



УДК: 517.9

MSC 2010: 37C70, 37C29, 37G25

К вопросу о сценариях возникновения хаоса у трехмерных отображений

А. С. Гонченко, С. В. Гонченко, Л. П. Шильников

В настоящей работе изучаются вопросы хаотической динамики трехмерных гладких отображений (диффеоморфизмов). Показывается, что здесь существует два основных сценария развития хаоса от устойчивой неподвижной точки либо к спиральному аттрактору, либо к странному аттрактору лоренцевского или «восьмерочного» типа. Дается качественное описание этих аттракторов, приводятся условия, при которых они могут быть «настоящими» (псевдогиперболическими странными аттракторами). В работу также включены соответствующие результаты численного исследования аттракторов в трехмерных отображениях Эно.

Ключевые слова: странный аттрактор, хаотическая динамика, спиральный аттрактор, тор-хаос, гомоклиническая траектория, инвариантная кривая, трехмерное отображение Эно

1. Введение

Одной из основных проблем математической теории динамического хаоса и нелинейной динамики является задача описания сценариев перехода к странным аттракторам (СА) от простых притягивающих режимов — устойчивых состояний равновесия и периодических траекторий. В случае двумерных отображений и трехмерных потоков в этом направлении,

Получено 6 октября 2011 года

После доработки 24 декабря 2011 года

Работа выполнена в рамках гранта Правительства Российской Федерации для государственной поддержки научных исследований, проводимых под руководством ведущих ученых в российских образовательных учреждениях высшего профессионального образования, договор № 11.G34.31.0039. Работа поддержана грантами РФФИ No. 10-01-00429, No. 11-01-00001 и РФФИ No. 11-01-97017-р-поволжье.

Гонченко Александр Сергеевич

agonchenko@mail.ru

Гонченко Сергей Владимирович

gosv100@uic.nnov.ru

Шильников Леонид Павлович

lpshilnikov@mail.ru

НИИ Прикладной математики и кибернетики

603005, Россия, Нижний Новгород, ул. Ульянова, 10



как хорошо известно, получено большое число весьма интересных и фундаментальных результатов. Здесь достаточно отметить такие из них, как создание математической теории спирального хаоса [1–3], аттракторов Лоренца [4–7], а также теории СА (квазиаттракторов) двумерных диффеоморфизмов [8, 9]. Естественно, все эти результаты могут быть использованы и при исследовании хаотической динамики многомерных систем (размерности ≥ 3 для отображений и ≥ 4 для потоков). Однако, как недавно выяснилось, такие системы могут обладать СА новых типов, так называемыми *дикими гиперболическими аттракторами* [10, 11]. Главной особенностью этих аттракторов является то, что они допускают гомоклинические касания, но не содержат устойчивых периодических траекторий, которые не появляются также и при возмущениях.¹ Соответственно, дикие гиперболические аттракторы нужно относить к «настоящим» СА, к которым, как известно, до недавнего времени можно было приписывать только лишь гиперболические и квазигиперболические (аттракторы Лоренца) СА.

В связи с этим возникает естественный интерес к проблемам хаотической динамики многомерных систем, связанный, в частности, с нахождением сценариев возникновения СА, в том числе и нового типа — диких гиперболических. В настоящей работе мы имеем дело как раз с этой задачей и предпринимаем попытку анализа хаотической динамики трехмерных гладких отображений с позиций качественной теории. Мы показываем, что, независимо от природы конкретных математических моделей, если только они допускают описание с помощью трехмерных диссипативных (с якобианом меньше единицы) отображений, существуют два основных сценария развития хаоса, приводящих либо к аттрактору Шильникова, который может быть спиральным или седловым, либо к СА лоренцевского типа или «восьмерочного» типа (см. ниже). Заметим, что сценарий со спиральным аттрактором был рассмотрен еще в работе [3] (см. также обзор [7]), а здесь мы предлагаем его модификацию, приспособленную именно к трехмерным отображениям.

Отметим, что указанный выше спиральный аттрактор (содержащий неподвижную точку типа седло–фокус) является квазиаттрактором [12, 15], то есть либо он сам содержит устойчивые периодические траектории, либо последние неизбежно появляются при возмущениях. Квазиаттракторы являются по сути «физическими СА», поскольку часто бывает, что устойчивые траектории внутри них имеют весьма большой период и малые области притяжения и, соответственно, не наблюдаются в эксперименте в силу неизбежного наличия шумов и/или ошибок счета (см. дискуссию на эту тему в [7, 16, 17]). Однако указанные СА лоренцевского или «восьмерочного» типа вполне могут претендовать на роль «настоящих» аттракторов (диких гиперболических). Косвенно это подтверждается численными исследованиями, проведенными в работе [18], в которой изучались, в частности, СА лоренцевского типа в трехмерных квадратичных отображениях Эно.

В настоящей работе будут представлены также и результаты численных экспериментов, иллюстрирующие соответствующие теоретические положения.² В качестве конкретных

¹Системы с дикими гиперболическими аттракторами принадлежат областям Ньюхауса, то есть открытым (в C^2 -топологии) областям в пространстве динамических систем, в которых плотны системы с гомоклиническими касаниями. Однако эти касания таковы, что их бифуркации (в отличие от двумерного случая) не приводят к рождению устойчивых периодических траекторий [12, 13]. Сам термин «дикий» восходит к Ньюхаусу [14], который ввел понятие «дикого гиперболического множества» — равномерно гиперболического (базисного) множества, у которого касания устойчивых и неустойчивых многообразий сохраняются при малых C^2 -возмущениях.

²При этом многие компьютерные иллюстрации в статье были получены с помощью программного комплекса WinSet [19, 20].

моделей мы рассматриваем как раз *трехмерные отображения Эно* — сокращенно ЗДНМ (аббревиатура от «3D Hénon Map»). Напомним, что, по определению, это такие трехмерные квадратичные отображения, которые обладают следующими тремя свойствами: (i) они имеют постоянный якобиан, (ii) отображения, обратные к ним, также являются квадратичными, (iii) координаты «не отщепляются».³ Как известно [21, 22], любое ЗДНМ с помощью аффинных замен координат может быть приведено к такому виду (нормальной форме)

$$\begin{aligned} \bar{x} &= y, & \bar{y} &= z, \\ \bar{z} &= M_1 + M_2^1 y + M_2^2 z + Bx + ay^2 + byz + cz^2, \end{aligned} \tag{1.1}$$

где всегда можно потребовать, что выполняется какое-нибудь условие нормировки (например, можно сделать равным ± 1 один из коэффициентов квадратичной формы), которое достигается соответствующим масштабированием (рескейлингом) координат; также, если $|a| + |c| \neq 0$, то (сдвигом координат) всегда можно добиться, чтобы один из коэффициентов, M_2^1 или M_2^2 , обращался тождественно в нуль. Заметим, что коэффициент B — это якобиан отображения (1.1). Таким образом, нормальная форма для трехмерных отображений Эно содержит не более пяти независимых параметров.

Выбор в качестве эталонных именно трехмерных отображений Эно объясняется многими причинами. Во-первых, они являются в определенном смысле простейшими по форме нелинейными трехмерными отображениями. Во-вторых, несмотря на эту простую форму, они могут демонстрировать весьма нетривиальную динамику, связанную, в частности, с существованием странных аттракторов разнообразных типов. В-третьих, равно как и хорошо известное двумерное отображение Эно, его трехмерные аналоги не являются чисто искусственными. В частности, два следующих вида ЗДНМ: первый — с $M_2^1 \equiv 0, b \equiv 0, c \equiv 0$ и $a = -1$, то есть

$$\bar{x} = y, \quad \bar{y} = z, \quad \bar{z} = M_1 + M_2 y + Bx - z^2, \tag{1.2}$$

и второй — с $M_2^2 \equiv 0, a \equiv 0, b \equiv 0$ и $c = -1$, то есть

$$\bar{x} = y, \quad \bar{y} = z, \quad \bar{z} = M_1 + M_2 z + Bx - y^2, \tag{1.3}$$

представляют особый интерес для нелинейной динамики, поскольку они имеют «гомоклиническое происхождение», то есть являются нормальными формами отображений первого вращения вблизи гомоклинических касаний некоторых типов (см., например, [12, 15, 22–25]).

Содержание работы. В §2 формулируется постановка задачи и дается краткое описание двух основных сценариев возникновения хаоса у трехмерных отображений; §§3 и 4 составляют основную часть работы, в них приводится развернутое изложение предложенных сценариев, теоретические положения которых иллюстрируются результатами численного счета; в §5 обсуждается один из главных механизмов возникновения хаотической динамики (имеющий место и в двумерном случае), который присутствует в обоих сценариях — это переход к хаосу в результате разрушения тора (замкнутой инвариантной кривой — в случае отображений).

³Последние два условия весьма существенны: они исключают некоторые типы квадратичных отображений с постоянным якобианом. Например, отображение, обратное к $\bar{x} = x, \bar{y} = y + x^2, \bar{z} = z + y^2$, будет уже четвертой степени; условие (iii) исключает «тривиальные случаи», когда общая динамика отображения определяется только частью координат (как, например, у отображения $\bar{x} = x, \bar{y} = z, \bar{z} = z^2 - y$).



2. Постановка задачи и описание основных сценариев возникновения хаоса у трехмерных диффеоморфизмов

Пусть T_μ — однопараметрическое семейство трехмерных ориентируемых гладких отображений. Предположим, что это семейство T_μ непрерывно зависит от параметра μ и удовлетворяет при этом следующим условиям.

- A1 Существуют такие μ_0 и μ_1 (положим для определенности, что $\mu_0 < \mu_1$), что отображение T_μ имеет при всех $\mu \in (\mu_0, \mu_1)$ асимптотически устойчивую неподвижную точку O_μ . При этом точка O_μ является *глобальным аттрактором* в том смысле, что положительные итерации *всех* точек из некоторой достаточно большой области фазового пространства сходятся к O_μ .
- A2 Значение $\mu = \mu_1$ параметра — бифуркационное, при котором точка O_μ теряет устойчивость и становится седловой при $\mu > \mu_1$.
- A3 Существуют такие μ_2 и μ_3 , где $\mu_3 > \mu_2 > \mu_1$, что при $\mu \in (\mu_2, \mu_3)$ точка O_μ имеет гомоклинические к ней траектории, то есть устойчивое и неустойчивое инвариантные многообразия точки O_μ имеют непустое (гомоклиническое) пересечение.

В этой работе мы будем считать, что

μ_0 — это бифуркационное значение параметра μ , при котором в семействе T_μ происходит невырожденная *седло-узловая бифуркация*: при $\mu < \mu_0$ у T_μ нет неподвижных точек (вообще говоря, в некоторой области фазового пространства), а при $\mu > \mu_0$ у μ появляются две неподвижные точки: асимптотически устойчивая O_μ и седловая \tilde{O}_μ , причем последняя точка имеет тип $(2, 1)$, то есть $\dim W^s(\tilde{O}_\mu) = 2$, $\dim W^u(\tilde{O}_\mu) = 1$;

μ_1 — это бифуркационное значение параметра μ , при котором точка O_μ *мягко теряет устойчивость*: типично одним из двух основных способов — либо в результате (i) бифуркации Андронова–Хопфа, либо в результате (ii) бифуркации удвоения периода; при этом сама точка O_μ становится седловой, а в ее окрестности рождается либо устойчивая замкнутая инвариантная кривая — в первом случае, либо устойчивый цикл периода 2 — во втором;

μ_2 — это некоторое значение параметра μ , при котором у седла O_μ появляется *гомоклиническая* траектория: в этом случае $W^s(O_\mu) \cap W^u(O_\mu) \neq \emptyset$;

μ_3 — это некоторое значение параметра μ , при котором появляется *гетероклиническая* траектория между седлами O_μ и \tilde{O}_μ : в этом случае $W^u(O_\mu) \cap W^s(\tilde{O}_\mu) \neq \emptyset$;⁴

— при $\mu \in (\mu_2, \mu_3)$ существует странный гомоклинический аттрактор A_μ , содержащий точку O_μ вместе с ее неустойчивым инвариантным многообразием.

