



УДК: 531.36, 62-503.51

MSC 2010: 70E50, 70E60, 93C85, 93D15

О влиянии деформируемости колес на динамику робота с дифференциальным приводом

А. Я. Красинский, Д. Р. Каюмова

В работе рассматривается задача определения минимально необходимого количества параметров деформации шины для адекватного описания динамики колесного экипажа, поскольку, как известно, поведение модели экипажа с твердыми колесами не соответствует реальному. Необходимость включения в рассмотрение того или иного параметра системы предлагается определять проверкой разрешимости задачи стабилизации заданного невозмущенного движения до неасимптотической устойчивости по всем переменным. В данной работе в качестве тестовой задачи выбрана задача стабилизации прямолинейного стационарного движения простейшей и наиболее изученной модели двухколесного мобильного робота с дифференциальным электроприводом. Вычислительным экспериментом с использованием оригинального программного продукта *PyStab* показано, что формальное выполнение критерия управляемости для полной системы не всегда обеспечивает практическую разрешимость задачи стабилизации. В этой ситуации стабилизирующее управление определяется решением методом Н. Н. Красовского линейно-квадратичной задачи для управляемой линейной подсистемы. Для получения заключения об устойчивости в полной нелинейной системе, замкнутой этим управлением, привлекаются методы аналитической механики и нелинейной теории устойчивости.

Исследование динамики робота производится с помощью программного продукта *PyStab*, предназначенного для автоматизации исследования задач устойчивости и стабилизации механических систем. При переходе к численному рассмотрению наряду с *PyStab* применяется ранее разработанный программный продукт *NSA*, поскольку время, затраченное на расчеты, и структура нелинейных членов уравнений возмущенного движения будут зависеть от того, на каком этапе вычислений производится подстановка численных параметров системы.

Ключевые слова: аналитическая механика, устойчивость, стабилизация, робот с дифференциальным приводом, учет деформируемости колес

Получено 1 июля 2011 года

После доработки 5 сентября 2011 года

Красинский Александр Яковлевич
krasinsk@mail.ru

Каюмова Динара Рифатовна
dina.kayumova@gmail.com

ФГБОУ ВПО «Московский государственный университет пищевых производств»
109316, Россия, г. Москва, ул. Талалихина, д. 33



1. Введение

Исследование динамики мобильных роботов не только представляет значительный теоретический интерес, но и является актуальной практической задачей. В зависимости от постановки задачи используется разная точность моделирования. Так, в ряде исследований пренебрегают влиянием ряда конструктивных особенностей роботов (например, наличием рояльных колес), переходных процессов в электродвигателе. Один из возможных вариантов технологий моделирования упругих колес предлагается в [1], где также рассматриваются примеры применения этой технологии для моделирования динамики колесных роботов.

Деформируемое колесо описывается большим числом параметров (существуют модели, для которых это число свыше 120). Разумное сокращение числа степеней свободы и учитываемых параметров [2] не оказывает существенного влияния на целый ряд практически важных характеристик движения, поэтому изучение влияния свойств шины на динамику колесного экипажа является одной из актуальнейших задач как теоретической, так и технической механики. Применение различных теорий качения деформируемого колеса к описанию движения независимых колес, колес автомобилей рассматривается в работах [3–6].

ЗАМЕЧАНИЕ 1. К настоящему моменту создано и продолжает разрабатываться большое число моделей качения деформируемого колеса. Известно два подхода [7] (феноменологический и модельный) к формулированию определяющих уравнений теории нестационарного качения, устанавливающих связь между реакцией в области контакта с опорной поверхностью и фазовыми переменными абсолютно твердого диска колеса. Феноменологический подход основывается на совокупности опытных фактов и гипотез, устанавливающих связь между константами и переменными теории. Внутренняя структура деформируемого колеса и детальный характер взаимодействия элементов деформируемой периферии колеса с опорной поверхностью не рассматриваются. Модельный подход избавляет от необходимости вводить различные гипотезы (это его преимущество), но при его использовании приходится скрупулезно проследить механизм взаимодействия точек периферии колеса в протяженной области контакта с опорной плоскостью, поскольку модель подчиняется известным законам механики. Несмотря на большое разнообразие уже существующих математических моделей шин, до сих пор продолжают появляться новые, что, в частности, связано, с одной стороны, с разработкой шин новых типов, а с другой — с совершенствованием методов математического и компьютерного моделирования сложных систем. Синтез модельного и феноменологического подходов [7] позволяет дать относительно простое феноменологическое изложение результатов, достигнутых в рамках модельного исследования. Очевидно, что константы феноменологической теории одновременно и являются параметрами деформируемого колеса, и зависят от его конструктивных особенностей. Определение указанных параметров представляет собою сложную проблему, и обычно предполагается, что они находятся из опыта. Модельный подход позволяет установить зависимости между константами теории, поскольку все они выражаются через параметры модели колеса. Таким образом, выбрав какие-либо параметры колеса в качестве базовых и воспользовавшись найденными соотношениями между константами, можно найти все остальные параметры в результате реализации соответствующего алгоритма в виде компьютерной программы [7]. При этом для применения теории качения нужно знать значения минимально необходимого набора параметров деформируемого колеса. Согласно этой теории, количество учитываемых параметров деформации (как продольной, так и поперечной) определяется числом учитываемых членов разложения в степенной ряд описания средней линии колеса в области контакта.

Преимуществами феноменологического подхода являются простота использования для аналитических исследований и компьютерного моделирования. Поэтому в качестве модели взаимодействия колес с поверхностью качения выберем теорию [7]. Эта теория является более общей, чем ранее известные теории (И. Рокара, М. Келдыша, Ю. Неймарка – Н. Фуфаева и т. д.), которые получают из нее как частные случаи.



Под роботом с дифференциальным приводом будем понимать мобильный робот с двумя активными колесами, оси качения которых расположены на одной прямой, и одним или несколькими пассивными колесами [8, 9]. Управление роботом осуществляется моментами, создаваемыми независимыми двигателями, находящимися по одному у каждого из активных колес.

Для решения поставленной задачи рассмотрим модель робота с дифференциальным приводом с использованием разных моделей качения, начиная с предельного случая деформируемых колес — твердых — и постепенно усложняя модель взаимодействия колес с плоскостью качения. Для того чтобы можно было сравнивать результаты решения задач стабилизации для роботов с дифференциальным приводом с разными моделями взаимодействия колеса с плоскостью, будем считать их базовые массогабаритные характеристики одинаковыми.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Проведенными вычислительными экспериментами установлено, что при рассмотрении задачи стабилизации прямолинейного стационарного движения робота с дифференциальным приводом для адекватного описания динамики робота достаточно учитывать два параметра поперечной деформации (боковое смещение периферии колеса в точке K пересечения линии наибольшего наклона, проведенной в средней плоскости колеса из его центра, с опорной плоскостью; угол закрутки шины относительно обода) и один параметр продольной деформации (продольное смещение периферии колеса в точке K). При учете меньшего количества параметров деформации критерий управляемости Калмана [10] для рассматриваемой системы не выполняется. Этот факт проверялся применением теорий Рокара и Келдыша к данной задаче. Поэтому далее ограничимся исследованием задач стабилизации модели робота с деформируемыми колесами в предельном случае деформируемых колес (жесткие колеса) и в случае учета двух параметров поперечной и одного параметра продольной деформации шины.

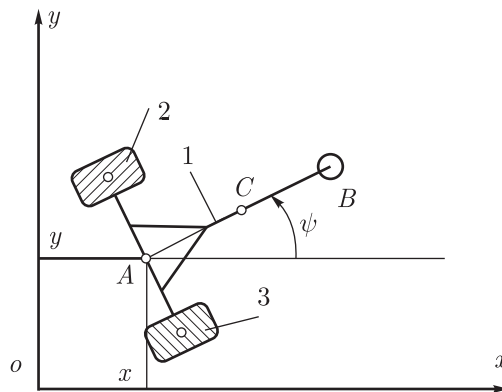


Рис. 1. Робот с дифференциальным приводом.

Считаем, что модель робота состоит из трех твердых тел: платформы и двух колес. Передний край платформы опирается на шарик, который может крутиться во всех направлениях. Величина управляющего момента формируется подачей напряжения на электродвигатели. Будем предполагать, что качение колес происходит без проскальзывания и что влиянием шарика на динамику робота можно пренебречь. Движение робота описывается следующими координатами: координаты (x, y) точки A , являющейся серединой оси, соединяющей колеса, углы ϕ_1 и ϕ_2 собственного вращения левого и правого колес соответственно, угол ψ между осью Ox и осью симметрии робота. Положительное направление вращения колес соответствует движению робота вперед. Положительное направление угла ψ — против часовой стрелки. Обозначим $AC = a$, расстояние от A до центров колес — l . Будем

считать радиусы и массы обоих колес одинаковыми $r = r_1 = r_2$, $m_k = m_1 = m_2$. Из этого предположения следует равенство осевых и поперечных моментов левого и правого колес $J_{1y} = J_{2y} = J_{ky}$, $J_{1z} = J_{2z} = J_{kz}$.

