



Структурные свойства и классификация кинематических и динамических моделей колесных мобильных роботов

Г. Кампион, Ж. Бастен, Б. д'Андреа-Новель

Анализируется структура кинематических и динамических моделей колесных мобильных роботов. Показано, что для широкого класса возможных конфигураций эти модели могут быть разделены на пять типов, каждый из которых определяется характерной структурой уравнений модели. Для каждого типа моделей изучены следующие вопросы: возможность и невозможность понижения порядка; голономность и неголономность; подвижность и управляемость; конфигурация и механизация (оснащение двигателями), а также эквивалентность по обратной связи.

Ключевые слова: колесные мобильные роботы, кинематические и динамические модели, неголономность, управление

I. Введение

Колесные мобильные роботы (КМР) составляют класс механических систем, характеризующихся кинематическими связями, которые не являются интегрируемыми и, следовательно, не могут быть исключены из уравнений движения модели. В результате стандартные алгоритмы планирования и управления движением, развитые для роботов-манипуляторов без связей (т. е. с голономными связями, которые учитываются сразу при построении функции Лагранжа) не применимы к таким системам. Это обстоятельство было отмечено недавно в обширной литературе, посвященной построению планирования и управления движением КМР, в особенности специфических упрощенных кинематических моделей «робопоезда» и «робокара» (см. например, [1–8]). Однако коммерческие КМР, имеющиеся в продаже,

Campion G., Bastin G., D'Andrea-Novel B. Structural properties and classification of kinematic and dynamic models of wheeled mobile robots // IEEE Transactions on robotics and automation, 1996, vol. 12, no. 1, pp. 47–62. (c) 1996 IEEE. Перевод с английского А. С. Кулешова.

Ги Кампион
Жорж Бастен
Centre d'ingénierie des systèmes d'automatique et de mécanique appliquée (CESAME)
Université catholique de Louvain
B-1348 Louvain-la-Neuve, Belgium

Брижит д'Андреа-Новель
Centre automatique et systèmes, École des mines de Paris
F-77300 Fontainebleau, France



обладают существенно более сложной конструкцией, чем простейшие модели, обычно рассматриваемые в научной литературе. Например, для трехколесных или четырехколесных коммерческих мобильных роботов, со всеми поворотными и приводными колесами, существенным является даже вопрос, предшествующий исследованиям по управляемости, — вопрос о построении математической модели такого робота.

Цель настоящей работы состоит в том, чтобы дать общее и единое представление обо всех математических моделях КМР. В литературе имеются примеры получения кинематических и/или динамических моделей КМР, в том числе моделей, описывающих реально существующие мобильные роботы (см. например, [1] и [9–11]). Также в литературе имеются модели роботов с различным типом колес. Систематическая процедура вывода уравнений движения модели КМР предложена в [12] и [13]. В нашей работе мы рассматриваем также обобщенный КМР, с произвольным числом колес различного типа и различной моторизации (т.е. как приводных, так и не приводных колес). Основная задача нашей работы заключается в том, чтобы отметить структурные свойства кинематических и динамических моделей, учитывая ограничение подвижности робота, вызванное наложенными на него связями. Используя введенную нами концепцию степени подвижности и степени поворотности, несмотря на все обилие различных конструкций и конфигураций колес КМР, множество КМР можно разделить на 5 различных классов. Этот анализ проведен в части II и проиллюстрирован в части III примерами роботов, относящихся к каждому из классов.

Затем мы вводим 4 различных вида моделей, различающихся пространством состояний и представляющих интерес для понимания поведения КМР.

Позиционная кинематическая модель (часть IV). Наиболее простая модель, способная дать глобальное описание поведения КМР. Показано, что для каждого из 5 классов данная модель имеет особенную универсальную структуру, позволяющую понять маневренные свойства робота. Проанализированы также вопросы понижения порядка уравнений, управляемости и стабилизируемости модели.

Конфигурационная кинематическая модель (часть V) позволяет проанализировать поведение КМР с использованием теории неголономных систем.

Конфигурационная динамическая модель (часть VI) — более общая модель по сравнению с кинематическими моделями. Она дает полное описание динамики системы с учетом обобщенных сил, обеспечиваемых силовыми приводами. В частности, такая модель ориентирована на исследование конфигурации и моторизации: предложен специальный критерий для оценки того, является ли набор приводов, установленных в системе, достаточным для полного использования кинематической подвижности робота.

Позиционная динамическая модель (часть VII) эквивалентна по обратной связи конфигурационной динамической модели и полезна при анализе понижения порядка уравнений, свойств управляемости и стабилизируемости системы.

II. Кинематика колесных мобильных роботов

А. Положение робота. Колесный мобильный робот — это средство передвижения, снабженное колесами и способное совершать автономное движение (без внешнего воздействия со стороны человека). Эта способность достигается тем, что на роботе установлено несколько двигателей, управляемых при помощи компьютера, также размещенного на корпусе робота. Мы будем предполагать, что мобильные роботы, рассматриваемые в данной работе, представляют собой твердую платформу (корпус), снабженную недеформируемы-

ми колесами. Движение роботов происходит по неподвижной горизонтальной плоскости. В этом случае положение робота на плоскости описывается следующим образом (см. рис. 1). Произвольная ортогональная неподвижная система координат $\{O, \vec{I}_1, \vec{I}_2\}$ выбрана в плоскости движения. На корпусе робота выбрана произвольная точка P , которая является началом подвижной системы координат $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2\}$, жестко связанной с корпусом робота. Положение робота в этом случае полностью характеризуется тремя переменными x, y, θ , где

- x, y — координаты точки P в неподвижной системе координат, т. е.

$$\vec{OP} = x\vec{I}_1 + y\vec{I}_2,$$

- θ определяет ориентацию подвижного базиса $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2\}$ по отношению к неподвижному базису $\{\vec{I}_1, \vec{I}_2\}$.

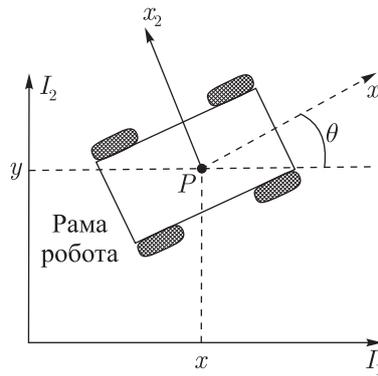


Рис. 1. Определение положения.

Определяем трехкомпонентный вектор ξ , описывающий положение робота:

$$\xi \triangleq \begin{pmatrix} x \\ y \\ \theta \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Определим также ортогональную матрицу поворота подвижной системы координат относительно неподвижной:

$$R(\theta) \triangleq \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2)$$

В. Описание колес. Мы будем предполагать, что в процессе движения плоскость каждого колеса остается вертикальной по отношению к плоскости движения, и вращение каждого колеса происходит вокруг соответствующей горизонтальной оси, проходящей через центр колеса. Однако ориентация этой оси относительно корпуса может быть как фиксированной, так и не фиксированной. Сразу же разделим всевозможные типы идеальных (т. е. недеформируемых) колес на два класса: традиционные колеса и омниколеса. В каждом случае будем предполагать, что контакт между колесом и плоскостью движения происходит в одной точке, т. е. будем в дальнейшем рассматривать только одноточечный контакт.

Для традиционного колеса контакт между колесом и плоскостью движения удовлетворяет условиям качения без проскальзывания. Это означает, что скорость точки колеса, находящейся в данный момент времени в соприкосновении с плоскостью движения, равна нулю. Отсюда следует, что компоненты скорости этой точки колеса равны нулю как в проекции на направление, лежащее в плоскости колеса, так и в проекции на направление, ортогональное плоскости колеса.

Для омниколеса только одна компонента скорости точки соприкосновения колеса с плоскостью движения равна нулю в процессе движения. Направление, в проекции на которое скорость точки контакта равна нулю, априори может быть произвольным, но оно фиксировано по отношению к ориентации колеса.

Теперь представим в явном виде выражения для связей, наложенных на традиционные колеса и омниколеса.

1) Традиционные колеса.

Фиксированные колеса. Центр колеса, обозначенный A , является неподвижным в системе координат $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2\}$ (рис. 2). Его положение относительно этой системы характеризуется с помощью полярных координат, а именно, длины радиус-вектора $PA = l$ и угла α . Ориентация плоскости колеса относительно направления PA характеризуется постоянным углом β . Угол поворота колеса относительно его горизонтальной оси обозначим $\varphi(t)$, а радиус колеса обозначим r .

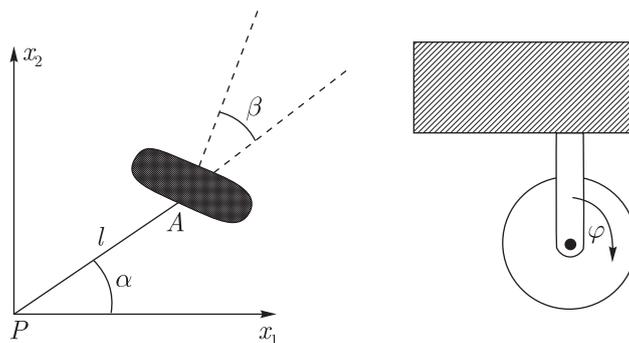


Рис. 2. Традиционное фиксированное и традиционное центрально ориентируемое колеса

Таким образом, положение колеса в данном случае характеризуется четырьмя постоянными: α , β , l , r , а его движение описывается одной переменной $\varphi(t)$. При таком описании компоненты скорости точки контакта легко вычисляются, и мы записываем две связи: *вдоль плоскости колеса*

$$[-\sin(\alpha + \beta) \quad \cos(\alpha + \beta) \quad l \cos \beta] R(\theta) \dot{\xi} + r \dot{\varphi} = 0, \quad (3)$$

ортогонально плоскости колеса

$$[\cos(\alpha + \beta) \quad \sin(\alpha + \beta) \quad l \sin \beta] R(\theta) \dot{\xi} = 0. \quad (4)$$

Центрально ориентируемые колеса. Центрально ориентируемое колесо — это такое колесо, что его плоскость при движении робота может поворачиваться вокруг вертикальной оси, проходящей через центр колеса (рис. 2). Описание такого колеса аналогично описанию фиксированного колеса, за исключением того обстоятельства, что теперь угол β не является постоянным, а зависит от времени: $\beta = \beta(t)$. Положение колеса теперь характеризуется

три постоянными величинами l , α , r , а его движение описывается двумя переменными углами $\beta(t)$ и $\varphi(t)$. Связи имеют ту же форму, что и (3), (4):

$$[-\sin(\alpha + \beta) \quad \cos(\alpha + \beta) \quad l \cos \beta]R(\theta)\dot{\xi} + r\dot{\varphi} = 0, \quad (5)$$

$$[\cos(\alpha + \beta) \quad \sin(\alpha + \beta) \quad l \sin \beta]R(\theta)\dot{\xi} = 0. \quad (6)$$

Нецентрально ориентируемые колеса (кастор колеса): Нецентрально ориентируемое колесо — это колесо, которое также может изменять свою ориентацию относительно корпуса робота, однако в этом случае поворот плоскости колеса происходит вокруг вертикальной оси, не проходящей через центр колеса (рис. 3). В этом случае для описания колеса требуется большее число параметров, чем в случаях, описанных выше. Обозначим центр колеса через B , и пусть этот центр связан с корпусом робота твердым стержнем AB постоянной длины d , который может вращаться вокруг вертикальной оси, проходящей через точку A . Точка A сама по себе является неподвижной в системе координат $\{x_1, x_2\}$ и, как и выше, характеризуется полярными координатами l и α . Плоскость колеса все время будет направлена вдоль AB . В этом случае положение колеса определяется четырьмя постоянными α , l , r , d , а его движение описывается двумя углами $\beta(t)$ и $\varphi(t)$. С учетом этих обозначений соответствующие связи имеют вид

$$[-\sin(\alpha + \beta) \quad \cos(\alpha + \beta) \quad l \cos \beta]R(\theta)\dot{\xi} + r\dot{\varphi} = 0, \quad (7)$$

$$[\cos(\alpha + \beta) \quad \sin(\alpha + \beta) \quad d + l \sin \beta]R(\theta)\dot{\xi} + d\dot{\beta} = 0. \quad (8)$$

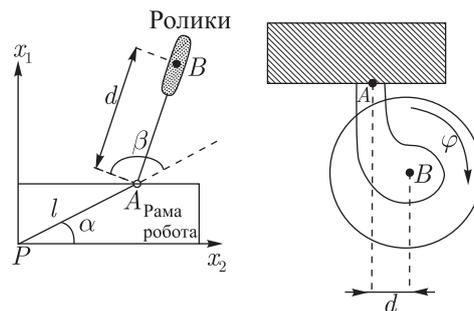


Рис. 3. Традиционные нецентрально ориентируемые колеса.

