



УДК: 531.36: 62-50

MSC 2010: 93B07, 93B05, 93B52

Задача определения угла наклона маятника на цилиндре

В. Н. Белотелов

Поставлена и решена задача определения фазовых координат маятника на цилиндре по измерениям угла поворота цилиндра относительно маятника. Найдено необходимое и достаточное условие наблюдаемости. Построен линейный наблюдатель Люенбергера, по выходным переменным которого замыкается система управления с помощью линейной обратной связи. Проведены численные эксперименты, показавшие возможность использования такого управления (по переменным наблюдателя) в нелинейной модели управляемого движения маятника на цилиндре.

Ключевые слова: линейный наблюдатель, наблюдатель Люенбергера, перевернутый маятник, маятник на цилиндре, маятник на колесной паре

Растущий интерес к неустойчивым колесным механизмам, построенным по схеме перевернутого маятника на колесной паре, за последние годы привел к развитию теоретической базы и исследований в области конструирования таких устройств и управления ими. Предложено множество конструкций (см. обзор в [1]) роботов и подходов к управлению ими. Одним из ключевых вопросов при управлении аппаратом, представляющим собой перевернутый маятник на колесной паре, является задача определения его фазовых координат.

В данной работе предлагается метод определения фазовых координат такого аппарата, необходимых для реализации законов управления в виде линейной обратной связи.

Рассмотрим плоское движение аппарата, конструкция которого представляется системой трех абсолютно твердых тел, связанных цилиндрическими шарнирами (рис. 1). Тело 1 — маятник, или корпус аппарата. Тело 2 — цилиндр радиуса r , ось которого перпендикулярна плоскости XZ (ось X горизонтальна, ось Z вертикальна и направлена вверх). Корпус связан с цилиндром цилиндрическим шарниром, ось которого совпадает с осью

Получено 24 июня 2011 года

После доработки 16 октября 2011 года

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты №№ 09-01-00593а, 10-07-00691а).

Белотелов Вадим Николаевич

vbelotelov@gmail.com

НИИ механики МГУ

119192, Россия, г. Москва, Мичуринский пр-т, д. 1



симметрии цилиндра. На корпусе жестко закреплен корпус электродвигателя постоянного тока. Ротор этого двигателя жестко соединен с шестерней 3 радиуса r_2 , которая зацеплена с шестерней радиуса r_1 , вращающейся вместе с цилиндром. Ось вращения шестерни 3 также перпендикулярна плоскости XZ .

Таким образом, движение аппарата происходит в вертикальной плоскости XZ . Будем рассматривать такое движение, при котором не происходит проскальзывания в точке контакта колеса (цилиндра) и горизонтальной опорной поверхности, а также в точке контакта шестерни и внутренней поверхности цилиндра. При этих предположениях рассматриваемая механическая система обладает двумя степенями свободы.

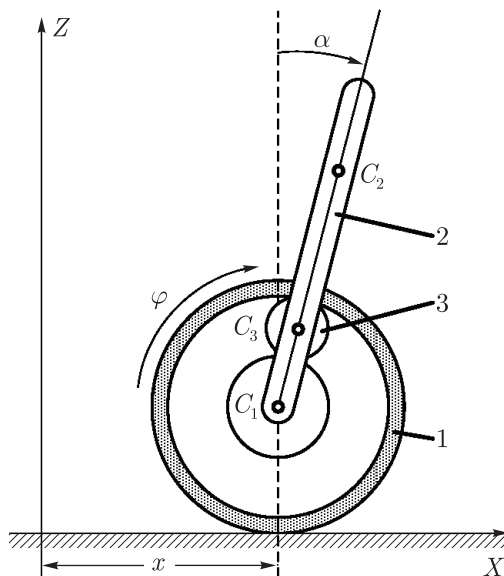


Рис. 1. Конструкция перевернутого маятника на цилиндре: 1 — цилиндр, 2 — корпус (маятник), 3 — ведущая шестерня с ротором двигателя.