⁴Здесь $W^s(\tilde{O}_\mu)$ всегда двумерно, но $W^u(O_\mu)$ может быть либо одномерным (как в случае (i) бифуркации Андронова–Хопфа), либо двумерным (как в случае (ii) бифуркации удвоения периода). Соответственно, возникновение гетероклинических пересечений между $W^u(O_\mu)$ и $W^s(\tilde{O}_\mu)$ — это бифуркационное явление коразмерности один, то есть оно может свободно наблюдаться в однопараметрических семействах общего положения.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Мы считаем, что μ_0 и μ_1 — это точные бифуркационные значения параметра μ . Однако это нельзя, вообще говоря, утверждать относительно μ_2 и μ_3 . Дело в том, что в трехмерном случае, в отличие от двумерного, не всегда возможно определить (даже теоретически) момент первого гомоклинического или гетероклинического пересечения (касания).⁵ Поэтому нужно считать, что μ_2 и μ_3 — это некоторые значения параметра μ , при которых обнаруживаются соответствующие гомоклиническое и гетероклиническое пересечения.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. В этой статье мы предполагаем, для определенности, что при $\mu \in (\mu_2, \mu_3)$ точка O_μ принадлежит некоторому «гомоклиническому» странному аттрактору A_μ . Однако понятно, что это не всегда так. Например, если A_μ — квазиаттрактор, то на интервале (μ_2, μ_3) могут существовать так называемые «окна устойчивости», когда аттрактором является некоторая устойчивая периодическая точка или замкнутая инвариантная кривая. Более того, в реальных моделях могут наблюдаться и другие ситуации. Например, в известной механической системе «кельтский камень» [26, 27], хаос может возникать жестким образом (уже после того как образуются гомоклинические и гетероклинические структуры) в результате потери устойчивости предельного цикла (так называемого цикла Карапетяна). Здесь в критический момент этот цикл либо сливается с седловым того же периода и исчезает, либо в него «влипают» седловой цикл удвоенного периода (то есть происходит так называемая «обратная бифуркация удвоения»). В обоих случаях сразу после соответствующей бифуркации наблюдается хаотическая динамика.⁶

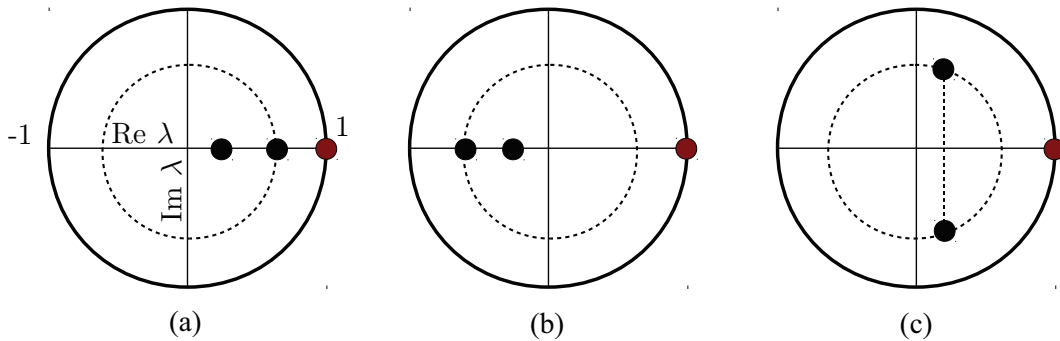


Рис. 1. Типы седло–узлов у ориентируемых 3D-отображений. На рисунке пунктирная окружность имеет радиус, равный модулю ведущего устойчивого мультипликатора.

Что касается седло-узловой бифуркации (при $\mu = \mu_0$), то в случае трехмерных ориентируемых отображений существуют три основных «гладких» типа таких бифуркаций, в зависимости от расположения устойчивых мультипликаторов (внутри единичной окружности). Так как T_μ ориентируемо, то есть произведение всех мультипликаторов положительно, это отвечает трем основным типам седло–узлов, которые схематически представлены на рисунке 1: здесь либо оба устойчивых мультипликатора (а) действительны и положительны, либо

⁵Например, в случае неподвижной точки седло–фокус $(2, 1)$ ее неустойчивое многообразие может навиваться на самоё себя при приближении к моменту касания. Поэтому определить, когда в точности наступит этот момент, практически невозможно, поскольку любой наперед выбранный кусок многообразия W^u будет окружен со всех сторон другими его же кусками.

⁶Которую, однако, нельзя автоматически ассоциировать со странным аттрактором. Дело в том, что указанная система является обратимой — реверсивной (но не консервативной), и хаос может включать периодические траектории с якобианом как больше, так и меньше единицы. Поэтому здесь должна наблюдаться так называемая смешанная динамика [28–30], когда гиперболические периодические траектории всевозможных типов (устойчивые, вполне неустойчивые и седловые) сосуществуют, и типично, когда они в совокупности не отделимы друг от друга.

(b) действительны и отрицательны, либо (c) комплексно-сопряжены. Тогда седло \tilde{O}_μ в случае (a) будет иметь топологический тип $(2+, 1+)$ (т.е. все мультипликаторы — два устойчивых и один неустойчивый — действительны и положительны), в случае (b) — топологический тип $(2-, 1+)$ (устойчивые мультипликаторы отрицательные, неустойчивый — положительный) и в случае (c) точка \tilde{O}_μ — седло-фокус $(2, 1)$ (устойчивые мультипликаторы комплексно сопряжены, а неустойчивый — действительный положительный). (См. рис. 2.)

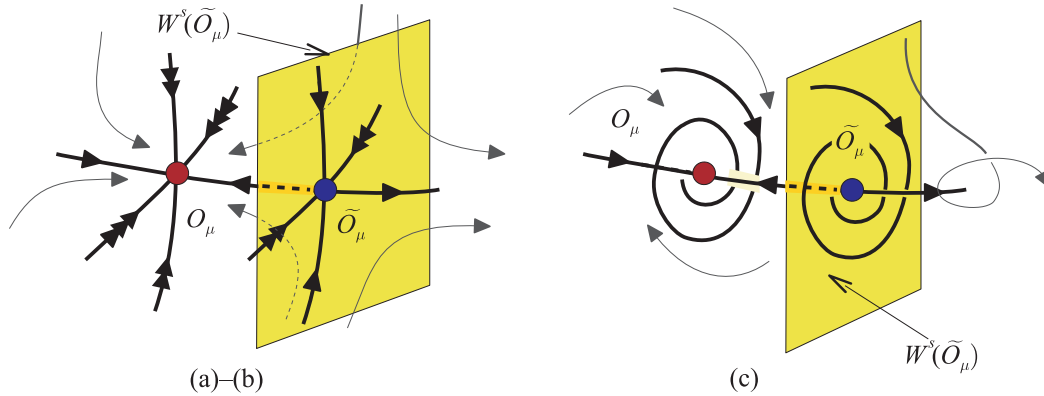


Рис. 2. Типы седло-узловых бифуркаций в соответствии с типами седло-узловых точек (a), (b) и (c) рисунка 1. Во всех случаях возникают седла типа $(2, 1)$. В случаях (a) и (b) — картинки одинаковые, но на $W^s(\tilde{O})$ имеется либо узел-плюс (a), либо узел-минус (b). В случае (c) рождается седло-фокус.

Отметим, что существование седловой точки \tilde{O}_μ имеет весьма важное значение для хаотической динамики в целом, поскольку ее двумерное устойчивое многообразие образует естественную *границу области притяжения* как для самой точки O_μ при $\mu_0 < \mu_1$, так и для всех тех аттракторов, которые она порождает (в том числе и странных) при $\mu > \mu_1$. Поэтому естественно ожидать, что кризисы⁷ таких СА и их разрушения будут связаны с образованием гетероклинических пересечений между неустойчивыми инвариантными многообразиями точек на аттракторе и границей устойчивости $W^s(\tilde{O}_\mu)$. И здесь мы можем сделать следующее важное замечание.

ЗАМЕЧАНИЕ. О КРИЗИСАХ СА, СОДЕРЖАЩИХ ТОЧКУ O_μ . По предположению АЗ, при значениях $\mu \in (\mu_2, \mu_3)$, точка O_μ принадлежит некоторому «гомоклиническому» аттрактору A_μ , так как $W^u(O_\mu) \cap W^s(O_\mu) \neq \emptyset$. Момент $\mu = \mu_3$, то есть когда $W^u(O_\mu)$ начинает пересекать границу $W^s(\tilde{O}_\mu)$ глобальной области устойчивости, отвечает кризису этого аттрактора. Здесь аттрактор либо мгновенно разрушается⁸, либо, скачком, возникает больший СА, поглощающий A_μ и содержащий точку \tilde{O}_μ . С другой стороны, если $\mu_3 < \mu_2$, то есть если такое гетероклиническое пересечение образуется раньше, чем гомоклиническое пересечение инвариантных многообразий точки O_μ , то странные аттракторы, содержащие точку O_μ , вообще не появятся.

⁷Кризис аттрактора, в отличие от внутренних бифуркаций, резко меняет его структуру так, что данное предельное множество (в смысле топологического предела при стремлении значения параметра к критическому значению) — уже не аттрактор (см. точное определение в [32]): аттрактор здесь либо разрушается, либо занимает совсем другую область фазового пространства, либо поглощается большим аттрактором. Последнее, например, может происходить при жесткой потере устойчивости периодическим или квазипериодическим (тором) аттрактором, находящимся в поглощающей области.

⁸Почти все его точки убегают либо на бесконечность, либо на какой-либо другой далекий аттрактор; в случае, когда A_μ — квазиаттрактор, могут, однако, сохраняться некоторые устойчивые периодические траектории больших периодов вместе с их областями притяжения.

Таким образом, в системах общего типа седло-узловая бифуркация играет двоякую роль: в результате такой бифуркации, во-первых, возникает динамика и образуется тривиальный аттрактор (устойчивая точка)⁹ и, во-вторых, формируются границы глобальной области притяжения аттракторов (в том числе и странных), ассоциированных с устойчивой точкой (точкой O_μ в нашем случае).

Что касается бифуркаций потери устойчивости точки O_μ (при $\mu = \mu_1$), то мы будем считать, что они во всяком случае невырождены. Тогда это либо бифуркация Андронова–Хопфа, либо бифуркация удвоения периода. В первом случае при $\mu = \mu_1$ на единичную окружность выходит пара мультипликаторов $e^{\pm i\varphi}$ (при условии отсутствия сильных резонансов, т. е. при $\varphi \neq 0, \pi, \pi/2, 2\pi/3$), а во втором — один мультипликатор -1 . Эти бифуркации настолько важны для дальнейшего, что по их типу мы различаем два основных сценария развития хаоса у трехмерных отображений. Эти сценарии представлены ниже.

Сценарий 1 (сценарий Шильникова [3])

- 1) При $\mu = \mu_1$ у точки O_μ появляется пара комплексно-сопряженных мультипликаторов $e^{\pm i\varphi}$, где $\varphi \neq 0, \pi, \pi/2, 2\pi/3$, и здесь происходит мягкая бифуркация Андронова–Хопфа, то есть при $\mu > \mu_1$ точка O_μ становится седловой — седло-фокус типа (1, 2), а в ее окрестности рождается асимптотически устойчивая замкнутая инвариантная кривая L_μ .
- 2) При дальнейшем изменении μ кривая L_μ разрушается одним из известных способов (см. § 5), в результате чего в ее окрестности возникает СА (вообще говоря, типа «тор-хаос»). Точка O_μ при $\mu < \mu_2$ лежит в стороне от этого СА.
- 3) При $\mu > \mu_2$ образуется гомоклинический аттрактор — аттрактор Шильникова, содержащий точку O_μ . Этот аттрактор может существовать вплоть до момента $\mu = \mu_3$ (когда возникает гетероклиническое пересечение между $W^u(O_\mu)$ и $W^s(\tilde{O}_\mu)$).

Сценарий 2

- 1) При $\mu = \mu_1$ у точки O_μ появляется мультипликатор -1 и происходит мягкая бифуркация удвоения периода, то есть при $\mu > \mu_1$ в окрестности точки O_μ рождается устойчивый цикл $P_{2\mu}$ периода 2 (состоящий из двух точек p_1 и p_2 , таких, что $T_\mu(p_1) = p_2$ и $T_\mu(p_2) = p_1$), а сама точка становится седловой неподвижной с мультипликаторами $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, такими, что $\lambda_1 < -1, 0 < \lambda_2 < 1, -1 < \lambda_3 < 0$.
- 2) При дальнейшем изменении μ с циклом $P_{2\mu}$ происходит серия бифуркаций, приводящая к возникновению СА (например, типа тор-хаос, когда отображение T_μ не является сильно-диссипативным). При этом (седловая) точка O_μ лежит в стороне от СА при $\mu < \mu_2$.
- 3) При $\mu \in (\mu_2, \mu_3)$ точка O_μ принадлежит гомоклиническому СА A_μ , тип которого зависит главным образом от мультипликаторов λ_2 и λ_3 седла O_μ :
 - а) если $|\lambda_2| > |\lambda_3|$, то аттрактор «квазилоренцевский»,
 - б) если $|\lambda_2| < |\lambda_3|$, то аттрактор «восьмерочный».

⁹В случае, когда седло-узел не имеет гомоклинической к нему траектории; в противном случае хаос может возникать даже при его исчезновении [8, 31].



В обоих случаях СА пунктов **3** момент $\mu = \mu_3$ является кризисным, то есть сразу после того как образуется гетероклиническое пересечение инвариантных многообразий $W^u(O_\mu)$ и $W^s(\tilde{O}_\mu)$, аттрактор либо разрушается, либо поглощается бóльшим аттрактором, содержащим точку \tilde{O}_μ .

В §§ 3 и 4 мы изучим подробнее предложенные сценарии и покажем, как они реализуются в ряде конкретных трехмерных отображений (в квадратичных трехмерных отображениях Эно).

3. О сценарии Шильникова (сценарий 1)

На первом шаге в критический момент $\mu = \mu_1$ на единичную окружность выходит пара комплексно-сопряженных мультипликаторов $\lambda_{1,2} = e^{\pm i\omega}$ точки O_μ . И мы предполагаем здесь, что в семействе T_μ при $\mu = \mu_1$ происходит *мягкая невырожденная* бифуркация Андронова–Хопфа. Это условие общего положения для однопараметрических семейств, и оно означает (в трехмерном случае), что неподвижная точка O_μ при $\mu > \mu_1$ становится седло–фокусом типа $(1, 2)$, то есть с двумерным неустойчивым многообразием, а в ее окрестности рождается гладкая замкнутая инвариантная кривая L_μ . Эта кривая асимптотически устойчивая, и она служит границей многообразия $W^u(O)$ — по крайней мере для всех значений μ , близких к μ_1 (см. рис. 3).

