



УДК: 530.182
MSC 2010: 37B20

Возвраты Пуанкаре в системе с хаотическим нестранным аттрактором

В. С. Анищенко, С. В. Астахов, Я. И. Боев, Ю. Куртс

Методом численного эксперимента рассмотрены статистические характеристики времен возврата Пуанкаре для двумерного отображения с хаотическим нестранным аттрактором. Впервые совместно анализируются локальный и глобальный подходы к проблеме. Выявлены условия соответствия локального подхода теореме Каца, включая случай зашумленной системы. Подтверждены теоретические результаты глобального описания проблемы возвратов Пуанкаре, представлены результаты расчетов размерности Афраймовича – Песина.

Ключевые слова: возвраты Пуанкаре, размерность аттрактора, размерность Афраймовича – Песина

Получено 11 ноября 2011 года
После доработки 17 декабря 2011 года

В. С. Анищенко и С. В. Астахов выражают благодарность Международному научному фонду им. Александра фон Гумбольдта за поддержку работы. Работа частично финансировалась из средств Госконтракта № 14.740.11.0074 МО РФ.

Анищенко Вадим Семенович
wadim@info.sgu.ru
Астахов Сергей Владимирович
s.v.astakhov@gmail.com
Боев Ярослав Игоревич
boev.yaroslav@gmail.com
Международный НИИ нелинейной динамики
Саратовского Государственного университета
410026, Россия, Саратов, ул. Астраханская, 89

Юрген Куртс
kurths@pik-potsdam.de
Potsdam Institute for Climate Impact Research (PIK)
14473 Potsdam, Germany;
Institute for Complex Systems and Mathematical Biology
University of Aberdeen
Aberdeen AB243UE, United Kingdom

Введение

Одной из фундаментально важных особенностей динамических систем с ограниченным типом установившихся движений является возврат Пуанкаре. Возврат Пуанкаре означает, что любая фазовая траектория, проходящая в момент времени t_0 через некую точку \vec{x}_0 , бесконечное число раз при $t \rightarrow \infty$ вернется в ее ε -окрестность [1]. В зависимости от режима функционирования системы времена возврата будут либо const (если движение есть устойчивое периодическое), либо квазипериодическими (при движении на n -мерных торах), либо представлять собой случайную последовательность времен $\tau_k = t_{k+1} - t_k$, где t_k отвечают временам попадания фазовой траектории в ε -окрестность \vec{x}_0 . Именно случайный характер последовательности времен возврата характеризует движения на хаотических аттракторах диссипативных нелинейных систем, которые мы будем анализировать в данной работе. Для хаотических аттракторов времена первого возврата ограничены: $\tau_k = t_{k+1} - t_k < L$ для любых $k = 1, 2, \dots$, что является следствием наличия в системе минимального множества [1, 2]. Движения на аттракторе, удовлетворяющие указанным свойствам, Пуанкаре назвал устойчивыми по Пуассону.

Аналізу проблемы возвратов Пуанкаре посвящено очень большое количество публикаций (см. [1] и приведенный список литературы). Различают два подхода к анализу проблемы возвратов Пуанкаре. Первый подход основан на теореме Каца, которая устанавливает связь *среднего времени возврата* с вероятностной мерой [3]:

$$\langle \tau(x_0, \varepsilon) \rangle = \frac{1}{P(x_0, \varepsilon)}, \quad (1)$$

где $\langle \tau(x_0, \varepsilon) \rangle$ — среднее время возврата фазовой траектории в ε -окрестность выбранной точки x_0 , принадлежащей аттрактору, $\varepsilon \ll 1$ — малая окрестность точки x_0 (например, шар или куб, окружающий точку x_0), $P(x_0, \varepsilon)$ — вероятность посещения траекторией ε -окрестности точки x_0 . Теорема Каца справедлива как для динамических систем в отсутствие шумов, так и для систем с добавлением аддитивного шума. Воздействие шума вызывает нелинейные изменения вероятностной меры аттрактора и, соответственно, изменения величины среднего времени возврата, однако теорема Каца (1) остается справедливой [4]. Для расчета среднего времени возврата (1) в присутствии шума необходимо знать вероятностную меру зашумленного аттрактора. Подход на основе теоремы Каца, связанный с анализом возвратов Пуанкаре в окрестность заданной точки, назовем *локальным*. Существует иной подход, который оценивает возврат Пуанкаре для всего множества траекторий на аттракторе. В основу второго подхода положено иное определение времени возвратов. Для окрестности каждой точки аттрактора определяется минимальное время первого возврата $\inf \tau(x_0, \varepsilon)$, а затем эти времена усредняются по всему аттрактору. Для среднего минимального времени первого возврата Пуанкаре $\langle \tau_{\inf}(\varepsilon) \rangle$ в любую область аттрактора величиной $\varepsilon \ll 1$ получено общее выражение [1, 5]

$$\langle \tau_{\inf}(\varepsilon) \rangle \sim \phi^{-1}(\varepsilon^{d/\alpha_C}), \quad (2)$$

где функция ϕ может иметь вид $\phi(t) \sim \frac{1}{t}$, $\phi(t) \sim e^{-t}$, $\phi(t) \sim e^{-t^2}$ и т. д., что зависит от топологической энтропии системы. В выражении (2) d — размерность фазового пространства системы, α_C — размерность Афраймовича–Песина (АП-размерность) возвратов Пуанкаре.



Если функция $\phi(t) \sim t^{-1}$, то из (2) следует

$$\langle \tau_{\text{inf}}(\varepsilon) \rangle \sim \varepsilon^{-\frac{d}{\alpha_C}}. \tag{3}$$

Если $\phi(t) \sim e^{-t}$, то, как показано в [6], в пределе $\varepsilon \rightarrow 0$ выражение (1) преобразуется к виду

$$\langle \tau_{\text{inf}}(\varepsilon) \rangle \sim -\frac{d}{\alpha_C} \ln \varepsilon. \tag{4}$$

Установлено, что соотношение (3) справедливо для хаотических множеств с топологической энтропией $h_T = 0$, таких, например, как аттрактор Фейгенбаума в критической точке его рождения. Если множество характеризуется отличной от нуля топологической энтропией $h_T > 0$, то функция $\phi(t) \sim e^{-t}$, e^{-t^2} и т. д. [1]. Экспериментально установлено [6], что для хаотических аттракторов наиболее типичен случай $\phi(t) \sim e^{-t}$ и зависимость $\langle \tau_{\text{inf}}(\varepsilon) \rangle$ подчиняется асимптотической закономерности (4).