2) *Омниколеса.* Положение омниколеса относительно корпуса робота описывается, как и в случае традиционного фиксированного колеса, тремя постоянными параметрами α , β , l . Требуется дополнительный параметр γ , чтобы охарактеризовать то направление, в проекции на которое скорость точки контакта равна нулю. Пусть γ — это угол между плоскостью колеса и соответствующим направлением (рис. 4). Тогда соответствующая связь имеет вид

$$[-\sin(\alpha + \beta + \gamma) \quad \cos(\alpha + \beta + \gamma) \quad l \cos(\beta + \gamma)]R(\theta)\dot{\xi} + r \cos \gamma \dot{\varphi} = 0. \quad (9)$$

С. Ограничения на подвижность робота. Рассмотрим теперь обобщенный мобильный робот с N колесами, причем N включает в себя колеса каждого из четырех перечисленных типов. Мы будем использовать соответствующие индексы для того, чтобы характеризовать колеса определенного класса: f — для традиционных фиксированных колес, c — для традиционных центрально ориентируемых колес, oc — для традиционных нецентрально ориентируемых колес и sw — для омниколес. Тогда число соответствующих

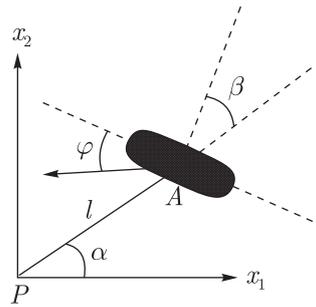


Рис. 4. Омниколеса.

колес каждого типа будет обозначаться N_f , N_c , N_{oc} , N_{sw} , причем $N_f + N_c + N_{oc} + N_{sw} = N$. Конфигурация робота на плоскости полностью описывается следующими векторами координат.

- Позиционные координаты

$$\xi(t) \triangleq \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ \theta(t) \end{pmatrix},$$

необходимые для описания положения корпуса робота в плоскости движения.

- Угловые координаты: $\beta_c(t)$ — углы ориентации центрально ориентируемых колес, $\beta_{oc}(t)$ — углы ориентации нецентрально ориентируемых колес.
- Вращательные координаты

$$\varphi(t) \triangleq \begin{pmatrix} \varphi_f(t) \\ \varphi_c(t) \\ \varphi_{oc}(t) \\ \varphi_{sw}(t) \end{pmatrix}$$

для описания вращения всех колес относительно соответствующих им горизонтальных осей вращения.

Полный набор позиционных, угловых и вращательных координат ξ , β_c , β_{oc} и φ принято называть конфигурационными координатами КМР. Ясно, что общее число конфигурационных координат равно $N_f + 2N_c + 2N_{oc} + N_{sw} + 3$.

С учетом этих обозначений, связи, наложенные на систему, могут быть записаны в матричной форме:

$$J_1(\beta_c, \beta_{oc})R(\theta)\dot{\xi} + J_2\dot{\varphi} = 0, \quad (10)$$

$$C_1(\beta_c, \beta_{oc})R(\theta)\dot{\xi} + C_2\dot{\beta}_{oc} = 0. \quad (11)$$

где введены следующие обозначения:



а)

$$J_1(\beta_c, \beta_{oc}) \triangleq \begin{pmatrix} J_{1f} \\ J_{1c}(\beta_c) \\ J_{1oc}(\beta_{oc}) \\ J_{1sw} \end{pmatrix},$$

где J_{1f} , J_{1c} , J_{oc} , J_{sw} — матрицы размером $(N_f \times 3)$, $(N_c \times 3)$, $(N_{oc} \times 3)$ и $(N_{sw} \times 3)$ соответственно, явный вид которых без труда выводится из уравнений связей (3), (5), (7) и (9). J_{1f} и J_{sw} — постоянные матрицы, тогда как коэффициенты матриц J_{1c} и J_{1oc} зависят от времени, поскольку содержат в явном виде углы $\beta_c(t)$ и $\beta_{oc}(t)$. Матрица J_2 — постоянная $(N \times N)$ -матрица, у которой на диагонали стоят радиусы соответствующих колес, за исключением омниколес, радиусы которых умножаются на $\cos \gamma$.

б)

$$C_1(\beta_c, \beta_{oc}) \triangleq \begin{pmatrix} C_{1f} \\ C_{1c}(\beta_c) \\ C_{1oc}(\beta_{oc}) \end{pmatrix}, \quad C_2 \triangleq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ C_{2oc} \end{pmatrix},$$

где C_{1f} , C_{1c} , C_{1oc} — матрицы размером $(N_f \times 3)$, $(N_c \times 3)$, $(N_{oc} \times 3)$, явный вид строк которых легко получается из рассмотрения связей (4), (6) и (8). Матрица C_{1f} является постоянной, тогда как C_{1c} и C_{1oc} зависят от времени. C_{2oc} — диагональная матрица, на диагонали которой стоят длины d всех N_{oc} нецентрально ориентируемых колес.

Введем теперь следующее предположение, касающееся конфигурации омниколес.

Предположение 1. Для каждого омниколеса $\gamma \neq \frac{\pi}{2}$. Значение $\gamma = \frac{\pi}{2}$ соответствует направлению, ортогональному плоскости колеса, поэтому обращение в нуль скорости в проекции на это направление приводит к тому, что омниколесо оказывается аналогичным традиционному колесу. Следовательно, теряются основные преимущества омниколеса перед традиционным.

Рассмотрим теперь $(N_f + N_c)$ первых связей из (11) и запишем их в явном виде:

$$C_{1f}R(\theta)\dot{\xi} = 0, \quad (12)$$

$$C_{1c}(\beta_c)R(\theta)\dot{\xi} = 0, \quad (13)$$

Эти связи означают, что вектор $R(\theta)\dot{\xi}$ принадлежит нуль-пространству матрицы $C_1(\beta_c)$ следующего вида:

$$C_1^*(\beta_c) = \begin{pmatrix} C_{1f} \\ C_{1c}(\beta_c) \end{pmatrix}, \quad (14)$$

$$R(\theta)\dot{\xi} \in \mathcal{N}[C_1^*(\beta_c)]. \quad (15)$$

Очевидно, что ранг этой матрицы $\text{rank}[C_1^*(\beta_c)] \leq 3$. Если $\text{rank}[C_1^*(\beta_c)] = 3$, то $R(\theta)\dot{\xi} = 0$, и никакое движение робота по плоскости невозможно! Вообще говоря, ограничения подвижности робота связаны с рангом матрицы $[C_1^*]$. Это соображение детально обсуждается ниже.

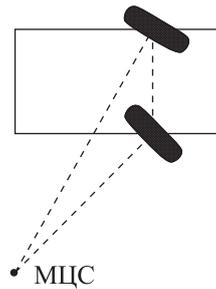


Рис. 5. Мгновенный центр скоростей.

Но прежде чем обсудить это соображение, важно заметить, что условия (12) и (13) имеют интересную геометрическую интерпретацию. В каждый момент времени движение робота по плоскости может рассматриваться как мгновенное вращение вокруг мгновенного центра скоростей (МЦС), положение которого относительно корпуса робота может изменяться со временем. Следовательно, в каждый момент времени вектор скорости любой точки корпуса будет ортогонален прямой, соединяющей данную точку и МЦС. В частности, это утверждение будет справедливым для центров традиционных фиксированных колес и центров традиционных центрально ориентируемых колес. Это означает, что в каждый момент времени горизонтальные оси вращения всех традиционных фиксированных и центрально ориентируемых колес пересекаются в одной точке — МЦС. Этот факт проиллюстрирован на рис. 5 и соответствует условию $\text{rank}[C_1^*(\beta_c)] \leq 2$.

Очевидно, что ранг матрицы $C_1^*(\beta_c)$ зависит от конструкции мобильного робота. Определим *степень мобильности* δ_m мобильного робота по формуле

$$\delta_m = \dim \mathcal{N}[C_1^*(\beta_c)] = 3 - \text{rank}[C_1^*(\beta_c)].$$

Исследуем теперь случай $\text{rank}[C_{1f}] = 2$, который соответствует ситуации, когда рассматриваемый робот имеет по меньшей мере 2 фиксированных колеса или, если их число превосходит 2, то их горизонтальные оси пересекаются в МЦС, а положение самого МЦС *фиксировано* относительно корпуса робота. Очевидно, что в этом случае единственным возможным движением робота является движение по окружности с центром в МЦС. Очевидно также, что робот с таким ограничением подвижности является практически непригодным для решения промышленных задач, и поэтому мы в дальнейшем будем предполагать, что $\text{rank}[C_{1f}] \leq 1$. Более того, мы предположим, что робот является невырожденным в следующем смысле:

Предположение 2. Мобильный робот является невырожденным, если

1. $\text{rank}[C_{1f}] \leq 1$,
2. $\text{rank}[C_1^*(\beta_c)] = \text{rank} C_{1f} + \text{rank} C_{1c}(\beta_c) \leq 2$.

Эти предположения эквивалентны следующим условиям.

1. Если мобильный робот имеет более одного традиционного фиксированного колеса (т.е. $N_f > 1$), то все эти колеса расположены на одной общей оси.
2. Центры традиционных центрально ориентируемых колес не принадлежат оси, на которой расположены центры традиционных фиксированных колес.

3. Число $\text{rank}[C_{1c}(\beta_c)] \leq 2$ равно числу традиционных центрально ориентируемых колес, которые могут поворачиваться одно независимо от другого для того, чтобы обеспечить нужную ориентацию робота. Это число мы назовем *степенью поворотности* δ_s :

$$\delta_s = \text{rank}[C_{1c}(\beta_c)].$$

Число и выбор таких δ_s поворотных колес очевидно является привилегией разработчика того или иного робота. Если мобильный робот снабжен более чем δ_s традиционными центрально ориентируемыми колесами (т. е. $N_c > \delta_s$), то движение этих дополнительных колес должно быть согласовано таким образом, чтобы в каждый момент времени обеспечить существование МЦС.

Отсюда следует, что практический интерес представляют лишь *пять* невырожденных структур. Все они перечислены ниже.

1. Степень мобильности δ_m удовлетворяет неравенствам

$$1 \leq \delta_m \leq 3 \quad (16)$$

(верхняя граница очевидна; нижняя граница означает, что мы рассматриваем только случай, когда движение возможно, т. е. $\delta_m \neq 0$).

2. Степень поворотности δ_s удовлетворяет неравенствам

$$0 \leq \delta_s \leq 2 \quad (17)$$

(верхняя граница достигается лишь в случае роботов, не имеющих фиксированных колес (т. е. $N_f = 0$); нижняя граница соответствует случаю роботов, не имеющих центрально ориентируемых колес ($N_c = 0$)).

3. Выполняется следующее неравенство:

$$2 \leq \delta_m + \delta_s \leq 3 \quad (18)$$

(случай $\delta_m + \delta_s = 1$ не рассматривается, поскольку он соответствует ситуации, когда робот движется по окружности с центром в **неподвижном** МЦС, как было показано нами ранее; случаи ($\delta_m \geq 2, \delta_s = 2$) исключены из рассмотрения, поскольку в соответствии с *предположением 2* из условия $\delta_s = 2$ следует, что $\delta_m = 1$).

Следовательно, существует только пять типов КМР, соответствующих различным парам значений δ_m и δ_s , удовлетворяющим неравенствам (16), (17) и (18). Все они перечислены в таблице:

δ_m	3	2	2	1	1
δ_s	0	0	1	1	2

В дальнейшем мы будем различать роботы по конструкции, говоря «мобильный робот типа (δ_m, δ_s) ». Ниже кратко представлены основные особенности конструкции мобильных роботов, относящихся к каждому из перечисленных типов

- **Тип (3, 0).** $\delta_m = \dim \mathcal{N}(C_1^*(\beta_c)) = 3, \delta_s = 0$. Роботы этого типа *не имеют* традиционных фиксированных колес ($N_f = 0$). Они *не имеют* также и центрально ориентируемых колес ($N_c = 0$). Такие роботы носят название *омнимобильные роботы*, поскольку на плоскости они обладают полной подвижностью. Другими словами, в каждый

момент времени они могут двигаться по плоскости в любом направлении без дополнительной переориентации. В противоположность этому типу роботов, оставшиеся 4 типа имеют ограниченную подвижность. Примерами omnimobильных роботов являются URANUS, описанный в [9], и UCL, описанный в [1].