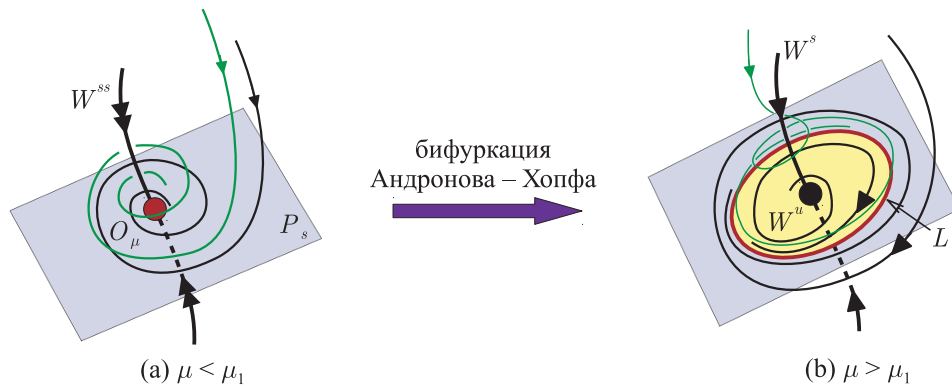


Рис. 3. (а) При $\mu < \mu_1$ аттрактором является неподвижная точка O_μ типа фокус. При этом все траектории, кроме траекторий точек на неведущем (сильно устойчивом) инвариантном многообразии W^{ss} , входят в O_μ , касаясь ведущей плоскости P_s . (б) Сразу при $\mu > \mu_1$ аттрактором является замкнутая инвариантная кривая L_μ , а точка O_μ становится седло–фокусом типа $(1, 2)$.

Отметим, что условие невырожденности бифуркации Андронова–Хопфа в случае отображений включает также требование отсутствия сильных резонансов (резонансов $1:1$, $1:2$, $1:3$ и $1:4$), то есть $\omega \neq 0, \pi, \pi/2, 2\pi/3$. Когда в бифуркационный момент присутствует резонанс p/q , где $q \geq 5$, замкнутая гладкая инвариантная кривая все равно рождается, но на ней будут лежать чередующиеся седла и узлы периода q . Поэтому нужно считать, что для всех $\mu > \mu_1$, близких к μ_1 , (глобальным) аттрактором отображения T_μ является либо вся инвариантная кривая L_μ , либо устойчивая периодическая траектория на ней в резонансном случае.

При дальнейшем изменении параметра μ кривая L_μ может потерять устойчивость. Основные бифуркационные механизмы потери этой устойчивости в целом известны (см., например, [32, гл. 2, § 1.6 и гл. 3, § 8.5]). В принципиальном плане, можно выделить следующие:

- *разрушение инвариантной кривой* (по Афраймовичу–Шильникову [8]);

- «удвоение тора» (так называют серию бифуркаций, в результате которых исходная инвариантная кривая теряет устойчивость, передавая ее новой инвариантной кривой «двойной длины»), подробнее об этом см. в [37];
- «жесткая потеря устойчивости тора», когда, типично, либо (i) инвариантная кривая исчезает (в результате «седло-узловой бифуркации» по Шенсине (A. Chenciner) — так обозначают некоторую серию бифуркаций, в результате которой устойчивая инвариантная кривая «сливается» с неустойчивой (седловой) и исчезает (может быть и в двумерном случае), либо (ii) происходит «обратное удвоение тора», когда, в результате опять же некоторой серии элементарных бифуркаций, в устойчивую инвариантную кривую «влипают» седловая удвоенной длины: при этом исходная инвариантная кривая становится также седловой;
- «прохождение через резонанс», когда на (асимптотически устойчивой) замкнутой инвариантной кривой появляются, типично, две периодические траектории одного и того же периода, устойчивая и седловая: если трехмерное отображение сильно диссипативное (или период достаточно большой), то здесь, в силу нормальной гиперболичности, ситуация похожа на двумерную (см. [8, 32]); но когда якобиан отображения близок к единице и период относительно не очень большой, трехмерность играет существенную роль, и здесь могут возникать весьма необычные СА (см., например, рис. 7, на котором показаны этапы образования «суперспирального» аттрактора при разрушении инвариантной кривой вблизи резонанса 1 : 4).

В первых двух случаях возникающий СА называют обычно *тор-хаосом*, и в § 5 мы дадим описание основных бифуркационных явлений, сопровождающих его появление. В третьем случае тип СА зависит главным образом от специфики задачи. Случай «прохождения через резонанс» представляет особый интерес еще и потому, что здесь, как нам кажется, нет пока достаточно законченной теории.

Заметим, что потеря устойчивости кривой L_μ и возникновение тор-хаоса естественно должно сопровождаться изменением геометрии неустойчивого многообразия точки O_μ , а именно: можно предположить, что в случае нашего семейства T_μ существует такое μ_1^* , что при $\mu_1 < \mu < \mu_1^*$ многообразие $W^u(O_\mu)$ является диском с границей L_μ (см. рис. 4a), а при $\mu > \mu_1^*$ оно начинает «наматываться» на L_μ (см. рис. 4b). Момент $\mu = \mu_1^*$ не является по-настоящему бифуркационным: здесь, как говорят, происходит «гладкая бифуркация», то есть меняется «гладкий тип» инвариантной кривой L_μ . Именно, при $\mu_1^* < \mu < \mu_1$ инвариантная кривая L_μ имеет узловой тип, а сразу при $\mu > \mu_1^*$ — фокусный (фокальный): в первом случае ляпуновские показатели $\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3$ на L_μ все действительные и такие, что $\Lambda_3 < \Lambda_2 < 0 < \Lambda_1 = 0$; во втором случае мы имеем, что $\text{Re}(\Lambda_3) = \text{Re}(\Lambda_2) < 0 < \Lambda_1 = 0$.

Геометрически это означает, что при $\mu > \mu_1^*$ образуется так называемая *воронка Шильникова*, в которую «втягиваются» все траектории из поглощающей области (все, кроме седла O_μ и траекторий точек одной из его устойчивых сепаратрис). При дальнейшем увеличении μ это «втягивание» будет сохраняться, однако поведение инвариантных многообразий седла O_μ может меняться. Более того, по предположению АЗ, наступит такой момент, $\mu = \mu_2$, когда эти многообразия пересекутся. Тогда точка O_μ будет принадлежать аттрактору вместе с $W^u(O_\mu)$, и здесь можно говорить об образовании *аттрактора Шильникова*. Если при этом точка O_μ — седло-фокус, то такой аттрактор является «спиральным», и он относится к классу квазиаттракторов [12, 15]. Однако если O_μ — седло, то есть имеет пару действительных и различных по модулю неустойчивых мультипликаторов, то такой аттрактор, в принципе, может быть уже «настоящим» (см. дискуссию в § 4.1).

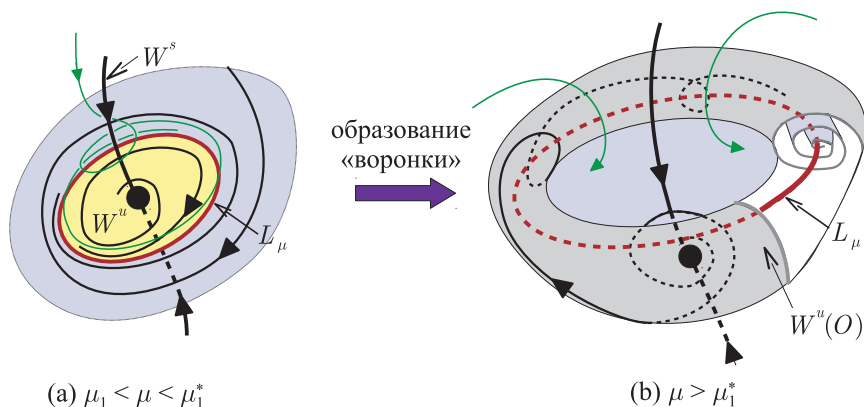


Рис. 4. На рисунке (b) показана «воронка Шильникова», часть которой как бы срезана, чтобы лучше показать внутреннюю структуру многообразия $W^u(O_\mu)$.

Подобный сценарий возникновения хаоса описал Шильников в статье [3]. Однако нужно заметить, что наше предположение А3 о том, что гомоклиническое пересечение многообразий $W^u(O_\mu)$ и $W^s(O_\mu)$ наступает *раньше*, чем гетероклиническое пересечение многообразий $W^u(O_\mu)$ и $W^s(\tilde{O}_\mu)$, то есть $\mu_2 < \mu_3$, является принципиально важным. В противном случае, если $\mu_2 > \mu_3$, аттрактор Шильникова не возникает и развитие хаоса заканчивается на стадии, например, тор-хаоса, который разрушается (при $\mu > \mu_3^* > \mu_3$), как только возникает гетероклиническое пересечение между неустойчивыми многообразиями его точек и $W^s(\tilde{O}_\mu)$.

В качестве иллюстрации рассмотренного сценария мы приведем некоторые результаты численного счета для трехмерных отображений Эно. На рисунке 5 показаны стадии формирования аттрактора Шильникова в отображении (1.3) с фиксированными $B = 0.7$ и $M_1 = 0$ при изменении M_2 от 0 до 0.129 (при $M_2 \sim 0.13$ аттрактор разрушается). На рисунке 6 показаны стадии образования (по Афраймовичу–Шильникову) тор-хаоса в 3ДНМ (1.2): здесь мы зафиксировали $B = 0.7$ и $M_2 = -0.5$ и меняли M_1 от 0 до 0.3. В этом случае аттрактор разрушался при $M_2 \sim 0.31$ (здесь имеет место случай $\mu_3 < \mu_2$). На рисунке 7 показан пример образования необычного («суперспирального» или «спирально-винтового») СА при прохождении вблизи резонанса: в данном случае – резонанса 1 : 4.

4. Сценарий 2: возникновение лоренцевского или «восьмерочного» СА

На первом шаге в критический момент $\mu = \mu_1$ у точки O_μ появляется мультипликатор -1 . Мы предполагаем, что соответствующая бифуркация удвоения периода является *мягкой и невырожденной*. Тогда при $\mu < \mu_1$ неподвижная точка O_μ асимптотически устойчива (это точка типа «узел-минус», так как ее ведущий мультипликатор отрицательный), а при $\mu > \mu_1$ она становится седлом типа $(2, 1)$, то есть с *двумерным* устойчивым инвариантным многообразием,¹⁰ и в окрестности точки O_μ рождается устойчивый цикл периода два.

¹⁰Здесь мы как раз и видим одно из принципиальных отличий от сценария 1, в котором, напомним, при потере устойчивости неподвижная точка становится седловой с *одномерным* устойчивым инвариантным многообразием.

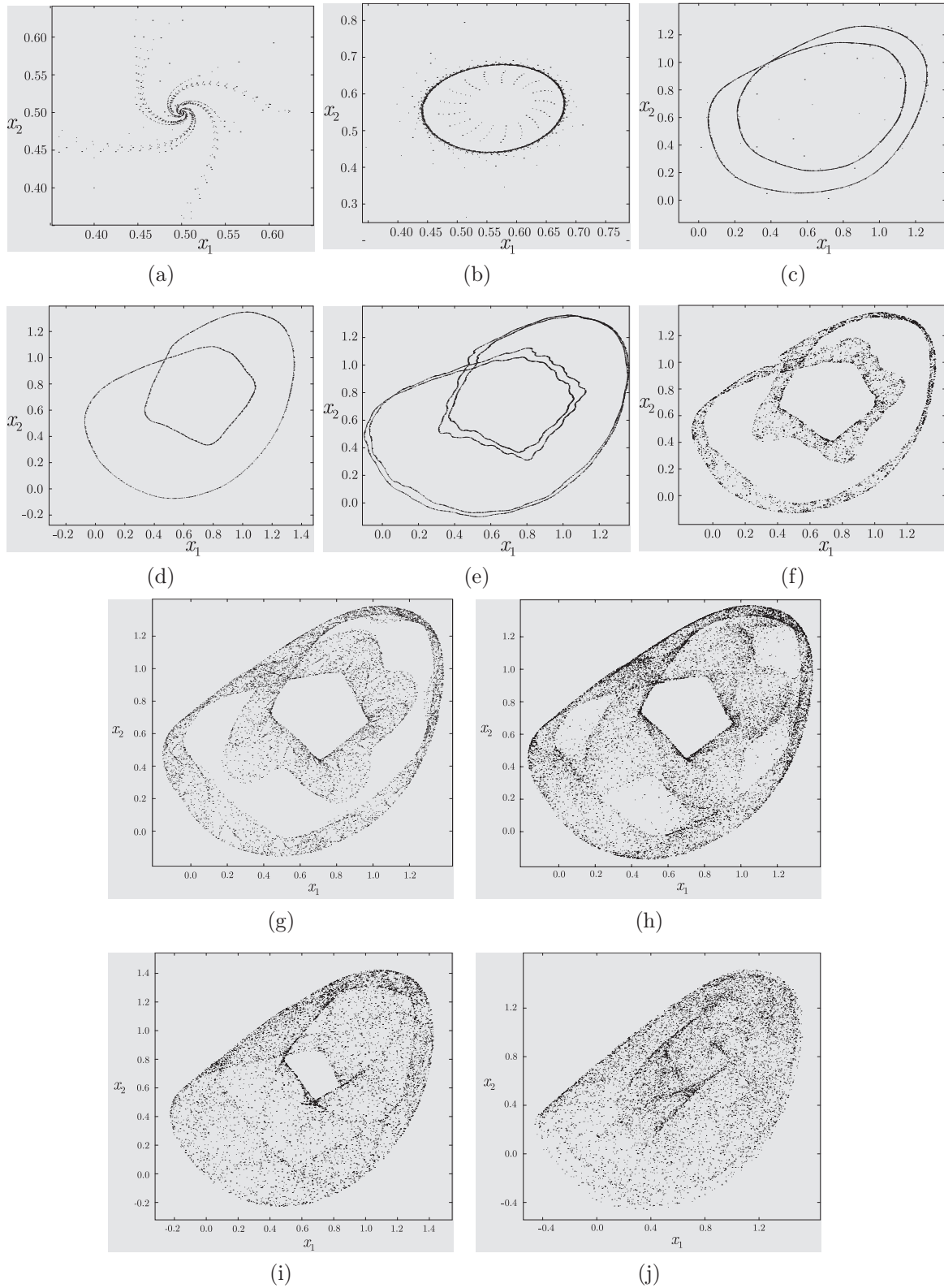


Рис. 5. Эволюция аттракторов в 3ДНМ (1.3) при фиксированных $B = 0.7$ и $M_1 = 0$: (а) $M_2 = 0.8$ (неподвижная точка); (б) $M_2 = 0.875$ (замкнутая инвариантная кривая); (с) $M_2 = 1.21$ (инвариантная кривая «удвоилась»); (д) $M_2 = 1.24$; (е) $M_2 = 1.245$ (второе удвоение); (ф) $M_2 = 1.25$; (г) $M_2 = 1.255$; (h) $M_2 = 1.258$ (развитие тор-хаоса); (и) $M_2 = 1.27$ (тор-хаос); (j) $M_2 = 1.29$ (аттрактор Шильникова).

