end{pmatrix}.$$

Соответствующая форма объема

$$\nu_\eta = P_\eta^{-2} = -\frac{2\mathrm{g}}{(1+\eta)}\,\mathrm{d}q\mathrm{d}p$$

будет более сложной деформацией исходной инвариантной формы (1.6), построенной в [21],

$$\mu = \sqrt{\mathrm{g}}\,\mathrm{d}q\,\mathrm{d}p.$$

Новая форма объема ν_η инвариантна относительно соответствующего гамильтонова потока с новым временем t_η

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t_\eta} z_k = \{H_1, z_k\}_\eta, \quad k = 1, \ldots, 4.$$

Соотношение между новым и старым временем значительно сложнее, чем в случае Чаплыгина (2.8), так как при $\kappa = -1$ исходные уравнения движения (1.4) имеют вид

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} z_k = \frac{\sqrt{\mathrm{g}}}{2}\Big(b_1 + b_2 + b_3 + w_1\Big)\{H_1, z_k\}_\eta - \sqrt{\mathrm{g}}\Big(1 + w_2\Big)\{H_2, z_k\}_\eta, \tag{2.13}$$

наиболее общий для биинтегрируемых систем [13, 17]. Здесь

$$\begin{aligned} w_1 &= \frac{\eta}{1+\eta}\,\frac{(b_1+b_2)\Big(b_3(b_1\cos^2\phi + b_2\sin^2\phi) - b_1 b_2\Big)}{(b_1-b_3)(b_2-b_3)}, \\ w_2 &= \frac{\eta}{1+\eta}\,\frac{b_3(b_1\cos^2\phi + b_2\sin^2\phi) - b_1 b_2}{(b_1-b_3)(b_2-b_3)}. \end{aligned} \tag{2.14}$$

Полученные результаты отличаются от результатов работ [4, 5], так как мы рассматриваем разные с геометрической точки зрения математические задачи, связанные нетривиальным преобразованием времени (см. дискуссию в [9]).

3. Вторые скобки Пуассона

В данном разделе мы построим другие решения P' тех же самых уравнений (1.10), (2.10), которые совместны с решениями P, полученными ранее:

$$[P, P'] = 0.$$

Совместные бивекторы Пуассона P' являются 2-коциклами в когомологии Пуассона на многообразии $\mathcal{M}$ с бивектором P, тогда как производные Ли от P вдоль векторного поля X

$$P' = \mathcal{L}_X P$$

являются 2-кограницами. Поэтому для того чтобы получить следующие частные решения уравнений (1.10), (2.10), мы будем использовать производные Ли вдоль векторных полей X специального вида с линейными по импульсам компонентами.

В общем случае уравнения движения относительно второй скобки Пуассона имеют вид

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} z_k = s_1 \{H_1, z_k\}' + s_2 \{H_2, z_k\}', \tag{3.1}$$

где $s_{1,2}$ — некоторые функции от динамических переменных.

Если $s_1 = 0$ и $s_2 = \mathrm{const}$, то система называется бигамильтоновой. Если оставить только условие $s_1 = 0$, то система называется квазибигамильтоновой. В общем случае при $s_1 \neq 0$ такие системы называют биинтегрируемыми [13, 17]. Таким образом, уравнения (2.13) для БМФ-системы являются абсолютно стандартными с точки зрения бигамильтоновой геометрии.

3.1. Случай $d = 0$ и $\kappa = 1$

Если $d = 0$ и $\kappa = 1$, то интегралы движения $H_{1,2}$ (1.5) находятся в биинволюции

$$\{H_1, H_2\} = \{H_1, H_2\}' = 0, \quad d = 0$$

относительно пары совместных скобок Пуассона, задаваемых каноническим бивектором P (2.3) и бивектором P' вида (2.4), где тензорное (1,1) поле L' с нулевым кручением имеет вид [17]

$$L' = \begin{pmatrix} a_1 \cos^2\phi + a_2 \sin^2\phi & \dfrac{(a_1 - a_2)\sin 2\phi}{2} \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta} \\ \dfrac{(a_1 - a_2)\sin 2\phi}{2} \cos\theta \sin\theta & a_3 \sin^2\theta + (a_1 \sin^2\phi + a_2 \cos^2\phi)\cos^2\theta \end{pmatrix}. \tag{3.2}$$

Данное второе решение P' (2.4) уравнений (1.10), (2.10) можно представить в виде производной Ли $P' = \mathcal{L}_Y P$ от первого решения P вдоль векторного поля $Y = \sum Y^j \partial_j$ с компонентами

$$Y^{1,2} = 0, \qquad \begin{pmatrix} Y^3 \\ Y^4 \end{pmatrix} = -\,{L'}^{\top} \begin{pmatrix} p_\phi \\ p_\theta \end{pmatrix}. \tag{3.3}$$

Здесь ${L'}^{\top}$ — транспонированная матрица L'.

Замечание 4. Соответствующая форма объема $\lambda' = P'^{-2}$ инвариантна относительно гамильтонова потока с новым временем

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t'} z_k = \{H_1, z_k\}', \quad k = 1, \ldots, 4.$$

Соответствующее преобразование времени $t \to t'$ для второй скобки Пуассона выглядит точно так же, как гамильтонизация БМФ-системы, так как исходные гамильтоновы уравнения движения относительно второй скобки имеют вид (3.1).