В отличие от [9, 11] будем рассматривать модель робота с дифференциальным приводом с колесами, расположенными под постоянным углом к плоскости качения. Как будет следовать из дальнейшего рассмотрения (см. раздел 3), этот параметр может оказывать существенное влияние на динамику системы. На практике наклон колес к опорной плоскости может быть конструктивно заложен, а может появляться вследствие люфтов на нагруженном колесном экипаже. Условимся, что в нашей модели абсолютные значения углов наклона колес одинаковые $|\chi_1| = |\chi_2| = |\chi|$.

2. Модель робота с твердыми колесами

Примем для рассматриваемой модели робота за положительное направление углов наклона отклонение верхних частей колес от платформы наружу. Из условия отсутствия проскальзывания колес робота получим кинематические уравнения [11]:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (r\dot{\phi}_1 + \dot{\psi}(l - r \sin \chi_1) \cos \psi, \\ \dot{y} &= (r\dot{\phi}_1 + \dot{\psi}(l - r \sin \chi_1) \sin \psi, \\ \dot{\phi}_2 &= \dot{\phi}_1 + \frac{\dot{\psi}(2l - r(\sin \chi_1 + \sin \chi_2))}{r}. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Последнее уравнение из (2.1) является интегрируемой связью. Но исключать ϕ_2 из фазовых координат и понижать размерность рассматриваемой системы не будем, чтобы иметь возможность сравнить характер переходного процесса по этой координате в модели с твердыми колесами с соответствующим переходным процессом в модели с деформируемыми колесами. Таким образом, в случае твердых колес ϕ_2 является избыточной координатой [12]. В уравнениях движения члены неголономности, соответствующие этой координате, будут нулями [13]. В рассматриваемой системе ϕ_2 , кроме того, является циклической координатой. Как известно [14], приложение управления по циклическим координатам во многих случаях является наиболее естественным и легкорезализуемым с практической точки зрения.

Координаты (x, y) точки A являются координатами, соответствующими чаплыгинским связям [15], поскольку их вариации зависимы, а сами они не входят в уравнения движения. В частности, если действуют только потенциальные силы, чаплыгинские координаты не входят ни в коэффициенты уравнений кинематических неинтегрируемых связей (2.1), ни в выражения функции Лагранжа L , составленной без учета связей (2.1).

Геометрическая связь из (2.1) по структуре аналогична связям Чаплыгина, поскольку вариация избыточной координаты зависима, а сама избыточная координата в уравнения движения не входит. Это обстоятельство серьезно упрощает исследование, поскольку при символьных вычислениях отпадает необходимость учета $\frac{\partial \Theta}{\partial q_{n+k}}$ и облегчается переход к уравнениям возмущенного движения при подстановке численных значений параметров для конкретной системы в специализированных средах (см., например, [16]).

Подсчитаем кинетическую энергию системы [11]:

$$\begin{aligned} 2T &= m((\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - 2a\dot{\psi}(\dot{x} \sin \psi - \dot{y} \cos \psi) + a^2\dot{\psi}^2) + 2m_k((\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + l^2\dot{\psi}^2) + J\dot{\psi}^2 + \\ &+ J_{ky}((\dot{\phi}_1 - \dot{\psi} \sin \chi_1)^2 + (\dot{\phi}_2 + \dot{\psi} \sin \chi_2)^2) + J_{kz}((\dot{\psi} \cos \chi_1)^2 + (\dot{\psi} \cos \chi_2)^2), \end{aligned} \quad (2.2)$$



где m_k — масса колеса, m — масса платформы робота, J_1 — момент инерции платформы относительно вертикальной оси, проходящей через центр масс C , J_{kz} — момент инерции ведущего колеса относительно вертикальной оси, J_y — момент инерции колеса относительно горизонтальной оси.

Обозначим Θ кинетическую энергию с исключенными зависимыми скоростями и составим уравнения Чаплыгина [15] движения системы в переменных Лагранжа:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \Theta}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \Theta}{\partial q_i} = Q_i + \sum_{k=1}^s \alpha_{ki} Q_{n+k} + \left(\sum_{k=1}^s \theta_k \left(\sum_{j=1}^n A_{ij}^{(k)} \dot{q}_j \right) \right) \Big|_{\dot{q}_{n+k} = \sum_{j=1}^n \alpha_{kj} \dot{q}_j} \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (2.3)$$

где

$$\begin{aligned} T(q_1, \dots, q_m, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_m) \Big|_{\dot{q}_{n+k} = \sum_{j=1}^n \alpha_{kj} \dot{q}_j} &= \Theta(q_1, \dots, q_m, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n), \\ \dot{q}_{n+k} - \alpha_{ki} \dot{q}_i &= 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n; k = 1, 2, \dots, s = m - n), \\ A_{ij}^{(k)} &= \frac{\partial \alpha_{ki}}{\partial q_j} - \frac{\partial \alpha_{kj}}{\partial q_i} \quad (i, j = 1, 2, \dots, n; k = 1, 2, \dots, s), \\ \theta_k &= \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{n+k}} \quad (k = 1, 2, \dots, s). \end{aligned} \quad (2.4)$$

В нашем случае

$$\begin{aligned} q^T &= (\psi \quad \phi_1 \quad x \quad y \quad \phi_2), \\ \alpha &= \begin{pmatrix} (l - r \sin \chi_1) \cos \psi & r \cos \psi \\ (l - r \sin \chi_1) \sin \psi & r \sin \psi \\ \frac{2l - r(\sin \chi_1 + \sin \chi_2)}{r} & 1 \end{pmatrix}, \\ Q^T &= (0 \quad u_1 \quad 0 \quad 0 \quad u_2). \end{aligned}$$

Здесь Q_i — действующие на систему непотенциальные обобщенные силы, которые в данной системе будут управляющими моментами, T — кинетическая энергия (2.2) системы, u_k — управляющие моменты, приложенные к k -му колесу со стороны электродвигателя.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Поскольку при составлении уравнений Чаплыгина (2.3) в выражениях θ_k (2.4) зависимые скорости $\dot{q}_{n+1}, \dot{q}_{n+2}, \dots, \dot{q}_m$ исключаются согласно уравнениям связей (2.1), то в случае когда управляющие моменты u_k не зависят от координат $q_{n+1}, q_{n+2}, \dots, q_m$, соответствующих чаплыгинским (в том числе продифференцированным геометрическим, если соответствующие им координаты циклические) связям, уравнения движения второго порядка можно рассматривать независимо от чаплыгинских связей. В результате получим систему n уравнений второго порядка относительно n неизвестных функций q_1, q_2, \dots, q_n . В случае когда управляющие моменты зависят от $q_{n+1}, q_{n+2}, \dots, q_m$, уравнения движения второго порядка надо замкнуть дифференциальными уравнениями связей. Таким образом, рассматриваемая система перестает быть системой типа Чаплыгина и уравнения движения становятся уравнениями Воронца.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Следует обратить внимание на то, что координата ϕ_2 , по которой действует компонента u_2 вектора управления, является избыточной, поэтому u_2 входит в уравнения движения (2.3) посредством члена $\sum_{k=1}^s \alpha_{ki} Q_{n+k}$, структура которого напрямую зависит от уравнения геометрической связи. Это обстоятельство создает дополнительные возможности для решения задачи управления системами с избыточными координатами, поскольку в общем случае мы имеем



определенную свободу в выборе уравнений связей. Такая ситуация, в частности, имеет место при переводе многозвенного манипулятора из одной заданной конфигурации в другую заданную в случае, когда характер движения между конфигурациями не задан.