Из выражения (2) следует, что проблема возвратов Пуанкаре непосредственно связана с размерностью. При этом роль играют как размерность фазового пространства d , так и АП-размерность множества времен возврата Пуанкаре α_C . Как будет показано ниже, из (1) следует взаимосвязь времен возврата с размерностью хаотического множества.

В настоящей работе исследуются характеристики возвратов Пуанкаре в двумерных дискретных системах с хаотическими аттракторами. Методами численного эксперимента анализируются времена возвратов Пуанкаре при локальном и глобальном подходах. Данные расчетов детально сопоставляются с теоретическими результатами.

1. Зависимость времен возврата от фрактальных свойств аттрактора при локальном подходе

Для однородных хаотических множеств, которые характеризуются гладкой вероятностной мерой, зависимость времен возврата от величины ε в соответствии с (1) не представляет сложностей при практических исследованиях. Однако фрактальная структура множеств, характерная для странных и хаотических аттракторов, приводит к ряду проблем. Попытаемся дать этому достаточно простое объяснение.

Запишем выражение для вероятности, входящей в (1), в следующем виде:

$$P(\vec{x}_0, \varepsilon) = \int_{x_0^1 - \frac{\varepsilon}{2}}^{x_0^1 + \frac{\varepsilon}{2}} \dots \int_{x_0^d - \frac{\varepsilon}{2}}^{x_0^d + \frac{\varepsilon}{2}} p(x^1, \dots, x^d) dx^1 \dots dx^d, \tag{5}$$

где $p(x^1, \dots, x^d)$ — d -мерная плотность распределения на аттракторе, d — размерность фазового пространства системы. Не теряя общности, в дальнейшем рассмотрим системы размерности $d = 2$, которые будут исследоваться нами далее. В случае $d = 2$ положим $x^1 \equiv x$, $x^2 \equiv y$ и перепишем (5) в форме

$$P(x_0, y_0, \varepsilon) = \int_{x_0 - \frac{\varepsilon}{2}}^{x_0 + \frac{\varepsilon}{2}} \int_{y_0 - \frac{\varepsilon}{2}}^{y_0 + \frac{\varepsilon}{2}} p(x, y) dx dy. \tag{6}$$

Здесь x_0, y_0 — выбранная точка аттрактора, которая находится в центре квадрата со стороной $\varepsilon \ll 1$.

Если плотность $p(x, y)$ есть достаточно гладкая функция координат, заданная во всей ε -окрестности выбранной точки (x_0, y_0) , то в силу теоремы о среднем (учитывая малость ε) можно записать:

$$P(x_0, y_0, \varepsilon) \cong p(x_0, y_0) \cdot \int_{x_0 - \frac{\varepsilon}{2}}^{x_0 + \frac{\varepsilon}{2}} \int_{y_0 - \frac{\varepsilon}{2}}^{y_0 + \frac{\varepsilon}{2}} dx dy = p(x_0, y_0) \cdot \varepsilon^2. \quad (7)$$

Из (1) и (7) в этом случае следует

$$\langle \tau(\varepsilon) \rangle = \frac{1}{p_0(x_0, y_0)} \cdot \varepsilon^{-2} = K \varepsilon^{-2}. \quad (8)$$

Или, взяв логарифм, из (8) получим

$$\ln \langle \tau(\varepsilon) \rangle = C - 2 \ln \varepsilon, \quad (9)$$

где $C = \ln K = \ln [p(x_0, y_0)]^{-1}$. Зависимость (9) есть прямая с наклоном $k = 2$, сдвинутая относительно нуля координат на величину C .

В случае, когда $p(x, y)$ является фрактальной функцией, соотношение (7) не справедливо и выражение (9) следует переписать в более общем виде [7, 8]

$$P(x_0, y_0, \varepsilon) = p(x_0, y_0) \cdot \varepsilon^{-l}, \quad l \leq 2, \quad (10)$$

где l — фрактальная размерность множества. Из (10) получаем

$$\ln \langle \tau(\varepsilon) \rangle = C - l \ln \varepsilon, \quad l \leq 2. \quad (11)$$

Рассчитывая $\ln \langle \tau(\varepsilon) \rangle$ для различных значений ε и аппроксимируя результаты прямой линией (11), можно получить значение коэффициентов l и C .

2. Возвраты Пуанкаре в системе с хаотическим нестранным аттрактором. Локальный подход

Рассмотрим модифицированное отображение Арнольда, являющееся гиперболическим отображением тора:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + y_n + \delta \cos 2\pi y_n, & \text{mod } 1, \\ y_{n+1} &= x_n + 2y_n, & \text{mod } 1. \end{aligned} \quad (13)$$

Отображение (13) взаимно однозначно переводит единичный квадрат на плоскости (x, y) в себя. Для значений $\delta < \frac{1}{2\pi}$ отображение (13) диссипативно и характеризуется хаотическим аттрактором с положительным старшим показателем Ляпунова $\lambda_1 > 0$. Особенностью отображения (13) является то, что, несмотря на сжатие фазового объема, фазовая траектория при $n \rightarrow \infty$ посещает любой элемент единичного квадрата и всюду плотно его покрывает. В результате метрическая размерность аттрактора системы (13) равна целому числу ($D = 2$), что привело к названию «хаотический ($\lambda_1 > 0$) нестранный ($D = 2$) аттрактор». Всюду



плотное покрытие траекторий единичного квадрата при $t \rightarrow \infty$ приводит к тому, что вероятностная мера $\mu(x, y)$ на аттракторе определена для любой точки единичного квадрата.

Рассмотрим результаты численного эксперимента. На рисунке 1 представлена картина формирования аттрактора в (13). При малом числе итераций рисунок 1а отражает процесс формирования, вообще говоря, неоднородного аттрактора. С увеличением числа итераций точки аттрактора всюду плотно покрывают единичный квадрат (рис. 1б). Вероятностная мера (рис. 1с) определена на всем множестве значений (x, y) , принадлежащих единичному квадрату, но имеет достаточно сложную структуру, отражая неоднородность в распределении точек на аттракторе. Эта структура, скорее всего, фрактальная, о чем свидетельствует вставка на рисунке 1с, где представлено распределение $p(x)$ для значений x в ε -окрестности $0.45 \leq x \leq 0.55$. Распределение $p(x)$ в ε -интервале демонстрирует высокую степень неоднородности, как и распределение $p(x)$ в единичном интервале. Именно сложный характер распределения $p(x, y)$ на аттракторе системы (13) приводит к тому, что, хотя емкость по Колмогорову этого аттрактора $d_C = 2$, его информационная размерность d_I всегда меньше ($d_I < d_C = 2$) и зависит от величины параметра δ .