Уравнения движения такой системы выведены в работах [1–3]. В безразмерной форме они имеют вид

$$\begin{aligned} \phi' &= v, \\ \alpha' &= \omega_\alpha, \\ v' + (j_0 + j_1 \cos \alpha) \omega'_\alpha - j_1 \sin \alpha \omega_\alpha^2 + p(v - \omega_\alpha) &= u, \\ (j_0 + j_1 \cos \alpha) v' + j_3 \omega'_\alpha - p(v - \omega_\alpha) - j_1 \sin \alpha &= -u. \end{aligned} \quad (1)$$

В уравнениях (1) α — угол отклонения продольной оси корпуса (проходящей через ось его вращения относительно цилиндра и центр масс C_1) от вертикали, ϕ — угол поворота какого-либо зафиксированного направления в цилиндре вокруг оси вращения цилиндра, v — продольная скорость точки C_1 в положительном направлении оси X , ω_α — угловая скорость корпуса аппарата.

Кроме того, в этих уравнениях присутствуют четыре безразмерных параметра, определяемые следующим образом:

$$j_0 = \frac{a_{13}}{a_{11}r}, \quad j_1 = \frac{a_{13c}}{a_{11}r}, \quad j_3 = \frac{a_{33}}{a_{11}r^2}, \quad p = \frac{2C_V \chi^2}{a_{11}r \sqrt{rg}}. \quad (2)$$

Здесь r — радиус цилиндра, g — величина ускорения свободного падения, χ — число редукции, которое равно отношению радиуса ведомой шестерни, связанной с цилиндром, к радиусу ведущей шестерни, $\chi > 1$. Коэффициент C_V является параметром электродвигателя в линейной модели, где момент M на валу двигателя в зависимости от приложенного напряжения U и скорости вращения ротора двигателя относительно его статора Ω рассчитывается как $M = C_U \cdot U - C_V \cdot \Omega$. Параметры a с соответствующими индексами определяются массо-инерционными характеристиками системы:

$$\begin{aligned} a_{11} &= m_1 + 2m_2 \left(1 + \frac{\rho_2^2}{r^2}\right) + 2m_3 \left(1 + \chi^2 \frac{\rho_3^2}{r^2}\right), \\ a_{13} &= -2m_3 \chi (\chi + 1) \frac{\rho_3^2}{r}, \quad a_{13c} = m_1 b + 2m_3 (r_1 + r_3), \\ a_{33} &= m_1 (b^2 + \rho_1^2) + 2m_3 (r_1^2 + \chi^2 \rho_3^2) \left(1 + \frac{1}{\chi}\right)^2, \end{aligned} \quad (3)$$

где m_i и ρ_i — масса и центральный момент инерции i -го тела, r_1 и r_3 — радиусы шестерен (шестерня с условным номером 1 связана с цилиндром, с номером 3 — самостоятельное тело, см. рис. 1), b — расстояние от оси вращения цилиндра до центра масс C_1 корпуса.

Система (1) имеет стационарные решения, которые соответствуют движению цилиндра с постоянной безразмерной скоростью $v = v_0$, при этом корпус находится в верхнем положении равновесия ($\alpha = 0$). В процессе такого движения к двигателю приложено постоянное безразмерное напряжение $u = u_0$. В работе [3] построен закон управления аналогичным аппаратом, в котором в обратной связи для стабилизации верхнего, неустойчивого, положения равновесия используются текущая скорость v , угол α и его производная ω_α . Аналогичный закон управления построен в работах [1, 2] для стабилизации продольного движения двухколесного аппарата с неустойчивым корпусом.

Пусть на аппарате установлен датчик, который измеряет угол поворота цилиндра относительно корпуса, а его показания имеют вид

$$z = \phi - \alpha. \quad (4)$$

Этот датчик может быть, например, энкодером или потенциометром, корпус которого связан с корпусом аппарата, а промаркированный диск — с осью цилиндра.