Рассмотрим в качестве невозмущенного стационарное движение робота вдоль прямой:

$$\begin{aligned}\dot{\psi}^*(t) &= 0, & \dot{\phi}_1^*(t) &= \dot{\phi}_{10}, \\ \psi^*(t) &= \psi_0, & \phi_1^*(t) &= \dot{\phi}_{10}t, \\ x^*(t) &= \dot{x}_0t, & y^*(t) &= \dot{y}_0t, \\ \phi_2^*(t) &= \dot{\phi}_{20}t,\end{aligned}\tag{2.5}$$

где w_q — возмущение по q . Введем вектор возмущений \vec{w} фазовых координат (2.6):

$$\begin{aligned}w_\psi &= \psi - \psi^*, & w_{\phi_1} &= \phi_1 - \phi_1^*, \\ w_{\dot{\psi}} &= \dot{\psi} - \dot{\psi}^*, & w_{\dot{\phi}_1} &= \dot{\phi}_1 - \dot{\phi}_1^*, \\ w_x &= x - x^*, & w_y &= y - y^*, \\ w_{\phi_2} &= \phi_2 - \phi_2^*.\end{aligned}\tag{2.6}$$

В (2.6) знак звездочки у фазовой переменной означает, что взято ее значение на невозмущенном движении, отсутствие звездочки — значение на возмущенном движении.

Необходимость включения чаплыгинских координат в рассмотрение при исследовании динамики определяется постановкой задачи: нужна ли нам устойчивость по отношению к этим переменным. Поскольку далее будет рассматриваться задача стабилизации движения робота вдоль прямой по отношению ко всем фазовым переменным, будем учитывать все уравнения связей при исследовании системы.

Составим [17, 18] уравнения возмущенного движения с выделенным первым приближением:

$$\dot{w} = Pw + Qu,$$

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = Kw, \quad w = \begin{pmatrix} w_{\dot{\psi}} \\ w_{\dot{\phi}_1} \\ w_\psi \\ w_{\phi_1} \\ w_x \\ w_y \\ w_{\phi_2} \end{pmatrix}.\tag{2.7}$$

Для дальнейшего исследования системы выберем следующие численные значения для стационарного движения (2.8) и массогабаритных характеристик (2.9) системы:

$$\begin{aligned}\psi_0 &= 0.52 \text{ рад}, & \dot{\psi}_0 &= 0 \text{ рад/с}, \\ \dot{\phi}_{10} &= 2.088 \text{ рад/с}, & \dot{\phi}_{20} &= 2.088 \text{ рад/с}, \\ \dot{x}_0 &= 0.866 \text{ м/с}, & \dot{y}_0 &= 0.5 \text{ м/с}, \\ \chi_1 &= 0.006 \text{ рад}, & \chi_2 &= 0.006 \text{ рад},\end{aligned}\tag{2.8}$$

$$\begin{aligned}
 J_{kz} &= 0.002 \text{ т м}^2, & a &= 0.35 \text{ м}, \\
 l &= 1 \text{ м}, & R &= 0.485 \text{ м}, \\
 m_k &= 0.04 \text{ т}, & m &= 1 \text{ т}, \\
 J &= 0.228 \text{ т м}^2, & J_{ky} &= 0.005 \text{ т м}^2.
 \end{aligned}
 \tag{2.9}$$

При таких численных параметрах матрицы P, Q имеют вид

$$P = \begin{pmatrix} -0.74 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1.53 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.86 & 0.41 & -0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0.24 & 0.87 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4.16 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} -4.38 & 4.38 \\ 13.01 & -5.23 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.
 \tag{2.10}$$

Начальное возмущение по ϕ_2 однозначно определяется согласно уравнению интегрируемой связи из (2.1), поскольку ϕ_2 является избыточной координатой [19].

Начальные возмущения выберем для определенности следующими:

$$\begin{aligned}
 w_{\psi}(0) &= 0.4, & w_{\phi_1}(0) &= 1, \\
 w_{\psi}(0) &= 0.7, & w_{\phi_1}(0) &= -1.7, \\
 w_x(0) &= 0.2, & w_y(0) &= 0.3, \\
 w_{\phi_2}(0) &= 1.2.
 \end{aligned}
 \tag{2.11}$$

При численном интегрировании уравнений возмущенного движения (2.7) с матрицами (2.10) и начальными возмущениями (2.11) без приложения управления получаем неустойчивость по возмущениям x, y, ϕ_1, ϕ_2 (см. рис. 2).

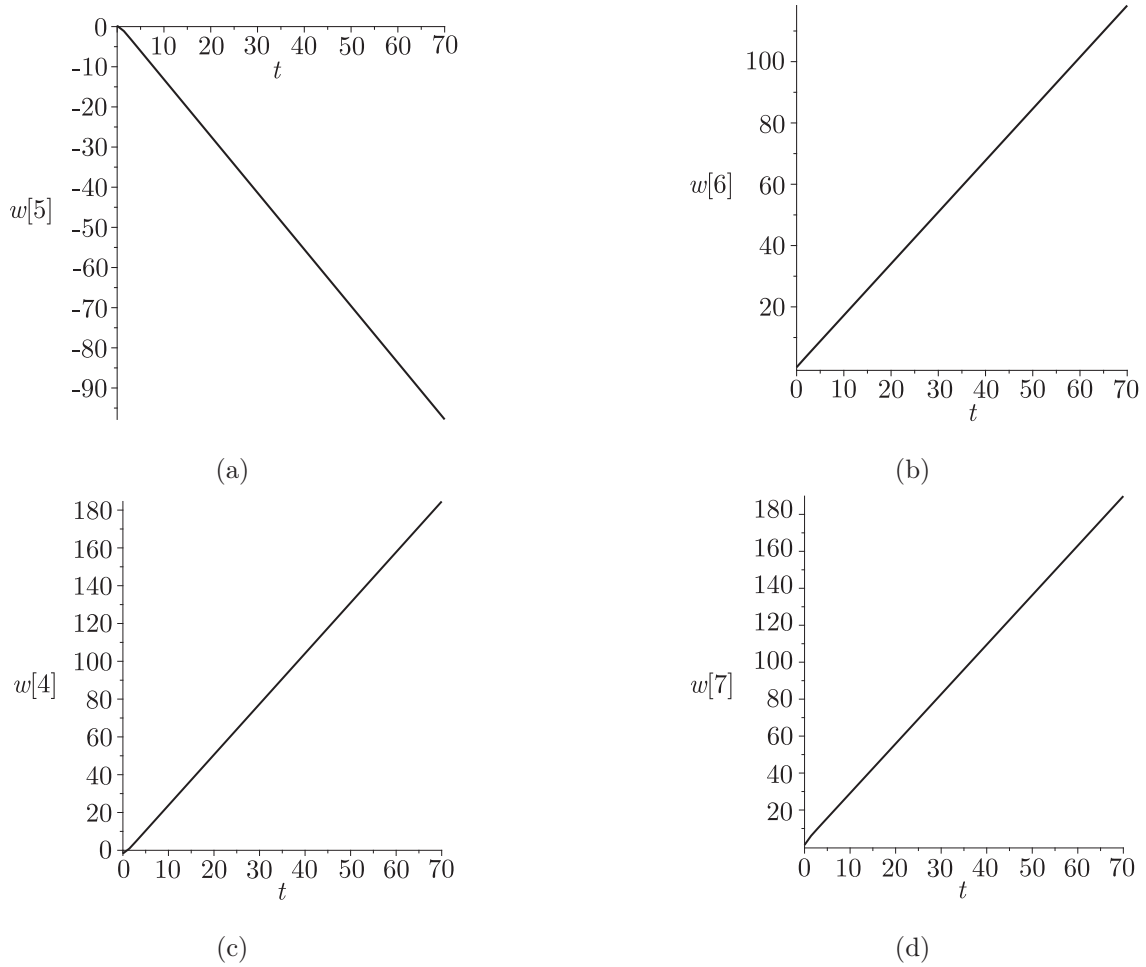
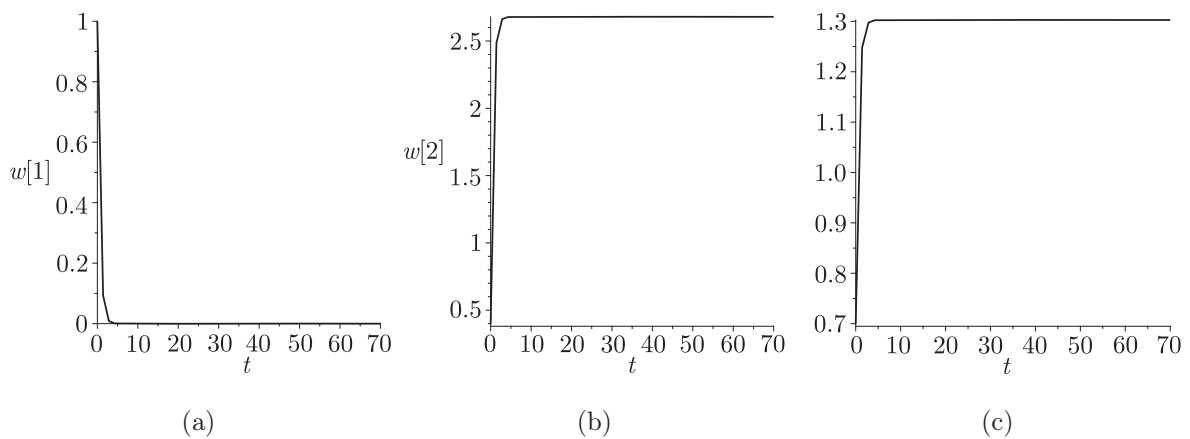
ЗАМЕЧАНИЕ 5. Исключая из рассмотрения координаты x, y , соответствующие чаплыгинским связям, и циклические координаты ϕ_1, ϕ_2 , получаем задачу, аналогичную рассмотренной в других переменных [11], где установлена устойчивость невозмущенного движения без приложения управления. Графики переходных процессов для возмущений по отношению к остальным фазовым переменным представлены на рисунке 3.