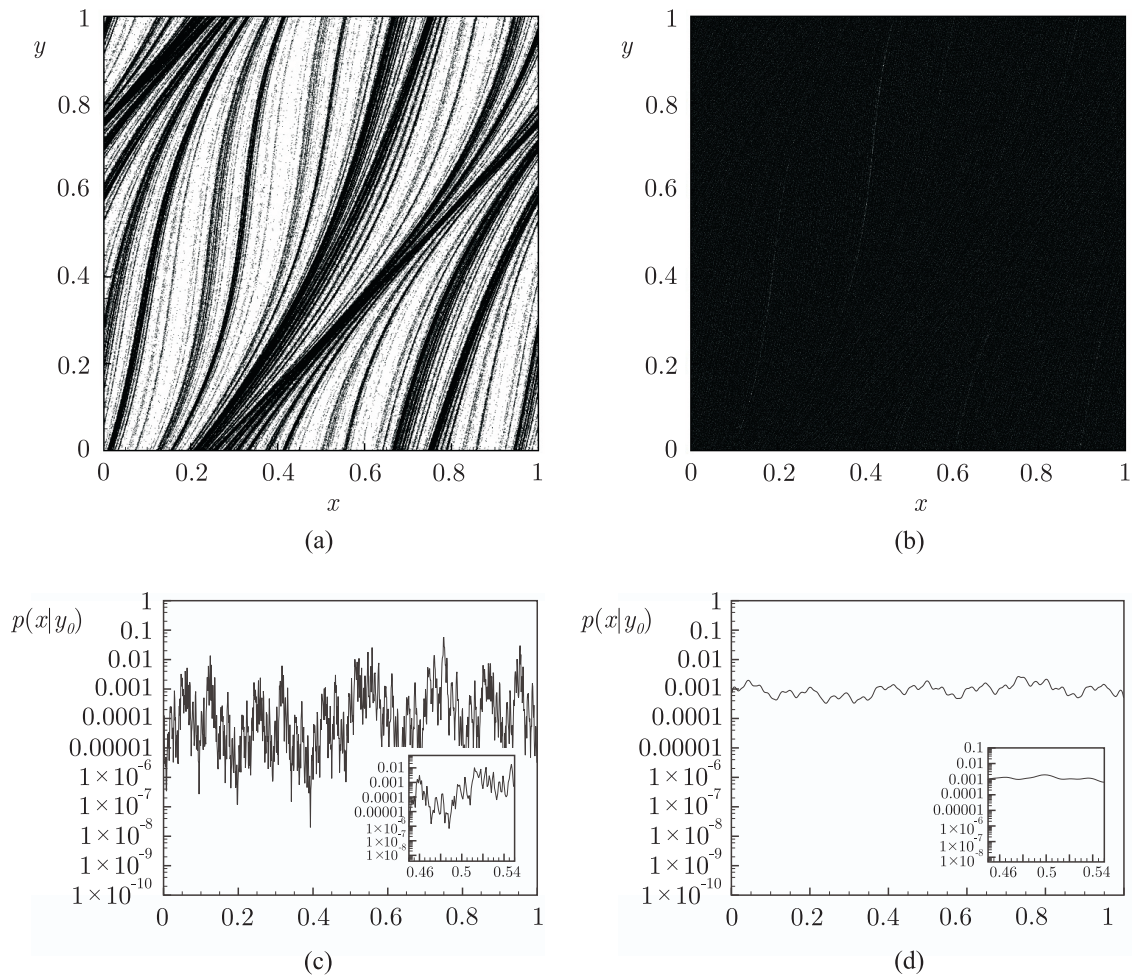


Рис. 1. Аттрактор системы (13), полученный для 10^6 итераций (а), 10^8 итераций (б) и одномерная плотность распределения $p(x)$ для $y = 0.5$ (с) в отсутствие шума и (д) при наличии аддитивного шума интенсивности $D = 10^{-5}$. Результаты получены для значения $\delta = 0.15$. Вставки на рисунках 1с, д характеризуют распределение $p(x|y_0)$ в ε -интервале $0.45 \leq x \leq 0.55$, $y_0 = 0.5$.



Так как плотность $p(x, y)$ представляет собой фрактальную функцию, можно ожидать, что зависимость $\ln\langle\tau_r(\varepsilon)\rangle$ для системы (13) будет соответствовать выражению (11) с наклоном $l < 2$. При добавлении аддитивного шума в первое уравнение (13) плотность $p(x, y)$ сглаживается и фрактальность исчезает (см. вставку на рис. 1d). В этом случае справедливо соотношение (9) и коэффициент наклона прямой (9) должен быть близким к 2. Это было подтверждено численным экспериментом. Мы использовали следующий алгоритм. Выбиралась начальная точка с координатами $x_n = x_0$, $y_n = y_0$, которая являлась центром квадрата с ребром ε . Далее отображение (13) итерировалось и фиксировалась последовательность дискретных времен n_k ($k = 1, 2, \dots, k_{\max}$), которые отвечали возвратам в ε -окрестность. Зная n_k , мы определяли последовательность времен возвратов $\tau_k = n_{k+1} - n_k$ и вычисляли среднее значение:

$$\langle\tau(\varepsilon)\rangle = \frac{1}{k_{\max}} \sum_{k=1}^{k_{\max}} (n_{k+1} - n_k). \quad (14)$$

Расчеты производились для значений $\delta = 0.05, 0.10$, $x_0 = 0.5$, $y_0 = 0.5$ и $k_{\max} = 10^7$, результаты представлены на рисунке 2. На рисунке 2 маркерами представлены экспериментальные результаты расчетов величины $\ln\langle\tau(\varepsilon)\rangle$ для значений $\delta = 0.05$ и 0.10 , а пунктиром — прямые аппроксимации соответствующих зависимостей. Для коэффициентов k получены значения 1.81 ($\delta = 0.05$) и 1.92 ($\delta = 0.10$), которые достоверно меньше 2! Чтобы убедиться в правильности полученных результатов (рис. 2), проводились расчеты зависимости коэффициентов наклона k от интенсивности внешнего шума, представленные на рисунке 3. Как видно из графиков, при интенсивностях шума $D \geq 0.01$ коэффициент k действительно достигает значения $k = 2$ как для $\delta = 0.05$, так и для $\delta = 0.10$. Зашумление системы (13) вызывает сглаживание плотности $p(x, y)$, фрактальность исчезает и становится справедливым описание в виде соотношения (9).