Линеаризованные уравнения системы (1) в окрестности стационарного решения запишутся так:

$$\begin{aligned} \xi' &= \mathbf{A}\xi + \mathbf{B}u, \\ z &= \mathbf{C}\xi, \end{aligned} \quad (5)$$

где вектор $\xi = (\Delta\phi \quad \Delta\alpha \quad \Delta v \quad \Delta\omega_\alpha)^T$ составлен из отклонений фазовых переменных системы (1) от своих стационарных значений, а матрицы \mathbf{A} и \mathbf{B} имеют вид

$$\mathbf{A} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \Delta \\ 0 & 0 & \Delta & 0 \\ 0 & j_1 & -p(1+j_9) & p(1+j_9) \\ 0 & j_1 j_9 & p(j_3+j_9) & -p(j_3+j_9) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1-j_9 \\ j_3+j_9 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = (1 \quad -1 \quad 0 \quad 0), \quad (6)$$

$$\Delta = j_3 - j_9^2.$$

Рассматриваемое стационарное решение является неустойчивым, и для его стабилизации можно воспользоваться алгоритмом управления в виде линейной обратной связи по переменным α , v , ω_α , описываемым формулой

$$u = k_1 \Delta \alpha + k_2 \Delta v + k_3 \Delta \omega_\alpha \quad (7)$$

с постоянными коэффициентами k_i , выбором которых можно добиться устойчивости замкнутой системы [2, 3]. При этом подразумевается, что циклический угол ϕ , соответствующий пройденному пути, не важен для стабилизации движения, и его отклонение $\Delta \phi = \phi - \omega_0 \tau$ не вводится в обратную связь.

Линейная система (5) со скалярным наблюдением z порождает матрицу наблюдаемости

$$\mathbf{O} = \begin{pmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \mathbf{CA}^2 \\ \mathbf{CA}^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -\frac{j_1(1+j_9)}{\Delta} & \frac{p(1+j_3+2j_9)}{\Delta} & -\frac{p(1+j_3+2j_9)}{\Delta} \\ 0 & \frac{pj_1(1+j_9)(1+j_3+2j_9)}{\Delta^2} & -\frac{j_1(1+j_9)\Delta + p^2(1+j_3+2j_9)^2}{\Delta^2} & \frac{p^2(1+j_3+2j_9)^2}{\Delta^2} \end{pmatrix}.$$

Определитель этой матрицы равен

$$\det \mathbf{O} = \frac{j_1^2(1+j_9)^2}{\Delta^2}, \quad (8)$$

что означает, что система вполне наблюдаема тогда и только тогда, когда $j_1 \neq 0$. Возвращаясь к обозначениям для безразмерных параметров (2) и к обозначениям размерных параметров (3), получаем, что система (5) является ненаблюдаемой в том и только в том случае, когда ее общий центр масс лежит на оси вращения цилиндра.

Таким образом, в случае если общий центр масс системы не лежит на оси вращения цилиндра, она является вполне наблюдаемой, и *можно восстановить полный фазовый вектор системы, измеряя только внутренний угол вращения цилиндра относительно корпуса.*

Для восстановления фазовых координат можно использовать, например, линейный наблюдатель Люенбергера полного порядка [4, 5].

Построим систему

$$\hat{\xi}' = \mathbf{A}\hat{\xi} + \mathbf{B}u + \mathbf{K}\mathbf{C}(\xi - \hat{\xi}) \quad (9)$$

которую будем называть наблюдателем (Люенбергера) для системы (5).

Выбирая вектор-строку \mathbf{K} таким образом, чтобы собственные значения матрицы $\mathbf{A} - \mathbf{K}\mathbf{C}$ находились в левой полуплоскости комплексной плоскости, можно добиться асимптотической сходимости ошибки $e = \xi - \hat{\xi}$ к нулю. Для системы (9) вектор \mathbf{K} , который назначает все четыре собственных значения матрицы $\mathbf{A} - \mathbf{K}\mathbf{C}$ равными одной и той же величине μ_0 , имеет вид

$$\mathbf{K} = (k_\phi \quad k_\alpha \quad k_v \quad k_{\omega\alpha})^T, \quad (10)$$



