Нелинейная динамика. 2012. Т. 8. № 1. С. 57–69.
Полнотекстовая версия в свободном доступе
http://nd.ics.org.ru

УДК: 532.527+531.01
MSC 2010: 70Hxx, 37J60

Об инвариантных многообразиях неголономных систем

В. В. Козлов

Изучаются инвариантные многообразия уравнений, описывающих динамику консервативных неголономных систем. Предполагается, что эти многообразия однозначно проектируются на пространство конфигураций. Условия инвариантности представлены в форме обобщенных уравнений Ламба. Найдены условия, при которых решения этих уравнений допускают гидродинамическое описание, характерное для гамильтоновых систем. В качестве примеров рассмотрены неголономные системы на группах Ли с левоинвариантной метрикой и левоинвариантными (правоинвариантными) связями.

Ключевые слова: инвариантное многообразие, уравнение Ламба, вихревое многообразие, теорема Бернулли, теорема Гельмгольца

1. Условия инвариантности

Рассмотрим неголономную систему, на которую действуют потенциальные силы и наложена связь

$$(a, \dot{x}) = b. \tag{1.1}$$

Здесь $x = (x_1, \ldots, x_n)$ — обобщенные координаты, $\dot{x} = (\dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_n)$ — обобщенные скорости, $a(x, t)$ — гладкое ненулевое ковекторное поле и $b(x, t)$ — скалярная функция. Пусть

$$L(\dot{x}, x, t) = L_2 + L_1 + L_0$$

— лагранжиан рассматриваемой системы; L_j — однородная форма по скоростям степени j, причем квадратичная форма L_2 положительно определена. Уравнения движения имеют вид уравнений Лагранжа с множителем связи

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)^{\cdot} - \frac{\partial L}{\partial x} = \mu a. \tag{1.2}$$

Получено 27 декабря 2011 года
После доработки 23 января 2012 года

Козлов Валерий Васильевич
kozlov@pran.ru
Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
119991, Россия, г. Москва, ул. Губкина, д. 8

Уравнения (1.1)–(1.2) составляют замкнутую систему. Не решая уравнений движения, множитель μ находится как функция состояния системы $x, \dot{x}$ и времени t.

Полезно перейти к каноническим переменным

$$x, y = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}},$$

$y = (y_1, \ldots, y_n)$ — канонические импульсы. Тогда уравнение (1.2) принимает вид

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial y}, \quad \dot{y} = -\frac{\partial H}{\partial x} + \mu a, \tag{1.3}$$

где $H(x, y, t)$ — функция Гамильтона, а множитель μ представлен как функция от канонических переменных x, y и времени. Уравнение связи (1.1) переходит в линейный по импульсам интеграл уравнений движения (1.3):

$$(A, y) = B, \tag{1.4}$$

где векторное поле A и скалярная функция B гладко зависят от x и t.

Будем изучать инвариантные n-мерные многообразия уравнений движения (1.3), которые однозначно проектируются на конфигурационное пространство $\{x\}$:

$$\Sigma_t = \{x, y \colon y_1 = u_1(x, t), \ldots, y_n = u_n(x, t)\}. \tag{1.5}$$

Это многообразие задается полем импульсов $u = (u_1, \ldots, u_n)$ на конфигурационном пространстве. Локальными координатами на Σ_t служат обобщенные координаты $x_1, \ldots, x_n$. Введем поле скоростей $v = (v_1, \ldots, v_n)$ с компонентами

$$v_j(x, t) = \frac{\partial H}{\partial y_j}\bigg|_{y=u(x,t)}$$

и ограничим гамильтониан H на многообразие (1.5):

$$h(x, t) = H(x, u(x, t), t).$$

Несложно проверить [1], что условие инвариантности многообразия (1.5) сводится к уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (\operatorname{rot} u)v = -\frac{\partial h}{\partial x} + \lambda a, \tag{1.6}$$

где

$$\operatorname{rot} u = \left\| \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right\|$$

— кососимметрическая $n \times n$-матрица (вихрь ковекторного поля u), множитель $\lambda(x, t)$ — это функция μ, в которой канонические импульсы заменены на $u(x, t)$. В конечном итоге (1.6) представляет собой замкнутую систему n дифференциальных уравнений первого порядка для отыскания n функций $u_1, \ldots, u_n$. Отметим, что условие инвариантности многообразия (1.5) для голономной системы в непотенциальном силовом поле также имеет вид (1.6). Для гамильтоновых систем (когда $a = 0$) уравнение (1.6) называется обобщенным уравнение Ламба [2].