Как следует из результатов, представленных на рисунке 2, величина наклона аппроксимирующих прямых $k < 2$. Это означает, что теоретической оценкой коэффициента наклона должна служить фрактальная размерность аттрактора l из выражений (10) и (11). Вопрос состоит в том, как оценить эту размерность. Для аттрактора системы (13) емкость $d_C = 2$ и не может быть использована для оценки величины l . В работе [7] высказано предположение, что оценкой для l может служить величина информационной размерности:

$$d_I = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{I(\varepsilon)}{\ln(1/\varepsilon)}, \quad I(\varepsilon) = - \sum_{i=1}^{M(\varepsilon)} P_i \ln P_i, \quad (15)$$

где $I(\varepsilon)$ — энтропия, $P_i = P_i(\varepsilon)$ — вероятность посещения траекторией области ε , $M(\varepsilon)$ — число покрытий аттрактора квадратами со стороной ε .

Высказанное в [7] предположение, к сожалению, не подтверждено данными расчетов и требует проверки. Как следует из данных (рис. 2), для $\delta = 0.05$ $k = 1.81$ и для $\delta = 0.10$ $k = 1.92$. Из литературы известно [9], что величина информационной размерности (15) для аттракторов системы (13) $d_I < 2$. Так, для $\delta = 0.05$ $d_I = 1.96$ и для $\delta = 0.10$ $d_I = 1.84$. Данные рисунка 2 свидетельствуют, что наклон достоверно меньше 2. Это говорит о том, что емкость d_C не может служить оценкой для l . Расчеты можно трактовать в пользу оценки для l в виде информационной размерности d_I , однако это утверждение требует более детальных численных исследований для других систем.

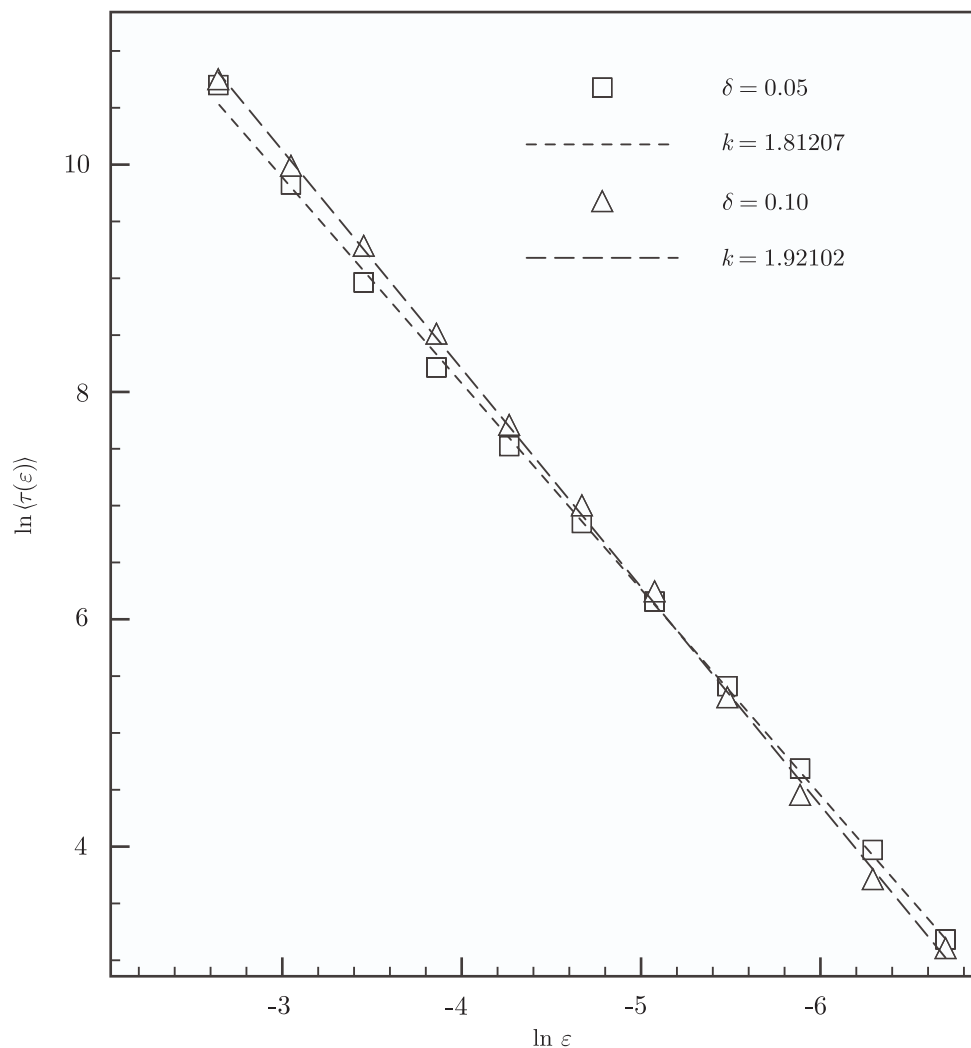


Рис. 2. Зависимость среднего времени возврата Пуанкаре в ϵ -окрестность точки $x_0 = y_0 = 0.5$ от величины ϵ для отображения (13) в отсутствие шума.

3. Размерность Афраймовича – Песина. Глобальный анализ

Как обсуждалось во введении, минимальное время возврата, полученное усреднением по всему множеству, подчиняется теоретическим закономерностям (2)–(4). Для множеств, характеризуемых нулевой топологической энтропией $h_T = 0$, справедливо (3); если $h_T > 0$, то нужно использовать (4). Из теории известно, что топологическая энтропия является оценкой сверху энтропии Колмогорова – Синая [10, 11]. Отсюда следует, что если динамика системы характеризуется наличием хоть одного положительного показателя Ляпунова, то $h_T > 0$. Если положительные показатели в спектре ляпуновских характеристических экспонент отсутствуют, то $h_T = 0$ [1].

Рассмотрим результаты расчета старшего показателя Ляпунова системы (13) в зависимости от параметра δ , представленные на рисунке 4. Как следует из рисунка 4, для значений $0 \leq \delta \leq 0.4$ показатель $\lambda_1 > 0$. Следовательно, можно ожидать, что зависимость $\langle \tau_{\text{inf}}(\epsilon) \rangle$ будет подчиняться закономерности (4), справедливой при $h_T > 0$ для значений $\delta \geq 0$.