Собственные значения u, v оператора рекурсии $N = P'P^{-1}$ являются корнями характеристического полинома

$$B(\lambda) = (\lambda - u)(\lambda - v) = \lambda^2 - \mathrm{tr}\left(L'L^{-1}\right)\,\lambda + \frac{\det L'}{\det L} = 0. \tag{3.4}$$

Естественно, что эти собственные значения u, v являются обычными эллиптическими координатами на сфере

$$\frac{(\lambda - u)(\lambda - v)}{(\lambda - a_1)(\lambda - a_2)(\lambda - a_3)} = \frac{\gamma_1^2}{\lambda - a_1} + \frac{\gamma_2^2}{\lambda - a_2} + \frac{\gamma_3^2}{\lambda - a_3}.$$

3.2. Случай $d = 0$ и $\kappa = -1$

В случае $\kappa = -1$ интегралы движения $H_{1,2}$ (1.5) находятся в биинволюции относительно канонической скобки и скобки, отвечающей бивектору $\widehat{P}'$ вида (2.4), где поле $\widehat{L}'$ совпадает с L' после замены параметров a_i на $c_i = a_i/b_i$:

$$\widehat{L}' = \begin{pmatrix} c_1\cos^2\phi + c_2\sin^2\phi & \dfrac{(c_1 - c_2)\sin 2\phi}{2}\,\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta} \\ \dfrac{(c_1 - c_2)\sin 2\phi}{2}\cos\theta\sin\theta & c_3\sin^2\theta + (c_1\sin^2\phi + c_2\cos^2\phi)\cos^2\theta \end{pmatrix}. \tag{3.5}$$

Собственные значения оператора рекурсии $\widehat{N} = \widehat{P'}P^{-1}$ совпадают с эллиптическими координатами на сфере, определенными стандартным образом:

$$\gamma_i = \sqrt{\frac{(u - c_i)(v - c_i)}{(c_j - c_i)(c_k - c_i)}}, \quad i \neq j \neq k, \quad c_i = \frac{a_i}{b_i}. \tag{3.6}$$

Сопряженные им импульсы p_u, p_v определяются соотношением

$$M_i = \frac{1}{b_i}\,\frac{2\varepsilon_{ijk}\gamma_j\gamma_k(c_j - c_k)}{u - v}\Big((c_i - u)p_u - (c_i - v)p_v\Big), \tag{3.7}$$

где ε_{ijm} — полностью антисимметричный тензор. В терминах переменных разделения бивекторы Пуассона имеют вид

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad P' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & u & 0 \\ 0 & 0 & 0 & v \\ -u & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -v & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

а в терминах исходных переменных —

$$P=\frac{1}{b_1b_2b_3}\begin{pmatrix}0&0&0&0&b_1b_3\gamma_3&-b_1b_2\gamma_2\\ *&0&0&-b_2b_3\gamma_3&0&b_2b_1\gamma_1\\ *&*&0&b_3b_2\gamma_2&-b_3b_1\gamma_1&0\\ *&*&*&0&b_3^2\,M_3&-b_2^2\,M_2\\ *&*&*&*&0&b_1^2\,M_1\\ *&*&*&*&*&0\end{pmatrix}. \tag{3.8}$$

Конечно, любые функции $f_1(u)$ и $f_2(v)$ также являются переменными разделения, т. е. тривиальное точечное преобразование координат

$$u\to f_1(u),\quad v\to f_2(v) \tag{3.9}$$

сохраняет свойство разделимости распределения, задаваемого интегралами $H_{1,2}$. Согласно [13], с помощью таких преобразований мы можем построить бесконечное множество различных линейных по импульсам бивекторов Пуассона вида (2.4)

$$P'=\begin{pmatrix}0&0&f_1(u)&0\\ 0&0&0&f_2(v)\\ -f_1(u)&0&0&0\\ 0&-f2(v)&0&0\end{pmatrix}.$$

Естественно, что в терминах исходных переменных эти бивекторы выглядит достаточно сложно. Например, поле

$$L''=\frac{1}{\zeta}\left[\widehat{L}'+2\begin{pmatrix}\rho&0\\ 0&\rho\end{pmatrix}\right],$$

где

$$\begin{aligned}\zeta\ &=\ \cos^2\theta+\frac{b_3(b_2+b_1)\cos^4\theta}{\big(b_1b_2+b_3(b_1\sin^2\phi+b_2\cos^2\phi)\big)\sin^2\theta},\\ \rho\ &=\ \frac{\cos^2\theta}{b_1b_2+b_3(b_1\sin^2\phi+b_2\cos^2\phi)}-\frac{\cos^2\theta-\cos^{\phi}\cos^2\theta+\cos^2\phi}{b_1(b_2+b_2)}+\frac{\cos^{\phi}-\cos^2\phi\cos^2\theta-1}{b_2(b_1+b_3)},\end{aligned}$$

порождает вторую скобку Пуассона, отвечающую переменным разделения

$$\begin{aligned}f_1(u)\ &=\ -\frac{2\big(ub_1(b_2+b_3)-2\big)\big(ub_2(b_1+b_3)-2\big)}{ub_1b_2(b_1+b_3)(b_2+b_3)\big(ub_3(b_1+b_2)-2\big)},\\ f_2(v)\ &=\ -\frac{2\big(vb_1(b_2+b_3)-2\big)\big(vb_2(b_1+b_3)-2\big)}{vb_1b_2(b_1+b_3)(b_2+b_3)\big(vb_3(b_1+b_2)-2\big)}.\end{aligned}$$

Подобные точечные преобразования координат разделения изменяют не только второй бивектор $\widehat{P}'$, но и коэффициенты $s_{1,2}$ в уравнении (3.1). Естественно, что при этом некоторые геометрические характеристики динамической системы остаются инвариантными.

Предложение 3. *При $d = 0$ и $\kappa = -1$ не существует ненулевого линейного по моментам бивектора $\widehat{P}''$, совместного с каноническим, с помощью которого исходные уравнения движения (1.4) можно представить в форме (3.1) с $s_1 = 0$.*

Данное предложение можно доказать, добавив уравнения (3.1) с $s_1 = 0$ и условие совместности скобок к исходным уравнениям (1.10), (2.10). Подставляя в полученную таким образом систему линейный по моментам анзац для бивектора Пуассона, мы получим переопределенную систему уравнений, имеющую единственное нулевое решение.

Замечание 5. Согласно [1], при $d = 0$ динамические системы с $\kappa = \pm 1$ связаны друг с другом пуассоновым отображением $M \to BM$ и заменой времени

$$t \to -t.$$

Тем не менее, даже такая на первый взгляд безобидная замена знака у переменной времени приводит к потере свойства бигамильтоновости уравнений движения относительно исходных интегралов движения (см. предложение 3).