Условие (1.6) можно переписать в инвариантных обозначениях:

$$\frac{\partial\omega}{\partial t} + i_v(d\omega) = -dh + \varphi. \tag{1.7}$$

Здесь

$$\omega = \sum u_j(x,t)\,dx_j, \quad \varphi = \sum \lambda a_j\,dx_j$$

— дифференциальные 1-формы, $i_v\xi$ — внутреннее произведение поля v и формы ξ. Применяя к обеим частям (1.7) операцию внешнего дифференцирования, получаем уравнение вихря

$$\frac{\partial\Omega}{\partial t} + L_v\Omega = \Phi, \tag{1.8}$$

где $\Omega = d\omega$, $\Phi = d\varphi$ — замкнутые дифференциальные 2-формы, $L_v = di_v + i_v d$ — производная Ли вдоль векторного поля v. Так как в общем случае $\Phi \neq 0$, то 2-форма Ω не является инвариантом ограничения уравнений движения (1.3) на инвариантное многообразие (1.5)

$$\dot{x} = v(x,t). \tag{1.9}$$

Отметим еще, что необходимое условие инвариантности многообразий любой размерности для уравнений движения неголономных систем также можно представить в виде (1.7) (см. по этому поводу [3], где этот результат получен для гамильтоновых систем).

2. Общие свойства уравнений инвариантности

Как показано в [2], для гамильтоновых систем уравнения инвариантности (1.6) (или (1.7)) обладают многими свойствами, характерными для уравнений гидродинамики идеальной жидкости. Если $\varphi \neq 0$, то это наблюдение справедливо лишь при дополнительных условиях.

Рассмотрим сначала стационарный случай, когда $b = 0$ и перечисленные выше тензорные объекты $(u, v, \omega, h, \varphi)$ не зависят явно от времени. Очевидно, функция h будет постоянной на линиях тока — интегральных кривых векторного поля v. Действительно, согласно уравнению связи имеет место соотношение

$$i_v\varphi = \varphi(v) = \mu \sum a_j \dot{x}_j = 0.$$

Применяя к обеим частям уравнения (1.7) операцию внутреннего умножения i_v, получим

$$i_v\,dh = \frac{\partial h}{\partial x} \cdot v = 0.$$

Что и требовалось.

Для уравнений Гамильтона (как и в гидродинамике) функция h постоянна также на вихревых многообразиях 2-формы Ω. В общем случае (когда $\varphi \neq 0$) это уже не так. Напомним определение вихревого многообразия, которое пригодно и для неавтономного случая. Вихревой вектор w определяется из условия

$$i_w\Omega = 0.$$

Совокупность всех вихревых векторов в одной и той же точке x в фиксированный момент времени порождает некоторое m-мерное векторное пространство Π_x, касательное к конфигурационному пространству. В типичном случае размерность $m = \dim \Pi_x$ не зависит от точки x. Следовательно, имеется распределение m-мерных касательных пространств. Это распределение интегрируемо ввиду свойства замкнутости 2-формы Ω [2]. Это означает, что конфигурационное пространство расслоено на m-мерные многообразия W, которые в каждой точке x касаются Π_x. Эти многообразия называются вихревыми многообразиями; в нестационарном случае они зависят от времени t.

Продолжим рассмотрение стационарного случая.

Предложение 1. *Если вихревые векторы являются возможными перемещениями, то функция h постоянна на вихревых многообразиях.*

Действительно, поскольку 2-форма $\Omega = d\omega$ кососимметрическая, то

$$i_w(i_v\Omega) = \Omega(v, w) = 0.$$

Согласно предположению,

$$i_w\varphi = \varphi(w) = 0.$$

Следовательно,

$$0 = i_w\, dh = \frac{\partial h}{\partial x} \cdot w,$$

что означает постоянство функции h на вихревых многообразиях.

В дальнейшем будем считать, что 1-форма ω имеет постоянный класс во всем конфигурационном пространстве или его части (где проводится анализ системы). Это означает, что размерность линейного пространства векторов w, которые удовлетворяют соотношениям

$$i_w\omega = i_w\, d\omega = 0,$$

не меняется от точки к точке. Известно [4, 5], что в некоторых локальных координатах форма ω принимает вид

$$dS + x_1\, dx_2 + \ldots + x_{2k-1}\, dx_{2k}, \quad 2k \leqslant n. \tag{2.1}$$

Здесь S — некоторая функция от x и t.