Для решения поставленной задачи стабилизации проверим управляемость системы:

$$\text{rank}[Q, PQ, \dots, P^{d-1}Q] = d,
 \tag{2.12}$$

где d — размерность матрицы P (в рассматриваемом примере $d = 7$).

Нетрудно проверить, что для пары матриц P, Q условие Калмана не выполнено. Однако, поскольку управляемость является достаточным условием стабилизируемости, попробуем найти стабилизирующее управление методом Н. Н. Красовского [20]. Для однозначного

Рис. 2. Графики переходных процессов возмущений x, y, ϕ_1, ϕ_2 .Рис. 3. Графики переходных процессов возмущений $\dot{\psi}, \dot{\phi}_1, \psi$.

определения управления введем критерий качества, характеризующий, в частности, скорость затухания переходного процесса и затраты ресурсов на формирование управления.

Согласно [20, 21], в качестве такого критерия можно взять интеграл

$$I = \int_0^{\infty} \left(\sum_{i,j=1}^d \alpha_{ij} w_i w_j + \sum_{i,j=1}^r \beta_{ij} u_i u_j \right) dt. \quad (2.13)$$

В качестве $\{\alpha_{ij}\}$ и $\{\beta_{ij}\}$ возьмем единичные матрицы размерности $d \times d$ и $r \times r$ соответственно.

После приложения найденного управления в рассматриваемой системе матрица коэффициентов $P + QK$ замкнутой системы имеет два достаточно малых по модулю собственных значения (порядка 10^{-17}). Такие случаи называются случаями, близкими к критическим [22, 23]. В этой ситуации решение задачи устойчивости по отношению к возмущениям, соответствующим малым собственным корням, требует привлечения методов теории критических случаев [22, 24, 25]. Решение поставленной задачи методами теории критических случаев практически неизбежно существенно усложнится. Как об этом писал еще А. М. Ляпунов: «... случаи этого рода весьма разнообразны, и в каждом из них задача получает свой особый характер, так что не может быть и речи о каких-либо общих способах ее решения, которые относились бы ко всем таким случаям» [24]. Автоматизация применения принципа сведения к ситуации общего случая может оказаться весьма трудоемкой. Поэтому выберем другой подход, основанный на выделении управляемой подсистемы; за счет использования структуры уравнений этот подход позволяет обойтись без громоздких преобразований теории критических случаев.

Для решения поставленной задачи стабилизации из уравнений (2.7) выделим линейную подсистему, не содержащую циклических координат ϕ_1, ϕ_2 :

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{w}} &= A\tilde{w} + B\tilde{u}, \\ \tilde{u} &= \tilde{K}\tilde{w}, \\ \tilde{w}^T &= (w_{\psi}, w_{\phi_1}, w_{\psi}, w_x, w_y), \\ A &= \begin{pmatrix} -0.74 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1.53 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.86 & 0.41 & -0,5 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0.24 & 0.87 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -4.38 & 4.38 \\ 13.01 & -5.23 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Решим задачу стабилизации для подсистемы. Пара матриц A, B полностью управляема [10], поскольку [18]

$$\text{rank}[B, AB, \dots, A^4 B] = 5.$$

Следовательно, выполнено достаточное условие разрешимости методом Н. Н. Красовского [20] линейно-квадратичной задачи стабилизации для соответствующей подсистемы.



При критерии качества (2.13) матрицу \tilde{K} найдем [18, 26] в виде

$$\tilde{K} = \begin{pmatrix} -0.208 & -1.060 & 0.954 & -0.974 & -0.212 \\ -1.562 & -0.170 & -1.952 & 0.219 & -0.972 \end{pmatrix}. \quad (2.15)$$

После приложения найденного управления в рассматриваемой подсистеме матрица $A + B\tilde{K}$ имеет все корни с отрицательными действительными частями, поэтому все стабилизируемые возмущения фазовых координат асимптотически устойчивы по первому приближению.

Перейдем к рассмотрению вопроса об устойчивости стационарного движения (2.8) в полной системе относительно возмущений углов вращения колес.

Используя введенные ранее обозначения (2.5), запишем выражение для отклонения $\phi_1(t)$ от стационарного движения:

$$\begin{aligned} \phi_1(t) &= \int_{t_0}^t \phi_1(\tau) d\tau = \dot{\phi}_1 t + \int_{t_0}^t w_{\dot{\phi}_1}(\tau) d\tau, \\ w_{\phi_1}(t) &= \phi_1(t) - \phi_1^*(t) = \int_{t_0}^t w_{\dot{\phi}_1}(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Из асимптотической устойчивости $w_{\dot{\phi}_1}(t)$ возмущения скорости $\dot{\phi}_1(t)$ следует, что значение интеграла $\int_{t_0}^{\infty} w_{\dot{\phi}_1}(\tau) d\tau$ можно оценить некоторой константой, что, по определению, означает неасимптотическую устойчивость w_{ϕ_1} возмущения $\phi_1(t)$.

Из геометрической связи (2.1) следует, что устойчивость стационарного движения по отношению к возмущению по $\phi_2(t)$ определяется устойчивостью по отношению к возмущениям по $\phi_1(t)$ и $\psi(t)$. Таким образом, значение возмущения по $\phi_2(t)$ ограничивается некоторой константой, из чего, по определению, следует неасимптотическая устойчивость по отношению к возмущению по $\phi_2(t)$.

На рисунке 4 приведены результаты численного интегрирования полной системы (2.7), (2.10) после приложения к ней управления (2.15). Следует отметить, что стабилизирующее управление не зависит от возмущений по координатам ϕ_1, ϕ_2 . Таким образом, поставленная задача стабилизации решена: управление (2.15) обеспечивает стабилизацию стационарного движения вдоль прямой до неасимптотической устойчивости по отношению ко всем фазовым переменным.

При численном интегрировании методом Рунге–Кутты замкнутой полной системы с управлением (2.15) на отрезке времени $t = 0 \dots 100$ секунд с шагом 1 значение критерия качества (2.13) равно 100.31.

3. Модель робота с деформируемыми колесами

При рассмотрении модели робота с деформируемыми колесами будем считать выполненными предположения, которые мы делали для модели с твердыми колесами. Кроме того, используемая модель учета деформируемости периферии колес [7] накладывает дополнительные ограничения:

1. масса деформированной части пневматика предполагается пренебрежимо малой величиной,
2. кривизна траектории качения средней линии пневматика должна быть достаточно малой, а скорость движения — не слишком большой [3],