3.3. Система Чаплыгина, $\kappa = 1$

Следуя [18], на исходном шестимерном фазовом пространстве определим векторное поле $X = \sum X^j \partial_j$ с компонентами

$$X^i = 0, \quad X^{i+3} = \Big[\gamma \times \mathbf{A}_g(\gamma \times M)\Big]_i, \quad i = 1, 2, 3, \tag{3.10}$$

где $\mathbf{A}_g$ — 3×3-матрица

$$\mathbf{A}_g = \mathbf{A} + d\mathrm{g}(\gamma)\,\mathbf{A}\,\big(\gamma \otimes \gamma\big)\,\mathbf{A},$$

входящая в выражение угловой скорости (1.2) через момент M.

Предложение 4 ([18]). *Производная Ли бивектора Пуассона P_g* (2.7) *вдоль векторного поля X* (3.10) *является необходимым нам вторым решением уравнений* (1.10), (2.10)

$$P'_g = \mathcal{L}_X\, P_g, \tag{3.11}$$

так что интегралы движения $H_{1,2}$ (1.5) находятся в биинволюции

$$\{H_1, H_2\}_g = \{H_1, H_2\}'_g = 0 \tag{3.12}$$

относительно пары совместных скобок Пуассона.

На четырехмерном редуцированном пространстве данная производная выглядит немного сложнее. Используя сферические координаты, данный бивектор можно представить в виде следующей деформации конструкции Туриэля (2.4):

$$P'_g = \begin{pmatrix} 0 & L'_{g\,ij} \\ -L'_{g\,ij} & \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \left(x_{ki} \frac{\partial L'_{g\,ki}}{\partial q_j} - y_{kj} \frac{\partial L'_{g\,kj}}{\partial q_i} \right) p_k \end{pmatrix}. \tag{3.13}$$

Аналогично тензорному полю L_η (2.12) для первой скобки в случае Борисова–Мамаева–Фёдорова, второе тензорное поле в случае Чаплыгина

$$L'_g = \sqrt{\mathrm{g}}\,L' - \frac{d\sqrt{\mathrm{g}}\,\sin^2\theta}{1-da_3}\begin{pmatrix} a_1a_2 - a_3(a_1\cos^2\phi + a_2\sin^2\phi) & 0 \\ 0 & -a_3^2 + a_3(a_1\sin^2\phi + a_2\cos^2\phi)\end{pmatrix}$$

также имеет ненулевое кручение.

Явные выражения для функций x_{ki}, y_{kj}, которые зависят только от координат ϕ, θ, проще всего получить с помощью определения (3.11), которое в сферических координатах выглядит следующим образом:

$$P'_g = \mathcal{L}_Y\, P_g, \quad Y^{1,2} = 0, \quad \begin{pmatrix} Y^3 \\ Y^4 \end{pmatrix} = -\sqrt{\mathrm{g}}\,{L'_g}^{\top}\begin{pmatrix} p_\phi \\ p_\theta \end{pmatrix}. \tag{3.14}$$

Здесь ${L'_g}^{\top}$ — транспонированная матрица L'_g.

Используя полученную вторую скобку Пуассона для системы Чаплыгина, мы можем переписать исходные уравнения движения (1.4) в виде

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}z_k = \frac{(1-d\,a_3)\sqrt{\mathrm{g}}}{2}\Big(\frac{s_1}{a_3}\,\{H_1, z_k\}'_g + \{H_2, z_k\}'_g\Big), \tag{3.15}$$

где

$$s_1 = -1 - da_3 + \frac{a_3^2\sin^2\theta - (a_3(a_1+a_2) - a_1a_2)\cos^2\theta - d(da_1a_2 - a_1 - a_2)a_3^2}{da_1a_2a_3 - a_1a_2\cos^2\theta - a_3(a_1\cos^2\phi + a_2\sin^2\phi)\sin^2\theta}.$$

Собственные значения u_g, v_g оператора рекурсии $N_g = P'_gP_g^{-1}$ определяются следующим образом:

$$\frac{(\lambda - u_g)(\lambda - v_g)}{(\lambda - a_1)(\lambda - a_2)(\lambda - a_3)} = \mathrm{g}(\gamma)\,\left(\frac{\gamma_1^2(1-da_1)}{\lambda - a_1} + \frac{\gamma_2^2(1-da_2)}{\lambda - a_2} + \frac{\gamma_3^2(1-da_3)}{\lambda - a_3}\right). \tag{3.16}$$

Эти собственные значение совпадают с переменными разделения, полученными Чаплыгиным в работе [7].

Как и ранее, преобразования переменных, сохраняющие первую скобку Пуассона, т. е. канонические преобразования, изменяют вторую скобку Пуассона. Эти преобразования можно использовать для того, чтобы доказать, что система Чаплыгина является квазибигамильтоновой или конформно-гамильтоновой относительно второго интеграла движения, так как при $d = 0$ соответствующий волчок Эйлера является бигамильтоновой системой.

Действительно, определим следующее тензорное поле:

$$L''_g = \frac{1}{\zeta\sqrt{\mathrm{g}}}\left[L' + \frac{1}{1-da_3}\begin{pmatrix} \rho_1 & 0 \\ 0 & \rho_2\end{pmatrix}\right], \tag{3.17}$$

где

$$\begin{aligned}
\zeta &= da_1a_2a_3 + a_1a_2\cos^2\theta + a_3(a_1\cos^2\phi + a_2\sin^2\phi)\sin^2\theta,\\
\rho_1 &= \Big(da_3 - \sin^2\phi\cos^2\theta - \cos^2\phi\Big)a_1 + \Big(da_3 - \cos^2\phi\sin^2\theta - 1\Big)a_2 - a_3\sin^2\theta,\\
\rho_2 &= \rho_1 + d\sin^2\theta(a_1 - a_3)(a_2 - a_3).
\end{aligned}$$

Подставляя это тензорное поле в определение (3.14), мы получим бивектор Пуассона P''_g, совместный с бивектором P_g (2.7).