Теорема 1. *Предположим, что вихревые векторы w 2-формы Ω удовлетворяют следующим условиям:*

1. *$i_w\varphi = 0$ (w — возможное перемещение системы),*
2. *$i_w\Phi = 0$ (w — вихревой вектор 2-формы Φ).*

Тогда поток системы (1.9) *переводит вихревые многообразия в вихревые многообразия.*

Это утверждение — многомерное обобщение классической теоремы Гельмгольца о вмороженности вихревых линий.

Доказательство. Используя (2.1), запишем в явном виде уравнения инвариантного многообразия

$$u_1 = \frac{\partial S}{\partial x_1},\ u_2 = \frac{\partial S}{\partial x_2} + x_1,\ \ldots,\ u_{2k+1} = \frac{\partial S}{\partial x_{2k+1}},\ \ldots,\ u_n = \frac{\partial S}{\partial x_n} \tag{2.2}$$

и уравнения (1.6)

$$\begin{aligned}
&\dot{x}_1 = -\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial S}{\partial t} + h\right) + \varphi_2, \quad \dot{x}_2 = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial S}{\partial t} + h\right) + \varphi_1,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (2.3)\\
&\dot{x}_{2k-1} = -\frac{\partial}{\partial x_{2k}}\left(\frac{\partial S}{\partial t} + h\right) + \varphi_{2k}, \quad \dot{x}_{2k} = \frac{\partial}{\partial x_{2k-1}}\left(\frac{\partial S}{\partial t} + h\right) + \varphi_{2k-1},
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_{2k+1}}\left(\frac{\partial S}{\partial t} + h\right) = \varphi_{2k+1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\left(\frac{\partial S}{\partial t} + h\right) = \varphi_n. \qquad (2.4)$$

Здесь $\varphi_j = \lambda a_j$. Согласно (2.2), матрица 2-формы $\Omega = d\omega$ имеет блочно-диагональный вид:

$$\operatorname{rot} u = (\underbrace{J, \ldots, J}_{k}, 0, \ldots, 0), \quad J = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Следовательно, пространство вихревых векторов порождается комбинациями $n - 2k$ векторов

$$(0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)^T, \ldots, (0, \ldots, 0, 0, 0, \ldots, 1)^T.$$

Согласно *условию 1*,

$$\varphi_{2k+1} = \cdots = \varphi_n = 0. \qquad (2.5)$$

Но тогда из (2.4) вытекает, что функция

$$\frac{\partial S}{\partial t} + h$$

зависит только от $x_1, \ldots, x_{2k}$ и времени. Кстати сказать, этот факт распространяет теорему Бернулли на нестационарный случай.

Нетрудно проверить, что *условие 2* теоремы эквивалентно серии уравнений

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_{2k+1}} = \frac{\partial \varphi_{2k+1}}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial x_{2k+1}} = \frac{\partial \varphi_{2k+1}}{\partial x_{n-1}},\\
&\ldots\\
&\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} = \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial x_n} = \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_{n-1}}.
\end{aligned}$$

С учетом (2.5) получаем, что функции $\varphi_1, \ldots, \varphi_{2k}$ зависят лишь от $x_1, \ldots, x_{2k}$ и t. Но тогда соотношения (2.3) будут замкнутой системой обыкновенных дифференциальных уравнений относительно $x_1, \ldots, x_{2k}$. Поскольку вихревые многообразия локально задаются уравнениями

$$x_1 = x_1^0, \ldots, x_{2k} = x_{2k}^0,$$

то поток системы (1.9) (частью которой являются уравнения (2.3)) переводит вихревые многообразия в вихревые многообразия. Что и требовалось.

Подчеркнем, что система дифференциальных уравнений (2.3) замкнута и имеет вид (1.6). Ее фазовое пространство получается из конфигурационного пространства с помощью факторизации по естественному отношению эквивалентности: отождествляются точки, лежащие на одной и той же вихревой поверхности. Поэтому (2.3) можно назвать фактор-системой. Эта конструкция обобщает определение фактор-системы для инвариантных многообразий гамильтоновых систем [2].