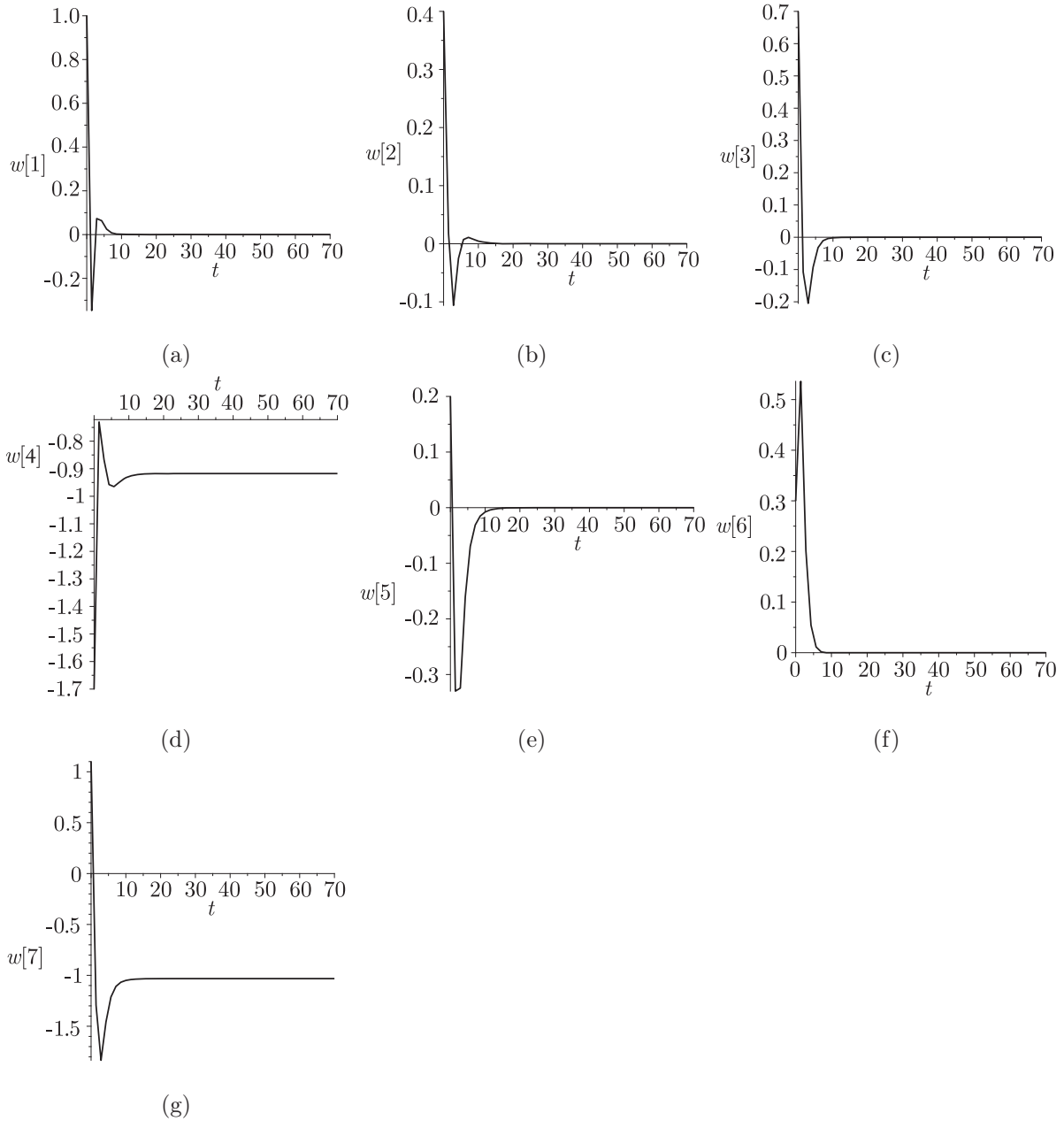


Рис. 4. Графики переходных процессов возмущений фазовых переменных.

3. деформация пневматика рассматривается как результат суперпозиции продольной, поперечной и радиальной деформаций пневматика в отдельности.

При указанных ограничениях модели взаимодействия деформируемого колеса с опорной плоскостью в [5, 7] получены условия отсутствия проскальзывания колес:

$$v_{kxi} \sin(\psi_i + \eta_{1i}) - v_{kyi} \cos(\psi_i + \eta_{1i}) - \dot{\eta}_{0i} = 0, \tag{3.1}$$

$$\dot{\psi}_i + \dot{\eta}_{1i} - (v_{kxi} \cos(\psi_i + \eta_{1i}) + v_{kyi} \sin(\psi_i + \eta_{1i}))(\alpha_{2i}\eta_{0i} - \beta_{2i}\eta_{1i} - \gamma_{2i}\chi_i) = 0,$$

где $i = 1, 2$ — номер колеса; v_{kxi}, v_{kyi} — продольная и поперечная составляющие скорости

точки K_i встречи прямой наибольшего наклона, проведенной в средней плоскости колеса через его центр, с плоскостью дороги; $\alpha_{2i}, \beta_{2i}, \gamma_{2i}$ — кинематические параметры поперечной деформации, находятся экспериментально; χ_i — угол наклона колеса. В рассматриваемой постановке задачи за положительное направление угла наклона принято отклонение верхней части колеса в сторону положительного направления оси OY при движении вдоль оси OX :

$$-r_i \dot{\phi}_i + \dot{\xi}_{0i} + (v_{kxi} \cos(\psi_i + \eta_{1i}) + v_{kyl} \sin(\psi_i + \eta_{1i})) \left(1 + \frac{\alpha_{1i}}{\beta_{1i}} \xi_{0i} - \frac{\gamma_{1i}}{\beta_{1i}} (r_i - r_i^*) \right) = 0, \quad (3.2)$$

где $\alpha_{1i}, \beta_{1i}, \gamma_{1i}$ — кинематические параметры продольной деформации, находятся экспериментально; $(r_i - r_i^*)$ — дополнительная радиальная деформация пневматика. При этом (3.1) соответствует отсутствию бокового проскальзывания, (3.2) — продольного.

Согласно принципу освобожденности, механическую систему будем считать свободной, заменив действие наложенных на нее связей силами реакций этих связей, которые после приведения к центру i -го колеса равны:

$$\begin{aligned} F_{xi} &= \frac{\partial \Pi}{\partial \xi_{0i}}, & F_{yi} &= \frac{\partial \Pi}{\partial \eta_{0i}}, \\ F_{zi} &= N_i - c_{zi}(r_i - r_i^*), & M_{xi} &= -\frac{\partial \Pi}{\partial \chi_i}, \\ M_{yi} &= -\nu_{1i} N_i \xi_{0i}, & M_{zi} &= \frac{\partial \Pi}{\partial \eta_{1i}}, \end{aligned} \quad (3.3)$$

где потенциальная энергия Π , характеризующая деформацию пневматика, имеет форму [4]

$$\Pi = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 (c_{yi} \eta_{0i}^2 - 2\nu_{2i} N_i \eta_{0i} \chi_i + \rho_{2i} N_i \chi_i^2 + c_{ti} \eta_{1i}^2 + c_{xi} \xi_{0i}^2). \quad (3.4)$$

Здесь c_{xi} — продольная жесткость i -го пневматика, c_{yi} — поперечная жесткость, c_{zi} — радиальная жесткость, c_{ti} — жесткость на скручивание, $\rho_{2i}, \nu_{2i}, \nu_{1i}$ — силовые и моментные коэффициенты упругости. В [4] в потенциальной энергии учтено дополнительное по сравнению с [7] слагаемое $c_{xi} \xi_{0i}^2$.

Для того чтобы в простейшем случае учесть силы сопротивления качению, достаточно ввести [7, 28] дополнительный момент M_t сопротивления качению в свободном движении. Для обычных, не слишком больших скоростей движения можно считать [7, 28], что

$$M_{ti} = r_i N f (1 + a_f (v_{kxi}^2 + v_{kyl}^2)), \quad (3.5)$$

где i — номер колеса, f — коэффициент сопротивления качению, a_f — коэффициент, учитывающий влияние скорости на сопротивление качению эластичного колеса по недеформируемой поверхности. Тогда в уравнениях, описывающих стационарное качение колеса, момент M_y оказывается равным

$$M_{yi} = -\nu_{1i} N_i \xi_{0i} - M_{ti}. \quad (3.6)$$

Динамика экипажа на баллонных колесах описывается уравнениями Лагранжа второго рода:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} &= Q + R(q, \dot{q}, \mu(t)), \\ q &= (x, y, \psi, \phi_1, \phi_2)^T, \end{aligned} \quad (3.7)$$

где R — обобщенные силы реакций кинематических связей, обусловленные деформацией пневматиков, Q — дополнительные обобщенные непотенциальные силы. В рассматриваемой системе имеем:

$$\begin{aligned} R_x &= (F_{x1} + F_{x2}) \cos \psi - (F_{y1} \cos \chi_1 + F_{y2} \cos \chi_2 + F_{z1} \sin \chi_1 + F_{z2} \sin \chi_2) \sin \psi, \\ R_y &= (F_{x1} + F_{x2}) \sin \psi + (F_{y1} \cos \chi_1 + F_{y2} \cos \chi_2 + F_{z1} \sin \chi_1 + F_{z2} \sin \chi_2) \cos \psi, \\ R_\psi &= l(F_{x2} - F_{x1}) - M_{y1} \sin \chi_1 + M_{z1} \cos \chi_1 - M_{y2} \sin \chi_2 + M_{z2} \cos \chi_2, \\ R_{\phi_1} &= M_{y1} - r_1 F_{x1}, \\ R_{\phi_2} &= M_{y2} - r_2 F_{x2}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Для замыкания системы (3.7) нужно добавить уравнения (3.1) и (3.2). Уравнения (3.1), (3.2), (3.7) являются искомыми уравнениями движения робота. Заметим, что при таком подходе к выводу уравнений движения системы уравнения (3.1) и (3.2) рассматриваются не как уравнения связей качения упругого пневматика, а как дифференциальные уравнения, определяющие параметры $\eta_{0i}, \eta_{1i}, \xi_{0i}$ деформации пневматика и, через эти параметры, — действующие на него силы и моменты (3.3) [15].