Предложение 5. *Для системы Чаплыгина исходные уравнения движения* (1.4) *имеют вид*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,z_k = \frac{\sqrt{\mathrm{g}}}{2}\{H_1, z_k\}_g = \frac{(1-da_3)\mathrm{g}}{2}\,\{H_2, z_k\}''_g, \tag{3.18}$$

где скобка Пуассона $\{.\,,.\}''_g$ *задается бивектором* P''_g.

Таким образом для неголономной системы Чаплыгина уравнения движения являются конформно-гамильтоновыми как относительно первой скобки $\{.\,,.\}_g$ и первого интеграла движения H_1 (2.9), так и относительно второй скобки $\{.\,,.\}''_g$ и второго интеграла движения H_2 (3.18).

3.4. БМФ-система, $\boldsymbol{\kappa = -1}$

Как и ранее, при $\kappa = -1$ существует много линейных по моментам решений уравнений (2.10), связанных друг с другом точечными преобразованиями координат, которые достаточно тривиально выглядят в терминах собственных значений оператора рекурсии $\lambda_i \to f_i(\lambda_i)$.

Предъявим одно из таких решений

$$P'_\eta = \begin{pmatrix} 0 & L'_{\eta ij} \\ -L'_{\eta ij} & \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(x_{ki}\frac{\partial L'_{\eta ki}}{\partial q_j} - y_{kj}\frac{\partial L'_{\eta kj}}{\partial q_i}\right)p_k \end{pmatrix}, \tag{3.19}$$

для которого тензорное поле L'_η имеет относительно простой вид

$$L'_\eta = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{g}}}\left[\widehat{L}' + \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & (1+\eta)\alpha + \dfrac{2\eta(b_1+b_2+b_3)}{(b_1+b_2)(b_1+b_3)(b_2+b_3)} \end{pmatrix}\right], \tag{3.20}$$

где α — произвольное число. В общем случае это поле имеет ненулевое кручение.

Как и ранее, мы не выписываем явно функции x_{ki}, y_{kj}, зависящие от переменных ϕ, θ, так как эти функции можно легко восстановить из другого определения данного бивектора $P'_\eta = \mathcal{L}_Z\,P_\eta$. В отличие от определения второго бивектора для системы Чаплыгина (3.14), при $\kappa = -1$ компоненты тензорного поля $Z = \sum Z^j\partial_j$ в этом случае имеют вид

$$Z^{1,2} = 0, \qquad \begin{pmatrix} Z^3 \\ Z^4 \end{pmatrix} = -\sqrt{\mathrm{g}}\,{L'_\eta}^{\top}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (1+\eta)^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_\phi \\ p_\theta \end{pmatrix}. \tag{3.21}$$

Легко заметить, что и для системы Чаплыгина, и для БМФ-системы компоненты векторного поля Лиувилля Z в следующем общем виде

$$Z = -\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & {L'_\sigma}^{\top}L_\sigma^{-1} \end{pmatrix} z, \quad \sigma = g, \eta,$$

где Z — вектор, составленный из компонент векторного поля, а z — вектор, составленный из координат Дарбу. Геометрическая природа этой конструкции пока не совсем понятна.

Итак, для БМФ-системы мы имеем пару совместных пуассоновых структур на многообразии $\mathcal{M}$ и, следовательно, данное многообразие является бигамильтоновым.

Предложение 6. *При $\varkappa = -1$ интегралы движения $H_{1,2}$ (1.5) находятся в бииноволюции*

$$\{H_1, H_2\}_\eta = \{H_1, H_2\}'_\eta = 0, \tag{3.22}$$

относительно совместных скобок Пуассона, отвечающих бивекторам P_η и P'_η.

Используя эти вторые скобки Пуассона, мы можем переписать исходные уравнения движения в стандартном виде (3.1) с довольно громоздкими коэффициентами $s_{1,2}$.

При $\alpha = 0$ в определении (3.20) собственные значения u_η и v_η соответствующего оператора рекурсии $N_\eta = P'_\eta P_\eta^{-1}$ удовлетворяют соотношению

$$\frac{(\lambda - u_\eta)(\lambda - v_\eta)}{(\lambda - c_1)(\lambda - c_2)(\lambda - c_3 - \delta)} = \frac{1}{\zeta(\gamma)}\left(\frac{\gamma_1^2}{\lambda - c_1} + \frac{\gamma_2^2}{\lambda - c_2} + \frac{\beta\,\gamma_3^2}{\lambda - c_3 - \delta}\right), \tag{3.23}$$

в которое входят две константы

$$\begin{aligned} \beta &= 1 - \frac{2d(b_1 - b_3)(b_2 - b_3)}{b_3(b_3 - 2d)(b_1 + b_2) + 2db_1b_2}, \\ \delta &= \frac{4d}{b_3(b_3 - 2d)(b_1 + b_2) + 2db_1b_2}\,\frac{b_1b_2(b_1 - b_3)(b_2 - b_3)}{b_3(b_1 + b_2)(b_1 + b_3)(b_2 + b_3)} \end{aligned} \tag{3.24}$$

и функция от переменной $\theta = \arccos\gamma_3$

$$\zeta(\gamma) = 1 - \frac{2d(b_1 - b_3)(b_2 - b_3)}{b_3(b_3 - 2d)(b_1 + b_2) + 2db_1b_2}\gamma_3^2.$$

При $d = 0$ данные собственные значения совпадают с эллиптическими координатами на сфере (3.6), которые являются переменными разделения для соответствующего уравнения Гамильтона – Якоби.