В качестве иллюстративного примера рассмотрим уравновешенный конек Чаплыгина на горизонтальной плоскости. В качестве обобщенных координат примем x_1, x_2 — декартовы координаты точки контакта лезвия со льдом (ввиду предположения об уравновешенности, эта точка совпадает с проекцией центра масс лезвия на плоскость льда) и ψ — угол поворота лезвия. Лагранжиан совпадает с кинетической энергией

$$T = \frac{m}{2}\left(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2\right) + \frac{J\dot{\psi}^2}{2},$$

m — масса конька, J — его момент инерции относительно вертикальной оси, проходящей через центр масс. Отсутствие проскальзывания в горизонтальном направлении, ортогональном плоскости конька, выражается уравнением неинтегрируемой связи

$$\dot{x}_1 \sin\psi - \dot{x}_2 \cos\psi = 0. \tag{2.6}$$

Так что ковектор a имеет компоненты

$$\sin\psi, -\cos\psi, 0. \tag{2.7}$$

Уравнения движения выглядят просто:

$$m\ddot{x}_1 = \lambda \sin\psi, \quad m\ddot{x}_2 = -\lambda\cos\psi, \quad J\ddot{\psi} = 0. \tag{2.8}$$

Отсюда находится формула для множителя Лагранжа:

$$\lambda = -m\dot{\psi}\sqrt{\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2}. \tag{2.9}$$

Он постоянен на движениях конька.

Из (2.6) и (2.8) вытекает наличие трехмерного инвариантного многообразия

$$m\dot{x}_1 = \alpha\cos\psi, \quad m\dot{x}_2 = \alpha\sin\psi, \quad J\dot{\psi} = \beta, \tag{2.10}$$

α, β — постоянные параметры, смысл которых очевиден. Таким образом,

$$\omega = \alpha\cos\psi\, dx_1 + \alpha\sin\psi\, dx_2 + \beta\, d\psi.$$

Согласно (2.7) и (2.9) имеем

$$\varphi = \gamma\sin\psi\, dx_1 - \gamma\cos\psi\, dx_2,$$

$\gamma \neq 0$ — некоторая константа.

Следовательно,

$$\Omega = d\omega = -\alpha\sin\psi\, d\psi \wedge dx_1 + \alpha\cos\psi\, d\psi \wedge dx_2.$$

Эта 2-форма определяется кососимметрической 3×3-матрицей ротора

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -\alpha\sin\psi \\ 0 & 0 & \alpha\cos\psi \\ \alpha\sin\psi & -\alpha\cos\psi & 0 \end{bmatrix}.$$

Значит, вектор

$$w = (\cos\psi, \sin\psi, 0)^T \tag{2.11}$$

будет вихревым. При $\alpha \neq 0$ все вихревые векторы коллинеарны (2.11). Ясно, что (2.10) будет возможным перемещением системы:

$$\varphi(w) = 0.$$

Однако второе условие теоремы не выполнено. Можно показать, что при $\beta \neq 0$ заключение теоремы 1 не справедливо: интегральные кривые векторного поля (2.11) не вморожены в фазовый поток системы (2.10).

3. Системы с трехмерными инвариантными многообразиями

Пусть $n = 3$ и неголономная система допускает стационарное инвариантное многообразие, однозначно проектирующееся на пространство конфигураций. Уравнения (1.1) и (1.6) принимают вид

$$(\operatorname{rot} u) \times v = -\frac{\partial h}{\partial x} + a', \quad (a', v) = 0. \tag{3.1}$$

Здесь для краткости письма a' обозначает произведение λa. Далее рассматривается наиболее интересный случай, когда векторное поле v не обращается в нуль. Тогда из второго уравнения (3.1) вытекает возможность представления ковекторного поля a' в виде произведения $\xi \times v$, где ξ — некоторое поле на конфигурационном пространстве. Представление

$$a' = \xi \times v, \tag{3.2}$$

конечно, не однозначное: к полю ξ можно добавить слагаемое $æv$, где $æ(x)$ — любая гладкая функция.

Предложение 2. *Пусть выполнены следующие условия:*

1) *автономная система* (1.9) *допускает инвариантную меру с гладкой плотностью* $\rho > 0\colon\ \operatorname{div}(\rho v) = 0$,

2) $\operatorname{div} \xi = \dfrac{\partial \xi_1}{\partial x_1} + \dfrac{\partial \xi_2}{\partial x_2} + \dfrac{\partial \xi_3}{\partial x_3} = 0.$

Тогда векторные поля

$$v \quad и \quad \frac{\operatorname{rot} u - \xi}{\rho} \tag{3.3}$$

коммутируют (их скобка Ли равна нулю).