В качестве невозмущенного движения выберем стационарное движение робота вдоль прямой:

$$\begin{aligned} \eta_{01}^*(t) &= \eta_{010}, & \eta_{02}^*(t) &= \eta_{020}, \\ \eta_{11}^*(t) &= \eta_{110}, & \eta_{12}^*(t) &= \eta_{120}, \\ \xi_{01}^*(t) &= \xi_{010}, & \xi_{02}^*(t) &= \xi_{020}, \\ x^*(t) &= \dot{x}_0 t, & y^*(t) &= \dot{y}_0 t, \\ \psi^*(t) &= \psi_0, & \dot{\phi}_1^*(t) &= \dot{\phi}_{10} t, \\ \dot{\phi}_2^*(t) &= \dot{\phi}_{20} t, \\ \dot{x}^*(t) &= \dot{x}_0, & \dot{y}^*(t) &= \dot{y}_0, \\ \dot{\psi}^*(t) &= 0, & \dot{\phi}_1^*(t) &= \dot{\phi}_{10}, \\ \dot{\phi}_2^*(t) &= \dot{\phi}_{20}, \end{aligned} \quad (3.9)$$

где \vec{w} — вектор возмущений фазовых координат (3.10), в который в силу выбранного метода решения необходимо включить возмущения параметров деформации.

$$\begin{aligned} w_{\eta_{01}} &= \eta_{01} - \eta_{01}^*, & w_{\eta_{11}} &= \eta_{11} - \eta_{11}^*, \\ w_{\xi_{01}} &= \xi_{01} - \xi_{01}^*, & w_\psi &= \psi - \psi^*, \\ w_{\phi_2} &= \phi_2 - \phi_2^*, & w_y &= y - y^*, \\ w_{\dot{y}} &= \dot{y} - \dot{y}^*, & w_{\dot{\phi}_1} &= \dot{\phi}_1 - \dot{\phi}_1^*, \\ w_{\eta_{02}} &= \eta_{02} - \eta_{02}^*, & w_{\eta_{12}} &= \eta_{12} - \eta_{12}^*, \\ w_{\xi_{02}} &= \xi_{02} - \xi_{02}^*, & w_{\phi_1} &= \phi_1 - \phi_1^*, \\ w_x &= x - x^*, & w_{\dot{x}} &= \dot{x} - \dot{x}^*, \\ w_{\dot{\psi}} &= \dot{\psi} - \dot{\psi}^*, & w_{\dot{\phi}_2} &= \dot{\phi}_2 - \dot{\phi}_2^*. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Здесь обозначения фазовых переменных на возмущенном и невозмущенном движениях приняты аналогично разделу 2: знак звездочки у фазовой координаты означает, что взято ее

значение на невозмущенном движении, отсутствие звездочки означает, что взято ее значение на возмущенном движении.

Реализовать стационарное движение без приложения программного управления $p(t)$ [20] невозможно из-за влияния деформации колеса на динамику робота, в частности, вследствие возникающего момента сопротивления качению M_t (3.5). Таким образом, для рассматриваемого стационарного движения дополнительные обобщенные непотенциальные силы имеют вид

$$Q^T = (0 \quad 0 \quad 0 \quad p_1 \quad p_2), \quad p = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = D\dot{q}^*. \quad (3.11)$$

Здесь \dot{q}^* — вектор значений обобщенных скоростей на стационарном движении, p — программное управление, прикладываемое к роботу для осуществления рассматриваемого стационарного движения. Программное управление реализуется подачей постоянного напряжения на приводные электродвигатели.

Составим уравнения возмущенного движения с выделенным первым приближением:

$$\dot{w} = Pw + Qu, \quad (3.12)$$

$$w^T = \left(w_{\eta_{01}} \quad w_{\eta_{02}} \quad w_{\eta_{11}} \quad w_{\eta_{12}} \quad w_{\xi_{01}} \quad w_{\xi_{02}} \quad w_x \quad w_y \quad w_\psi \quad w_{\phi_1} \quad w_{\phi_2} \quad w_{\dot{x}} \quad w_{\dot{y}} \quad w_{\dot{\psi}} \quad w_{\dot{\phi}_1} \quad w_{\dot{\phi}_2} \right).$$

Примем следующие значения фазовых переменных для невозмущенного движения (3.13) и численные параметры системы (3.14)

$$\begin{aligned} \psi_0 &= 0.52 \text{ рад}, & \dot{\psi}_0 &= 0 \text{ рад/с}, \\ \xi_{0i0} &= 0 \text{ м}, & \dot{\phi}_{i0} &= 2.088 \text{ рад/с}, \\ \dot{x}_0 &= 0.866 \text{ м/с}, & \dot{y}_0 &= 0.5 \text{ м/с}, \\ \eta_{010} &= -\eta_{020} = -0.00034 \text{ м} & \dot{\eta}_{0i0} = \dot{\eta}_{1i0} = \dot{\xi}_{0i0} &= 0, \\ \eta_{110} &= -\eta_{120} = -0.000011 \text{ рад}, \end{aligned} \quad (3.13)$$

$$\begin{aligned} J_{kz} &= 0,002 \text{ т м}^2, & a &= 0.35 \text{ м}, & \alpha_{21} = \alpha_{22} &= 88.7 \text{ 1/м}^2, & c_{t1} = c_{t2} &= 1.7 \text{ кН м/рад}, \\ l &= 1 \text{ м}, & R &= 0.479 \text{ м}, & \beta_{21} = \beta_{22} &= 17.3 \text{ 1/м}, & \nu_{21} = \nu_{22} &= 1, \\ m_k &= 0.04 \text{ т}, & m &= 1 \text{ т}, & \gamma_{21} = \gamma_{22} &= 5.0 \text{ 1/м}, & \nu_{11} = \nu_{12} &= 1, \\ J &= 0.228 \text{ т м}^2, & J_{ky} &= 0.005 \text{ т м}^2, & N_1 = N_2 &= 5.5 \text{ кН}, & \rho_1 = \rho_2 &= 0.23, \\ dR_1 &= -3e - 5 \text{ м}, & dR_2 &= -3e - 5 \text{ м}, & c_{x1} = c_{x2} &= 325 \text{ кН/м}, & \alpha_{11} = \alpha_{12} &= 200 \text{ рад/м}^2, \\ \chi_1 &= 0.006 \text{ рад}, & \chi_2 &= -0.006 \text{ рад}, & c_{y1} = c_{y2} &= 147 \text{ кН/м}, & \beta_{11} = \beta_{12} &= 24.6 \text{ 1/м}, \\ f &= 0.015, & a_f &= 3e - 4, & c_{z1} = c_{z2} &= 362, & \gamma_{11} = \gamma_{12} &= 16.5 \text{ 1/м}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Отметим, что численные значения коэффициентов из (3.14), связанных с деформацией колес, взяты из [7].