где

$$k_\phi = \frac{p(j_3 - j_9)}{j_3 - j_9^2} + \frac{4j_9\mu_0}{1 + j_9} - \frac{4(j_3 - j_9^2)\mu_0^3}{j_1(1 + j_9)}, \quad k_\alpha = -\frac{p(1 + j_9)}{j_3 - j_9^2} - \frac{4\mu_0}{1 + j_9} - \frac{4(j_3 - j_9^2)\mu_0^3}{j_1(1 + j_9)},$$

$$k_v = \frac{(j_3 - j_9^2)\mu_0^4}{j_1(1 + j_9)} + \frac{6\mu_0^2}{1 + j_9} + \frac{4p(1 + j_9)\mu_0}{j_3 - j_9} + \frac{j_1}{(1 + j_9)(j_3 - j_9^2)} + \frac{(1 + j_9)(1 + 2j_9 + j_3)p^2}{(j_3 - j_9^2)^2},$$

$$k_{\omega\alpha} = \frac{(j_3 - j_9^2)\mu_0^4}{j_1(1 + j_9)} - \frac{6j_9\mu_0^2}{1 + j_9} - \frac{4p(j_3 + j_9)\mu_0}{j_3 - j_9^2} - \frac{j_1j_9}{(1 + j_9)(j_3 - j_9^2)} - \frac{(j_3 + j_9)(1 + 2j_9 + j_3)p^2}{(j_3 - j_9^2)^2}.$$

При построении закона управления в виде обратной связи по переменным наблюдателя

$$\hat{u} = k_1\Delta\hat{\alpha} + k_2\Delta\hat{v} + k_3\Delta\hat{\omega}_\alpha \quad (11)$$

теорема о разделимости Калмана [4] гарантирует, что собственные значения линейной системы

$$\begin{aligned} \xi' &= \mathbf{A}\xi + \mathbf{B}\hat{u}, \\ \hat{\xi}' &= \mathbf{A}\hat{\xi} + \mathbf{B}\hat{u} + \mathbf{K}\mathbf{C}(\xi - \hat{\xi}) \end{aligned} \quad (12)$$

будут такими же, как и собственные значения системы

$$\begin{aligned} \xi' &= \mathbf{A}\xi + \mathbf{B}u, \\ \hat{\xi}' &= \mathbf{A}\hat{\xi} + \mathbf{B}u + \mathbf{K}\mathbf{C}(\xi - \hat{\xi}). \end{aligned} \quad (13)$$

Вопрос о применимости линейного наблюдателя вида (9) с вектором-строкой \mathbf{K} вида (10) в исходной нелинейной системе (1) рассматривался в численных экспериментах.

Для экспериментов были выбраны следующие параметры механической системы. Масса цилиндра $m_1 = 0.056$ кг, радиус инерции цилиндра $\rho_1 = 0.016$ м, масса корпуса $m_2 = 0.253$ кг, центральный радиус инерции корпуса $\rho_2 = 0.0246$ м, масса шестерни с ротором двигателя $m_3 = 0.032$ кг, ее радиус инерции $\rho_3 = 0.011$ м, радиус цилиндра $r = 0.021$ м, радиус шестерни, связанной с цилиндром $r_1 = 0.0138$ м, расстояние от центра масс корпуса до оси цилиндра $b = 0.025$ м, коэффициент редукции $\chi = 6.6$, коэффициенты модели электродвигателя $C_U = 0.00706$, $C_V = 0.49 \cdot 10^{-4}$; при максимальном напряжении $U_{\max} = 7.2$ В, величина ускорения свободного падения $g = 9.8$ м/с².

«Желаемые» собственные значения λ_0 при выборе коэффициентов k_i обратной связи (7) и (11) задавались равными -0.1 . «Желаемые» собственные значения μ_0 при выборе коэффициентов \mathbf{K}_4 обратной связи наблюдателя (10) задавались равными -1 .

Начальные значения переменных системы были взяты следующие:

$$\begin{aligned} \phi(0) &= 0, \quad \alpha(0) = 30^\circ, \quad v(0) = v_0, \quad \omega_\alpha(0) = 0, \\ \hat{\phi}(0) &= 0, \quad \hat{\alpha}(0) = 0, \quad \hat{v}(0) = 0, \quad \hat{\omega}_\alpha(0) = 0. \end{aligned}$$

Здесь v_0 — значение безразмерной продольной скорости на стационарном движении, которое в данном эксперименте выбиралось равным 2.20, что соответствует размерной продольной скорости в 1 м/с.