Действительно, с учетом (3.2) первое уравнение (3.1) принимает вид

$$(\xi - \operatorname{rot} u) \times v = \frac{\partial h}{\partial x}, \tag{3.4}$$

причем

$$\operatorname{div}(\xi - \operatorname{rot} u) = 0.$$

Как установлено в [6], с учетом первого условия поля (3.4) коммутируют.

Может оказаться так, что векторы (3.3) коллинеарны в каждой точке конфигурационного пространства. Согласно (3.4) это заведомо так, если функция h принимает постоянное значение. Например, в задаче об уравновешенном коньке (из § 2) $h = \mathrm{const}$ на инвариантном многообразии (2.10).

Функция h — первый интеграл автономной системы на конфигурационном пространстве

$$\dot{x} = v(x). \tag{3.5}$$

Рассмотрим «поверхности Бернулли»

$$B_c = \{x \colon h(x) = c\}. \tag{3.6}$$

Если c не совпадает с критическим значением функции h, то B_c будет гладкой регулярной поверхностью. Если $v \neq 0$ на B_c, то каждая связная компактная компонента поверхности Бернулли будет двумерным тором. Какова структура фазового потока системы (3.5) на интегральной поверхности (3.6)?

Теорема 2. *Пусть выполнены условия предложения 2 и c не является критической точкой функции h. Тогда на каждой связной компактной компоненте поверхности Бернулли можно ввести угловые координаты $\varphi_1, \varphi_2 \mod 2\pi$ так, что в этих переменных уравнение* (3.5) *на* (3.6) *принимает вид*

$$\dot{\varphi}_1 = \omega_1, \quad \dot{\varphi}_2 = \omega_2; \quad \omega_j = \mathrm{const}.$$

Таким образом, на компактных регулярных поверхностях Бернулли система совершает условно-периодические движения.

Доказательство теоремы 2. Согласно (3.4), поля (3.3) касаются поверхности (3.6) во всех точках и линейно независимы, поскольку $dh \neq 0$ на B_c. С другой стороны, эти поля коммутируют на B_c (предложение 2). Отсюда вытекает существование угловых переменных, равномерно изменяющихся со временем (см., например, [7]).

Условия предложения 2 имеют существенное значение для справедливости заключения теоремы 2. Без этих дополнительных условий структура фазового потока системы (3.5) на инвариантных торах (3.6) может быть довольно сложной. Стоит еще отметить, что первое условие предложения 2 редко выполняется, поскольку в типичном случае уравнения неголономной динамики вообще не допускают интегральных инвариантов с гладкой плотностью [8].

4. Системы на группах Ли с левоинвариантными связями

Пусть

$$v_1, \ldots, v_n \tag{4.1}$$

— векторные поля на конфигурационном многообразии M^n, линейно независимые во всех точках. Их коммутаторы можно представить в виде

$$[v_i, v_j] = \sum c_{ij}^k(x) v_k, \quad c_{ij}^k = -c_{ji}^k.$$

Введем квазискорости $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n)$ по формуле

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^{n} v_i(x)\omega_i. \tag{4.2}$$

Лагранжиан L и уравнение связи $f(\dot{x}, x) = 0$ можно представить в переменных x, ω; пусть это будут функции $\mathcal{L}(\omega, x)$ и $f(\omega, x)$. Тогда уравнение Лагранжа принимает вид

$$\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \omega_i}\right)^{\cdot} = \sum_{j,k=1}^{n} c_{ji}^{k} \omega_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \omega_k} + v_i(\mathcal{L}) + \lambda \frac{\partial f}{\partial \omega_i}. \tag{4.3}$$

Здесь $v_i(\mathcal{L})$ обозначает производную от лагранжиана вдоль векторного поля v_i. К уравнению (4.3) надо добавить уравнение связи

$$f(\omega, x) = 0. \tag{4.4}$$

Для линейных по скоростям связей

$$f(\omega, x) = (\alpha, \omega),$$

где поле α гладко зависит от x. Уравнения (4.3) (в отсутствие связей) были получены Пуанкаре. Все это легко переносится на случай, когда лагранжиан системы и уравнение связи зависят от времени.