Матрица коэффициентов программного управления для (3.13) и (3.14) принимает вид

$$D = \begin{pmatrix} 0.016 & 0.026 & 0 & 0,006 & 0 \\ 0 & -0.144 & 0 & 0.053 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.15)$$

Запишем матрицы P, Q для указанных численных значений параметров системы:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0.500 & -0.866 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0.500 & -0.866 & 0 & 0 & 0 \\ 88.698 & 0 & 17.300 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 88.698 & 0 & 17.300 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -8.130 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.866 & -0.500 & 0.997 & 0.479 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -8.130 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.866 & -0.500 & -0.997 & 0 & 0.479 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -92.058 & -92.058 & 0.857 & 0.857 & 96.378 & 424.841 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 159.449 & 159.449 & -1.484 & -1.484 & 434.920 & -133.993 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -148.138 & -148.138 & 5.286 & 5.286 & -1013.541 & 1013.541 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.889 & -0.889 & 0.032 & 0.032 & -35020.529 & 6.081 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.004 & -0.003 & 0.005 & 0 & 0 & 0 \\ 0.889 & 0.889 & -0.032 & -0.032 & 6.081 & -35020.529 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.004 & -0.003 & -0.005 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0.0030 & -0.0030 \\ -0.0052 & 0.0052 \\ 0.0187 & -0.0187 \\ 217.9211 & -0.0001 \\ -0.0001 & 217.9211 \end{pmatrix}.$$

(3.16)

Начальные возмущения выберем следующим образом:

$$\begin{aligned} w_{\eta_{01}}(0) &= 0.4e - 4, & w_{\eta_{11}}(0) &= 0.5e - 4, \\ w_{\xi_{01}}(0) &= 0.4e - 4, & w_{\psi}(0) &= 0.7, \\ w_{\phi_2}(0) &= 0.1, & w_y(0) &= 0.5, \\ w_{\dot{y}}(0) &= 1.2, & w_{\dot{\phi}_1}(0) &= 0.5, \\ w_{\eta_{02}}(0) &= 0.1e - 4, & w_{\eta_{12}}(0) &= 0.3e - 4, \\ w_{\xi_{02}}(0) &= 0.5e - 4, & w_{\phi_1}(0) &= 0.2, \\ w_x(0) &= 0.4, & w_{\dot{x}}(0) &= 0.9, \\ w_{\dot{\psi}}(0) &= 0.3, & w_{\dot{\phi}_2}(0) &= 1. \end{aligned}$$

(3.17)

Стационарное движение (3.13) для полной системы без приложения управления при численных параметрах (3.14) является неустойчивым по первому приближению, поскольку среди корней характеристического уравнения есть такие, действительные части которых положительные:

$$0., 0., 0., 0., -4.06 + 137.09I, -4.06 - 137.09I, -4.06 + 131.75I, -4.06 - 131.75I, -1.11 + 18.13I, -1.11 - 18.13I, 19.94, 21.44, -4.14, -0.43, -0.86e - 4, 1.97e - 15.$$



Критерий Калмана для рассматриваемой системы выполняется. Аналогично задаче стабилизации модели робота с твердыми колесами приложение в системе найденного методом Н. Н. Красовского управления приводит к случаю, близкому к критическому. Используемая в рассматриваемом примере модель взаимодействия колес с плоскостью может усложнить решение вопроса об устойчивости системы методами теории критических случаев из-за большего по сравнению с моделью жестких колес числа фазовых переменных и гораздо более сложного вида нелинейных членов. Поэтому для решения вопроса об устойчивости системы, как и ранее, применим подход [29], основанный на выделении управляемой подсистемы.

Для решения поставленной задачи стабилизации невозмущенного движения выделим управляемую подсистему [29], сохраняя за матрицами коэффициентов подсистемы прежние обозначения:

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{w}} &= A\tilde{w} + B\tilde{u}, \\ \tilde{u} &= \tilde{K}\tilde{w}, \\ \tilde{w}^T &= (w_{\eta_{01}} \ w_{\eta_{02}} \ w_{\eta_{11}} \ w_{\eta_{12}} \ w_{\xi_{01}} \ w_{\xi_{02}} \ w_x \ w_y \ w_\psi \ w_{\dot{x}} \ w_{\dot{y}} \ w_{\dot{\psi}} \ w_{\phi_1} \ w_{\phi_2}), \end{aligned}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0.500 & -0.866 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0.500 & -0.866 & 0 & 0 & 0 \\ 88.698 & 0 & 17.300 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 88.698 & 0 & 17.300 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -8.130 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.866 & -0.500 & 0.997 & 0,479 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -8.130 & 0 & 0 & 0 & -0.866 & -0.500 & -0.997 & 0 & 0,479 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -92.058 & -92.058 & 0.857 & 0.857 & 96.378 & 424.841 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 159.449 & 159.449 & -1.484 & -1.484 & 434.920 & -133.993 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -148.138 & -148.138 & 5.286 & 5.286 & -1013.541 & 1013.541 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.889 & -0.889 & 0.032 & 0.032 & -35020,529 & 6,081 & 0 & 0 & 0 & -0.004 & -0.003 & 0.005 & 0 & 0 \\ 0.889 & 0.889 & -0.032 & -0.032 & 6,081 & -35020,529 & 0 & 0 & 0 & -0.004 & -0.003 & -0.005 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0,0030 & -0,0030 \\ -0,0052 & 0,0052 \\ 0,0187 & -0,0187 \\ 217,9211 & -0,0001 \\ -0,0001 & 217,9211 \end{pmatrix}. \quad (3.18)$$

Исследуем замкнутую подсистему (2.7) с матрицами (3) на управляемость. Согласно критерию (2.12), подсистема (2.7), (3) полностью управляема. Для однозначного определения управления введем критерий качества в виде интеграла (2.13) с единичными матрицами



при возмущениях и управлениях. Найдем [18, 26] стабилизирующее управление u методом Н. Н. Красовского [20]:

$$\tilde{K} = \begin{pmatrix} 6e+6 & -6e+6 & 1,5e+6 & -1,5e+6 & -78,7 & -2,8 & 0,96 & -0,3 & -2,2e+3 & -e+3 & 1,9e+3 & 712,8 & -1,2 & -5e-3 \\ 6e+6 & -6e+6 & 1,5e+6 & -1,5e+6 & -2,8 & -78,7 & 0,3 & 0,96 & 2,2e+3 & e+3 & -1,9e+3 & -712,8 & -5e-3 & -1,2 \end{pmatrix}. \quad (3.19)$$

После приложения найденного управления (3.19) матрица $A + B\tilde{K}$ становится гурвицевой [18], т. е. ее собственные значения отрицательны:

$$-105.06 + 68.36I, -105.06 - 68.36I, -91.34 + 63.45I, -91.34 - 63.45I, -33.83, -2.55 + 16.01I, -2.55 - 16.01I, -21.44, -19.94, -8.81, -4.14, -0.46 + 0.33I, -0.46 - 0.33I, -0.32.$$

Таким образом, невозмущенное движение стабилизировано до асимптотической устойчивости по первому приближению по отношению к возмущениям всех скоростей и квазициклических координат x, y [14].

Для решения вопроса об устойчивости стационарного движения (3.13) по отношению к не вошедшим в подсистему (3) квазициклическим координатам ϕ_1, ϕ_2 используем приведенный выше анализ поведения возмущений циклических координат (2.16). Итак, из асимптотической устойчивости возмущений $\dot{\phi}_1, \dot{\phi}_2$ следует неасимптотическая устойчивость по отношению к возмущениям квазициклических координат ϕ_1, ϕ_2 .

Вычислением методом Рунге–Кутты на отрезке времени $t = 0 \dots 100$ секунд с шагом $h = 1$ получим значение (2.13), равное 77592.3.

4. Анализ влияния наклона колес

Большую практическую важность имеет анализ влияния наклона колес на поведение системы. Для рассматриваемой модели робота возможна постановка задачи стабилизации стационарного движения до асимптотической устойчивости по первому приближению по отношению ко всем переменным, включая возмущения циклических координат. Однако в таких случаях, несмотря на формальное выполнение критерия управляемости, численное моделирование серьезно усложняется. В общем случае выполнение критерия управляемости для данной задачи доказать не удалось [16]. Для выбранных численных значений величина определителя матрицы линейно независимых столбцов, определяющих ранг матрицы Калмана, становится величиной порядка 10^{-18} .

Рассмотрим задачу стабилизации до асимптотической устойчивости по первому приближению по всем переменным при нулевых углах наклона для моделей с твердыми и деформируемыми колесами. В модели с твердыми колесами возможно получение управления методом Н. Н. Красовского. Приложение найденного управления в полной системе приводит к тому, что матрица коэффициентов $P + QK$ замкнутой системы имеет два достаточно малых по модулю собственных значения. Такие случаи называются случаями, близкими к критическим [22, 23]. В этом случае решение задачи устойчивости по отношению к возмущениям, соответствующим малым собственным корням, требует привлечения методов теории критических случаев [22, 24]. Для модели с деформируемыми колесами не удалось решить методом Н. Н. Красовского задачу стабилизации в рассматриваемой постановке, поскольку коэффициенты функции Ляпунова очень велики.

Рассмотрим в той же постановке задачу стабилизации для модели с деформируемыми колесами при $\chi \neq 0$. В этом случае в матрице P коэффициентов при возмущениях

в уравнениях возмущенного движения появляются дополнительные ненулевые компоненты. Возможно получить коэффициенты функции Ляпунова применением метода Н. Н. Красовского. Приложение найденного стабилизирующего управления в полной системе приводит, как и для модели с твердыми колесами, к случаю, близкому к критическому, при котором вопрос об устойчивости решается в общем случае методами теории критических случаев.