- **Тип (2, 0).** $\delta_m = \dim \mathcal{N}(C_1^*(\beta_c)) = \dim \mathcal{N}(C_{1f}) = 2$, $\delta_s = 0$. Роботы этого типа *не имеют* традиционных центрально ориентируемых колес ($N_c = 0$). Они могут иметь либо одно традиционное фиксированное колесо, либо несколько традиционных фиксированных колес, расположенных на одной оси (иначе $\text{rank}[C_{1f}]$ был бы больше 1). Подвижность робота данного типа ограничена в том смысле, что для любой допустимой траектории $\xi(t)$ скорость $\dot{\xi}(t)$ должна принадлежать двумерному распределению, порожденному векторными полями $R^T(\theta)s_1$ и $R^T(\theta)s_2$, где s_1 и s_2 — два *постоянных* вектора (т. е. s_1 и s_2 имеют постоянные компоненты), порождающих $\mathcal{N}(C_{1f})$. К этому классу относится хорошо известный робот HILARE, описанный в [4].
- **Тип (2, 1).** $\delta_m = \dim \mathcal{N}(C_1^*(\beta_c)) = \dim \mathcal{N}(C_{1c}(\beta_c)) = 2$, $\delta_s = 1$. Роботы этого типа *не имеют* традиционных фиксированных колес ($N_f = 0$), но имеют по меньшей мере *одно* традиционное центрально ориентируемое колесо ($N_c \geq 1$). Если имеется более одного центрально ориентируемого колеса, то ориентация колес должна быть согласована в том смысле, что должно выполняться условие $\text{rank}[C_{1c}(\beta_c)] = \delta_s = 1$. Скорость $\dot{\xi}(t)$ должна принадлежать двумерному распределению, порожденному векторными полями $R^T(\theta)s_1(\beta_c)$ и $R^T(\theta)s_2(\beta_c)$, где $s_1(\beta_c)$ и $s_2(\beta_c)$ — два вектора, порождающие $\mathcal{N}(C_{1c}(\beta_c))$, компоненты которых зависят от угла (β_c) одного (произвольно выбранного) из традиционных центрально ориентируемых колес.
- **Тип (1, 1).** $\delta_m = \dim \mathcal{N}(C_1^*(\beta_c)) = 1$, $\delta_s = 1$. Роботы этого типа имеют одно или несколько традиционных фиксированных колес, расположенных на одной оси. Они имеют также одно или несколько традиционных центрально ориентируемых колес, однако ни у одного из этих колес центр *не должен* лежать на оси, проходящей через центры традиционных фиксированных колес (в противном случае движение такого робота невозможно). Ориентация традиционных центрально ориентируемых колес согласована таким образом, чтобы выполнялось условие $\text{rank}[C_{1c}(\beta_c)] = \delta_s = 1$. Скорость $\dot{\xi}(t)$ должна принадлежать одномерному распределению, параметризованному углом, определяющим ориентацию одного (произвольно выбранного) из традиционных центрально ориентируемых колес. Мобильные роботы, построенные на модели традиционного автомобиля (называемые, как правило, *робокарами*), принадлежат к этому классу. Примерами роботов, относящихся к этому классу, могут служить также роботы HERO 1 и AVATAR, описанные в [14, 15].
- **Тип (1, 2).** $\delta_m = \dim \mathcal{N}(C_1^*(\beta_c)) = \dim \mathcal{N}(C_{1c}(\beta_c)) = 1$, $\delta_s = 2$. Роботы этого типа *не имеют* традиционных фиксированных колес ($N_f = 0$). Они имеют по меньшей мере *два* традиционных центрально ориентируемых колеса ($N_c \geq 2$). Если имеется больше двух центрально ориентируемых колес, то их ориентация должна быть согласована таким образом, чтобы выполнялось условие $\text{rank}[C_{1c}(\beta_c)] = \delta_s = 2$. Скорость $\dot{\xi}(t)$ должна принадлежать одномерному распределению, параметризованному углами ориентации двух (выбранных произвольно) традиционных центрально ориентируемых колес робота. Типичный пример робота этого класса — робот KLUDGE [16].

III. Примеры

В этой части мы представим шесть конкретных примеров мобильных роботов, наиболее точно соответствующих каждому из пяти невырожденных типов, описанных выше. При этом мы ограничимся рассмотрением лишь *трехколесных* мобильных роботов.

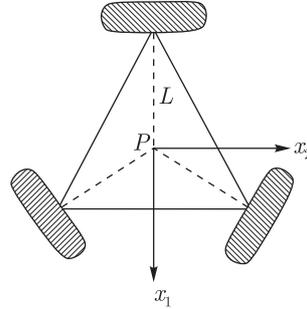


Рис. 6. Омнимобильный робот — тип (3,0). Три омниколеса.

Как было показано в части II-B, колеса мобильного робота описываются (самое большее) шестью постоянными параметрами:

1. тремя углами α , β , γ и
2. длинами трех отрезков l , r , d .

Для каждого из примеров мы представим таблицу, содержащую значения этих параметров, соответствующие данному типу робота, а также представим различные матрицы J и C , входящие в уравнения связей (10)–(11).

Однако мы будем предполагать, что радиусы r и расстояния d одинаковы для всех колес во всех примерах, т. е. для каждого из примеров мы будем уточнять только значения α , β , γ , l .

ПРИМЕР 1: тип (3,0). Омнимобильный робот с шведскими колесами. Рассматриваемый робот (см. рис. 6) имеет три омниколеса, расположенных в вершинах корпуса, имеющего форму равностороннего треугольника (см., например, [1]):

Колеса	α	β	γ	l
1sw	$\pi/3$	0	0	L
2sw	π	0	0	L
3sw	$5\pi/3$	0	0	L

Связи имеют вид (10), где

$$J_1 = [J_{1sw}] = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & L \\ 0 & -1 & L \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & L \end{pmatrix}, \quad J_2 = \text{diag}(r).$$

ПРИМЕР 2: тип (3,0). Омнимобильный робот с нецентрально ориентируемыми колесами. Этот робот имеет три традиционных нецентрально ориентируемых колеса, как показано на рисунке 7.

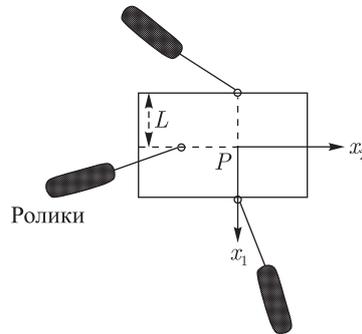


Рис. 7. Омнимобильный робот — тип (3,0). Три нецентрально ориентируемых колеса.

Связи имеют вид (10) и (11), где

$$J_1 = [J_{1oc}(\beta_{oc})] = \begin{pmatrix} -\sin \beta_{oc1} & \cos \beta_{oc1} & L \cos \beta_{oc1} \\ \sin \beta_{oc2} & -\cos \beta_{oc2} & L \cos \beta_{oc2} \\ \cos \beta_{oc3} & \sin \beta_{oc3} & L \cos \beta_{oc3} \end{pmatrix},$$

$$J_2 = \text{diag}(r),$$

$$C_1 = [C_{1oc}(\beta_{oc})] = \begin{pmatrix} \cos \beta_{oc1} & \sin \beta_{oc1} & d + L \sin \beta_{oc1} \\ -\cos \beta_{oc2} & -\sin \beta_{oc2} & d + L \sin \beta_{oc2} \\ \sin \beta_{oc3} & -\cos \beta_{oc3} & d + L \sin \beta_{oc3} \end{pmatrix},$$

$$C_2 = [C_{2oc}] = \text{diag}(d).$$

Колеса	α	β	l
1oc	0	–	L
2oc	π	–	L
3oc	$3\pi/2$	–	L

ПРИМЕР 3: тип (2,0). Робот с двумя традиционными фиксированными колесами, расположенными на одной оси, и одним традиционным нецентрально ориентируемым колесом (см. рис. 8).



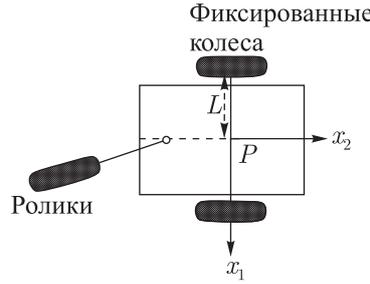


Рис. 8. Робот типа (2, 0).

Колеса	α	β	1
1f	0	0	L
2f	π	0	L
3oc	$3\pi/2$	-	L

Связи имеют вид (10) и (11), где

$$J_1 = \begin{pmatrix} J_{1f} \\ J_{1oc} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & L \\ 0 & -1 & L \\ \cos \beta_{oc3} & \sin \beta_{oc3} & L \cos \beta_{oc3} \end{pmatrix},$$

$$J_2 = \text{diag}(r), \tag{1}$$

$$C_1 = \begin{pmatrix} C_{1f} \\ C_{1oc} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ \sin \beta_{oc3} & -\cos \beta_{oc3} & d + L \sin \beta_{oc3} \end{pmatrix},$$

$$C_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ d \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Заметим, что связи, выражающие отсутствие проскальзывания для каждого из фиксированных колес, эквивалентны между собой (см. первые две строки матрицы C_1). Следовательно, матрица C_1^* имеет ранг, равный 1, что и требовалось.

ПРИМЕР 4: тип (2,1). Робот с одним традиционным центрально ориентируемым колесом и двумя традиционными нецентрально ориентируемыми колесами (рис. 9).



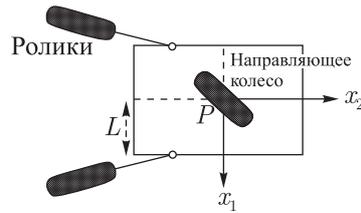


Рис. 9. Робот типа (2, 1).

Колеса	α	β	l
1c	0	–	0
2oc	$\frac{5\pi}{4}$	–	$\sqrt{2L}$
3oc	$\frac{7\pi}{4}$	–	$\sqrt{2L}$

Связи имеют вид (10) и (11), где

$$J_1 = \begin{pmatrix} J_{1c}(\beta_{c1}) \\ J_{1oc}(\beta_{oc2}, \beta_{oc3}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin \beta_{c1} & \cos \beta_{c1} & l \cos \beta_{c1} \\ \sin(\beta_{oc2} + \frac{\pi}{4}) & -\cos(\beta_{oc2} + \frac{\pi}{4}) & l \cos \beta_{oc2} \\ -\sin(\beta_{oc3} - \frac{\pi}{4}) & \sin(\beta_{oc3} - \frac{\pi}{4}) & l \cos \beta_{oc3} \end{pmatrix},$$

$$J_2 = \text{diag}(r),$$

$$C_1 = \begin{pmatrix} C_{1c}(\beta_{c1}) \\ C_{1oc}(\beta_{oc2}, \beta_{oc3}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \beta_{c1} & \sin \beta_{c1} & l \sin \beta_{c1} \\ -\cos(\beta_{oc2} + \frac{\pi}{4}) & -\sin(\beta_{oc2} + \frac{\pi}{4}) & d + l \sin \beta_{oc2} \\ \cos(\beta_{oc3} - \frac{\pi}{4}) & \sin(\beta_{oc3} - \frac{\pi}{4}) & d + l \sin \beta_{oc3} \end{pmatrix},$$

$$C_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \text{diag } d \end{pmatrix}.$$

ПРИМЕР 5: тип (1,1). Робот с двумя традиционными фиксированными колесами на одной оси и одним традиционным центрально ориентируемым колесом (модель типа трехколесного детского велосипеда, см. рис. 10).

Колеса	α	β	l
1f	0	0	L
2f	π	0	L
3c	$3\pi/2$	–	L

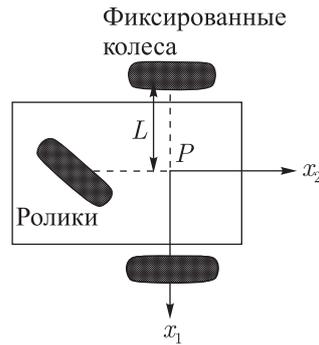


Рис. 10. Робот типа (1, 1).