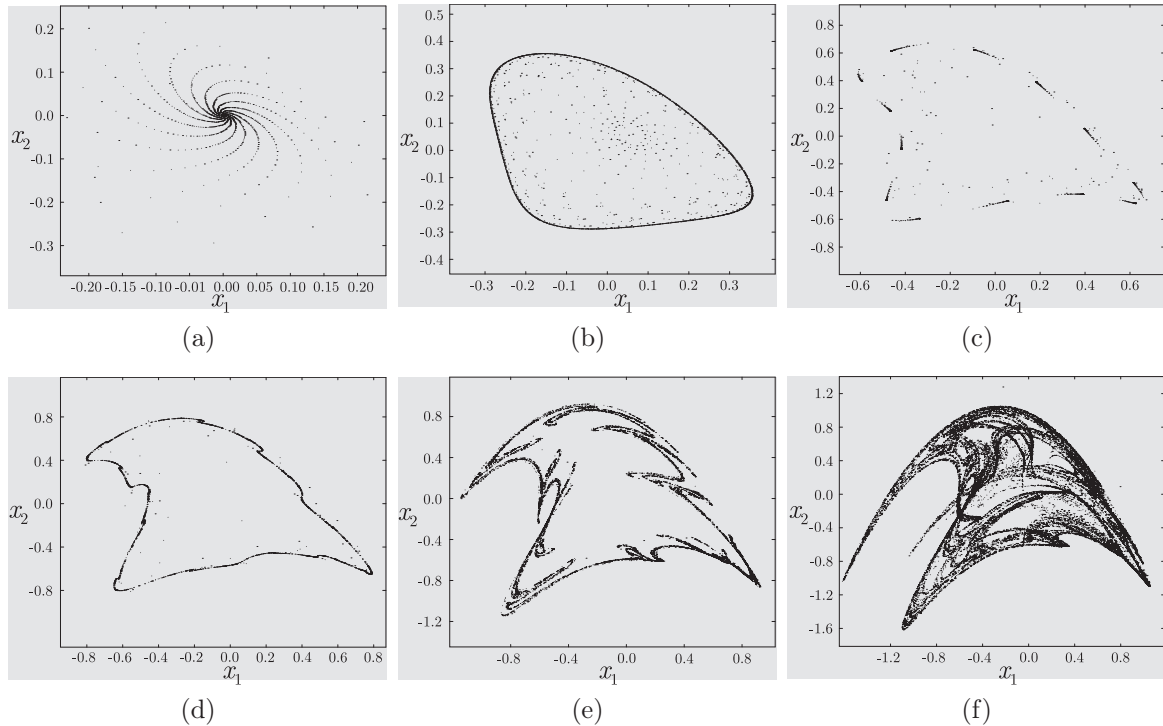


Рис. 6. Эволюция аттракторов в 3ДНМ (1.2) при $B = 0.7$, $M_2 = -0.5$: (а) $M_1 = 0$ (неподвижная точка); (б) $M_1 = 0.05$ (замкнутая инвариантная кривая); (с) $M_1 = 0.15$ (на кривой виден резонанс типа $4 : 13$); (д) $M_1 = 0.2$ (кривая негладкая); (е) $M_1 = 0.25$ (появление тор-хаоса); (ф) $M_1 = 0.3$ (развитый хаос — аттрактор с условным названием «корабль зергов»).

Этот цикл состоит из двух точек p_1 и p_2 , таких, что $T_\mu(p_1) = p_2$ и $T_\mu(p_2) = p_1$, а его мультипликаторы, т. е. собственные числа матрицы линеаризации $DT_\mu^2|_{p_i}$, $i = 1, 2$, все по модулю меньше единицы.

В момент, близкий к $\mu = \mu_1$, (глобальным) аттрактором отображения T_μ является (по предположению А2) этот устойчивый цикл $\{p_1, p_2\}$ (см. рис. 8). При дальнейшем изменении параметра μ с этим циклом происходят бифуркации, соответственно тип аттрактора меняется, и он становится странным типично одним из известных способов, например, в результате таких цепочек бифуркаций:

- (i) бесконечная последовательность бифуркаций удвоения \Rightarrow СА (фейгенбаумовский квазиаттрактор),
- (ii) бифуркация Андронова–Хопфа \Rightarrow инвариантный тор \Rightarrow тор-хаос,
- (iii) конечная последовательность бифуркаций удвоения \Rightarrow инвариантный тор \Rightarrow тор-хаос.

Заметим, что последовательность (i) бифуркаций характерна в основном только для сильно-диссипативных систем¹¹ или сохраняющих площадь отображений. Тор-хаос в случаях (ii) и (iii) может возникать опять одним из известных способов, о которых мы говорили в предыдущем параграфе. (См. также § 5, в котором мы более подробно рассмотрим сценарии «разрушение тора», «удвоение тора» и «седло-узловая бифуркация тора».)

¹¹ Например, у отображения Эно (1.2) при $B > \frac{1}{3}$ уже нет второго удвоения у устойчивой точки.

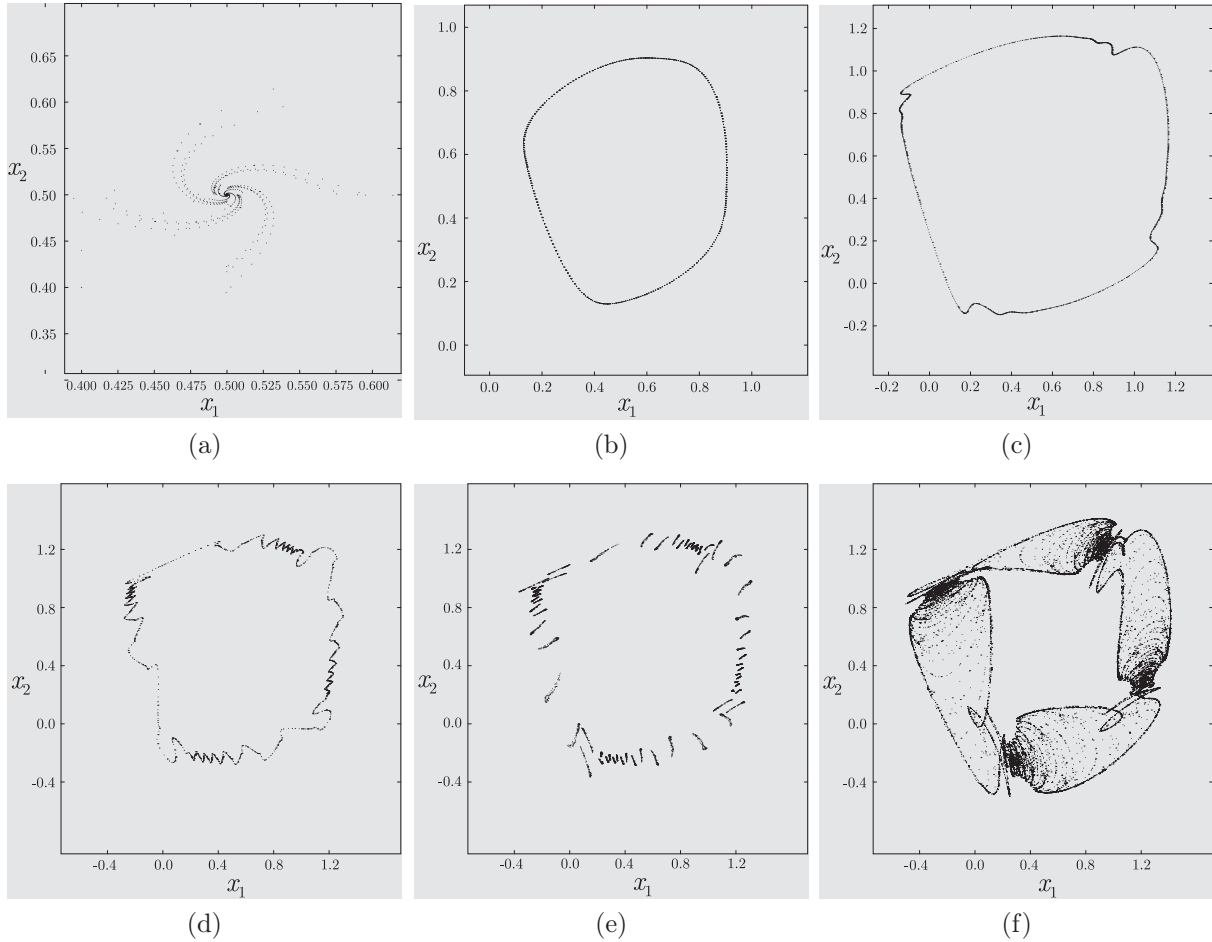


Рис. 7. Эволюция аттракторов в 3ДМ (1.3) при $B = 0.7$, $M_2 = 0.8$: (а) $M_1 = 0$ (неподвижная точка); (б) $M_1 = 0.1$; (с) $M_1 = 0.26$; (д) $M_1 = 0.335$ (замкнутая инвариантная кривая); (е) $M_1 = 0.34$ (тор «рассыпался»); (ф) $M_1 = 0.35$ («суперспиральный» аттрактор, вблизи резонанса $1 : 4$, он содержит два седло–фокуса периода 4: один с одномерным, другой с двумерным неустойчивыми многообразиями).

Естественно, что СА в указанных цепочках могут быть совершенно разной структуры и разной природы. Однако при $\mu = \mu_2$, то есть в тот момент, когда образуются гомоклинические пересечения многообразий исходного седла O_μ , происходит определенного рода унификация. В этом случае точка O_μ (автоматически) будет принадлежать аттрактору вместе с $W^u(O_\mu)$. Тогда (вообще говоря, при $\mu \geq \mu_2$ и достаточно близких к μ_2) можно выделить два основных геометрических типа таких глобальных гомоклинических аттракторов, в зависимости *только* от характера мультипликаторов $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ самой точки O_μ . Мы предполагаем здесь, что

$$\lambda_1 < -1, \quad 0 < \lambda_2 < 1, \quad -1 < \lambda_3 < 0$$

(т. е. седло O_μ сохранило свой топологический тип, какой у него был после бифуркации удвоения периода, происходившей при $\mu = \mu_1$). Тогда СА в рассматриваемом случае (при $\mu_2 < \mu < \mu_3$) можно разбить на два следующих типа.

- **Квазилоренцевские аттракторы**, если неведущим (сильно устойчивым) мультипликатором является отрицательный, то есть λ_3 ; соответственно, здесь $|\lambda_3| < \lambda_2$.

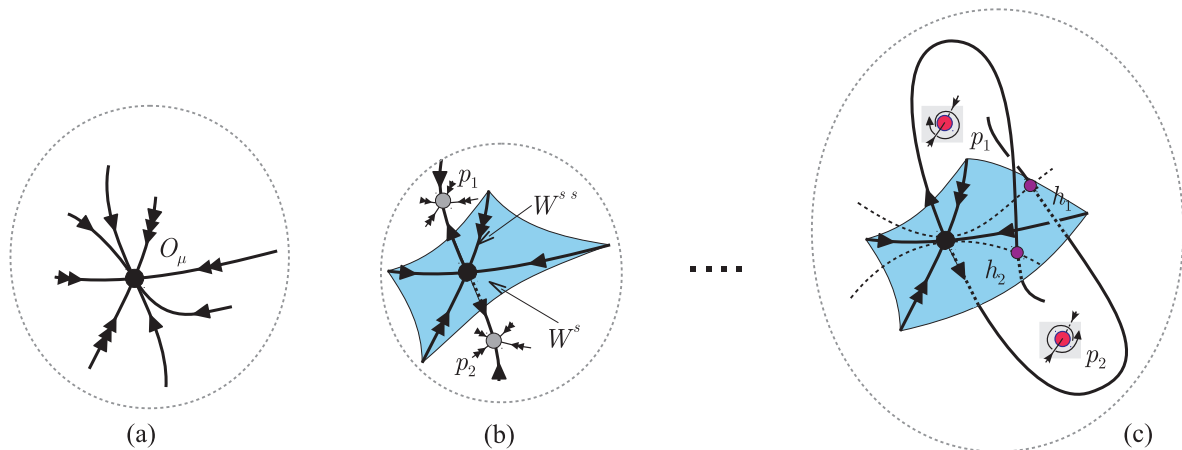


Рис. 8. Основные этапы развития гомоклинического аттрактора лоренцевского типа.

- **Восьмерочные аттракторы**, если неведущим (сильно устойчивым) мультипликатором является положительный, то есть λ_2 ; соответственно, здесь $\lambda_2 < |\lambda_3|$.