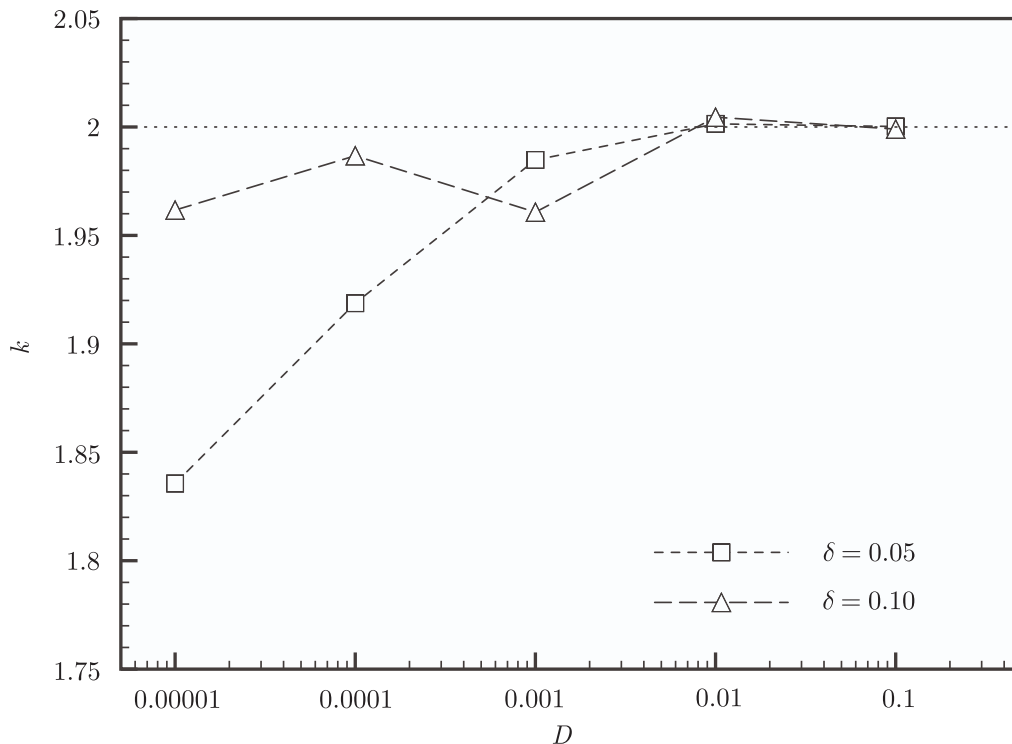


Рис. 3. Зависимость величины коэффициента наклона прямых (рис. 2) от интенсивности шума для значений параметра $\delta = 0.05$ и $\delta = 0.10$.

Для расчета зависимостей $\langle \tau_{\text{inf}}(\varepsilon) \rangle$ мы применяем алгоритм и соответствующую программу, описанные в работах [6, 12]. Программа тестировалась на примере логистического отображения $x_{n+1} = \alpha x_n(1 - x_n)$ в критической точке $\alpha_{cr} = 3.57\dots$ и в области хаоса ($\alpha > \alpha_{cr}$). Расчеты подтвердили соответствие теории [1, 5]: для $\alpha = \alpha_{cr}$ выполняется закономерность (3), а для $\alpha > \alpha_{cr}$ — закономерность (4). Отметим, что практическая реализация алгоритма расчета $\langle \tau_{\text{inf}}(\varepsilon) \rangle$ допускает два различных способа. Первый заключается в следующем: аттрактор покрывается совокупностью квадратов со стороной ε , число которых зависит от конкретной величины ε . В каждой ε -ячейке задается множество начальных точек в количестве m . Далее из каждой точки отображение итерируется и фиксируются времена первого возврата в исходную область. Из массива полученных данных определяется минимальное время возврата как среднее по ансамблю начальных точек. Второй способ также требует покрытия аттрактора совокупностью ячеек размера ε . В каждой из ячеек выбирается одна начальная точка. Далее для выбранных начальных точек отображение многократно итерируется и получается последовательность времен возврата в каждую конкретную ячейку. Из полученных последовательностей времен возврата в каждую i -ю ячейку определяется τ_{inf}^i и далее находится среднее минимальное время возврата путем усреднения по множеству ячеек. В силу эргодичности хаотических систем, первый и второй способы должны давать одинаковый результат.

Результаты расчетов первым и вторым способами представлены на рисунке 5 и рисунке 6. Как видно из графиков, при достаточно большом количестве начальных точек в ячейке ($m \simeq 10^5$, рис. 5) и достаточно большом количестве возвратов ($m \simeq 10^5$, рис. 6) зависимости $\langle \tau_{\text{inf}}(\varepsilon) \rangle$ в интервале $-5 \leq \ln \varepsilon \leq -2$ практически аппроксимируются прямыми линиями, подтверждая теоретический результат (4). Близкими оказываются наклоны пря-