Связи имеют вид (10) и (11), где

$$J_1 = \begin{pmatrix} J_{1f} \\ J_{1c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & L \\ 0 & -1 & L \\ \cos \beta_{c3} & \sin \beta_{c3} & L \cos \beta_{c3} \end{pmatrix},$$

$$J_2 = \text{diag}(r),$$

$$C_1 = \begin{pmatrix} C_{1f} \\ C_{1c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ \sin \beta_{c3} & -\cos \beta_{c3} & L \sin \beta_{c3} \end{pmatrix},$$

$$C_2 = 0.$$

ПРИМЕР 6: тип (1,2). Робот с двумя традиционными центрально ориентируемыми колесами и одним традиционным нецентрально ориентируемым колесом (рис. 11).

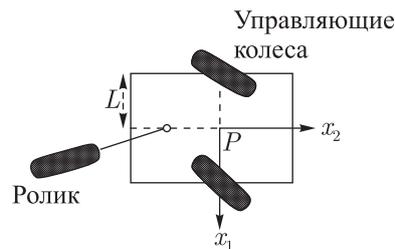


Рис. 11. Робот типа (1, 2).

Колеса	α	β	l
1c	0	–	L
2c	π	–	L
3oc	$3\pi/2$	–	L

Связи имеют вид (10) и (11), где

$$J_1 = \begin{pmatrix} J_{1c}(\beta_{c1}, \beta_{c2}) \\ J_{1c}(\beta_{oc3}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin \beta_{c1} & \cos \beta_{c1} & L \cos \beta_{c1} \\ \sin \beta_{c2} & -\cos \beta_{c2} & L \cos \beta_{c2} \\ \cos \beta_{oc3} & \sin \beta_{oc3} & L \cos \beta_{oc3} \end{pmatrix},$$

$$J_2 = \text{diag}(r), \quad (3)$$

$$C_1 = \begin{pmatrix} C_{1c}(\beta_{c1}, \beta_{c2}) \\ C_{1oc}(\beta_{oc3}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \beta_{c1} & \sin \beta_{c1} & L \sin \beta_{c1} \\ -\cos \beta_{c2} & -\sin \beta_{c2} & L \sin \beta_{c2} \\ \sin \beta_{oc3} & -\cos \beta_{oc3} & d + L \sin \beta_{oc3} \end{pmatrix},$$

$$C_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ C_{2oc} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ d \end{pmatrix}. \quad (4)$$

IV. Позиционная кинематическая модель

В этой части анализ подвижности робота, обсуждавшийся в части II-C, переформулирован в терминах пространства состояний. Такой подход является более удобным для дальнейшего развития.

Нами было показано (см. (15)), что независимо от типа мобильного робота, скорость $\dot{\xi}(t)$ должна принадлежать распределению Δ_c , определяемому как

$$\dot{\xi}(t) \in \Delta_c \triangleq \text{span}\{\text{col } R^T(\theta)\Sigma(\beta_c)\} \quad \forall t,$$

где столбцы матрицы $\Sigma(\beta_c)$ образуют базис в пространстве $\mathcal{N}J[C_1^*(\beta_c)]$:

$$\mathcal{N}J[C_1^*(\beta_c)] = \text{span}\{\text{col } \Sigma(\beta_c)\}.$$

Это утверждение является тривиальной аналогией следующего утверждения: для всех t существует зависящий от времени вектор $\eta(t)$, такой, что

$$\dot{\xi} = R^T(\theta)\Sigma(\beta_c)\eta. \quad (23)$$

Размерность распределения Δ_c и, следовательно, вектора $\eta(t)$, равна степени подвижности δ_m робота. Очевидно, что в случае когда робот не имеет традиционных центрально ориентируемых колес ($\delta_s = 0$), матрица Σ является постоянной и выражение (23) сводится к:

$$\dot{\xi} = R^T(\theta)\Sigma\eta. \quad (24)$$

В противоположном случае ($\delta_s \geq 1$) матрица Σ явным образом зависит от угловых координат β_c и соотношения (23) можно дополнить следующим образом:

$$\dot{\xi} = R^T(\theta)\Sigma(\beta_c)\eta, \quad (25)$$

$$\dot{\beta}_c = \zeta. \quad (26)$$



Представление (24) или (25)–(26) может рассматриваться как представление системы в пространстве состояний. Такое представление называется *позиционной кинематической моделью*. Здесь роль обобщенных координат играют позиционные координаты ξ и (возможно) угловые координаты β_c , тогда как η и ζ (выражения, однородные по скоростям) могут рассматриваться как управляющие воздействия, линейно входящие в модель. Однако такая интерпретация должна рассматриваться с большой осторожностью, поскольку истинные управляющие воздействия мобильного робота представляют собой моменты, создаваемые электродвигателями, установленными на роботе. Таким образом, кинематическая модель в пространстве состояний является подсистемой общей динамической модели, которая будет представлена в части VI.

В следующих параграфах мы представляем позиционные кинематические модели, соответствующие примерам из части III, и показываем, что эти модели являются универсальными и для них невозможно понижение порядка. Эти соображения позволят нам провести исследование управляемости и стабилизируемости позиционных кинематических моделей *всех* КМР.

А. Пять универсальных моделей КМР. Перепишем уравнения позиционной кинематической модели следующим образом:

$$\dot{z} = B(z)u, \quad (27)$$

где обозначено

$$z \triangleq \xi, \quad B(z) \triangleq R^T(\theta)\Sigma, \quad u \triangleq \eta,$$

если $N_c = 0$, или

$$z \triangleq \begin{pmatrix} \xi \\ \beta_c \end{pmatrix}, \quad B(z) \triangleq \begin{pmatrix} R(T)(\theta)\Sigma(\beta_c) & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}, \quad u \triangleq \eta \begin{pmatrix} \eta \\ \zeta \end{pmatrix}.$$

если $N_c \geq 0$.

В таблице 1 представлен частный вид позиционных координат z , матрицы $\Sigma(\beta_c)$ или Σ и уравнений позиционной кинематической модели для каждого из примеров, представленных в части III.

Возникает естественный вопрос: является ли построенная для каждого класса КМР позиционная кинематическая модель *универсальной*, т. е. пригодной для всех роботов, относящихся к этому классу? На этот вопрос можно дать утвердительный ответ: для каждого невырожденного робота всегда возможно выбрать начало подвижной (жестко связанной с корпусом робота) системы координат — точку P и подвижные оси \vec{x}_1, \vec{x}_2 , проходящие через эту точку так, чтобы позиционная кинематическая модель данного робота имела вид, в точности соответствующий виду, представленному в таблице 1. А именно:

- для робота типа $(3, 0)$ начало P подвижной системы координат и ее оси \vec{x}_1, \vec{x}_2 могут быть выбраны произвольно,
- для робота типа $(2, 0)$ за начало координат P выбирается одна из точек на оси фиксированных колес, а ось \vec{x}_1 направлена вдоль этой оси (см., например, рис. 8),
- для робота типа $(2, 1)$ выберем одно из центрально ориентируемых колес и начало P подвижной системы координат поместим в его центре, а оси \vec{x}_1, \vec{x}_2 направим произвольно (см., например, рис. 9),

Таблица 1. Пять универсальных позиционных кинематических моделей КМР

Тип	Пример	z	$\Sigma(\beta_c)$ или Σ	Уравнения позиционной кинематической модели $\dot{z} = B(z)u$
(3, 0)	1 и 2	x y θ	единичная матрица	$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{pmatrix}$
(2, 0)	3	x y θ	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin \theta & 0 \\ \cos \theta & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix}$
(2, 1)	4	x y θ β_{c1}	$\begin{pmatrix} -\sin \beta_{c1} & 0 \\ \cos \beta_{c1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\beta}_{c1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin(\theta + \beta_{c1}) & 0 & 0 \\ \cos(\theta + \beta_{c1}) & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \zeta_1 \end{pmatrix}$
(1, 1)	5	x y θ β_{c3}	$\begin{pmatrix} 0 \\ L \sin \beta_{c3} \\ \cos \beta_{c3} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\beta}_{c3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -L \sin \theta \sin \beta_{c3} & 0 \\ L \cos \theta \sin \beta_{c3} & 0 \\ \cos \beta_{c3} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \zeta_1 \end{pmatrix}$
(1, 2)	6	x y θ β_{c1} β_{c2}	$\begin{pmatrix} -2L \sin \beta_{c1} \sin \beta_{c2} \\ L \sin(\beta_{c1} + \beta_{c2}) \\ \sin(\beta_{c2} - \beta_{c1}) \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\beta}_{c1} \\ \dot{\beta}_{c2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -L(\sin \beta_{c1} \sin(\theta + \beta_{c2}) + \sin \beta_{c2} \sin(\theta + \beta_{c1})) & 0 & 0 \\ L(\sin \beta_{c1} \cos(\theta + \beta_{c2}) + \sin \beta_{c2} \cos(\theta + \beta_{c1})) & 0 & 0 \\ \sin(\beta_{c2} - \beta_{c1}) & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{pmatrix}$

- для робота типа (1, 1) выберем одно из центрально ориентируемых колес, из центра выбранного колеса опустим перпендикуляр на ось фиксированных колес, точка пересечения этого перпендикуляра с осью фиксированных колес и будет точкой P ; ось \vec{x}_1 будет направлена по прямой, соединяющей центры фиксированных колес, а ось \vec{x}_2 — по направлению перпендикуляра; здесь L — расстояние, равное длине данного перпендикуляра (см., например, рис. 10),
- для робота типа (1, 2) выберем два центрально ориентируемых колеса; начало координат P выбирается как точка, находящаяся на половине длины отрезка, соединяющего центры выбранных колес, ось \vec{x}_1 направлена вдоль этого отрезка; обозначим через L половину длины отрезка (см., например, рис. 11).

В. Подвижность, поворотность и маневренность. Позиционная кинематическая модель КМР, представленная выше, позволяет обсудить в дальнейшем вопросы маневренности мобильного робота. Степень подвижности δ_m мобильного робота является первым критерием маневренности: она равна числу степеней свободы, которые могут быть

непосредственно управляемы при помощи воздействий η , без переориентации центрально ориентируемых колес. Интуитивно ясно, что это число равно числу «степеней свободы» мобильного робота, которые он может иметь, если ни одно из его колес не поворачивается. Это число δ_m не равно общему числу «степеней свободы» робота, которыми можно управлять посредством воздействий η и ζ . Фактически же общее число управляемых степеней свободы равно сумме $\delta_M = \delta_m + \delta_s$, и именно это число мы будем называть *степенью маневренности*. Оно включает в себя дополнительно δ_s степеней свободы, управляемых посредством воздействий ζ . Однако действие ζ на позиционные координаты ξ не является прямым, так как оно происходит только через угловые координаты β_c , связанные с ζ интегральными соотношениями. Это обстоятельство отражает тот факт, что изменение ориентации центрально ориентируемых колес не может быть достигнуто мгновенно.

Маневренность КМР зависит от δ_M , но также она зависит от того, как именно входят δ_m и δ_s в δ_M . Поэтому для того, чтобы охарактеризовать маневренность, нам понадобятся два показателя: δ_M и δ_m , или δ_m и δ_s , как раньше, при описании пяти различных классов мобильных роботов в таблице 1.

Два мобильных робота с одинаковым значением δ_M , но разными значениями δ_m , не являются эквивалентными. Для роботов с $\delta_M = 3$ можно свободно установить положение МЦС или непосредственно с помощью управляющих воздействий η для роботов типа $(3, 0)$, или за счет ориентации одного или двух центрально ориентируемых колес для роботов типов $(2, 1)$ и $(1, 2)$. Для роботов с $\delta_M = 2$ МЦС должен лежать на прямой (являющейся осью фиксированных колес). Его положение на прямой устанавливается либо непосредственно, как в случае роботов типа $(2, 0)$, либо за счет переориентации центрально ориентируемого колеса, как в случае роботов типа $(1, 1)$.