Следует отметить, что при построении наблюдателя Люенбергера управление, подаваемое в линейную систему и в наблюдатель, должно быть одинаковым. Однако, управление (7) вычислялось для линейной системы, записанной в отклонениях от стационарного решения. Поэтому управление u^* , подаваемое в исходную нелинейную систему, вычисляется как

$$u^* = u_0 + u, \quad (14)$$

где u_0 — значение напряжения на стационарном режиме, равное $u_0 = pv_0$.

При этом наблюдатель также построен для системы, записанной в отклонениях от стационарного движения, и переменные наблюдателя соответствуют отклонениям фазовых переменных системы. Поэтому управление, подаваемое в наблюдатель, не содержит «стационарного» слагаемого u_0 .

На графиках (см. на рис. 2–5), представлены переходные процессы в нелинейной системе (1) с различным управлением. На левых рисунках в управлении используются истинные фазовые координаты системы. Правые рисунки соответствуют системе управления, замкнутой по переменным, полученным из наблюдателя. На правых рисунках сплошной черной линией изображены действительные фазовые координаты системы, а серой пунктирной линией — соответствующие им переменные, полученные из наблюдателя.

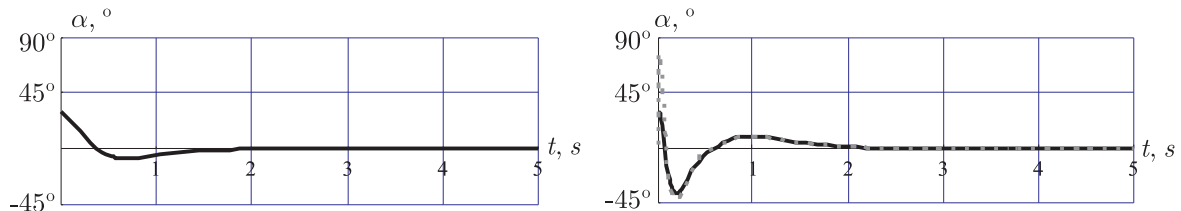


Рис. 2. Угол наклона корпуса α (градусы).

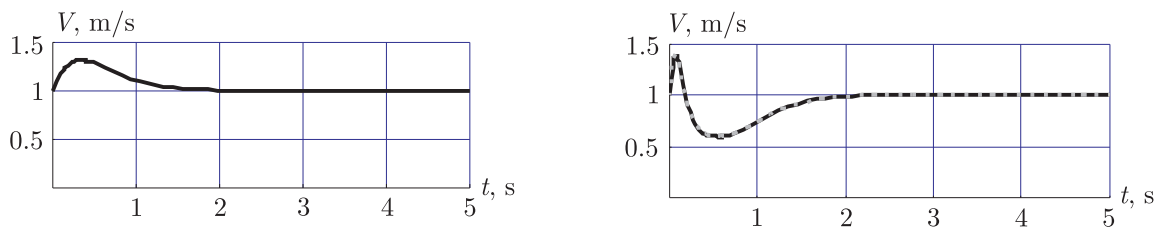


Рис. 3. Продольная скорость аппарата V (метры в секунду).