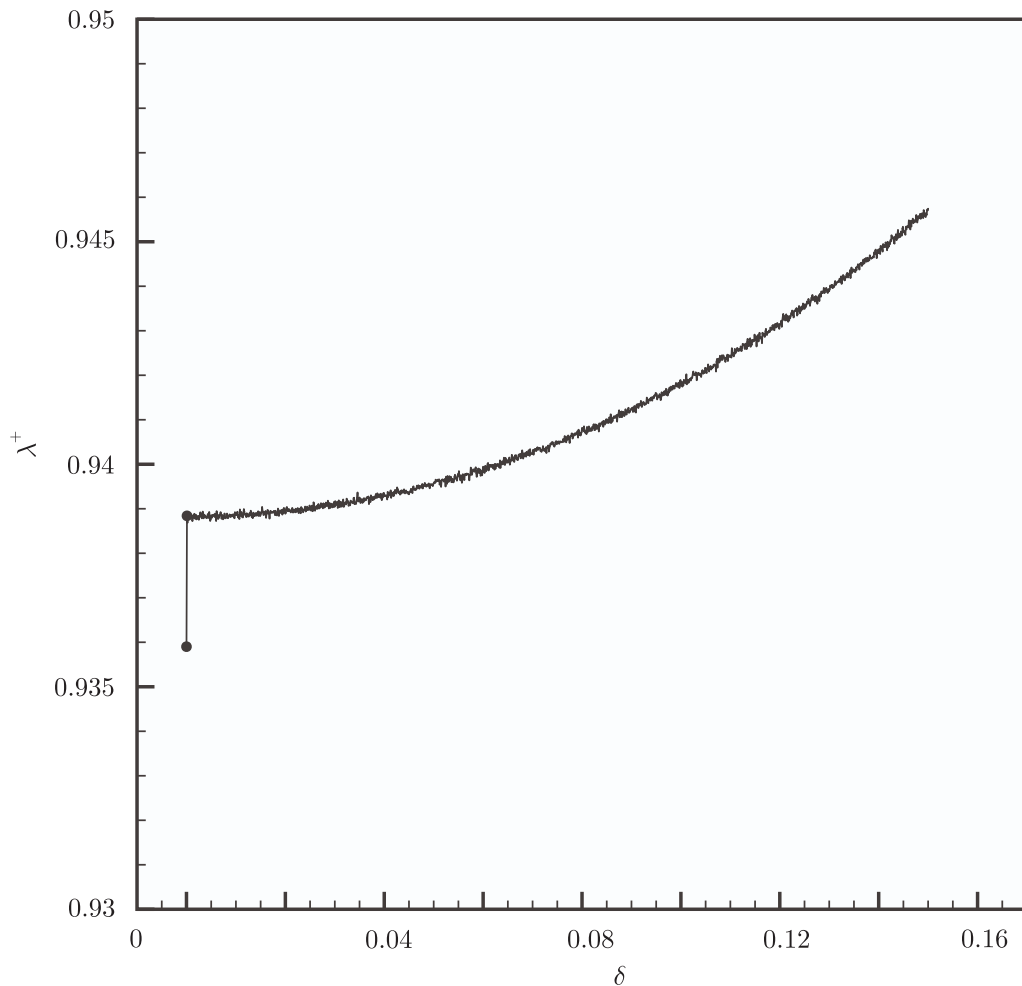


Рис. 4. Величина старшего характеристического показателя Ляпунова модифицированного отображения Арнольда (13) в зависимости от значения управляющего параметра δ .

мых ($k = 2.36$ и $k = 2.28$) и соответствующие значения размерностей Афраймовича – Песина ($\alpha_C = 0.84$ и $\alpha_C = 0.87$). Из данных видно, что если число начальных точек в ячейке ε не достаточно (рис. 5) или число возвратов в ячейку относительно мало (рис. 6), то зависимости $\langle \tau_{\text{inf}}(\varepsilon) \rangle$ на прямую не ложатся и представляют собой экспоненциально спадающие функции. Интересно отметить, что если использовать эти экспоненциальные зависимости и построить результаты в координатах $(\ln \langle \tau_{\text{inf}}(\varepsilon) \rangle, \ln \varepsilon)$, то получаются графики в виде прямых, которые соответствуют закономерности (3). Однако это ошибочный результат, обусловленный недостаточным числом начальных точек в ячейке или малым числом возвратов в ячейку.

В силу фрактальности плотности распределения $p(x, y)$ в системе (13) проведение численных расчетов характеристик времен возврата Пуанкаре как при локальном, так и при глобальном подходах требует особой тщательности и относительно большого времени счета. Эти трудности практически резко уменьшаются, если в качестве двумерного отображения выбрать квазигиперболическое отображение Лози:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= 1 - \alpha|x_n| + y_n, & 1.3 \leq \alpha \leq 1.8, \\ y_{n+1} &= \beta x_n, & \beta = 0.3. \end{aligned} \tag{16}$$

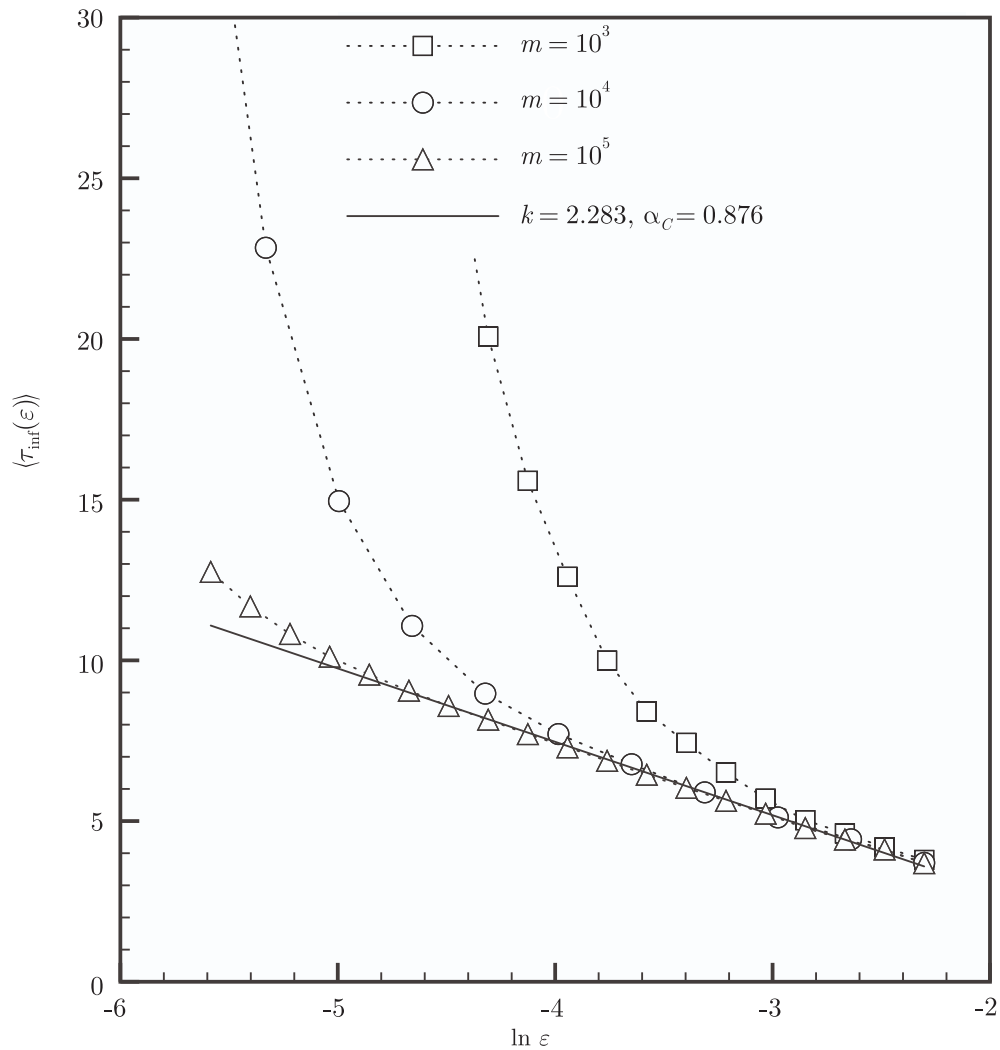


Рис. 5. Зависимости минимального среднего времени возврата, полученные первым способом, от величины ε для различного количества начальных точек m .