Пусть теперь M — группа Ли G и (4.1) — независимые левоинвариантные поля на G. Тогда коэффициенты c_{ij}^{k} — структурные постоянные алгебры Ли g группы G. Пусть лагранжиан инвариантен относительно левых сдвигов на группе. В частности,

$$v_i(\mathcal{L}) = 0 \quad (1 \leqslant i \leqslant n)$$

и лагранжиан $\mathcal{L}$ зависит от квазискоростей ω (векторов из алгебры g). Если еще связь левоинвариантна, то функция f также не зависит от координат $x_1, \ldots, x_n$. В этом случае система уравнений (4.3)–(4.4) становится замкнутой системой дифференциальных уравнений на алгебре g:

$$\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \omega_i}\right)^{\cdot} = \sum c_{ji}^{k} \omega_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \omega_k} + \lambda \frac{\partial f}{\partial \omega_i}, \quad f(\omega) = 0. \tag{4.5}$$

В работе [9], где изучались неголономные системы на группах Ли, уравнения (4.5) названы уравнениями Эйлера–Пуанкаре–Суслова. Сам Г. К. Суслов вывел эти уравнения в случае, когда G совпадает с группой поворотов трехмерного евклидова пространства $SO(3)$. Он рассмотрел задачу о вращении твердого тела с неинтегрируемой связью: проекция угловой скорости на некоторое направление, фиксированное в теле, равна нулю [10].

Вводя квазиимпульсы

$$m = (m_1, \ldots, m_n) \in g^*, \quad m_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \omega_i}, \tag{4.6}$$

уравнения (4.5) можно представить в виде замкнутой системы уравнений на дуальной алгебре g^*:

$$\dot{m}_i = \sum_{j,k=1}^{n} c_{ji}^{k} m_k \omega_i + \lambda \frac{\partial f}{\partial \omega} = 0, \quad f(\omega) = 0. \tag{4.7}$$

Квазискорости выражаются через квазиимпульсы по известным формулам:

$$\omega_k = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial m_k}, \quad \mathcal{H} = (m \cdot \omega - \mathcal{L})_{\omega \to m}.$$

Как уже говорилось, система (4.5) (соответственно, (4.7)) замкнута относительно квазискоростей (квазиимпульсов): множитель λ находится как функция от ω (или от m). Это простое наблюдение дает нам возможность указать целое семейство инвариантных n-мерных многообразий неголономных систем с левоинвариантными связями. Действительно, пусть

$$t \mapsto \omega(t)$$

— одно из решений системы (4.5). Тогда инвариантное многообразие можно отождествить с конфигурационным многообразием, уравнения (1.9) совпадают с уравнениями (4.2), а функция h зависит лишь от времени и поэтому не входит в уравнение инвариантности (1.6).

Отметим одно важное свойство системы (4.2): ее поток сохраняет правоинвариантную меру на группе G [2]. Напомним, что на каждой группе Ли имеется единственная (с точностью до постоянного множителя) мера, инвариантная при всех левых (правых) сдвигах. В случае унимодулярной группы эта мера (называемая мерой Хаара) биинвариантна. Аналитический критерий унимодулярности заключается в выполнении следующих соотношений для структурных постоянных алгебры Ли:

$$\sum c_{ik}^k = 0, \quad 1 \leqslant i \leqslant n.$$

Все компактные группы Ли унимодулярны.

Продемонстрируем все это на примере классической задачи Суслова о вращении твердого тела с неподвижной точкой. Пусть проекция угловой скорости тела на третью ось подвижного трехгранника равна нулю: $\omega_3 = 0$. Мы не предполагаем, что этот трехгранник совпадает с главными осями инерции вращающегося тела. Хорошо известно, что оставшиеся две компоненты ω_1 и ω_2 выражаются через элементарные функции времени и при $t \to +\infty$ они стремятся к постоянным величинам ω_1^0, ω_2^0 [10].

Пусть $I = \|I_{ij}\|$ — тензор инерции твердого тела относительно выбранного подвижного трехгранника. В качестве обобщенных переменных выберем обычные углы Эйлера ϑ, φ, ψ. Лагранжиан совпадает с кинетической энергией

$$T = \frac{1}{2} \sum I_{ij} \omega_i \omega_j, \tag{4.8}$$

а компоненты угловой скорости ω_1 и ω_2 выражаются через углы Эйлера и их производные с помощью кинематических формул Эйлера. Сопряженные канонические импульсы вводятся по обычному правилу:

$$p_\vartheta = \frac{\partial T}{\partial \dot\vartheta}, \quad p_\varphi = \frac{\partial T}{\partial \dot\varphi}, \quad p_\psi = \frac{\partial T}{\partial \dot\psi}.$$