Предложение 7. *При $d \neq 0$ переменные разделения $\mathrm{q}_{1,2}$ из работы [5], связаны с полученными нами собственными значениями оператора рекурсии u_η и v_η (3.23) тривиальным точечным преобразованием вида (3.9).*

Действительно, если мы возьмем определение переменных разделения $\mathrm{q}_{1,2}$ из работы [5, см. формулу (3.2)] :

$$\gamma_i = \sqrt{\frac{\det\mathbf{I}}{(J_i - d)J_jJ_k\,G(\mathrm{q}_1, \mathrm{q}_2)}}\sqrt{\frac{(\mathrm{q}_1 - c_i)(\mathrm{q}_2 - c_i)}{(c_j - c_i)(c_k - c_i)}} \tag{3.25}$$

где

$$G(\mathrm{q}_1, \mathrm{q}_2) = \frac{(b_1 + b_2 - 2d)(b_1 + b_3 - 2d)(b_2 + b_3 - 2d)}{(b_1 + b_2)(b_1 + b_3)(b_2 + b_3)}\,\mathrm{g},$$

и подставим эти выражения в определение собственных значений u_η и v_η оператора рекурсии, то мы получим

$$u_\eta = F(\mathrm{q}_1), \quad v_\eta = F(\mathrm{q}_2),$$

где

$$F(\mathrm{q}) = \frac{\Big(b_3^3 + (b_1 + b_2 - 2d)b_3^2 + b_1b_2b_3 + 2db_1b_2\Big)\mathrm{q} - 4d}{(b_1 + b_3)(b_2 + b_3)\big(d(b_1b_2\mathrm{q} - 2) + b_3\big)}.$$

Соответствующее этим переменным тензорное поле L'_η в определении бивектора Пуассона вида (3.19) выглядит немного сложнее используемого нами поля (3.20).

4. Разделение переменных

Под разделением переменных в бигамильтоновой геометрии понимают не разделение переменных в уравнении Гамильтона – Якоби (дифференциальном уравнении в частных производных), а геометрическое свойство лагранжева распределения, задаваемого интегралами движения $H_1, \ldots, H_n$ в инволюции. По определению, переменные разделения $(\mathrm{q}_1, \ldots, \mathrm{q}_n, \mathrm{p}_1, \ldots, \mathrm{p}_n)$ являются каноническими переменными

$$\{\mathrm{q}_i, \mathrm{q}_k\} = \{\mathrm{p}_i, \mathrm{p}_k\} = 0, \quad \{\mathrm{q}_i, \mathrm{p}_k\} = \delta_{ik} \tag{4.1}$$

относительно исходной кинематической скобки Пуассона и удовлетворяют невырожденной системе из n разделенных уравнений

$$\Phi_i(\mathrm{q}_i, \mathrm{p}_i, H_1, \ldots, H_n) = 0\ , \quad i = 1, \ldots, n\ , \quad \text{где } \det\left[\frac{\partial \Phi_i}{\partial H_j}\right] \neq 0, \tag{4.2}$$

связывающих каждую пару переменных $(\mathrm{q}_i, \mathrm{p}_i)$ с интегралами движения $H_1, \ldots, H_n$; т.е. в этом случае поверхности уровня интегралов $H_1, \ldots, H_n$ образуют слоение, каждый лист которого представим в виде прямого произведения одномерных геометрических объектов, задаваемых уравнениями (4.2).

Условие (4.2) является необходимым и достаточным для того, чтобы интегралы движения находились в инволюции относительно множества совместных скобок Пуассона вида

$$\{\mathrm{p}_i, \mathrm{q}_j\}_f = \delta_{ij}\, f_j(\mathrm{p}_j, \mathrm{q}_j), \quad \{\mathrm{p}_i, \mathrm{p}_j\}_f = \{\mathrm{q}_i, \mathrm{q}_j\}_f = 0, \tag{4.3}$$

где $f_1, \ldots, f_n$ — произвольные функции [13]. Впервые в явной форме такое определение разделимости возникло в доказательстве Лагранжа теоремы Якоби.

Таким образом, после построения собственных значений оператора рекурсии $\mathrm{q}_1, \ldots, \mathrm{q}_n$, которые и являются переменными разделения или переменными Дарбу – Нийенхейса, необходимо построить канонически сопряженные им импульсы $\mathrm{p}_1, \ldots, \mathrm{p}_n$ и разделенные уравнения.

В методе гамильтонизации для определения сопряженных моментов используется полный интеграл уравнения Гамильтона – Якоби

$$\mathrm{p}_j = \frac{\partial}{\partial \mathrm{q}_j} S_j(\mathrm{q}_j, \alpha_1, \ldots, \alpha_n) \tag{4.4}$$

после замены времени. Именно на этом шаге метод гамильтонизации иногда приводит к не совсем корректным результатом, так как скобка Пуассона между полученными таким способом координатами и импульсами будет не канонической (4.1), а одной из более общих скобок вида (4.3).

В качестве примера возьмем определение сопряженных моментов из работы [5, формула (3.14)]:

$$\begin{gathered} M_i = \frac{(J_i - d)^2}{J_i^2\, b_i}\, \frac{\sqrt{(c_j - \mathrm{q}_1)(c_j - \mathrm{q}_2)}\sqrt{(c_k - \mathrm{q}_1)(c_k - \mathrm{q}_2)}}{2\sqrt{G(\mathrm{q}_1, \mathrm{q}_2)}\,(u - v)} \times \\ \times \left(\frac{\mathrm{p}_2}{(\mathrm{q}_1 - c_j)(\mathrm{q}_1 - c_k)} - \frac{\mathrm{p}_2}{(\mathrm{q}_2 - c_j)(\mathrm{q}_2 - c_k)}\right). \end{gathered} \tag{4.5}$$

При $d = 0$ переменные $\mathrm{q}_{1,2}$ (3.25) совпадают с обычными эллиптическими координатами на сфере u, v (3.6), а соответствующие им моменты

$$\mathrm{p}_1 = \phi(u)p_u, \quad \mathrm{p}_2 = \phi(v)p_v \tag{4.6}$$

отличаются от стандартных канонических переменных p_u и p_v (3.7).

Отсюда следует, что в итоге процесса гамильтонизации авторы получили переменные $\mathrm{q}_{1,2}$ и $\mathrm{p}_{1,2}$, не являющиеся каноническими переменными относительно кинематической скобки исходной физической модели, которая при $d = 0$ имеет вид (3.8).

Замечание 6. Даже при $d = 0$, подставляя γ_i (3.25) и M_i (4.5) в выражение для интеграла площадей $C_2 = \sum b_i\gamma_i M_i$, мы не получим требуемого $C_2 = 0$, но это, по-видимому, просто какая-то опечатка в [5].