Аналогично, два КМР с одним и тем же значением δ_m , но разными δ_M не являются эквивалентными: робот, у которого δ_M больше, является более маневренным. Сравним, например, роботы типов $(1, 1)$ и $(1, 2)$, у которых $\delta_m = 1$, но $\delta_M = 2$ для первого робота и $\delta_M = 3$ для второго робота. Положение МЦС для робота типа $(1, 2)$ может быть установлено произвольно в плоскости путем соответствующей ориентации двух центрально ориентируемых колес, тогда как для робота типа $(1, 1)$ МЦС должен находиться на прямой, проходящей через центры фиксированных колес, а его положение на этой оси определяется поворотом центрально ориентируемого колеса. Так как переориентация поворотных колес обычно происходит очень быстро, особенно для небольших роботов, предназначенных для движения внутри зданий, с практической точки зрения следует, что робот типа $(1, 2)$ является более маневренным, чем робот типа $(1, 1)$.

Очевидно, что идеальной ситуацией представляется случай omnimobileного робота, когда $\delta_m = \delta_M = 3$.

С. Невозможность понижения порядка для позиционной кинематической модели. В данном параграфе мы задаемся вопросом о возможности понижения порядка для позиционной кинематической модели (27). Пространство состояний модели допускает понижение порядка, если существует такая замена координат, что некоторые из новых координат тождественно равны нулю на всех движениях системы. Для нелинейной динамической системы без сноса, каковой является система (27), возможность понижения порядка связана с инволютивным замыканием $\bar{\Delta}$ распределения Δ , выраженного в локальных координатах следующим образом:

$$\bar{\Delta}(z) \triangleq \text{span}\{\text{col } B(z)\}.$$

Хорошо известно следствие из теоремы Фробениуса, утверждающее, что порядок системы может быть понижен, только если $\dim \bar{\Delta} < \dim z$.

В этом параграфе мы докажем, что для позиционной кинематической модели невырожденного робота (см. *предположение 2*) понижение порядка невозможно ни в каких случаях. Чтобы установить этот результат, мы рассмотрим сначала частный случай робота типа (1, 1), позиционная кинематическая модель которого имеет вид (см. табл. 1)

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\beta}_{c3} \end{pmatrix}}_z = \underbrace{\begin{pmatrix} -L \sin \theta \sin \beta_{c3} & 0 \\ L \cos \theta \sin \beta_{c3} & 0 \\ \cos \beta_{c3} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{B(z)} \underbrace{\begin{pmatrix} \eta_1 \\ \zeta_1 \end{pmatrix}}_u. \quad (28)$$

В этом случае базис распределения $\bar{\Delta}(z)$ выглядит следующим образом:

$$\bar{\Delta}(z) = \text{span}\{b_1(z), b_2(z), b_3(z), b_4(z)\},$$

где $b_1(z), b_2(z)$ — столбцы матрицы $B(z)$:

$$b_1(z) = \begin{pmatrix} -L \sin \theta \sin \beta_{c3} \\ L \cos \theta \sin \beta_{c3} \\ \cos \beta_{c3} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b_2(z) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

а

$$b_3(z) = [b_1(z), b_2(z)] = \begin{pmatrix} L \sin \theta \cos \beta_{c3} \\ -L \cos \theta \cos \beta_{c3} \\ \sin \beta_{c3} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b_4(z) = [b_1(z), b_3(z)] = \begin{pmatrix} L \cos \theta \\ L \sin \theta \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Мы можем убедиться, что $\text{rank } B(z) = \delta_m + \delta_s = 2$ и $\dim \bar{\Delta}(z) = \dim z = 4$ всюду в пространстве состояний. Отсюда следует, что кинематическая модель (28) робота типа (1, 1) не допускает понижения порядка.

Более того, рассуждая аналогично, можно доказать невозможность понижения порядка позиционной кинематической модели любого из типов роботов, перечисленных выше. Это означает, что все кинематические модели, перечисленные в таблице 1, не допускают понижения порядка. Проведенный анализ сформулируем в виде свойства.



Свойство 1.

1) Для позиционной кинематической модели

$$\dot{z} = B(z)u$$

колесного мобильного робота

а) матрица $B(z)$ имеет полный ранг для всех z :

$$\text{rank } B(z) = \delta_m + \delta_s,$$

б) инволютивное распределение $\bar{\Delta}(z) \triangleq \text{inv span} \{ \text{col } B(z) \}$ имеет постоянную максимальную размерность

$$\dim \bar{\Delta}(z) = 3 + \delta_s$$

для всех z .

2) Следовательно, позиционная кинематическая модель КМР не допускает понижения порядка ни для одного из типов мобильных роботов. И это свойство не зависит от выбора обобщенных координат для описания модели.

Д. Управляемость, возможность линеаризации и стабилизации по методу обратной связи. В этом параграфе мы резюмируем основные свойства, касающиеся управляемости и стабилизируемости по методу обратной связи позиционных кинематических моделей КМР. Прежде всего, исследуем линейное приближение в окрестности произвольного положения равновесия $\bar{z} \triangleq (\bar{\xi}, \bar{\beta}_c)$.

Здесь под равновесием понимается такое состояние робота, когда он находится в покое с заданными позиционными координатами $\bar{\xi}$ и заданной ориентацией $\bar{\beta}_c$ центрально ориентируемых колес. Очевидно, что скорости изменения всех переменных равны нулю: $\bar{u} = 0$.

Свойство 2. Ранг матрицы управляемости для линейного приближения позиционной кинематической модели $\dot{z} = B(z)u$ в окрестности состояния равновесия равен $\delta_m + \delta_s$.

Действительно, линейное приближение в окрестности равновесия $(\bar{z}, \bar{u} = 0)$ имеет вид

$$\frac{d}{dt}(z - \bar{z}) = B(\bar{z})u.$$

Отсюда следует, что ранг матрицы управляемости в этом случае равен рангу матрицы $B(\bar{z})$, которая, согласно *свойству 1*, имеет ранг $\delta_m + \delta_s$ для любого положения равновесия \bar{z} .

Таким образом, линейное приближение позиционной кинематической модели для *омнимобильных* роботов типа $(3, 0)$ является полностью управляемым, поскольку число δ_m в точности равно размерности пространства состояний. Однако линейное приближение позиционных кинематических моделей роботов с ограниченной подвижностью (роботов типов $(2, 0)$, $(2, 1)$, $(1, 1)$ и $(1, 2)$, $\delta_m \leq 2$) не является управляемым, поскольку $\delta_m + \delta_s < 3 + \delta_s = \dim z$.

Это свойство, однако, не мешает роботам с ограниченной подвижностью быть **управляемыми** в соответствии с нашей физической интуицией.

Свойство 3. Позиционная кинематическая модель КМР $\dot{z} = B(z)u$ управляема.

Доказательство следует из того факта, что инволютивное распределение $\bar{\Delta}(z)$ имеет постоянный максимальный ранг, что влечет за собой управляемость для систем без сноса (см. [17, глава 3]).

На практике это свойство означает, что мобильный робот всегда может быть переведен за конечное время из любого начального положения ξ_0 в любое конечное положение ξ_f за счет управления скоростью при помощи управляющих воздействий $u = (\eta, \zeta)^T$.

Рассмотрим теперь вопрос существования управления обратной связью $u(z)$, способного линейаризовать в конкретном положении z^* позиционную кинематическую модель (27).

Для omnimobильных роботов ответ на этот вопрос очевиден. Например:

$$u(z) = B(z)^{-1}A(z - z^*),$$

где A — произвольная гурвицева (т. е. удовлетворяющая критерию Гурвица) матрица. Очевидно, что выбранный закон управления является гладким *линейаризующим* законом управления по методу обратной связи, переводящим мобильный робот в состояние z^* . При этом разница между текущим состоянием робота z и конечным состоянием z^* является экспоненциально убывающей. Действительно, при подстановке выбранного закона управления в систему (27) последняя приобретает вид

$$\frac{d}{dt}(z - z^*) = A(z - z^*)$$

с гурвицевой матрицей A . Следовательно, в случае omnimobильного робота система уравнений (27) полностью линейаризуема по методу обратной связи и кинематика таких роботов несколько похожа на кинематику полностью управляемых роботизированных манипуляторов.

Для роботов с ограниченной подвижностью ситуация представляется менее благоприятной, поскольку, как следует из *свойства 2*, их позиционные кинематические модели не являются линейаризуемыми по всем переменным состояниям (для полной линейаризуемости необходима управляемость линейного приближения, детали см. [18, глава 4]). Но зададимся вопросом о том, какова размерность максимальной подсистемы, которая может быть линейаризуема статической обратной связью. Или выясним, может ли позиционная кинематическая модель быть полностью линейаризуемой при помощи динамической обратной связи. Используем для этого следующие свойства.

Свойство 4.

- 1) Размерность наибольшей линейаризуемой статической обратной связью подсистемы позиционной кинематической модели $\dot{z} = B(z)u$ равна $\delta_m + \delta_s$. Этот результат является прямым следствием применения к данной системе алгоритма Марино [19].
- 2) Позиционная кинематическая модель $\dot{z} = B(z)u$ роботов с ограниченной подвижностью является «дифференциально плоской системой» в смысле определения [7] и [20]. Отсюда следует, что данная система полностью линейаризуема посредством динамической обратной связи, обеспечиваемой ненулевой частью η вектора управляющих воздействий u . Обсуждение этого свойства, включающее в себя представление в явном виде соответствующих линейаризующих замен для каждого типа робота, может быть найдено в [21].

Другой интересной задачей является задача построения управления, действующего по методу обратной связи и переводящего робот из любого начального положения $z_0 = (\xi_0, \beta_{c0})^T$ в заданное состояние равновесия $\bar{z} = (\bar{\xi}, \bar{\beta})^T$, причем это состояние равновесия



должно быть сделано устойчивым и притягивающим. Здесь снова задача является тривиальной для omnimobile robots, тогда как для роботов с ограниченной подвижностью мы имеем следующее свойство.

Свойство 5.

- 1) Для роботов с ограниченной подвижностью позиционная кинематическая модель $\dot{z} = B(z)u$ не является стабилизируемой посредством непрерывного статического явно не зависящего от времени управления $u(z)$.

Действительно, в этом случае не выполняются необходимые условия теоремы Брокета [22]: отображение $(z, u) \rightarrow B(z)u$ не является отображением в окрестность равновесия $\bar{z} = (\bar{\xi}, \bar{\beta}_c)^T, \bar{u} = 0$.

- 2) Позиционная кинематическая модель является стабилизируемой при помощи непрерывного статического управления $u(z, t)$, явно зависящего от времени.

Этот результат является частным случаем результата о стабилизируемости для систем без сноса, который был получен в работе Корона [23]. Систематическая процедура получения такого стабилизирующего зависящего от времени управления была предложена Пометом [24]. Она применима для всех позиционных кинематических моделей КМР, потому что в каждом случае (см. табл. 1) один из столбцов матрицы $B(z)$ имеет вид $(0, \dots, 0, 1)^T$.

V. Конфигурационная кинематическая модель

До сих пор мы использовали только подмножество связей (10) и (11), а именно, ту их часть, которая отвечает за фиксированные и центрально ориентируемые колеса и выражается соотношениями (12) и (13). Теперь воспользуемся оставшимися связями для того, чтобы получить уравнения, описывающие эволюцию скоростей $\dot{\beta}_{oc}$ и $\dot{\varphi}$ угловых и вращательных координат, которая не была учтена в позиционной кинематической модели (25) и (26).