5. Выводы

1. Рассмотрен вопрос об определении минимально необходимого набора учитываемых параметров деформации для адекватного описания движения робота с дифференциальным приводом с деформируемыми колесами. Показано, что при решении задачи стабилизации прямолинейного стационарного движения такого робота достаточно учитывать два параметра поперечной деформации (боковое смещение периферии колеса в точке K пересечения линии наибольшего наклона, проведенной в средней плоскости колеса из его центра, с опорной плоскостью; угол закрутки шины относительно обода) и один параметр продольной деформации (продольное смещение периферии колеса в точке K).

2. Для рассматриваемой модели робота как с твердыми, так и с деформируемыми колесами при ненулевых углах наклона колес решена задача стабилизации прямолинейного стационарного движения до неасимптотической устойчивости по всем переменным методом [29], связанным с выделением линейной управляемой подсистемы. Стабилизирующее управление было найдено методом Н. Н. Красовского с использованием [18, 26]. Исследование устойчивости невозмущенного движения относительно возмущений циклических координат потребовало дополнительного анализа. Результаты решения поставленной задачи стабилизации для моделей с твердыми и деформируемыми колесами качественно совпадают, однако затраты ресурсов на формирование управления у модели с деформируемыми колесами значительно выше, чем у модели с твердыми колесами.

3. Наличие наклона колес в моделях с деформируемыми колесами увеличивает гироскопическую связанность системы и, таким, образом, улучшает управляемость системы, что подтверждается большой практической важностью установки угла развала автомобильных колес, который существенно влияет на практическую управляемость движения [6].

Список литературы

- [1] Евграфов В. В. Динамика и управление движением колесных роботов: Канд. дис... канд. физ.-мат. наук, МГУ, 2008.
- [2] Абрарова Е. В., Буров А. А., Степанов С. Я., Шевалье Д. П. Об уравнениях движения системы тягач-полуприцеп со сцепкой типа «пятое колесо» // Задачи исследования устойчивости и стабилизации движения. М.: ВЦ РАН, 1998. С. 45–72.
- [3] Неймарк Ю. И., Фуфаев Н. А. Устойчивость криволинейного движения экипажа на баллонных колесах // ПММ, 1971, т. 35, № 5, с. 899–907.
- [4] Отчет о научно-исследовательской работе «Аналитическая механика неголономных систем и устойчивость их движений» / рук. А. Я. Красинский // Проект 19/01 ФФИ ГКНТ Узбекистана. Номер государственной регистрации 01.01.0011346. Ташкент, 2003. 187 с.
- [5] Тураев Х. Т., Фуфаев Н. А., Мусарский Р. А. Теория движения систем с качением. Ташкент: Фан, 1987. 158 с.
- [6] Вильке В. Г., Кожевников И. Ф. Качение колеса с армированной шиной по плоскости без проскальзывания // ПММ, 2001, т. 65, № 6, с. 944–957.



- [7] Левин М. А., Фуфаев Н. А. Теория качения деформируемого колеса. М.: Наука, 1989. 269 с.
- [8] Буданов В. М., Девянин Е. А. О движении колесных роботов // ПММ, 2003, т. 67, № 2, с. 244–255.
- [9] Павловский В. Е., Евграфов В. В., Павловский В. В., Петровская Н. В. Динамика, моделирование, управление мобильными роботами // Материалы Пospelовских чтений, 2007 (<http://posp.raai.org/data/posp2007/SIR/vlpavl.doc>).
- [10] Калман Р., Фалб П., Арбиб М. Очерки по математической теории систем. М.: УРСС, 2010. 400 с.
- [11] Мартыненко Ю. Г. Управление движением мобильных колесных роботов // Фундамент. и прикл. матем., 2005, т. 11, № 8, с. 29–80.
- [12] Лурье А. И. Аналитическая механика. М.: Физматлит, 1961. 824 с.
- [13] Шульгин М. Ф. О некоторых дифференциальных уравнениях аналитической динамики и их интегрировании. Ташкент: Изд-во САГУ, 1958. 183 с.
- [14] Румянцев В. В. Об управлении и стабилизации систем с циклическими координатами // ПММ, 1972, т. 36, № 6, с. 966–976.
- [15] Неймарк Ю. И., Фуфаев Н. А. Динамика неголономных систем. М.: Наука, 1967. 520 с.
- [16] <http://www.maplesoft.com>
- [17] Красинский А. Я., Атажанов Б. Х. О задаче стабилизации установившихся движений неголономных систем С. А. Чаплыгина // Проблемы нелинейного анализа в инженерных системах, 2007, т. 13, вып. 2(28), с. 74–86.
- [18] Красинский А. Я., Халиков А. А., Иофе В. В., Каюмова Д. Р. Свидетельство о гос. регистрации программы для ЭВМ 011615362. Российская Федерация. Программное составление уравнений движения и исследование стабилизации механических движений, 2011. Правообладатель: ГОУ ВПО «Московский государственный университет прикладной биотехнологии». — Заявка №2011613568; зарегистрирована в Реестре программ для ЭВМ 23 мая 2011 г.
- [19] Красинский А. Я. Об устойчивости и стабилизации движений мехатронных систем с избыточными координатами // Тезисы докладов XI международной конференции «Устойчивость и колебания нелинейных систем управления». М.: ИПУ РАН, 2010. С. 197–198.
- [20] Красовский Н. Н. Проблемы стабилизации управляемых движений // Теория устойчивости движения / И. Г. Малкин. М.: Наука, 1967. С. 475–514.
- [21] Сиротин А. Н. О задаче оптимальной по энергозатратам переориентации с одновременным торможением сферически симметричного тела с нефиксированным временем // ПММ, 2004, т. 68, № 5, с. 833–846.
- [22] Каменков Г. В. Устойчивость и колебания нелинейных систем: Т. 2. М.: Наука, 1972. 214 с.
- [23] Веретенников В. Г. Устойчивость и колебания нелинейных систем. М.: Наука, 1984. 320 с.
- [24] Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. М.–Л.: ГИТТЛ, 1950. 472 с.
- [25] Малкин И. Г. Теория устойчивости движения. М.: Наука, 1966. 530 с.
- [26] Красинский А. Я. Модуль по автоматизации исследования устойчивости нелинейных систем. Государственное патентное ведомство Республики Узбекистан. Решение об официальной регистрации программы для ЭВМ DGU 20050097.
- [27] Ильин В. А., Позняк Э. Г. Курс математического анализа: Часть 1. М.: УРСС, 2005. 648 с.
- [28] Sharp R. S., Alstead C. J. The influence of structural flexibilities on the straight-running stability of motorcycles // Vehicle System Dynamics, 1980, vol. 9, pp. 327–357.
- [29] Красинский А. Я. Об одном методе исследования устойчивости и стабилизации неизоллированных установившихся движений механических систем // Избр. тр. VIII Междунар. семинара «Устойчивость и колебания нелинейных систем управления». М.: ИПУ РАН, 2004. С. 97–103 (электронное издание).



On the Influence of the Wheels Deformability on the Differential Drive Robot Dynamics

Alexandr Ya. Krasinskiy¹, Dinara R. Kayumova²

^{1,2}Moscow State University of Food Production
ul. Talalikhina 33, Moscow, 109316, Russia

¹krasinsk@mail.ru, ²dina.kayumova@gmail.com

The problem of determining the minimum number of wheel deformation parameters to adequately describe the vehicle dynamics is considered. The necessity to include some system parameter into consideration is proposed to determine via check of stabilization problem solvability (of a given unperturbed motion to nonasymptotic stability in all variables). In this paper, as a test case the problem of stabilization of rectilinear steady motion of the simplest and most studied model of differential drive robot is selected. Computational experiments made via *PyStab* software show that the formal realization of the controllability criterion for complete system does not always provide the practical solvability of stabilization problem. In this case the stabilizing control is determined by solution of linear-quadratic problem via N. N. Krasovskiy method for controllable linear subsystem. To learn about the stability of the full nonlinear system closed with found control, methods of analytical mechanics and nonlinear stability theory are involved. The study of the robot dynamics is performed by *PyStab*. This software is intended for automation of research of mechanical systems stability and stabilization problems. In the transition to the numerical consideration along with *PyStab NSA* software is used since calculation time and the structure of the nonlinear terms of equations of perturbed motion will depend on what stage of the calculations the substitution of numerical parameters of the system is performed.

MSC 2010: 70E50, 70E60, 93C85, 93D15

Keywords: analytical mechanics, stability, stabilization, differential drive robot, wheels deformability

Received July 1, 2011, accepted September 5, 2011

Citation: *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2011, vol. 7, no. 4 (Mobile Robots), pp. 803–822 (Russian)