4.1. Система Чаплыгина, $\varkappa = 1$

Следуя [15, 16, 18], для определения канонически сопряженных переменных мы воспользуемся следующей рекуррентной цепочкой значений скобок Пуассона:

$$\phi_1 = \{u, H_k\}_g, \quad \phi_2 = \{u, \phi_1\}_g, \ldots, \quad \phi_i = \{u, \phi_{i-1}\}_g, \quad k = 1, 2. \tag{4.7}$$

В нашем случае эта цепочка обрывается на третьем шаге $\phi_3 = 0$, и это означает, что оба наши интеграла движения $H_{1,2}$ являются полиномами второго порядка относительно искомого момента p_u. Следовательно, этот момент определен соотношением

$$p_u = \frac{\phi_1}{\phi_2} \tag{4.8}$$

с точностью до канонических преобразований вида $p_u \to p_u + f(u)$. Аналогичное вычисление можно провести и для определения второго момента p_v.

В случае $\varkappa = 1$ мы в итоге получим

$$M_i = \frac{2\varepsilon_{ijk}\gamma_j\gamma_k(a_j - a_k)\sqrt{\mathrm{g}}}{\mathrm{u} - \mathrm{v}} \Big((a_i - \mathrm{u})(1 - d\mathrm{u})\mathrm{p}_u - (a_i - \mathrm{v})(1 - d\mathrm{v})\mathrm{p}_v\Big), \tag{4.9}$$

где

$$\mathrm{g} = \frac{(1 - d\mathrm{u})(1 - d\mathrm{v})}{(1 - da_1)(1 - da_2)(1 - da_3)}.$$

Добавляя определение γ_i

$$\gamma_i = \sqrt{\frac{(1 - da_j)(1 - da_k)}{(1 - d\mathrm{u})(1 - d\mathrm{v})}} \cdot \sqrt{\frac{(\mathrm{u} - a_i)(\mathrm{v} - a_i)}{(a_j - a_i)(a_m - a_i)}}, \quad i \neq j \neq k,$$

полученное из (3.16), к (4.9), мы получим выражения исходных физических переменных в терминах канонических переменных разделения.

Подставляя выражения в определения интегралов движения $H_{1,2}$ (1.5), легко доказать, что переменные разделения для системы Чаплыгина лежат на двух копиях гиперэллиптической кривой рода 2, задаваемой разделенным уравнением

$$4(1 - d\mathrm{x})(a_1 - \mathrm{x})(a_2 - \mathrm{x})(a_3 - \mathrm{x})\,\mathrm{y}^2 - \mathrm{x}H_2 + H_1 = 0, \quad \mathrm{x} = \mathrm{u}, \mathrm{v}, \quad \mathrm{y} = \mathrm{p}_u, \mathrm{p}_v. \tag{4.10}$$

Легко проверить, что при $d = 0$ мы получаем стандартные эллиптические переменные на T^*S и стандартные разделенные уравнения для волчка Эйлера.

4.2. БМФ-система, $\kappa = -1$

Возьмем координаты $\mathrm{q}_{1,2}$ и найдем канонически сопряженные им моменты $\mathrm{p}_{1,2}$ (4.1) относительно первой скобки (2.11). Для этого, так же как и ранее, мы построим рекуррентную цепочку функций ϕ_k (4.7), используя скобки Пуассона $\{.\,,.\}_\eta$ (2.11). Полученные таким образом определения (4.6) канонических моментов можно переписать в следующем виде:

$$
\begin{aligned}
M_i = &\frac{2\varepsilon_{ijk}\gamma_j\gamma_k(c_j - c_k)\sqrt{\mathrm{g}}}{b_i(\mathrm{q}_1 - \mathrm{q}_2)}\times \\
&\times\left((c_i - \mathrm{q}_1)\left(1 - \frac{d(2 - b_1b_2\mathrm{q}_1)}{b_3}\right)\mathrm{p}_1 - (c_i - \mathrm{q}_2)\left(1 - \frac{d(2 - b_1b_2\mathrm{q}_2)}{b_3}\right)\mathrm{p}_2\right),
\end{aligned}
\tag{4.11}
$$

где $c_i = a_i/b_i$ и

$$
\mathrm{g} = \frac{\Big(1 - d(b_1 + b_2 + b_3 - 2d)\mathrm{q}_1\Big)\Big(1 - d(b_1 + b_2 + b_3 - 2d)\mathrm{q}_2\Big)}{(1 - da_1)(1 - da_2)(1 - da_3)} + \frac{8d}{a_1a_2a_3}\mathrm{q}_1\mathrm{q}_2.
$$

Эти выражения имеют точно такой же вид, как (4.9), и при $d = 0$ переходят в определение эллиптических переменных на сфере (3.7), в отличие от выражений (4.5) из работы [5].

Подставляя γ_i (3.25) и эти выражения (4.11) в определения интегралов движения $H_{1,2}$ (1.5), легко доказать, что переменные разделения для БМФ-системы лежат на двух копиях гиперэллиптической кривой рода 2, задаваемой разделенным уравнением

$$
4\left(1 - \frac{d(2 - b_1b_2\mathrm{x})}{b_3}\right)^2(\mathrm{x} - c_1)(\mathrm{x} - c_2)(\mathrm{x} - c_3)\mathrm{y}^2 - \alpha\,H_2 + \beta H_1 = 0,
\tag{4.12}
$$

где $\mathrm{x} = \mathrm{q}_{1,2}$, $\mathrm{y} = \mathrm{p}_{1,2}$ и

$$
\begin{aligned}
\alpha &= db_1b_2b_3\mathrm{x}^2 - (b_1b_2 + b_1b_3 + b_2b_3)\mathrm{x} + 2,\\
\beta &= \left(d(b_1b_2 + b_1b_3 + b_2b_3) - \frac{(b_1 + b_2)(b_1 + b_3)(b_2 + b_3)}{2}\right)\mathrm{x} + b_1 + b_2 + b_3 - 2d.
\end{aligned}
$$

При $d = 0$ эти разделенные уравнения совпадают с уравнениями для гамильтоновой системы на сфере, допускающей разделение переменных в эллиптических координатах. В этом случае переменные разделения лежат на двух копиях эллиптической кривой.