Непосредственно из уравнений (10) и (11) следует, что

$$\dot{\beta}_{oc} = -C_{2oc}^{-1}C_{1oc}(\beta_{oc})R(\theta)\dot{\xi}, \quad (29)$$

$$\dot{\varphi} = -J_2^{-1}J_1(\beta_c, \beta_{oc})R(\theta)\dot{\xi}. \quad (30)$$

Комбинируя эти уравнения с уравнениями позиционной кинематической модели (25), уравнения состояния для $\dot{\beta}_{oc}$ и $\dot{\varphi}$ можно записать в виде

$$\dot{\beta}_{oc} = D(\beta_{oc})\Sigma(\beta_c)\eta, \quad (31)$$

$$\dot{\varphi} = E(\beta_c, \beta_{oc})\Sigma(\beta_c)\eta, \quad (32)$$

где $D(\beta_{oc})$ и $E(\beta_c, \beta_{oc})$ определяются следующим образом:

$$D(\beta_{oc}) \triangleq -C_{2oc}^{-1}C_{1oc}(\beta_{oc}),$$

$$E(\beta_c, \beta_{oc}) \triangleq -J_2^{-1}J_1(\beta_c, \beta_{oc}).$$

Заметим также, что эти матрицы удовлетворяют следующим уравнениям:

$$J_1(\beta_c, \beta_{oc}) + J_2E(\beta_c, \beta_{oc}) = 0, \quad (33)$$

$$C_{oc1}(\beta_{oc}) + C_{oc2}D(\beta_{oc}) = 0. \quad (34)$$

Определяя q как вектор конфигурационных координат, т. е.

$$q \triangleq \begin{pmatrix} \xi \\ \beta_c \\ \beta_{oc} \\ \varphi \end{pmatrix}, \quad (35)$$

можно представить уравнения, описывающие эволюцию этих координат, в форме одного векторного уравнения, которое следует из (25), (26), (31) и (32) и называется *конфигурационной кинематической моделью*

$$\dot{q} = S(q)u, \quad (36)$$

где

$$S(q) \triangleq \begin{pmatrix} R^T(\theta)\Sigma(\beta_c) & 0 \\ 0 & I \\ D(\beta_{oc})\Sigma(\beta_c) & 0 \\ E(\beta_c, \beta_{oc})\Sigma(\beta_c) & 0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad u \triangleq \begin{pmatrix} \eta \\ \zeta \end{pmatrix}. \quad (37)$$

Уравнение (36) имеет стандартный вид кинематической модели системы, подчиненной линейным по скоростям дифференциальным связям. Теперь мы свяжем эту постановку со стандартной теорией неголономных механических систем (см., например, [25–27]).

Возможность понижения порядка в системе (36) напрямую связана с размерностью инволютивного замыкания $\bar{\Delta}_1$ распределения Δ_1 , порожденного в локальных координатах q столбцами матрицы $S(q)$, т. е.

$$\Delta_1(q) \triangleq \text{span}\{\text{col}(S(q))\}. \quad (38)$$

Отсюда немедленно следует, что

$$\begin{aligned} \delta_m + N_c &= \dim(\Delta_1) \leq \dim(\text{inv}(\Delta_1)) \leq \dim(q) = \\ &= 3 + N_c + N_{oc} + N. \end{aligned}$$

Определим степень неголономности M мобильного робота по формуле

$$M = \dim(\text{inv}(\Delta_1)) - (\delta_m + N_c).$$

Данное число M представляет число дифференциальных связей, которые не являются интегрируемыми и, следовательно, не могут быть исключены из уравнений движения, независимо от обобщенных координат, выбранных для описания системы. Следует отметить, что это число определяется особенностями конструкции робота, и потому является одним и тем же для всех роботов одинакового типа (относящихся к одному и тому же классу).

С другой стороны, для каждого конкретного выбора обобщенных координат, число координат, которые могут быть исключены из уравнений движения посредством интегрирования связей, равно разности между $\dim(q)$ и $\dim(\text{inv} \Delta_1)$.



Свойство 6.

- 1) Конфигурационная кинематическая модель КМР $\dot{q} = S(s)u$ является неголономной, т. е. $M > 0$ для всех типов мобильных роботов.
- 2) Конфигурационная кинематическая модель КМР $\dot{q} = S(q)u$ допускает понижение порядка, т. е. $\dim(q) > \dim(\text{inv } \Delta_1)$ для всех типов мобильных роботов.

Данное утверждение не противоречит утверждению о невозможности понижения порядка в позиционной кинематической модели (25)–(26), которая рассматривалась в части IV-A. Понижение порядка в системе (36) означает, что найдется хотя бы одна гладкая функция переменных $(\xi, \beta_c, \beta_{oc}, \varphi)$, явно зависящая по крайней мере от одной из переменных (β_{oc}, φ) и являющаяся постоянной вдоль всех траекторий системы, согласующихся со связями (10) и (11).

Проиллюстрируем это обсуждение двумя примерами.

ПРИМЕР 1: тип (3,0). Омнимобильный робот с тремя шведскими колесами (рис. 6). Для данного робота $\delta_m = 3$ и конфигурационными координатами являются

$$q = (x, y, \theta, \beta_{oc3}, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)^T.$$

Конфигурационная модель характеризуется матрицей $S(q)$, где

$$S(q) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2r} & \frac{1}{2r} & \frac{L}{r} \\ 0 & -\frac{1}{r} & \frac{L}{r} \\ \frac{\sqrt{3}}{2r} & \frac{1}{2r} & \frac{L}{r} \end{pmatrix}.$$

Легко проверить, что

$$\dim(\Delta_1) = 3 \quad \text{и} \quad \dim(\text{inv } \Delta_1) = 5.$$

Следовательно, степень неголономности равна $5 - 3 = 2$, тогда как число координат, которые можно исключить из уравнений посредством интегрирования связей, равно $6 - 5 = 1$. Действительно, анализируя структуру конфигурационной кинематической модели, нетрудно убедиться в том, что

$$\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2 + \dot{\varphi}_3 + \frac{3L}{r}\dot{\theta}.$$

Это означает, что выражение $\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \frac{3L}{r}\theta$ постоянно вдоль любой траектории, согласованной со связями. Это обстоятельство дает возможность исключить одну из четырех координат $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \theta$, выразив ее через три другие.

ПРИМЕР 2: тип (2,0). Робот с двумя фиксированными колесами и одним нецентрально ориентированным колесом (рис. 8).

Для этого робота $\delta_m = 2$ и конфигурационными координатами являются

$$q = (x, y, \theta, \beta_{oc3}, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)^T.$$

Матрица $S(q)$ имеет вид

$$S(q) = \begin{pmatrix} -\sin(\theta) & 0 \\ \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{1}{d} \cos \beta_{oc} & -\frac{1}{d} (d + L \sin \beta_{oc}) \\ -\frac{1}{r} & -\frac{L}{r} \\ \frac{1}{r} & -\frac{L}{r} \\ -\frac{1}{r} \sin \beta_{oc} & -\frac{L}{r} \cos \beta_{oc} \end{pmatrix}.$$

Легко убедиться, что

$$\dim(\Delta_1) = 2 \quad \text{и} \quad \dim(\text{inv } \Delta_1) = 6.$$

Отсюда следует, что степень неголономности данного робота равна $6 - 2 = 4$, а число координат, которые могут быть исключены из уравнений путем интегрирования связей, равно $7 - 6 = 1$. Из рассмотрения конфигурации робота следует, что

$$\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2 = \frac{-2L}{r} \dot{\theta},$$

Следовательно, выражение $(\varphi_1 + \varphi_2 + \frac{2L}{r}\theta)$ является постоянным вдоль всех траекторий, согласованных со связями.

VI. Конфигурационная динамическая модель

Целью этой части статьи является вывод общей динамической модели КМР в пространстве состояний. Эта модель описывает динамические соотношения между конфигурационными координатами ξ , β_{oc} , φ , β_c и моментами, создаваемыми двигателями, которые установлены на корпусе робота.

Эта общая модель в пространстве состояний будет называться *конфигурационной динамической моделью*. Она состоит из шести видов уравнений состояния: по одному виду на каждую из координат ξ , β_{oc} , φ , β_c и по одному для каждой из внутренних координат η и ζ , введенных в части IV. Уравнения состояния для ξ , β_{oc} , β_c и φ были выведены в части V при формировании уравнений конфигурационной кинематической модели. Уравнения состояния для η и ζ будут получены в части VI-A с использованием лагранжева формализма. Конфигурация и механизация (оснащение двигателями) мобильного робота будут обсуждаться в части VI-B.



А. Вывод конфигурационной динамической модели. Предположим, что робот оснащен двигателями, которые могут воздействовать как на ориентацию ориентируемых колес (угловые координаты β_c и β_{oc}), так и на вращение колес (вращательные координаты φ). Моменты, создаваемые двигателями, обозначим следующим образом:

- τ_φ — моменты, управляющие вращением колес,
- τ_{oc} — моменты, управляющие ориентацией нецентрально ориентируемых колес, и
- τ_c — моменты, управляющие ориентацией центрально ориентируемых колес.

Используя уравнения Лагранжа с неопределенными множителями, можно записать динамические уравнения движения (всего $3 + N_{oc} + N + N_c$ уравнений) мобильного робота следующим образом:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\xi}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \xi} = R^T(\theta)J_1^T(\beta_{c1}, \beta_{oc})\lambda + R^T(\theta)C_1^T(\beta_{c1}, \beta_{oc})\mu, \quad (39)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\beta}_{oc}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \beta_{oc}} = C_2^T\mu + \tau_{oc}, \quad (40)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = J_2^T\lambda + \tau_\varphi, \quad (41)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\beta}_c}\right) - \frac{\partial T}{\partial \beta_c} = \tau_c, \quad (42)$$

где через T обозначена кинетическая энергия, а λ и μ — неопределенные множители Лагранжа, связанные с уравнениями связей (10) и (11) соответственно.

Для того чтобы исключить из системы все лагранжевы множители, мы поступим следующим образом. Умножим первые три группы (39)–(41) уравнений Лагранжа на соответствующие матрицы $\Sigma^T(\beta_c)R(\theta)$, $\Sigma^T(\beta_c)D(\beta_{oc})$ и $\Sigma^T(\beta_c)E(\beta_{c1}, \beta_{oc})$, а затем просуммируем полученные соотношения. В итоге мы получим две группы уравнений, которые не содержат неопределенных множителей λ и μ в силу (33) и (34):

$$\begin{aligned} \Sigma^T(\beta_c)R(\theta)[T]_\xi + D(\beta_{oc})[T]_{\beta_{oc}} + E(\beta_c, \beta_{oc})[T]_\varphi = \\ = \Sigma^T(\beta_c)\{D^T(\beta_{oc})\tau_{oc} + E^T(\beta_c, \beta_{oc})\tau_\varphi\}, \end{aligned} \quad (43)$$

$$[T]_{\beta_c} = \tau_c. \quad (44)$$

Здесь для сокращения выкладок мы ввели следующее обозначение:

$$[T]_\psi \triangleq \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \psi}.$$

Кинетическая энергия КМР может быть записана следующим образом:

$$\begin{aligned} T = \dot{\xi}^T R^T(\theta)[M(\beta_{oc})R(\theta)\dot{\xi} + 2V(\beta_{oc})\dot{\beta}_{oc} + 2W\dot{\beta}_c] + \\ + \dot{\beta}_{oc}I_{oc}\dot{\beta}_{oc} + \dot{\varphi}I_\varphi\dot{\varphi} + \dot{\beta}_cI_c\dot{\beta}_c \end{aligned}$$

при подходящем определении матриц $M(\beta_{oc})$, $V(\beta_{oc})$, W , I_{oc} , I_φ , I_c , коэффициенты которых зависят от распределения масс и моментов инерции различных твердых тел (корпуса

и колес), составляющих мобильный робот. Уравнения состояния для η и ζ могут быть теперь получены (после довольно громоздких вычислений) подстановкой выражения для T в уравнения (43)–(44) и последующим исключением скоростей $\dot{\xi}$, $\dot{\beta}_{oc}$, $\dot{\varphi}$, $\dot{\beta}_c$ и ускорений $\ddot{\xi}$, $\ddot{\beta}_{oc}$, $\ddot{\varphi}$, $\ddot{\beta}_c$ при помощи кинематических уравнений (25), (26), (31), (32) и их производных.