Используя (4.8) и кинематические формулы Эйлера, получим:

$$\begin{aligned} &p_\vartheta = m_1 \cos\varphi - m_2 \sin\varphi, \\ &p_\varphi = m_3, \\ &p_\psi = m_1 \sin\vartheta \sin\varphi + m_2 \sin\vartheta \sin\varphi + m_3 \cos\vartheta, \end{aligned} \tag{4.9}$$

где m_1, m_2, m_3 — проекции момента импульса тела на подвижные оси. В формулах (4.9) эти моменты считаются известными функциями времени.

Само векторное поле v на группе $SO(3)$ определяется обращением кинематических формул Эйлера (с учетом связи $\omega_3 = 0$):

$$\begin{aligned}
\dot{\vartheta} &= \omega_1 \cos\varphi - \omega_2 \sin\varphi, \\
\dot{\varphi} &= -\frac{\omega_1 \sin\varphi + \omega_2 \cos\varphi}{\sin\vartheta} \cos\vartheta,. \\
\dot{\psi} &= \frac{\omega_1 \sin\varphi + \omega_2 \cos\varphi}{\sin\vartheta}.
\end{aligned} \tag{4.10}$$

Видно, что $\operatorname{div}(\rho v) = 0$, где $\rho = \sin\vartheta$. Следовательно, поток неавтономной системы (4.10) сохраняет меру Хаара

$$\sin\vartheta \, d\vartheta \, d\varphi \, d\psi \tag{4.11}$$

на группе вращений.

Вычисляя по обычному правилу ротор ковекторного поля (4.9), находим вихревой вектор:

$$w = (m_1 \sin\vartheta \cos\varphi - m_2 \sin\vartheta \sin\varphi, -m_1 \cos\vartheta \sin\varphi - m_2 \cos\vartheta \cos\varphi + m_3 \sin\vartheta, m_1 \sin\varphi + m_3 \cos\varphi). \tag{4.12}$$

Его компоненты выглядят громоздко и сразу не виден смысл векторного поля w на группе вращений $SO(3)$. Однако это поле можно представить в подвижном пространстве, снова воспользовавшись кинематическими формулами Эйлера. Проекции векторного поля (4.12) на подвижные оси:

$$\Omega_1 = m_1 \sin\vartheta, \quad \Omega_2 = m_2 \sin\vartheta, \quad \Omega_3 = m_3 \sin\vartheta. \tag{4.13}$$

Поскольку вихревые векторы определены с точностью до ненулевого множителя, то в формулах (4.13) синус угла нутации (плотность меры Хаара (4.11)) можно опустить. Но тогда в каждый момент времени компоненты Ω_i не будут зависеть от ориентации вращающегося твердого тела. Поле (4.13) задает вращение тела вокруг оси (в теле и в неподвижном пространстве), коллинеарной вектору $(\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3)$. Соответствующие интегральные кривые поля (4.12) — вихревые линии — большие круги на группе $SO(3)$. Расслоение группы $SO(3)$ на эти замкнутые вихревые линии в топологии хорошо известно: это расслоение Зейферта. Факторизация по этим кругам дает двумерную сферу. Следует подчеркнуть, что поскольку поле ротора (4.12), деленное на $\sin\vartheta$, левоинвариантное, то вихревые линии переходят в себя при правых сдвигах на группе $SO(3)$. К семейству правых сдвигов относятся, в частности, преобразования из потока системы (4.10).

5. Системы на группах Ли с правоинвариантными связями

Уравнения движения системы на группе Ли G с левоинвариантной кинетической энергией и правоинвариантной стационарной связью имеют вид (4.7):

$$\dot{m}_i = \sum_{j,k=1}^{n} c_{ji}^k m_k \omega_j + \lambda \alpha_i, \quad (\alpha, \omega) = 0. \tag{5.1}$$

Но только теперь ковекторное поле α на группе Ли будет переходить в себя при всех правых сдвигах. Такие системы введены в [11].