В первом случае можно говорить об образовании аттрактора, очень похожего на аттрактор Лоренца. Сходство здесь может быть как чисто условным (см. рис. 8с), так и геометрическим, в смысле фазового портрета (см., например, рис. 12е, ф). В принципе, можно указать следующие характерные признаки квазилоренцевских аттракторов:

- точка O_μ является седлом, лежащим строго на границе аттрактора, а кусок многообразия $W^u(O_\mu)$ с точкой O_μ является ребром этого аттрактора, к которому «приклеены его ветви-листья» (см. рис. 9),
- сильно устойчивое многообразие $W^{ss}(O_\mu)$ делит $W^s(O_\mu)$ (локально) на две половинки, и гомоклинические точки принадлежат только одной из них,
- аттрактор чаще всего имеет две «дырки», внутри которых типично лежит седловая точка периода два (однако иногда эти «дырки» могут «замазываться» за счет образования соответствующих гетероклинических пересечений, см. рис. 13 и пояснительный текст к нему), он также может иметь лакуны (здесь: трубчатые окрестности седловых замкнутых инвариантных кривых, не пересекающиеся с аттрактором, как на рис. 12е и 14h),
- седловая величина $\sigma \equiv |\lambda_1 \lambda_2|$ больше единицы.¹²

¹²Это условие является одним из необходимых для того, чтобы сам аттрактор или все близкие к нему не содержали бы устойчивых периодических траекторий (периодических аттракторов). Оно автоматически выполняется в случае классического аттрактора Лоренца (для отображения сдвига на единицу времени). Однако не ясно, насколько оно необходимо для геометрии аттрактора. В частности, кажется, что бифуркация «объединения» инвариантных кривых в одну, иллюстрируемая на рис. 14, происходит благодаря их «прохождению через гомоклиническую восьмерку», у которой $\sigma < 1$, — когда $\sigma > 1$, такое невозможно, так как кривые устойчивые. Аттрактор в это время является, конечно, квазиаттрактором.

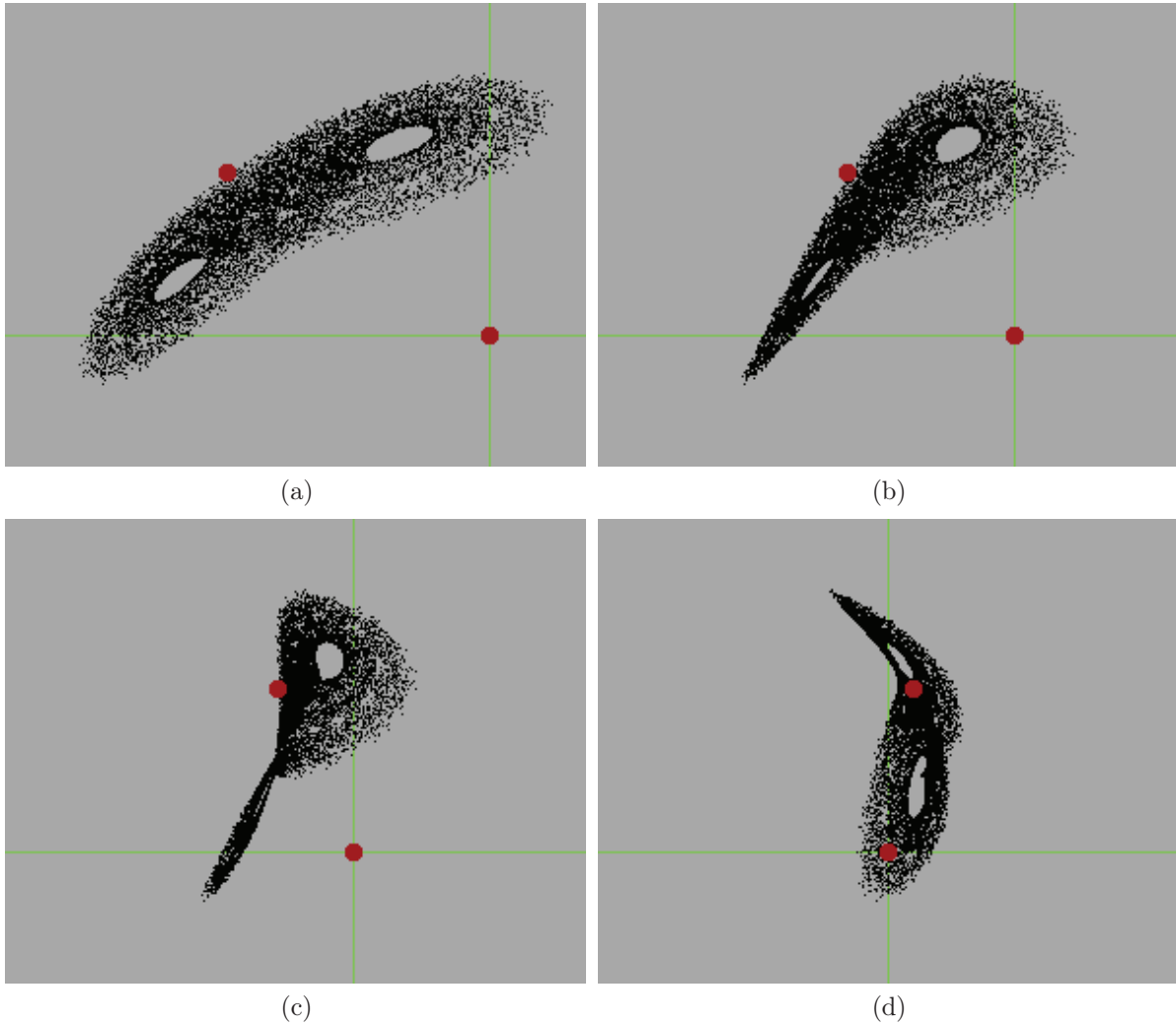


Рис. 9. Вид СА лоренцевского типа в случае отображения (1.2) (при $B = 0.7$, $M_1 = 0$, $M_2 = 0.85$) в различных ракурсах (повороты относительно вертикальной оси). Жирными точками отмечены неподвижные точки: O_μ — на аттракторе и \tilde{O}_μ — вне его.

«Восьмерочный аттрактор» не будет похож на квазилоренцевский по многим признакам. В частности, можно указать такие, как

- точка O_μ является седлом, лежащим «в середине» аттрактора, а «ветви-листья» аттрактора «приклеены» к $W^u(O_\mu)$ гладко,
- сильно устойчивое многообразие $W^{ss}(O_\mu)$ делит $W^s(O_\mu)$ (локально) на две половинки, и гомоклинические точки принадлежат обязательно им обеим.

Это можно извлечь из простого наблюдения того, как могут быть устроены гомоклинические пересечения многообразий седла O_μ в случае $\lambda_1 < -1, 0 < \lambda_2 < 1, -1 < \lambda_3 < 0$ при $|\lambda_2| < |\lambda_3|$ (см. рис. 10). Однако по-прежнему такой аттрактор имеет две «дырки», и условие $\sigma \equiv |\lambda_1 \lambda_3| > 1$ является необходимым для того, чтобы сам аттрактор и все близкие к нему не содержали бы устойчивых периодических точек.

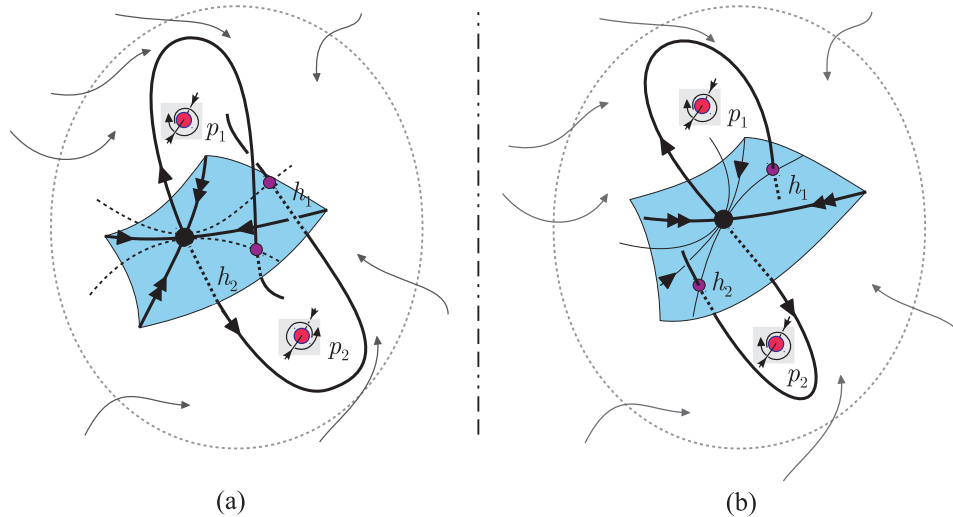


Рис. 10. Гомоклинические структуры для СА: (а) квазилоренцевского, (б) восьмерчного.

4.1. О псевдогиперболических (диких) странных аттракторах

Для обоих типов странных аттракторов, «квазилоренцевского» и «восьмерчного», можно поставить вопрос: при каких условиях эти аттракторы являются *настоящими*, то есть когда они сами и все близкие не содержат устойчивых периодических траекторий? Как вытекает из результатов Тураева и Шильникова [10, 11], они тогда должны обладать так называемой псевдогиперболической структурой: отображение на аттракторе должно быть устроено так, что всегда есть направление сильного сжатия, а на трансверсальном сечении отображение должно растягивать площади. В частности, это означает, что мультипликаторы $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ в седле O_μ должны быть такими, что

- $|\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3| < 1$ (сжатие объемов необходимо для существования аттрактора),
- $|\lambda_1| > 1$ и $|\lambda_1| > |\lambda_2| > |\lambda_3|$ (все мультипликаторы должны быть простыми, в частности, это означает, что точка O_μ у всех близких систем является седлом, а не седло-фокусом) — это условие обеспечивает существование как сильно неустойчивого, так и сильно устойчивого направлений;
- $|\lambda_1 \lambda_2| > 1$ — растяжение площадей в ортогональной к сильно устойчивому направлению площадке.

Такие аттракторы допускают гомоклинические касания и, следовательно, могут принадлежать областям Ньюхауса. Однако при наличии псевдогиперболической структуры ни сам аттрактор, ни все близкие не будут содержать устойчивых периодических траекторий. Такие аттракторы были названы *дикими гиперболическими аттракторами*. Терминология восходит к Ньюхаусу, который ввел понятие дикого гиперболического множества, а Тураев и Шильников предложили использовать соответствующий термин для обозначения указанных аттракторов, математическую теорию которых они, собственно, и построили [10, 11]. Важно, что существование гомоклинических касаний здесь неизбежно. С другой стороны, известно (критерий Гонченко, Тураева и Шильникова, [12, 13]), что определенного типа гомоклинические касания могут порождать устойчивые периодические траектории. Это означает, например, что дикие аттракторы не могут иметь гомоклинических касаний

к точкам с $|\lambda_1| = |\lambda_2| > 1$ или с $|\lambda_3| = |\lambda_2| < 1$, то есть, в частности, седло-фокусы запрещены.

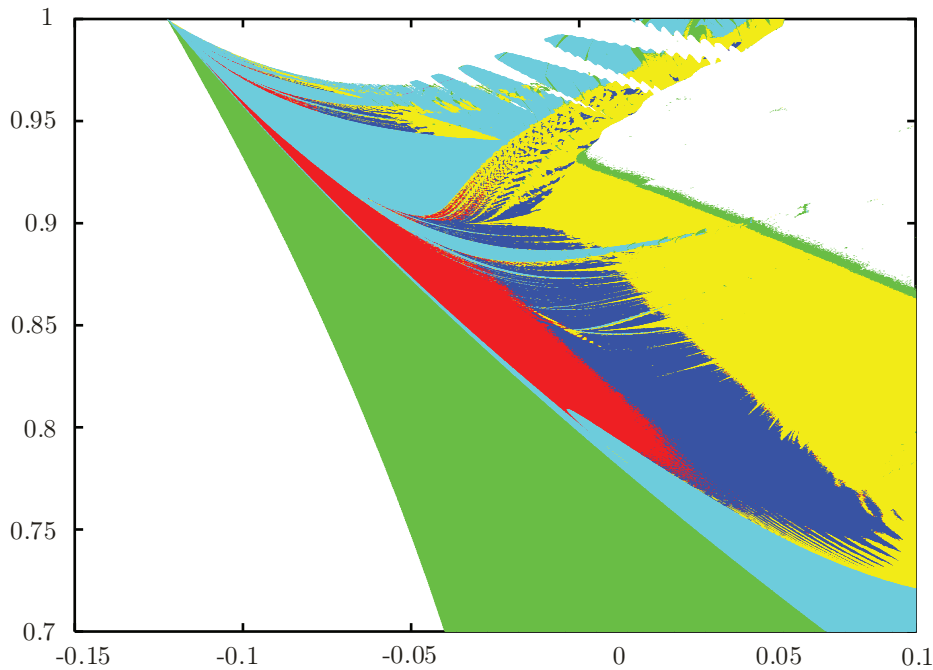


Рис. 11. Карта ляпуновских показателей (из [18]) для области $D_1 : \{-0.15 < M_1 < 0.1; 0.7 < M_2 < 1\}$ параметров при $B = 0.7$ в случае ЗДНМ (1.2). На цветной версии рисунка* зеленым, голубым, красным, синим и желтым показаны области значений параметров, отвечающие траекториям с разным набором ляпуновских показателей Λ_1, Λ_2 и Λ_3 . На черно-белом рисунке эти цвета расположены слева-направо вдоль, например, линии $M_2 = 0.8$.