Общая конфигурационная динамическая модель КМР в пространстве состояний примет следующий вид:

$$\dot{\xi} = R^T(\theta)\Sigma(\beta_c)\eta, \quad (45)$$

$$\dot{\beta}_{oc} = \zeta, \quad (46)$$

$$\dot{\beta}_c = D(\beta_{oc})\Sigma(\beta_c)\eta, \quad (47)$$

$$H_1(\beta_c, \beta_{oc})\dot{\eta} + \Sigma^T(\beta_c)V(\beta_{oc})\dot{\zeta} + f_1(\beta_c, \beta_{oc}, \eta, \zeta) = \Sigma^T(\beta_c)[D^T(\beta_{oc})\tau_{oc} + E^T(\beta_c, \beta_{oc})\tau_\varphi], \quad (48)$$

$$V^T(\beta_c)\Sigma(\beta_c)\dot{\eta} + I_c\dot{\zeta} + f^2(\beta_c, \beta_{oc}, \eta, \zeta) = \tau_c, \quad (49)$$

$$\dot{\varphi} = E(\beta_{oc}, \beta_c)\Sigma(\beta_c)\eta, \quad (50)$$

где

$$\begin{aligned} H_1(\beta_c, \beta_{oc}) \triangleq & \Sigma^T(\beta_c)[M(\beta_{oc}) + D^T(\beta_{oc})V^T(\beta_{oc}) + \\ & + V(\beta_{oc})D(\beta_{oc}) + D^T(\beta_{oc})I_{oc}D(\beta_{oc}) + \\ & + E^T(\beta_c, \beta_{oc})I_\varphi E(\beta_c, \beta_{oc})]\Sigma(\beta_c). \end{aligned}$$

В. Конфигурация и механизация (оснащение двигателями). В общей конфигурационной динамической модели (45)–(50), векторы τ_φ , τ_{oc} и τ_c представляют собой все моменты двигателей, которые потенциально могут быть приложены к системе для обеспечения вращения и ориентации колес мобильного робота. Однако на практике обычно используется сравнительно небольшое число двигателей. Это говорит о том, что большинство из компонент τ_φ , τ_{oc} и τ_c тождественно равны нулю.

В этой части внимание будет уделено тому, чтобы в явном виде указать такую конфигурацию оснащения робота двигателями, которая обеспечивала бы полную маневренность робота при наименьшем возможном числе двигателей.

Прежде всего, ясно, что все центрально ориентируемые колеса должны быть снабжены двигателями, обеспечивающими их ориентацию (иначе эти колеса будут играть роль фиксированных колес).

Более того, для обеспечения полной маневренности мобильного робота к его конструкции следует добавить N_m дополнительных двигателей (где $N_m \geq \delta_m$), чтобы, с одной стороны, обеспечить вращение части колес, а с другой стороны — обеспечить ориентацию некоторых нецентрально ориентируемых колес. Вектор моментов, создаваемых этими двигателями, обозначим τ_m и запишем следующее равенство:

$$\begin{pmatrix} \tau_{oc} \\ \tau_\varphi \end{pmatrix} = P\tau_m, \quad (51)$$

где P — это $(N_{oc} + N) \times N_m$ -матрица, осуществляющая выборку компонент вектора $(\tau_{oc}, \tau_\varphi)$ для их эффективного использования в качестве управляющих воздействий.

Используя (51), мы видим, что уравнения (48) общей динамической модели могут быть переписаны следующим образом:

$$H_1(\beta_c, \beta_{oc})\dot{\eta} + \Sigma^T(\beta_c)V(\beta_{oc})\dot{\zeta} + f_1(\beta_c, \beta_{oc}, \eta, \zeta) =$$

$$= B(\beta_c, \beta_{oc}) P \tau_m,$$

где $B(\beta_c, \beta_{oc}) \triangleq \Sigma^T(\beta_c) [D^T(\beta_{oc}) \quad E^T(\beta_c, \beta_{oc})]$.

Введем теперь следующее предположение.

Предположение 3. Конфигурация оснащения мобильного робота двигателями должна быть такой, чтобы матрица

$$B(\beta_c, \beta_{oc}) P$$

имела полный ранг для всех $(\beta_c, \beta_{oc}) \in \mathbb{R}^{N_c + N_{oc}}$.

Укажем теперь минимально допустимое оснащение двигателями мобильного робота для каждого из типов роботов, указанных в части III.

- **Тип (3, 0)**, пример 1 (рис. 6). Омнимобильный робот с тремя шведскими колесами. В этом случае матрица B является постоянной и приводится к виду

$$B = \Sigma^T E^T = -J_3^{-1} J_1 = -\frac{1}{r} \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & L \\ 0 & -1 & L \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & L \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что эта матрица является невырожденной. Поэтому можно сделать вывод, что минимально допустимое оснащение двигателями для такого мобильного робота состоит в том, чтобы обеспечить двигателем каждое из колес.

- **Тип (3, 0)**, пример 2 (рис. 7). Омнимобильный робот с тремя нецентрально ориентируемыми колесами. В данном случае матрица $B(\beta_{oc})$ записывается следующим образом:

$$B(\beta_{oc}) = \Sigma^T [D^T(\beta_{oc}) \quad E^T(\beta_c, \beta_{oc})],$$

где

$$\Sigma^T D^T(\beta_{oc}) = -\frac{1}{d} \begin{pmatrix} \cos \beta_{oc1} & -\cos \beta_{oc2} & \sin \beta_{oc3} \\ \sin \beta_{oc1} & -\sin \beta_{oc2} & -\cos \beta_{oc3} \\ d + L \sin \beta_{oc1} & d + L \sin \beta_{oc2} & d + L \sin \beta_{oc3} \end{pmatrix}$$

и

$$\Sigma^T E^T(\beta_{oc}) = -\frac{1}{r} \begin{pmatrix} -\sin \beta_{oc1} & \sin \beta_{oc2} & \cos \beta_{oc3} \\ \cos \beta_{oc1} & \cos \beta_{oc2} & \sin \beta_{oc3} \\ L \cos \beta_{oc1} & L \cos \beta_{oc2} & L \cos \beta_{oc3} \end{pmatrix}.$$

Можно убедиться, рассматривая матрицу $B(\beta_{oc})$, что эта матрица не содержит 3 столбцов, которые являются независимыми при всех $(\beta_{oc1}, \beta_{oc2}, \beta_{oc3})$. Поэтому необходимо использовать (как минимум) $N_m = 4$ двигателя. Допустимая конфигурация оснащения робота двигателями может быть, например, такой: по 2 двигателя (один для ориентации и один для вращения) на два из трех колес (при этом третье колесо не снабжено никакими двигателями и самоориентируется в процессе движения).

Например, если колеса 1 и 2 оснащены двигателями именно по этому принципу, то матрица P , осуществляющая выбор управляющих моментов, имеет вид

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

и матрица $B(\beta_{oc})P$ имеет полный ранг ($= 3$) для любой конфигурации мобильного робота.

- **Тип (2, 0)**, пример 3 (рис. 8). Робот с двумя фиксированными колесами (колеса 1 и 2) и одним нецентрально ориентируемым колесом (колесо 3).

Матрица $B(\beta_{oc})$ записывается следующим образом:

$$B(\beta_{oc3}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{d} \cos \beta_{oc3} & -\frac{1}{r} & \frac{1}{r} & -\frac{1}{r} \sin \beta_{oc3} \\ -\frac{1}{d}(d + L \sin \beta_{oc3}) & \frac{L}{r} & -\frac{L}{r} & -\frac{L}{r} \cos \beta_{oc3} \end{pmatrix}.$$

В данном случае допустимыми являются несколько конфигураций мобильного робота с двумя двигателями:

- два двигателя для вращения фиксированных колес 1 и 2 (одно колесо вращается независимо от другого),
- один двигатель для обеспечения ориентации колеса 3 и второй — для вращения колеса 2 (или колеса 3) при условии, что $d > L \frac{\sqrt{2}}{2}$,
- два двигателя, один из которых обеспечивает ориентацию, а другой — вращение колеса 3 при условии, что $d < L$.

Соответствующие матрицы P для каждого из случаев имеют следующий вид:

$$\text{a) } P = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{b) } P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{c) } P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- **Тип (2, 1)**, пример 4 (рис. 9). Робот с одним центрально ориентируемым колесом (колесо 3) и двумя нецентрально ориентируемыми колесами (колеса 1 и 2).

В этом случае мы прежде всего нуждаемся в двигателе, обеспечивающем ориентацию центрально ориентируемого колеса. Матрица $B(\beta_c, \beta_{oc})$ записывается в виде

$$B(\beta_c, \beta_{oc}) = \Sigma^T(\beta_c)[D^T(\beta_{oc}) \quad E^T(\beta_c, \beta_{oc})],$$

где

$$\Sigma^T(\beta_c) = \begin{pmatrix} 0 & L \sin \beta_{c3} & \cos \beta_{c3} \\ L & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$D^T(\beta_{oc}) = \begin{pmatrix} \cos \beta_{oc1} & -\cos \beta_{oc2} \\ \sin \beta_{oc1} & \sin \beta_{oc2} \\ d + L \sin \beta_{oc1} & d + L \sin \beta_{oc2} \end{pmatrix},$$

$$E^T(\beta_c, \beta_{oc}) = -\frac{1}{r} \begin{pmatrix} \cos \beta_{c3} & -\sin \beta_{oc1} & L \sin \beta_{oc2} \\ \sin \beta_{c3} & \cos \beta_{oc1} & -\cos \beta_{oc2} \\ L \cos \beta_{c3} & L \cos \beta_{oc1} & L \cos \beta_{oc2} \end{pmatrix}.$$

Столбцы 1 и 3 матрицы $B(\beta_c, \beta_{oc})$ являются независимыми при $d > L\sqrt{2}$. То же самое можно сказать о столбцах 2 и 3. Следовательно, две допустимые конфигурации могут быть получены, если использовать второй двигатель для вращения центрально ориентируемого колеса (колесо 3), а третий двигатель — для обеспечения ориентации либо колеса 1, либо колеса 2.

Две соответствующих матрицы P имеют вид:

$$1) P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad 2) P = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- **Тип (1, 1)**, пример 5 (рис. 10). Робот с двумя фиксированными колесами и одним центрально ориентируемым колесом.

Первый двигатель нужен для обеспечения ориентации центрально ориентируемого колеса. Матрица $B(\beta_c)$ приводится к вектору:

$$B = [\sin \beta_{c3} + \cos \beta_{c3} \quad -\sin \beta_{c3} + \cos \beta_{c3} \quad 1].$$

Так как $\delta_m = 1$, то *предположение 3* будет выполняться при условии, что второй двигатель отвечает за вращение центрально ориентируемого колеса. Матрица P имеет

вид

$$P = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- **Тип (1, 2)**, пример 6 (рис. 11).

Робот с двумя центрально ориентируемыми колесами и одним нецентрально ориентируемым колесом.

Для обеспечения ориентации двух центрально ориентируемых колес требуется два двигателя. Матрица $B(\beta_c, \beta_{oc})$ записывается следующим образом:

$$B(\beta_c, \beta_{oc}) = \Sigma^T(\beta_c)[D^T(\beta_{oc}) \quad E^T(\beta_c, \beta_{oc})],$$

где

$$\Sigma(\beta_c) = \begin{pmatrix} -2L \sin \beta_{c1} \sin \beta_{c2} \\ L \sin(\beta_{c1} + \beta_{c2}) \\ 2L \sin \beta_{c2} \cos \beta_{c1} - \sin(\beta_{c1} + \beta_{c2}) \end{pmatrix},$$

$$D^T(\beta_{oc}) = \begin{pmatrix} -d^{-1} \sin \beta_{oc3} \\ d^{-1} \cos \beta_{oc3} \\ -1 - Ld^{-1} \sin \beta_{oc3} \end{pmatrix},$$

$$E^T(\beta_c, \beta_{oc}) = -\frac{1}{r} \begin{pmatrix} -\sin \beta_{c1} & \sin \beta_{c2} & \cos \beta_{oc3} \\ \cos \beta_{c1} & -\cos \beta_{c2} & \sin \beta_{oc3} \\ L \cos \beta_{c1} & L \cos \beta_{c2} & L \cos \beta_{oc3} \end{pmatrix}.$$

Поскольку $\delta_m = 1$, то достаточно найти один столбец матрицы $B(\beta_c, \beta_{oc})$, который был бы ненулевым на всех движениях системы. Однако найти такой столбец невозможно. Поэтому необходимо использовать два дополнительных двигателя, например, для вращения колес 1 и 2 с матрицей

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Окончательно все полученные результаты сведем в одну таблицу:

Тип	Количество двигателей
(δ_m, δ_s)	$N_m + N_s$
Тип (3, 0)	3 или 4
Тип (2, 0)	2
Тип (2, 1)	3
Тип (1, 1)	2
Тип (1, 2)	4

Конфигурационная динамическая модель КМР может быть переписана в следующей компактной форме:

$$\dot{q} = S(q)u, \quad (52)$$

$$H(\beta)\dot{u} + f(\beta, u) = F(\beta)\tau_0, \quad (53)$$

где введены обозначения

$$\beta \triangleq \begin{pmatrix} \beta_c \\ \beta_{oc} \end{pmatrix},$$

$$q \triangleq \begin{pmatrix} \xi \\ \beta \\ \varphi \end{pmatrix},$$

$$u \triangleq \begin{pmatrix} \eta \\ \zeta \end{pmatrix},$$

$$H(\beta) \triangleq \begin{pmatrix} H_1(\beta_c, \beta_{oc}) & \Sigma^T(\beta_c)V(\beta_{oc}) \\ V^T(\beta_{oc})\Sigma(\beta_c) & I_c \end{pmatrix},$$

$$F(\beta, u) \triangleq \begin{pmatrix} f_1(\beta_c, \beta_{oc}, \eta, \zeta) \\ f_2(\beta_c, \beta_{oc}, \eta, \zeta) \end{pmatrix},$$

$$F(\beta) \triangleq \begin{pmatrix} B(\beta_c, \beta_{oc})P & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix},$$

$$\tau_0 \triangleq \begin{pmatrix} \tau_m \\ \tau_s \end{pmatrix}.$$

Из предположения 3 следует, что матрица $F(\beta)$ имеет полный ранг при всех β . Это свойство важно для анализа поведения КМР и для построения управляющих устройств (контроллеров) обратной связи. Оно используется, прежде всего, для приведения общей

модели в пространстве состояний к более простой и удобной форме при помощи гладкой статической обратной связи.