Известно, что отображение Лози характеризуется квазигиперболическим хаотическим аттрактором [9] и может быть использовано для тестовых экспериментов в связи с тем, что обладает эргодическими свойствами, используемыми для теоретических доказательств соотношений (3), (4) [1, 5]. Соответствующие расчеты представлены на рисунке 7. Как видно из графика, зависимость $\langle \tau_{\text{inf}}(\varepsilon) \rangle$ от $\ln \varepsilon$ хорошо аппроксимируется прямой с наклоном $k = 5.551$, что полностью соответствует теоретическому результату (4). Для размерности Афраймовича–Песина получаем $\alpha_C = \frac{2}{k} = 0.36$.

4. Выводы

Проведенный анализ проблемы возвратов Пуанкаре применительно к системе (13) с хаотическим нестранным аттрактором дал следующие результаты:

1. Закономерность возвратов Пуанкаре в ε -окрестность заданной точки аттрактора (1), (10) подчиняется теореме Каца как в случае отсутствия, так и при наличии внешнего

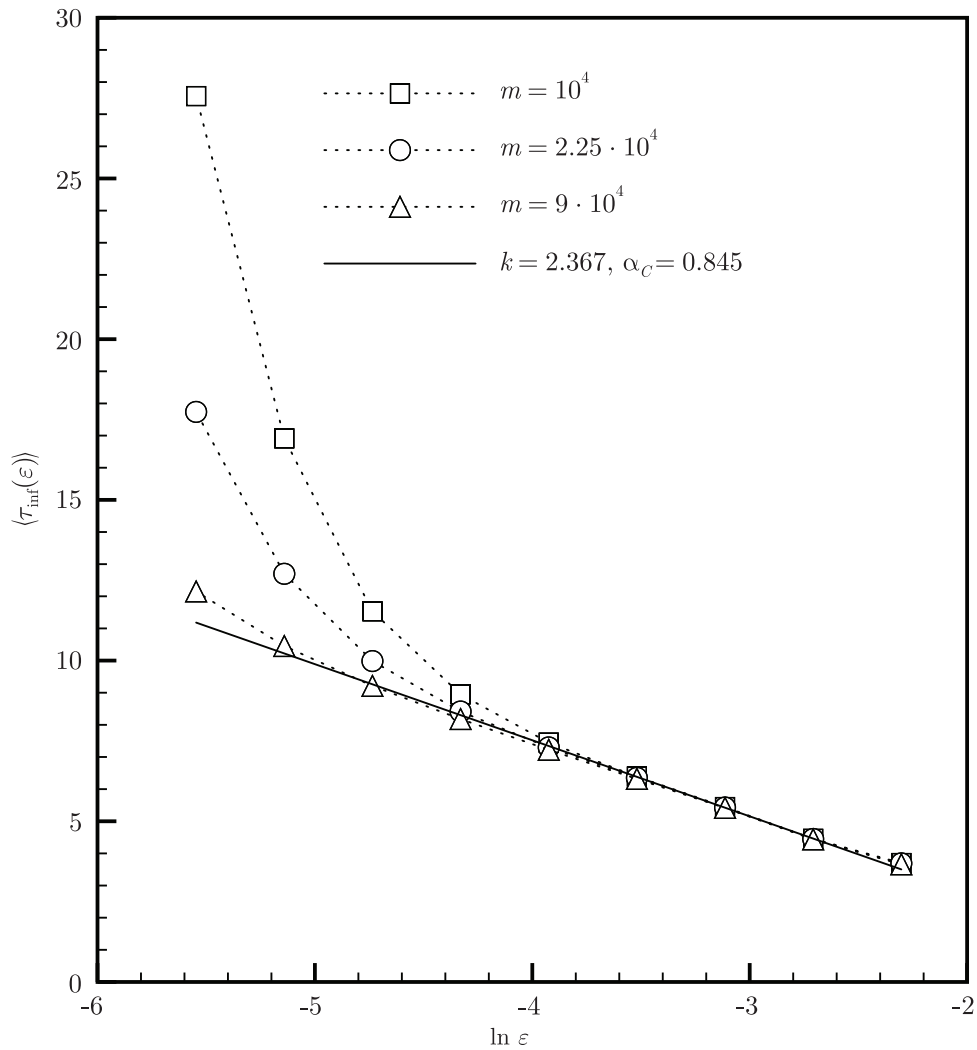


Рис. 6. Зависимости минимального среднего времени возврата, полученные вторым способом, от величины ϵ для различного количества m возвратов в каждую ϵ -ячейку.

шума. Оценкой фрактальной размерности l в выражении (10) может служить величина информационной размерности d_I (15).

2. Зависимость среднего по аттрактору минимального времени возврата Пуанкаре $\langle \tau_{\text{inf}}(\epsilon) \rangle$ для системы с положительной топологической энтропией $h_T > 0$ (13) от ϵ соответствует теоретически предсказываемой зависимости (4).
3. Величина АП-размерности последовательности времен возврата может трактоваться как некая мера сложности этой последовательности. Так, для отображения (13) $\alpha_C \simeq 0.85 \div 0.88$, что существенно больше, чем для системы Лози (16), где $\alpha_C = 0.36$. Известно, что отображение Лози характеризуется более однородной плотностью распределения $p(x, y)$ в сравнении с (13).

В заключение мы выражаем глубокую благодарность проф. В. С. Афраймовичу за ценные замечания и советы, которые позволили более успешно решить поставленную задачу.