Отметим, что в работе [18] были численно проверены условия псевдогиперболичности для аттракторов квазилоренцевского типа в случае отображения (1.2). Было показано, что эти условия выполняются для значений параметров из некоторых открытых областей. В частности, такие области были обнаружены при $B = 0.7$. На рисунке 11, взятом из [18] показано разбиение области $D_1 : \{-0.15 < M_1 < 0.1; 0.7 < M_2 < 1\}$ на участки, отвечающие разным типам асимптотического поведения траекторий на аттракторе. Другими словами, здесь изображена так называемая *карта ляпуновских показателей*. На этой карте разными цветами отмечены значения параметров, отвечающих траекториям с разным набором ляпуновских показателей Λ_1, Λ_2 и Λ_3 . Во-первых, белые участки отвечают тем значениям параметров, при которых итерации начальной точки покидают некоторую заданную окрестность фазового пространства. Положим для определенности, что $\Lambda_1 \geq \Lambda_2 \geq \Lambda_3$. Тогда

1. *зеленый цвет* отвечает случаям, когда $\Lambda_1 < 0$, то есть периодическим аттракторам,
2. *голубой цвет* отвечает случаям, когда $\Lambda_1 = 0 > \Lambda_2 > \Lambda_3$, то есть устойчивым замкнутым инвариантным кривым,
3. *красный цвет* отвечает случаям, когда $\Lambda_1 > 0 = \Lambda_2 > \Lambda_3$,

*Для читателя печатной версии: здесь и далее полноцветные версии рисунков см. в эл. версии статьи — <http://nd.ics.org.ru/doc/r/pdf/1966/0>

4. *синий цвет* отвечает случаям, когда $\Lambda_1 > \Lambda_2 > 0 > \Lambda_3$,
5. *желтый цвет* отвечает случаям, когда $\Lambda_1 > 0 > \Lambda_2 > \Lambda_3$.

Последние 3 случая отвечают странным аттракторам. Причем здесь знак « \Rightarrow » (при красном цвете) означает только, что отличие Λ_2 от 0 не больше, чем условленные границы точности вычисления ляпуновских показателей (в [18] эти границы выбирались между 10^{-5} и 10^{-6} в зависимости от типа вычислений).

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Для СА, представленного на рисунке 12f, была тщательно проверена зависимость старшего ляпуновского показателя Λ_1 при $B = 0.7$, $M_2 = 0.85$ от M_1 . Было численно установлено, что график $\Lambda_1(M_1)$ в окрестности точки $M_1 = 0$ является гладкой кривой, одной и той же для разных начальных условий (даже когда исходный интервал по M_1 длиной порядка 10^{-2} был разбит на 10^8 интервалов в эксперименте К. Симо). Обычная ситуация в случае квазиаттракторов — прямо противоположная: здесь (если захотеть) на любом участке значений параметра можно обнаружить фрактальную структуру соответствующего графика.

Используя такую карту, как на рисунке 11, можно легко проследить, при изменении параметров, эволюцию притягивающих множеств 3ДНМ (1.2) с $B = 0.7$ от простого аттрактора к странному. На рисунках 12 и 13 показаны результаты при фиксированном $M_2 = 0.85$, а на рисунке 14 — при фиксированном $M_2 = 0.75$.

Некоторые результаты счета для 3ДНМ (1.3) были показаны выше на рисунке 5. Здесь финальный аттрактор — это аттрактор Шильникова. Поскольку он спиральный (содержит седло–фокус O_μ), то это квазиаттрактор по критерию из [12]. Однако промежуточные аттракторы типа тор–хаос (рис. 5f, g и h) вполне могут претендовать на роль настоящих СА, обладающих псевдогоперболической структурой.

5. О бифуркационных механизмах возникновения тор–хаоса

Как мы видим, бифуркации, связанные с возникновением тор–хаоса, в рассмотренных сценариях играют весьма важную роль, и, в принципе, если $\mu_3 < \mu_2$, то как раз они могут приводить к финальным СА, не содержащим точку O_μ . Естественно, таких аттракторов, в отличие от финальных гомоклинических (содержащих O_μ), может быть бесконечное множество различных типов. Вряд ли их возможно как-то разумно классифицировать, однако мы можем описать основные особенности бифуркационных механизмов возникновения тор–хаоса (см. § 3). Два из них, «удвоение тора» и «жесткая потеря устойчивости тора», в главных чертах похожи на то, что происходит с циклами в (трехмерных) потоках (имеются в виду бифуркации удвоения периода циклов и бифуркации слияния двух циклов), и поэтому мы дадим ниже лишь их краткое описание. Другой механизм, «прохождение через резонанс», мы здесь не будем обсуждать, потому что он слишком специальный, да и возникающие здесь аттракторы могут иметь весьма слабую ассоциацию с обычным «тор–хаосом» (см., например, рис. 7f). Механизм же «разрушение тора» (по Афраймовичу – Шильникову) существенно отличается от того, что нам дает потоковая интуиция, и поэтому мы обсудим его сейчас более подробно.

5.1. О механизме Афраймовича – Шильникова развития тор–хаоса

Это один из типичных способов, когда возникает СА типа «тор–хаос» вследствие смены квазипериодического режима на хаотический в результате разрушения замкнутой инвариантной кривой (тора). Он может быть даже у двумерных отображений, собственно для которых и приведена иллюстрация (рис. 15). Здесь изображена окрестность (кольцо)

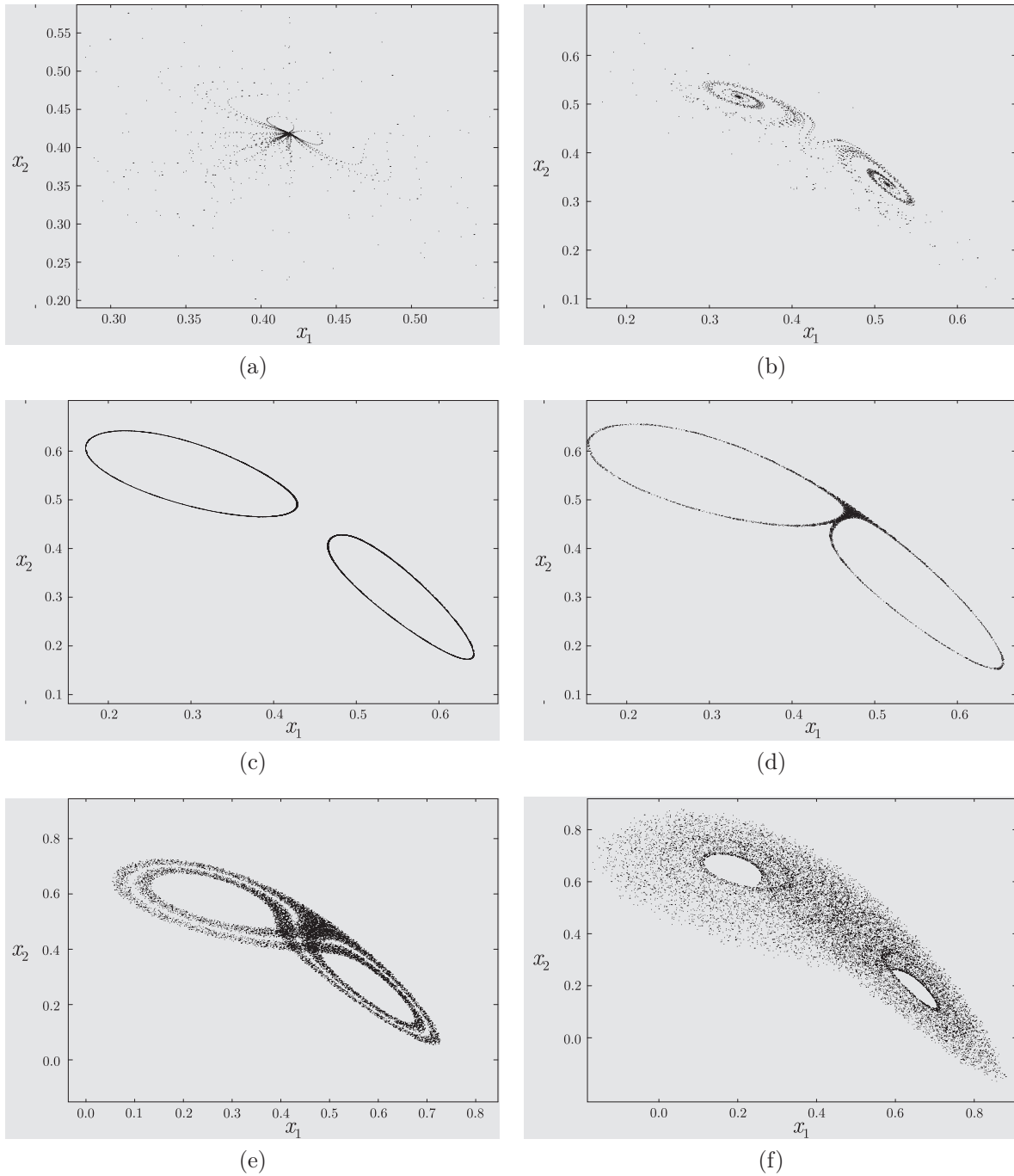


Рис. 12. Эволюция аттракторов в 3ДНМ (1.2) с $B = 0.7$, $M_2 = 0.85$ при изменении M_1 : (а) $M_1 = -0.055$ (неподвижная точка); (б) $M_1 = -0.045$ (цикл периода 2); (с) $M_1 = -0.0342$ (замкнутая инвариантная кривая периода 2); (д) $M_1 = -0.0341$; (е) $M_1 = -0.045$; (ф) $M_1 = 0$. В последних трех случаях наблюдается СА (лоренцевского типа).

резонансной инвариантной кривой, содержащей две неподвижные точки: устойчивый узел N и седло S . У последнего на рисунке показаны две половинки с устойчивым многообразием, которые на самом деле отождествлены. Три колонки на рисунке отвечают трем разным типичным способам разрушения инвариантной кривой.

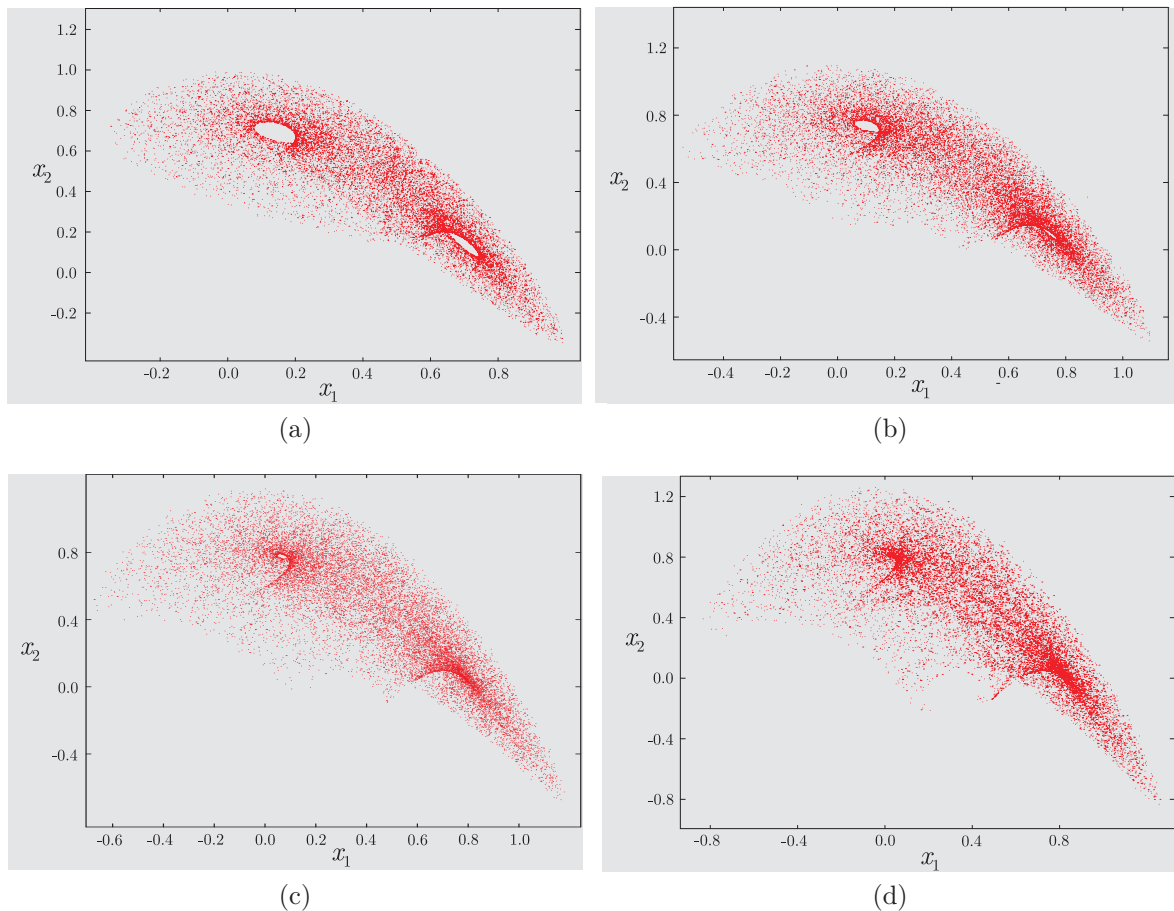


Рис. 13. Эволюция аттракторов в 3ДМ (1.2) с $B = 0.7$, $M_2 = 0.85$ при изменении M_1 : (а) $M_1 = 0.025$; (б) $M_1 = 0.05$; (с) $M_1 = 0.075$; (д) $M_1 = 0.1$. Во всех этих случаях наблюдается СА лоренцевского типа, который, однако, эволюционирует к «СА без дырок», показанному на рис. (д). Похоже, что здесь образуется нечто типа «быковских контуров» [33, 34], за счет появления пересечения между одномерными неустойчивыми многообразиями точек странного аттрактора и одномерным устойчивым многообразием седло-фокусного цикла $\{p_1, p_2\}$ периода 2 (см. рис. 10), лежащего в «дырках».