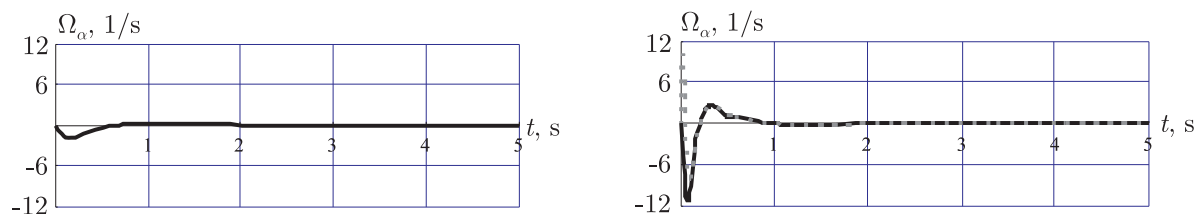
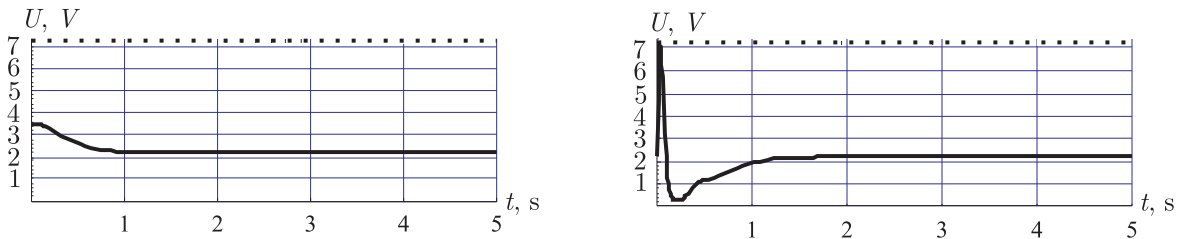


Рис. 4. Угловая скорость корпуса Ω_α (радианы в секунду).



Рис. 5. Напряжение на электродвигателе U (вольты).

На рисунке 2 показано изменение угла наклона корпуса во времени. На рисунках 3 и 4 представлены соответственно продольная скорость аппарата V и угловая скорость корпуса Ω_α . Все переменные приведены к размерным величинам.

На рисунке 5 сплошной черной линией показано напряжение, подаваемое на электродвигатель в процессе движения с учетом «стационарной» добавки U_0 (в вольтах). Точечной линией на этих рисунках показано максимально допустимое напряжение.

Из представленных графиков видно, что при использовании переменных линейного наблюдателя Люенбергера в линейной обратной связи стационарное движение аппарата по прямой удается стабилизировать. При этом считается, что измерения углов производятся идеально. Отдельный интерес представляет задача определения фазовых переменных системы в случае, когда измерения содержат ошибки.

Список литературы

- [1] Белотелов В. Н. Динамика и управление автономным мобильным роботом с двумя соосными колесами: Канд. дис. . . канд. физ.-мат. наук, МГУ, 2010.
- [2] Белотелов В. Н., Мартыненко Ю. Г. Управление пространственным движением перевернутого маятника, установленного на колесной паре // Изв. РАН. МТТ, 2006, № 3, с. 25–42.
- [3] Мартыненко Ю. Г., Формальский А. М. К теории управления моноциклом // ПИММ, 2005, т. 69, № 4, с. 569–583.
- [4] Antsaklis P. J., Michel A. N. Linear systems. Boston: Birkhäuser, 2006. 670 pp.
- [5] Luenberger D. G. Determining the state of a linear system with observers of low dynamic order: Ph. D. Dissertation, Dept. of Elec. Engrg., Stanford University, Stanford, CA, 1963.

The problem of determining the inclination angle of a pendulum on a cylinder

Vadim N. Belotelov

Research Institute of Mechanics, M. V. Lomonosov Moscow State University
Michurinsky Pr. 1, Moscow, 119192, Russia
vbelotelov@gmail.com

The problem of determining the phase coordinates of a pendulum on a cylinder by measurements of the inclination angle of the cylinder relative to the pendulum is formulated and solved. A necessary and sufficient condition for observability is found. A linear Luenberger observer is constructed whose output variables are used to close a linear feedback control system. Numerical experiments are performed showing the possibility of using this type of control (by means of variables of the observer) in a nonlinear model of controlled motion of a pendulum on a cylinder.

MSC 2010: 93B07, 93B05, 93B52

Keywords: linear observer, Luenberger observer, inverted pendulum, pendulum on a cylinder, two-wheeled pendulum

Received June 24, 2011, accepted October 16, 2011

Citation: *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2011, vol. 7, no. 4 (Mobile Robots), pp. 837–844 (Russian)