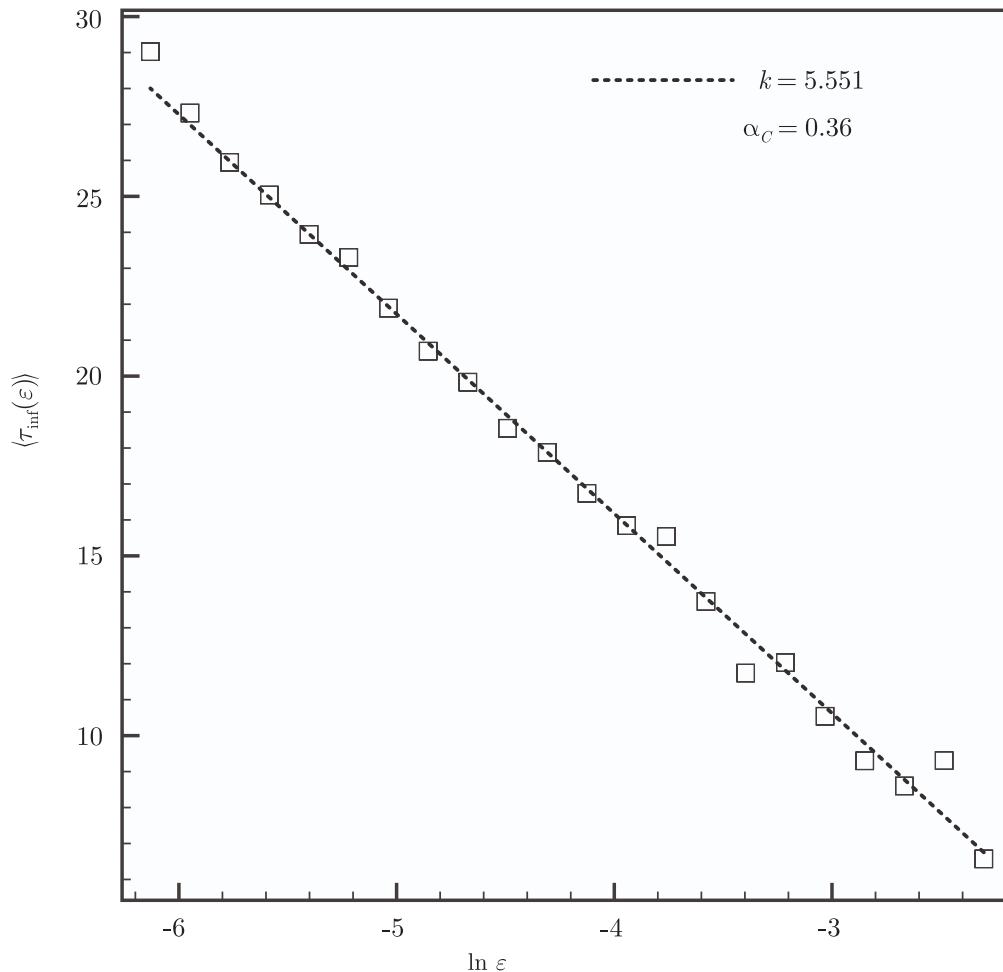


Рис. 7. Среднее минимальное время возврата Пуанкаре в зависимости от $\ln \varepsilon$ для отображения Лози (16) при $\alpha = 1.4$, $\beta = 0.3$.

Список литературы

- [1] Afraimovich V., Ugalde E., Urias J. Fractal dimension for Poincaré recurrences. (Monograph Series on Nonlinear Science and Complexity, vol. 2.) Amsterdam: Elsevier, 2006. 258 pp. [Афраймович В., Угальде Э., Уриас Х. Фрактальные размерности для времен возвращения Пуанкаре. М.–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Инст. компьютерн. исслед., 2011. 292 с.]
- [2] Шильников Л. П., Шильников А. Л., Тураев Д. В., Чуа Л. Методы качественной теории в нелинейной динамике: Часть 1. М.–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Инст. компьютерн. исслед., 2004. 416 с.
- [3] Кас М. Probability and related topics in physical sciences: With special lectures by G. E. Uhlenbeck, A. R. Hibbs, and B. van der Pol. (Lect. in Appl. Math., Proc. of the Summer Seminar, Boulder, Colorado, 1957.) London: Interscience, 1959. 266 pp. [Кац М. Вероятность и смежные вопросы в физике. М.: Мир, 1965. 409 с.]
- [4] Анищенко В. С., Хайрулин М. Е. Влияние индуцированного шумом кризиса аттракторов на характеристики времен возврата Пуанкаре // Письма в ЖТФ, 2011, т. 37, с. 25–43.
- [5] Afraimovich V. Pesin's dimension for Poincaré recurrences // Chaos, 1997, vol. 7, no. 1, pp. 7–20.

- [6] Afraimovich V. S., Lin W.-W., Rulkov N. F. Fractal dimension for Poincaré recurrences as an indicator of synchronized chaotic regimes // *Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg.*, 2000, vol. 10, no. 10, pp. 2323–2337.
- [7] Gao J. B. Recurrence time statistics for chaotic systems and their applications // *Phys. Rev. Lett.*, 1999, vol. 83, no. 16, pp. 3178–3181.
- [8] Ott E., Grebogi C., Yorke J. Controlling chaos // *Phys. Rev. Lett.*, 1990, vol. 64, no. 11, pp. 1196–1199; Erratum: “Controlling chaos” // *Phys. Rev. Lett.*, 1990, vol. 64, no. 23, p. 2837.
- [9] Анищенко В. С., Вадивасова Т. Е., Астахов В. В. *Нелинейная динамика хаотических и стохастических систем*. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 1999. 368 с.
- [10] Hasselblatt B., Pesin Y. Pesin entropy formula. http://www.scholarpedia.org/article/Pesin_entropy_formula (2008).
- [11] Adler R., Downarowicz T., Misiurewicz M. Topological entropy. http://www.scholarpedia.org/article/Topological_entropy (2008).
- [12] Anishchenko V., Khairulin M., Strelkova G., Kurths J. Statistical characteristics of the Poincaré return times for a one-dimensional non hyperbolic map // *Eur. Phys. J. B Condens. Matter Phys.*, 2011, vol. 82, pp. 219–225.

Poincaré recurrences in a system with non-strange chaotic attractor

Vadim S. Anishchenko¹, Sergey V. Astakhov², Yaroslav I. Boev³, Jürgen Kurths⁴

^{1,2,3}International Research Institute of Nonlinear Dynamics
Saratov State University

Astrakhanskaya 83, Saratov, 410026, Russia

⁴Potsdam Institute for Climate Impact Research (PIK)

14473 Potsdam, Germany;

Institute for Complex Systems and Mathematical Biology

University of Aberdeen

Aberdeen AB243UE, United Kingdom

¹wadim@info.sgu.ru, ²s.v.astakhov@gmail.com, ³boev.yaroslav@gmail.com,

⁴kurths@pik-potsdam.de

Statistical properties of Poincaré recurrences in a two-dimensional map with chaotic non-strange attractor have been studied in numerical simulations. A local and a global approaches were analyzed in the framework of the considered problem. It has been shown that the local approach corresponds to Kac’s theorem including the case of a noisy system in certain conditions which have been established. Numerical proof of theoretical results for a global approach as well as the Afraimovich – Pesin dimension calculation are presented.

MSC 2010: 37B20

Keywords: Poincaré recurrence, attractor dimension, Afraimovich – Pesin dimension

Received November 11, 2011, accepted December 17, 2011

Citation: *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2012, vol. 8, no. 1, pp. 29–41 (Russian)