В общем случае механизм Афраймовича – Шильникова начинается с того, что на инвариантной кривой L_μ появляются (резонансные) седла S и узлы N одного и того же периода. При этом поначалу инвариантная кривая (здесь это замыкание неустойчивых многообразий седла) является по-прежнему гладкой (но гладкость ее уже конечная и, вообще говоря, зависит от соотношений между мультипликаторами узлов¹³).

¹³Поясним это на примере линейного отображения $\bar{x} = \nu_1 x$, $\bar{y} = \nu_2 y$, где $0 < \nu_2 < \nu_1 < 1$. Точка $O(0, 0)$ является устойчивым узлом, у которого ось « y », $x = 0$, является сильно устойчивым инвариантным многообразием, а ось « x », $y = 0$, определяет ведущее направление. Нетрудно проверить, что кривые вида $y = Cx^\alpha$, где $\alpha = \frac{\ln \nu_2}{\ln \nu_1}$, являются инвариантными, то есть любая точка на такой кривой остается на ней при итерациях отображения. Это означает, что любая траектория (кроме траекторий тех точек, которые лежат на $W^{ss} : \{x = 0\}$) входит в O , касаясь ведущего направления $y = 0$. Соответственно, любая инвариантная кривая, входящая в O , будет лежать целиком между двумя какими-либо кривыми $y = C_1 x^\alpha$ и $y = C_2 x^\alpha$, то есть если она C^r -гладкая, то ее гладкость не должна типично превышать целую часть числа α .

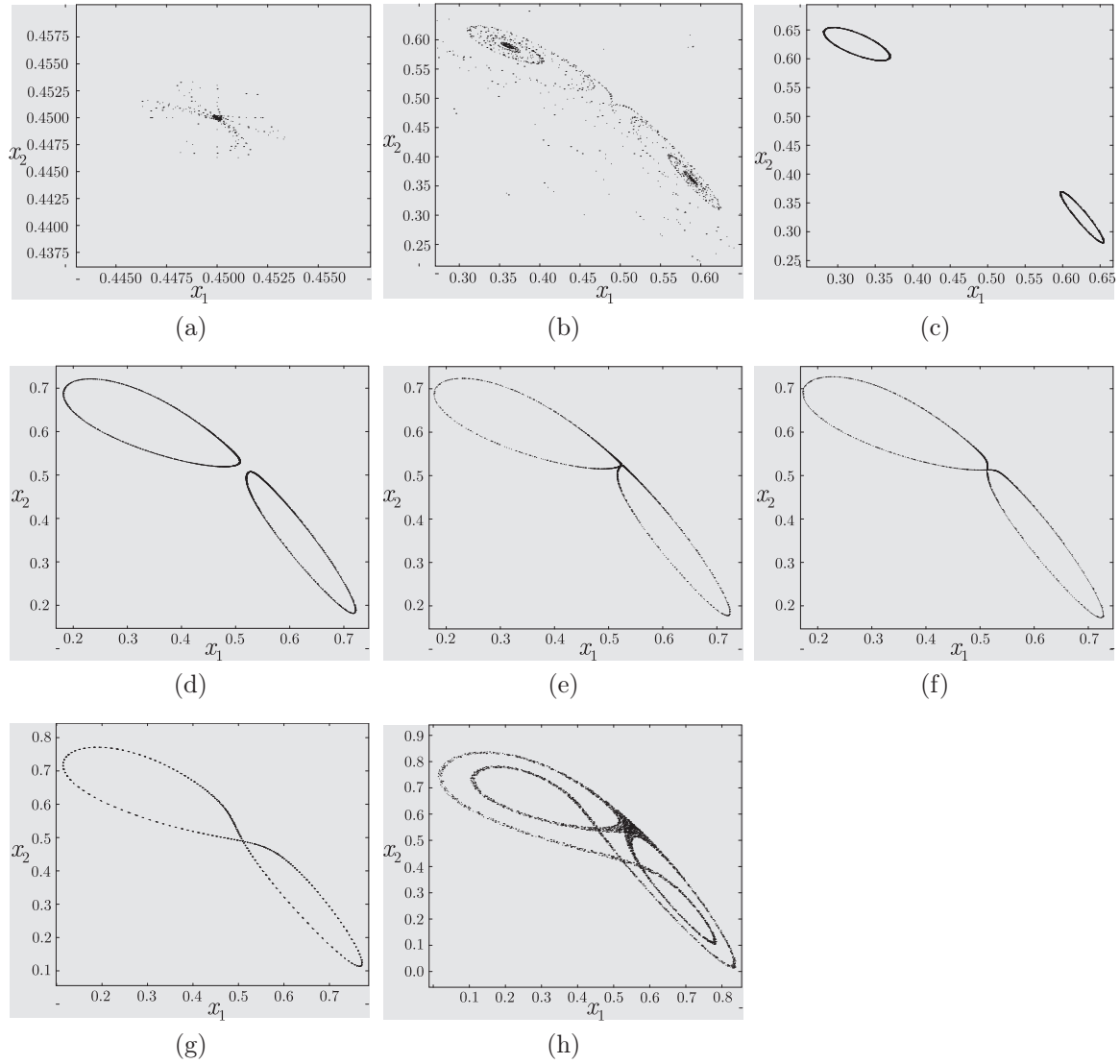


Рис. 14. Эволюция аттракторов в 3ДМ (1.2) при $B = 0.7$, $M_2 = 0.75$: (a) $M_1 = -0.025$ (неподвижная точка); (b) $M_1 = 0.025$ (цикл периода 2); (c) $M_1 = 0.035$ и (d) $M_1 = 0.039$ (замкнутая инвариантная кривая периода 2); (e) $M_1 = 0.0395$ — момент близкий к бифуркационному, когда замкнутая инвариантная кривая периода 2 «влипает в гомоклинику» и превращается в кривую периода 1; (f) $M_1 = 0.4$ и (g) $M_1 = 0.05$ (замкнутая инвариантная кривая периода 1); (h) $M_1 = 0.06$ (СА — лоренцевского типа).

Однако, при изменении параметра, кривая L_μ может стать негладкой, поскольку инвариантное неустойчивое многообразие седла может идти в узел, не касаясь определенного направления. Это понятно во втором и третьем случаях (средняя и правая колонки рис. 15), когда $W^u(S)$ пересекает $W^{ss}(N)$ и когда точка N становится фокусом. В первом случае (левая колонка рис. 15) требуется некоторое пояснение (см. рис. 16). На рисунке 16 пунктирными линиями изображены границы так называемых фундаментальных областей. Мы рассматриваем области, границы которых пересекают ровно по одной точке инвариантные кривые, которые гладко входят в узел N . Если инвариантное многообразие $W^u(S)$ также пересекает каждую из этих границ в одной точке, то $\overline{W^u(S)}$ будет гладкой кривой

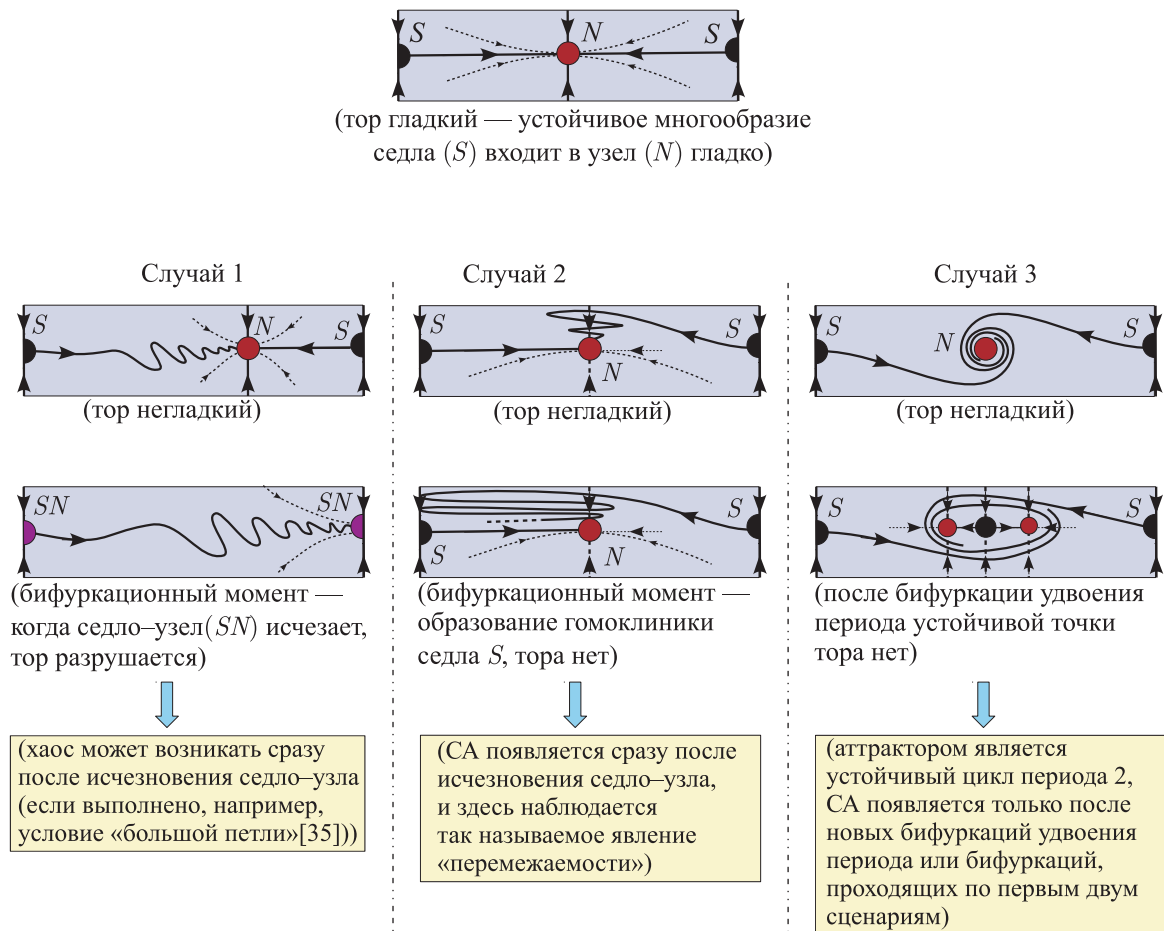


Рис. 15. К механизму Афраимовича–Шильникова возникновения тор-хаоса.

(рис. 16а). Если же таких точек пересечения 3 (или больше), то, очевидно, кривая $\overline{W^u(S)}$ теряет гладкость в точке N (рис. 16b и c).

В первом случае инвариантная кривая $\overline{W^u(S)}$ существует (постепенно теряя гладкость) вплоть до того бифуркационного момента, когда седло сливается с узлом. Здесь сразу же после исчезновения седло–узла может возникать СА. Однако для этого требуется, чтобы выполнялись некоторые дополнительные условия, например, условие «большой петли» из [35] (см. рис. 16с). Заметим, что некоторые достаточные условия, при выполнении которых сразу после исчезновения седло–узла возникает СА, установлены, например, в [36].

Во втором случае инвариантная кривая $\overline{W^u(S)}$ пересекает неведущее (сильно устойчивое) многообразие узла. Здесь сразу же тор $\overline{W^u(S)}$ негладкий, и он разрушается, как только образуется гомоклиническое касание у седла S (см. рис. 15, второй столбец). Однако для появления СА нужно, чтобы произошла седло-узловая бифуркация, как и в первом случае. При этом здесь возникает сразу же развитый хаос и наблюдается динамическое явление, называемое *перемежаемостью*.¹⁴

¹⁴Иногда говорят о «перемежаемости по Помо–Манневиллю», которые дали скорее физическую интерпретацию этого явления. Однако математическая его теория, в основе которой лежит бифуркация исчезновения седло-узловой периодической траектории, имеющей гомоклиническую орбиту,

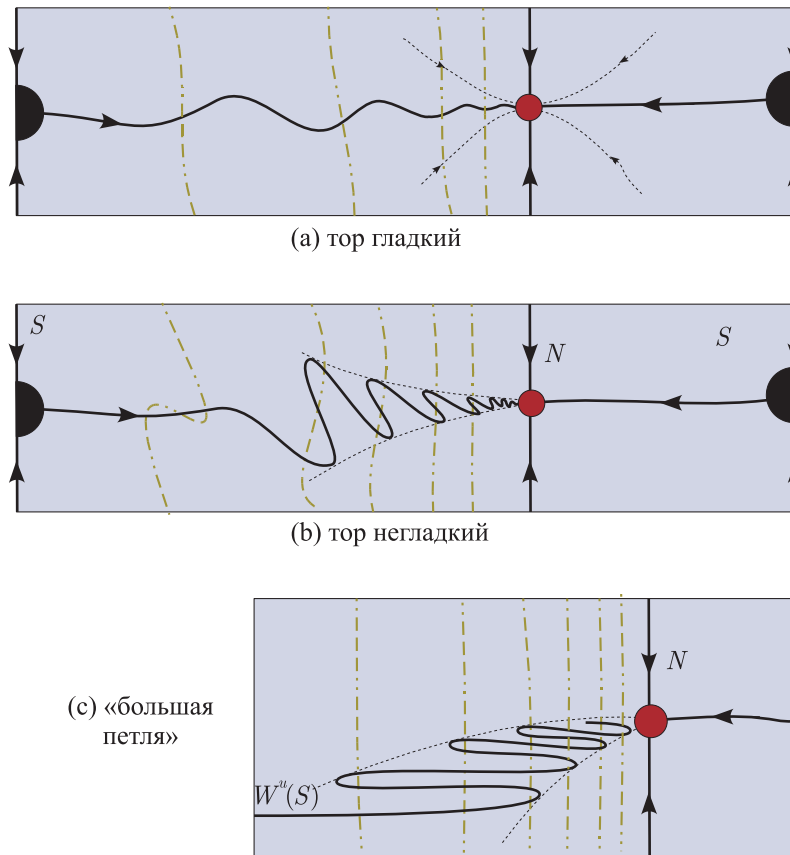


Рис. 16. К вопросу о гладкости инвариантного тора.