5. Общий случай $C_2 \neq 0$

В данном разделе мы кратко обсудим более общий случай, когда интеграл площадей $C_2 = p_\psi$ не равен нулю.

В случае Чаплыгина при $\kappa = 1$ первое решение уравнений (1.10) линейно по всем импульсам p_ϕ, p_θ и p_ψ

$$
\widetilde{P}_g = P_g - d\,p_\psi\begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & \sqrt{\mathrm{g}}\sin\theta(a_1\sin^2\phi + a_2\cos^2\phi)\\
0 & 0 & -\sqrt{\mathrm{g}}\sin\theta(a_1\sin^2\phi + a_2\cos^2\phi) & 0
\end{pmatrix},
$$

где бивектор P_g (2.7) задается уравнением (2.7). В терминах исходных физических переменных этот бивектор был найден в [2].

В случае Борисова–Мамаева–Фёдорова при $\kappa=-1$ решение уравнений (1.10), которое в пределе $p_\psi\to 0$ переходит в бивектор P_η (2.11), имеет значительно более сложный вид.

Для интегрирования уравнений движения при $\kappa=1$ в работе [7] использовалось псевдолинейное преобразование

$$\gamma\to\gamma'=\lambda\gamma+\lambda' M,\quad M\to M'=\mu\gamma+\mu' M, \tag{5.1}$$

где постоянные λ,λ' и μ,μ' являются функциями от интегралов движения $H_{1,2}$ и $C_{1,2}$ (1.5), (1.7). Согласно [6, 7], эти постоянные подбираются таким образом, чтобы и уравнения движения (1.4)

$$\dot M=M\times\mathbf{A}_g M,\quad \dot\gamma=\kappa\gamma\times\mathbf{A}_g M, \tag{5.2}$$

и матрица A_g были инвариантны относительно преобразований (5.1) и, кроме этого, чтобы удовлетворялось соотношение

$$C_2'=(\gamma',M')=0.$$

Тем самым задача сводится к предыдущей задаче, для которой разделение переменных уже известно.

Основная проблема в том, что преобразование Чаплыгина (5.1) не является каноническим, т.е. не сохраняет исходную скобку Пуассона. Например, при $d=0$ уравнения (1.4) описывают волчок Эйлера, который преобразованием (5.1) сводится к интегрируемой системе на сфере, формально допускающей разделение переменных в эллиптических координатах (3.6)–(3.7) при $b_i=1$.

Легко проверить, преобразование Чаплыгина (5.1) при $d=0$ переводит исходный бивектор Пуассона на алгебре $e^*(3)$

$$P=\begin{pmatrix}0&0&0&0&\gamma_3&-\gamma_2\\ *&0&0&-\gamma_3&0&\gamma_1\\ *&*&0&\gamma_2&-\gamma_1&0\\ *&*&*&0&M_3&-M_2\\ *&*&*&*&0&M_1\\ *&*&*&*&*&0\end{pmatrix}$$

в совершенно иной бивектор

$$\widetilde P=\begin{pmatrix}0&0&0&0&\gamma_3'&-\gamma_2'\\ *&0&0&-\gamma_3'&0&\gamma_1'\\ *&*&0&\gamma_2'&-\gamma_1'&0\\ *&*&*&0&M_3'&-M_2'\\ *&*&*&*&0&M_1'\\ *&*&*&*&*&0\end{pmatrix}-\left(2C_1H_2+C_2^2\right)\begin{pmatrix}0&M_3'&-M_2'&0&0&0\\ *&0&M_1'&0&0&0\\ *&*&0&0&0&0\\ *&*&*&0&0&0\\ *&*&*&*&0&0\\ *&*&*&*&*&0\end{pmatrix}.$$

Поэтому при произвольных значениях интегралов движения

$$2C_1H_2 + C_2^2 \neq 0$$

исходная скобка Пуассона между эллиптическими переменными не будет канонической, например

$$\{p'_u, p'_v\} \neq 0.$$

Таким образом, применяя отображение Чаплыгина даже для решения уравнений волчка Эйлера при $d = 0$, мы можем получить решения, отличные от известных.

Таким образом, встает вопрос о корректном разделении переменных для шара Чаплыгина. Если отказаться от инвариантности матрицы $\mathbf{A}_g$ (1.2), то можно доказать следующее предложение.

Предложение 8. *Отображение исходного фазового пространства*

$$\gamma \to \gamma' = \frac{\gamma \times M}{|\gamma \times M|}, \quad M \to M' = M, \tag{5.3}$$

на кокасательное расслоение двумерной единичной сферы

$$C'_2 = (\gamma', M') = 0$$

сохраняет форму уравнений движения (5.2) и при $d = 0$ *является каноническим отображением, сохраняющим исходную скобку Пуассона на алгебре* $e^*(3)$.

Данное отображение использовалось в [11] для изучения системы Стеклова–Ляпунова.

Преобразование (5.3) сохраняет форму уравнений движения, но изменяет вид матрицы $\mathbf{A}_g$ (1.2) и инвариантную меру (1.6), которую необходимо просто домножить на якобиан данного преобразования. Тем не менее, мы предполагаем, что, используя аналог векторного поля Лиувилля (3.10), мы сможем получить вторую скобку Пуассона и соответствующие переменные разделения для системы Чаплыгина при $C_2 \neq 0$, аналогично волчку Эйлера при $d = 0$.

Замечание 7. Для БМФ-системы можно построить аналогичное преобразование

$$\gamma \to \gamma' = \frac{\gamma \times \mathbf{B}M}{|\gamma \times \mathbf{B}M|}, \quad M \to M' = M, \tag{5.4}$$

отображающее исходное фазовое пространство на кокасательное расслоение двумерной единичной сферы, такое, что $C'_2 = (\gamma', \mathbf{B}M') = 0$.