Свойство 7. Конфигурационная динамическая модель КМР (52) и (53) эквивалентна относительно преобразования обратной связи (причем обратная связь является гладкой, статической и не зависящей явно от времени) следующей системе:

$$\dot{q} = S(q)u, \quad (54)$$

$$\dot{u} = v, \quad (55)$$

где v представляют множество δ_m дополнительных управляющих воздействий.

Действительно, из *свойства 1* легко следует, что всюду в пространстве состояний хорошо определена следующая гладкая, статическая, не содержащая явным образом время обратная связь:

$$\tau_0 = F^\dagger(\beta)[H(\beta)u - f(\beta, u)], \quad (56)$$

где F^\dagger обозначает произвольную левую обратную матрицу для матрицы $F(\beta, u)$.

Подчеркнем здесь, что с эксплуатационной точки зрения вызывает интерес дальнейшее упрощение системы (54)–(55). В контексте задач планирования движения или построения управления с обратной связью очевидно, что пользователь заинтересован в первую очередь в том, чтобы управлять положением робота (а именно, координатами $\xi(t)$) при помощи управляющих воздействий v . Заметим, что в силу этого, мы можем намеренно проигнорировать координаты β_{oc} и φ и ограничить свое внимание рассмотрением следующей позиционной динамической модели.

Позиционная динамическая модель:

$$\dot{z} = B(z)u, \quad (57)$$

$$\dot{u} = v, \quad (58)$$

где, напомним, $z \triangleq (\xi, \beta_c)^T$ и $u \triangleq (\eta, \zeta)^T$.

Данная позиционная динамическая модель полностью описывает динамику системы между управляющими воздействиями v и положением ξ . Координаты β_{oc} и φ явно не входят в уравнения (57)–(58), однако важно отметить, что они фактически скрыты в обратной связи (56).

Разница между позиционной динамической моделью и позиционной кинематической моделью заключается в том, что теперь переменные u представляют собой только часть переменных вектора состояния. Это обуславливает существование сноса в системе и тот факт, что управляющие векторные поля являются постоянными.

Позиционная динамическая модель наследует все структурные свойства позиционной кинематической модели, обсуждавшиеся в части IV-C.

Свойство 8.

- a) Позиционная динамическая модель является универсальной и не допускает понижения порядка.
- b) Позиционная динамическая модель является локально управляемой на малых временах.
- c) Для роботов с ограниченной подвижностью позиционная динамическая модель не стабилизируется при помощи непрерывной статической обратной связи, не зависящей от времени, но она может быть стабилизируема зависящей от времени обратной связью.



- d) Размерность наибольшей линеаризуемой обратной связью подсистемы позиционной динамической модели равна $2(\delta_m + \delta_s)$, поэтому omnidirectional роботы являются системами, линеаризуемыми обратной связью.
- e) Позиционная динамическая модель является дифференциально плоской системой.

VII. Выводы

Доказано, что в соответствии с ограничениями подвижности КМР, вызванными наличием кинематических связей, все КМР могут быть разделены на 5 классов со специфической структурой кинематических и динамических моделей для каждого класса.

Было представлено четыре модели.

- *Позиционная кинематическая модель* (часть IV), которая является достаточной для того, чтобы описать движение робота в целом. Данная модель является универсальной в том смысле, что все роботы, относящиеся к одному и тому же классу, описываются одной позиционной кинематической моделью.
- *Конфигурационная кинематическая модель* (часть V), описывающая эволюцию всех конфигурационных переменных.
- *Конфигурационная динамическая модель* (часть VI), которая учитывает динамику робота, включая управляющие моменты, создаваемые двигателями.
- *Позиционная динамическая модель* (часть VII), эквивалентная относительно преобразования обратной связи конфигурационной динамической модели. Уравнения данной модели можно получить из позиционной кинематической модели, просто добавив уравнения на управляющие воздействия u .

Управляющие воздействия в кинематических моделях являются однородными по скоростям, тогда как управляющие воздействия в динамических моделях являются либо моментами, либо ускорениями. Позиционные модели являются универсальными, не допускающими понижения порядка и управляемыми. Для управления положением робота достаточно использовать только эти модели. Конфигурационные модели не являются универсальными, они допускают понижение порядка и не являются управляемыми. Они зависят от конкретного устройства робота и позволяют описать эволюцию всех конфигурационных переменных.

Список литературы

- [1] Bastin G., Campion G. On adaptive linearizing control of omnidirectional mobile robots // MTNS-89: Proc. Internat. Symp. on the Mathematical Theory of Networks and Systems (Amsterdam, Netherlands, 1989): Vol. 2 / M. A. Kaashoek, J. H. van Schuppen, A. C. M. Ran (Eds.). (Progress in Systems and Control Theory, vol. 4.) Boston: Birkhäuser, 1990. P. 531–538.
- [2] Samson C., Ait-Abderahim K. Feedback control of a nonholonomic wheeled cart in Cartesian space // Proc. IEEE Internat. Conf. Robotics and Automation (Sacramento, CA, 1991): Vol. 2, pp. 1136–1141.
- [3] Canudas de Wit C., Sørдален O. J. Exponential stabilization of mobile robots with nonholonomic constraints // IEEE Conf. Decision and Control (Brighton, England, 1991), pp. 692–697 (см. также IEEE Transactions on Automatic Control, 1992, vol. 37, no. 11, pp. 1791–1797).

- [4] Laumond J. P. Controllability of a multibody mobile robot // ICAR (Pisa, Italy, 1991), pp. 1033–1038 (см. также IEEE Transactions on Robotics and Automation, 1993, vol. 9, no. 6, pp. 755–763).
- [5] Badreddin E., Mansour M. Fuzzy-tuned state-feedback control of a nonholonomic mobile robot // Proc. of the 12th World Congr. of the IFAC (Sidney, Australia, 1993), vol. 2, pp. 212–215.
- [6] Murray R. M., Sastry S. S. Nonholonomic motion planning: Steering using sinusoids // IEEE Trans. Automat. Contr., 1993, vol. 38, pp. 700–716.
- [7] Rouchon P., Fliess M., Ldvine J., Martin P. Flatness and motion planning: The car with n trailers // Proc. of the 2nd European Control Conf. (Groningen, The Netherlands, 1993), pp. 1518–1522.
- [8] Pomet J. B., Thuillot B., Bastin G., Campion G. A hybrid strategy for the feedback stabilization of nonholonomic mobile robots // IEEE Internat. Conf. Robotics and Automation (Nice, France, 1992), pp. 129–135.
- [9] Muir P. F., Neuman C. P. Kinematic modeling for feedback control of an omnidirectional wheeled mobile robot // Proc. IEEE Conf. Robotics and Automation (Raleigh, NC, 1987), pp. 1772–1778.
- [10] Killough S. M., Pin F. G. Design of an omnidirectional and holonomic wheeled platform design // Proc. IEEE Conf. Robotics and Automation (Nice, France, 1992), pp. 84–90.
- [11] d'Andréa-Novel B., Bastin G., Campion G. Modeling and control of nonholonomic wheeled mobile robots // Proc. IEEE Conf. Robotics and Automation (Sacramento, CA, 1991), pp. 1130–1135.
- [12] Muir P. F., Neuman C. P. Kinematic modeling of wheeled mobile robots // J. Robotic Syst., 1987, vol. 4, no. 2, pp. 281–329.
- [13] Alexander J. C., Maddocks J. H. On the kinematics of wheeled mobile robots // Internat. J. Robotics Res., 1989, vol. 8, no. 5, pp. 15–27.
- [14] Helters C. Ein Heldenleben (or A hero's life) // Robotics Age, 1983, vol. 5, no. 2, pp. 7–16, 44–45.
- [15] Balmer C. Avatar: A home built robot // Robotics Age, 1988, vol. 4, no. 1, pp. 20–25.
- [16] Holland J. M. Rethinking robot mobility // Robotics Age, 1988, vol. 7, no. 1, pp. 26–30.
- [17] Nijmeijer H., van der Schaft A. J. Nonlinear dynamical control systems. New York: Springer, 1990. 492 pp.
- [18] Isidori A. Nonlinear control systems. 2nd ed. Berlin: Springer, 1989. 479 pp.
- [19] Marino R. On the largest feedback linearizable subsystem // Syst. Contr. Lett., 1986, vol. 6, pp. 345–351.
- [20] Martin P. Contribution à l'étude des systèmes différentiellement plats: Ph. D. thesis, École nationale supérieure des mines de Paris, 1992.
- [21] d'Andréa-Novel B., Campion G., Bastin G. Control of nonholonomic wheeled mobile robots by state feedback linearization // Int. J. Robotics Res., 1995, vol. 14, no. 6, pp. 543–559.
- [22] Brockett R. W. Asymptotic stability and feedback stabilization // Differential geometric control theory / R. W. Brockett, R. S. Millmann, H. J. Sussmann (Eds.). Boston: Birkhäuser, 1983. P. 181–191.
- [23] Coron J.-M. Global asymptotic stabilization for controllable systems without drift // Math. Control Signals Systems, 1992, vol. 5, no. 3, pp. 295–312.
- [24] Pomet J. B. Explicit design of time-varying stabilizing control laws for a class of time varying controllable systems without drift // Syst. Contr. Lett., 1992, vol. 18, pp. 147–158.
- [25] Campion G., d'Andréa-Novel B., Bastin G. Controllability and state feedback stabilization of nonholonomic mechanical systems // Advanced Robot Control: Proc. of the Internat. Workshop on Nonlinear and Adaptive Control: Issues in Robotics (France, Grenoble, 1990) / C. Canudas de Wit (Ed.). (Lecture Notes in Control and Information Sciences, vol. 162.) Berlin: Springer, 1990. P. 106–124.
- [26] Bloch A. M., McClamroch N. H., Reyhanoglu M. Control and stabilization of nonholonomic dynamic systems // IEEE Trans. Automat. Contr., 1992, vol. 37, pp. 1746–1757.
- [27] Campion G., d'Andréa-Novel B., Bastin G. Modeling and state feedback control of nonholonomic mechanical systems // IEEE Conf. Decision and Control (Brighton, England, 1991), pp. 1184–1189.

Structural properties and classification on kinematic and dynamic models of wheeled mobile robots

Guy Campion¹, Georges Bastin², Brigitte D'Andréa-Novel³

^{1,2}Centre for Systems Engineering and Applied Mechanics (CESAME)

Universite Catholique de Louvain

B-1348 Louvain-la-Neuve, Belgium

³Centre Automatique et Systemes—École des Mines de Paris

F-77300 Fontainebleau, France

The structure of the kinematic and dynamic models of wheeled mobile robots is analyzed. It is shown that, for a large class of possible configurations, they can be classified into five types, characterized by generic structures of the model equations. For each type of model the following questions are addressed: (ir)reducibility and (non)holonomy, mobility and controllability, configuration of the motorization, and feedback equivalence.

Keywords: wheeled mobile robots, kinematic and dynamic models, nonholonomy, control

Citation: *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2011, vol. 7, no. 4 (Mobile Robots), pp. 733–769 (Russian)

Originally published in: *IEEE Transactions on robotics and automation*, 1996, vol. 12, no. 1, pp. 47–62. © IEEE.