В третьем случае узел сначала становится фокусом и тор автоматически теряет гладкость. При этом он разрушается, когда, например, происходит бифуркация удвоения периода устойчивой точки. Однако для появления СА нужно, чтобы произошла еще некоторая серия бифуркаций уже с устойчивой точкой периода 2. Например, здесь может иметь место бесконечная последовательность бифуркаций удвоения периода или бифуркации по типу случаев 1 и 2 механизма Афраймовича – Шильникова.

5.2. О возникновении тор–хаоса в результате удвоений инвариантных кривых

Предположим здесь, что существует такое $\mu_1^{**} > \mu_1^*$, при котором опять меняется гладкий тип кривой L_μ — она становится при $\mu > \mu_1^{**}$ снова узлового типа, но с прыгающими направлениями (для T_μ^2 это обычная узлового типа инвариантная кривая). Здесь есть некоторая аналогия с периодической траекторией, имеющей отрицательные действитель-

была установлена Лукьяновым и Шильниковым [31]. Сам термин *перемежаемость* (intermittency) возник как отражение специфики характера временных реализаций хаотических колебаний, возникающих здесь: участки явно нерегулярных, случайных колебаний чередуются (перемежаются) с участками колебаний, более или менее похожих на регулярные. Это легко объясняется, так как в «нерегулярной фазе» траектория находится в области развитого хаоса, а в «регулярной фазе» — вблизи бывшего седло–узла.

ные мультипликаторы. Аналогия простирается даже дальше: такая замкнутая инвариантная кривая может потерять свою устойчивость в результате *бифуркации удвоения* — сама кривая становится седловой, а в ее окрестности появляется устойчивая замкнутая инвариантная кривая, дважды обвивающая исходную. Очевидно, такие бифуркации не могут быть у двумерных диффеоморфизмов, но в трехмерном случае они вполне возможны. Более того, с новой кривой может произойти опять бифуркация удвоения и т. д. Может ли этот процесс удвоений идти до бесконечности — неясно. Однако несколько таких бифуркаций можно наблюдать при численных экспериментах (см. рис. 5b–f).

5.3. О возникновении хаоса в результате жесткой потери устойчивости инвариантной кривой

Как известно (и это показывают, в частности, численные эксперименты), с инвариантными замкнутыми кривыми могут происходить бифуркационные явления, очень похожие на те, которые наблюдаются у предельных циклов. Конечно, теория бифуркаций замкнутых инвариантными кривых гораздо сложнее, однако если не вдаваться в определенные тонкие детали, то аналогия покажется весьма значительной. Так, известные бифуркации (Андропова–Хопфа) рождения цикла из сложного фокуса, бифуркация удвоения периода предельного цикла, бифуркации слияния и исчезновения двух предельных циклов, а также бифуркации предельных циклов при прохождении через петлю седла имеют свои аналоги и в случае замкнутых инвариантных кривых. Первые два типа бифуркаций мы обсуждали выше и, кроме того, приводили результаты численного счета, которые иллюстрируют эти бифуркации. В этой статье мы не останавливаемся подробно на описании бифуркаций последних двух типов. Однако такие «живые» бифуркации можно наблюдать на рисунке 14, на котором видно как две устойчивые замкнутые инвариантные кривые сливаются в одну, пройдя через «гомоклиническую восьмерку» седла O_μ (рис. d–g), и как получившаяся инвариантная кривая (рис. g) жестко теряет устойчивость,¹⁵ так что сразу же проявляется хаос (образовавшийся ранее за счет гомоклик седла O_μ).

Авторы благодарят А. Борисова, И. Мамаева и Д. Тураева за весьма полезные замечания.

Список литературы

- [1] Шильников Л. П. Об одном случае существования счетного множества периодических движений // Докл. АН СССР, 1965, т. 160, № 3, с. 558–561.
- [2] Шильников Л. П. К вопросу о структуре расширенной окрестности грубого состояния равновесия типа седло–фокус // Матем. сб., 1970, т. 81, № 1, с. 92–103.
- [3] Шильников Л. П. Теория бифуркаций и турбулентность // Методы качественной теории дифференциальных уравнений: Межвуз. сб. / Е. А. Леонтович–Андропова. Горький: ГГУ, 1986. С. 150–163.
- [4] Афраймович В. С., Быков В. В., Шильников Л. П. О возникновении и структуре аттракторов Лоренца // Докл. АН СССР, 1977, т. 234, № 2, с. 336–339.
- [5] Афраймович В. С., Быков В. В., Шильников Л. П. О притягивающих негрубых предельных множествах типа аттрактора Лоренца // Тр. ММО, 1982, т. 44, с. 150–212.

¹⁵Типично здесь возможны два варианта: «седло-узловая бифуркация» — устойчивая кривая сливается с такой же седловой и исчезает, и «обратное удвоение» — в устойчивую кривую влипают седловая инвариантная кривая двойной длины, передавая первой свою неустойчивость.

- [6] Шильников Л. П. Теория бифуркаций и модель Лоренца // Бифуркация рождения цикла и ее приложения / Дж. Марсден, М. Мак-Кракен. М.: Мир, 1980. С. 317–335.
- [7] Shilnikov L. P. Mathematical problems of nonlinear dynamics: A Tutorial // J. Franklin Inst. B, 1997, vol. 334, nos. 5–6, pp. 793–864.
- [8] Афраймович В. С., Шильников Л. П. Инвариантные торы, их разрушение и стохастичность // Методы качественной теории дифференциальных уравнений: Межвуз. тематич. сб. науч. тр. / Е. А. Леонтович-Андропова. Горький: ГГУ, 1983. С. 3–26.
- [9] Benedicks M., Carleson L. The dynamics of the Hénon map // Ann. of Math (2), 1991, vol. 133, pp. 73–169.
- [10] Тураев Д. В., Шильников Л. П. Пример дикого странного аттрактора // Матем. сб., 1998, т. 189, № 2, с. 137–160.
- [11] Тураев Д. В., Шильников Л. П. Псевдогиперболичность и задача о периодических возмущениях аттракторов лоренцевского типа // Докл. РАН, 2008, т. 418, № 1, с. 23–27.
- [12] Гонченко С. В., Тураев Д. В., Шильников Л. П. Динамические явления в многомерных системах с негрубой гомоклинической кривой Пуанкаре // Докл. РАН, 1993, т. 330, № 2, с. 144–147.
- [13] Gonchenko S. V., Shilnikov L. P., Turaev D. V. Dynamical phenomena in systems with structurally unstable Poincaré homoclinic orbits // Chaos, 1996, vol. 6, no. 1, pp. 15–31.
- [14] Newhouse S. E. The abundance of wild hyperbolic sets and nonsmooth stable sets for diffeomorphisms // Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math., 1979, vol. 50, pp. 101–151.
- [15] Гонченко С. В., Тураев Д. В., Шильников Л. П. О динамических свойствах диффеоморфизмов с гомоклиническими касаниями // Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз., 2003, т. 7, с. 92–118.
- [16] Newhouse S. E. Diffeomorphisms with infinitely many sinks // Topology, 1974, vol. 13, pp. 9–18.
- [17] Aframovich V. S., Shilnikov L. P. Strange attractors and quasiattractors // Nonlinear Dynamics and Turbulence / G. I. Barenblatt, G. Iooss, D. D. Joseph. Boston: Pitmen, 1983. P. 1–34.
- [18] Gonchenko S. V., Ovsyannikov I. I., Simó C., Turaev D. V. Three-dimensional Hénon-like maps and wild Lorenz-like attractors // Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg., 2005, vol. 15, pp. 3493–3508.
- [19] Морозов А. Д., Драгунов Т. Н. Визуализация и анализ инвариантных множеств динамических систем. М.–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Инст. компьютерн. исслед., 2003. 304 с.
- [20] Morozov A. D., Dragunov T. N., Boykova S. A., Malysheva O. V. Invariant sets for Windows. (World Sci. Ser. Nonlinear Sci. Ser. A Monogr. Treatises, vol. 37.) Singapore: World Sci., 1999. 259 p.
- [21] Lomeli H. E., Meiss J. D. Quadratic volume preserving maps // Nonlinearity, 1998, vol. 11, pp. 557–574.
- [22] Gonchenko S. V., Meiss J. D., Ovsyannikov I. I. Chaotic dynamics of three-dimensional Hénon maps that originate from a homoclinic bifurcation // Regul. Chaotic Dyn., 2006, vol. 11, no. 2, pp. 191–212.
- [23] Gonchenko S. V., Shilnikov L. P., Turaev D. V. On dynamical properties of multidimensional diffeomorphisms from Newhouse regions: 1 // Nonlinearity, 2008, vol. 21, pp. 923–972.
- [24] Gonchenko S. V., Gonchenko V. S., Shilnikov L. P. On homoclinic origin of Hénon-like maps // Regul. Chaotic Dyn., 2010, vol. 15, nos. 4–5, pp. 462–481.
- [25] Gonchenko S. V., Shilnikov L. P., Turaev D. V. On dynamical properties of multidimensional diffeomorphisms from Newhouse regions: 2 // Nonlinearity (to appear).
- [26] Борисов А. В., Мамаев И. С. Странные аттракторы в динамике кельтских камней // УФН, 2003, т. 173, № 4, с. 407–418.
- [27] Борисов А. В., Мамаев И. С. Странные аттракторы в динамике кельтских камней // Неголономные динамические системы: Интегрируемость, хаос, странные аттракторы: Сб. ст. / А. В. Борисов, И. С. Мамаев (ред.). М.–Ижевск: Инст. компьютерн. исслед., 2002. С. 293–316.

- [28] Гонченко С. В., Тураев Д. В., Шильников Л. П. Об областях Ньюхауса двумерных диффеоморфизмов, близких к диффеоморфизму с негрубым гетероклиническим контуром // Тр. МИАН, 1997, т. 216, с. 76–125.
- [29] Lamb J. S. W., Stenkin O. V. Newhouse regions for reversible systems with infinitely many stable, unstable and elliptic periodic orbits // *Nonlinearity*, 2004, vol. 17, no. 4, pp. 1217–1244.
- [30] Delshams A., Gonchenko S. V., Gonchenko V. S., Lazaro J. T., Stenkin O. V. Abundance of attracting, repelling and elliptic periodic orbits in two-dimensional reversible maps // *Nonlinearity* (to appear)
- [31] Лукьянов В. И., Шильников Л. П. О некоторых бифуркациях динамических систем с гомоклиническими структурами // Докл. АН СССР, 1978, т. 243, № 1, с. 26–29.
- [32] Арнольд В. И., Афраймович В. С., Ильяшенко Ю. С., Шильников Л. П. Теория бифуркаций // Динамические системы — 5 / В. И. Арнольд. (Итоги науки и техн. Сер. Современ. пробл. мат. Фундам. направления, т. 5.) М.: ВИНТИ, 1986. С. 9–218.
- [33] Быков В. В. О бифуркациях динамических систем, близких к системам с сепаратрисным контуром, содержащим седло–фокус // Методы качественной теории дифференциальных уравнений: Межвуз. темат. сб. научн. тр. Горький: ГГУ, 1980. С. 44–72.
- [34] Вуков V. V. The bifurcations of separatrix contours and chaos // *Phys. D*, 1993, vol. 62, pp. 290–299.
- [35] Афраймович В. С., Шильников Л. П. О некоторых глобальных бифуркациях, связанных с исчезновением неподвижной точки типа седло–узел // Докл. АН СССР, 1974, т. 219, № 6, с. 1281–1285.
- [36] Тураев Д. В., Шильников Л. П. Бифуркации квазиаттракторов тор-хаос // Математические механизмы турбулентности. Киев, 1986. С. 113–121.
- [37] Анищенко В. С. Сложные колебания в простых системах. М.: Наука, 1990. 312 с.

Towards scenarios of chaos appearance in three-dimensional maps

Alexander S. Gonchenko¹, Sergey V. Gonchenko², Leonid P. Shilnikov³

^{1,2,3}Research Institute for Applied Mathematics and Cybernetics

Ul'yanova st. 10, Nizhnii Novgorod, 603605, Russia

¹agonchenko@mail.ru, ²gosv100@uic.nnov.ru, ³lpshilnikov@mail.ru

We study questions of chaotic dynamics of three-dimensional smooth maps (diffeomorphisms). We show that there exist two main scenarios of chaos developing from a stable fixed point to strange attractors of various types: a spiral attractor, a Lorenz-like strange attractor or a “figure-8” attractor. We give a qualitative description of these attractors and define certain condition when these attractors can be “genuine” ones (pseudo-hyperbolic strange attractors). We include also the corresponding results of numerical analysis of attractors in three-dimensional Hénon maps.

MSC 2010: 37C70, 37C29, 37G25

Keywords: strange attractor, chaotic dynamics, spiral attractor, torus–chaos, homoclinic orbit, invariant curve, three-dimensional Hénon map

Received October 6, 2011, accepted December 24, 2011

Citation: *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2012, vol. 8, no. 1, pp. 3–28 (Russian)