6. Заключение

В данной работе мы воспроизвели результаты работ [1, 3, 5, 6], касающиеся построения переменных разделения, используя стандартные методы би-гамильтоновой геометрии. Новыми результатами являются выражения для первого и второго бивекторов Пуассона для БМФ-системы (2.11), (3.19) и второго бивектора для системы Чаплыгина (3.13), которые могут рассматриваться как пример нетривиальных деформаций схемы Туриэля, которые никогда раньше не встречались при рассмотрении гамильтоновых систем.

Кроме этого мы впервые явно предъявили разделенные уравнения (4.12) для БМФ-системы, в которые входят канонические переменные разделения. Так как алгебраические кривые второго рода изоморфны друг другу, то мы можем использовать кривые (4.10) и (4.12), для построения явного преобразования, связывающего систему Чаплыгина с БМФ-системой. Мы надеемся, что это преобразование может быть использовано для построения неизвестной пуассоновой структуры для БМФ-системы в случае $C_2 \neq 0$.

В следующей работе мы покажем, как деформации скобок Пуассона могут быть использованы для построения различных интегрируемых обобщений данных интегрируемых систем.

Мы благодарим А. В. Борисова за неподдельный интерес к работе и ценные замечания.

Список литературы

[1] Борисов А. В., Фёдоров Ю. Н. О двух видоизмененных интегрируемых задачах динамики // Вестн. Моск. ун-та. Сер.1. Математика. Механика, 1995, №6, с. 102–105.

[2] Борисов А. В., Мамаев И. С. Гамильтоновость задачи Чаплыгина о качении шара // Матем. заметки, 2001, т. 70, no. 5, с. 793–796.

[3] Борисов А. В., Мамаев И. С., Марихин В. Г. Явное интегрирование одной неголономной задачи // Докл. РАН, 2008, т. 422, вып. 4, с. 475–478.

[4] Borisov A. V., Mamaev I. S. Conservation laws, hierarchy of dynamics and explicit integration of nonholonomic systems // Regul. Chaotic Dyn., 2008, vol.13, no. 5, pp. 443–490.

[5] Borisov A. V., Fedorov Yu. N., Mamaev I. S. Chaplygin ball over a fixed sphere: An explicit integration // Regul. Chaotic Dyn., 2008, vol.13, no. 6, pp. 557–571.

[6] Борисов А. В., Килин А. А., Мамаев И. С. Обобщение преобразования Чаплыгина и явное интегрирование шарового подвеса // Нелинейная динамика, 2011, т. 7, №2, с. 313–338.

[7] Чаплыгин С. А. О катании шара по горизонтальной плоскости // Матем. сб., 1903, т. 24, №1, с. 139–168.

[8] Koszul J.-L. Crochet de SchoutenŃijenhuis et cohomologie // Astérisque Numéro Hors Série, 1985, pp. 257–271.

[9] Ohsawa T., Fernandez O. E., Bloch A. M., Zenkov D. V. Nonholonomic HamiltonĴacobi theory via Chaplygin hamiltonization // J. Geom. Phys., 2011, vol. 61, pp. 1263–1291.

[10] Tsiganov A. V. Canonical transformations of the extended phase space, Toda lattices and the Stackel family of integrable systems // J. Phys. A, 2000, vol. 33, pp. 4169–4182.

[11] Tsiganov A. V. On the SteklovĹyapunov case of the rigid body motion // Regul. Chaotic Dyn., 2004, vol. 9, pp. 77–89.

[12] Tsiganov A. V. The Maupertuis principle and canonical transformations of the extended phase space // J. Nonlinear Math. Phys., 2001, vol. 8, no. 1, pp. 157–182.

[13] Tsiganov A. V. On the two different bi-Hamiltonian structures for the Toda lattice // J. Phys. A, 2007, vol. 40, pp. 6395–6406.

[14] Tsiganov A. V. Change of the time for the periodic Toda lattices and natural systems on the plane with higher order integrals of motion // Regul. Chaotic Dyn., 2009, vol. 14, no. 4–5, pp. 541–549.

[15] Tsiganov A. V. New variables of separation for particular case of the Kowalevski top // Regul. Chaotic Dyn., 2010, vol. 15, no. 6, pp. 657–667.

[16] Цыганов А. В. О новом разделении переменных для частного случая волчка Ковалевской // Нелинейная механика, 2010, т. 6, №3, с. 639–652.

[17] Tsiganov A. V. On natural Poisson bivectors on the sphere // J. Phys. A, 2011, vol. 44, 105203, 15 pp.

[18] Tsiganov A. V. Integrable Euler top and nonholonomic Chaplygin ball. arXiv:1002.1123, 2010.

[19] Turiel F. Structures bihamiltoniennes sur le fibré cotangent // C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. 1. Math., 1992, vol. 315, pp. 1085–1088.

[20] Weinstein A. The modular automorphism group of a Poisson manifold // J. Geom. Phys., 1997, vol. 23, pp. 379–394.

[21] Ярощук В. А. Новые случаи существования интегрального инварианта в задаче о качении твердого тела без проскальзывания по неподвижной поверхности // Вестн. Моск. ун-та, Сер. 1, Математика. Механика, 1992, № 6, с. 26–30.

On deformations of the canonical Poisson bracket for the nonholonomic Chaplygin and the Borisov – Mamaev – Fedorov systems on zero-level of the area integral I.

Andrey V. Tsiganov

Saint-Petersburg State University
Universitetskaya nab. 7–9, St. Petersburg, 199034, Russia
andrey.tsiganov@gmail.com

We discuss the nonholonomic Chaplygin and the Borisov – Mamaev – Fedorov systems when the corresponding phase space is equivalent to cotangent bundle to dwo-dimensional sphere. In both cases Poisson bivectors are determined by L-tensors with non-zero torsion on the configurational space, in contrast with the well known Eisenhart – Benenti and Turiel constructions.

MSC 2010: 37J60, 37J35, 53D17, 70E18, 70F25, 70H45
Keywords: nonholonomic mechanics, Chaplygin sphere, Poisson brackets

Received April 26, 2011, accepted September 29, 2011
Citation: *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2011, vol. 7, no. 3, pp. 577–599 (Russian)