Ключевым для нас будет следующее свойство. Пусть w — правоинвариантное векторное поле на G. Следовательно, фазовый поток системы

$$x' = w(x), \quad x \in G$$

будет семейством левых сдвигов на G. Но, согласно предположению, кинетическая энергия инвариантна относительно всех левых сдвигов. Поэтому если дополнительно потребовать равенства

$$(\alpha, w) = 0, \tag{5.2}$$

то по обобщенной теореме Нётер [12] уравнения (5.1) допускают линейный по скорости первый интеграл

$$(m, w) = \mathrm{const}. \tag{5.3}$$

Это обстоятельство позволит нам указать семейство стационарных инвариантных многообразий для уравнений (5.1), которые однозначно проектируются на группу Ли G. Действительно, имеется $n-1$ линейно независимых правоинвариантных векторных полей, удовлетворяющих условию (5.2). Они порождают $n-1$ линейных интегралов вида (5.3). Добавляя к ним еще уравнение связи, получим невырожденную линейную систему уравнений относительно n переменных $m_1, \ldots, m_n$. Таким образом, момент становится функцией на группе, зависящей еще от $n-1$ параметров. Это замечание, конечно, справедливо и для систем с любым числом правоинвариантных связей. Изучение потоков на этих многообразиях представляет содержательную задачу.

Предложение 3. *Поток на указанном n-мерном инвариантном многообразии допускает инвариантную меру с гладкой положительной плотностью.*

В качестве примера рассмотрим задачу о вращении волчка со следующей неинтегрируемой связью: проекция угловой скорости на некоторую неподвижную ось обращается в нуль [12]. Эта связь не меняется при всех правых сдвигах на группе $SO(3)$. Пусть α, β, γ — ортонормированный базис в неподвижном пространстве, причем

$$(\omega, \gamma) = 0 \tag{5.4}$$

— уравнение связи. Уравнения вращения волчка в подвижной системе отсчета имеют вид

$$\begin{gathered} I\dot{\omega} + \omega \times I\omega = \lambda\gamma, \quad (\omega, \gamma) = 0, \\ \dot{\alpha} + \omega \times \alpha = 0, \quad \dot{\beta} + \omega \times \beta = 0, \quad \dot{\gamma} + \omega \times \gamma = 0. \end{gathered} \tag{5.5}$$

Здесь I — оператор инерции твердого тела относительно неподвижной точки.

Уравнения (5.5) допускают два нётеровых интеграла

$$(I\omega, \alpha) = c_1, \quad (I\omega, \beta) = c_2.$$

Эти два соотношения вместе с уравнением связи составляют замкнутую линейную систему, которая позволяет выразить угловую скорость вращающегося волчка через его положение. Таким образом, получаем трехмерное стационарное инвариантное многообразие, которое однозначно проектируется на группу $SO(3)$.

Не уменьшая общности, можно положить $c_1 = c$, $c_2 = 0$. Тогда

$$\omega = c\left[I^{-1}\alpha - \frac{(I^{-1}\alpha, \gamma)}{(I^{-1}\gamma, \gamma)} I^{-1}\gamma\right]. \tag{5.6}$$

Касательное векторное поле v на группе $SO(3)$ порождается кинематическими уравнениями Пуассона (5.5), в которые следует сделать подстановку (5.6). Соответствующая динамическая система на $SO(3)$ (как и исходные уравнения движения) допускает инвариантную меру с гладкой плотностью. Кроме того, имеется первый интеграл h — ограничение кинетической энергии на инвариантное многообразие. Если $c \neq 0$, то h — непостоянная функция на группе $SO(3)$. Соответствующие поверхности Бернулли снова будут двумерными торами, но поток на них нельзя свести к условно-периодическому виду.

Список литературы

[1] Аржаных И. С. Поле импульсов. Ташкент: Наука, 1965. 231 с.

[2] Козлов В. В. Общая теория вихрей. Ижевск: Издательский дом «Удмуртский университет», 1998. 238 с.

[3] Козлов В. В. Об инвариантных многообразиях уравнений Гамильтона // ПММ (в печати).

[4] Картан Э. Интегральные инварианты. М.–Л.: Гостехиздат, 1940. 216 с.

[5] Годбийон К. Дифференциальная геометрия и аналитическая механика. М.: Мир, 1973. 188 с.

[6] Козлов В. В. Замечания о стационарных вихревых движениях сплошной среды // ПММ, 1983, т. 47, № 2, с. 341–342.

[7] Арнольд В. И., Козлов В. В., Нейштадт А. И. Математические аспекты классической и небесной механики. М.: УРСС, 2002. 414 с.

[8] Козлов В. В. О существовании интегрального инварианта гладких динамических систем // ПММ, 1987, т. 51, № 4, с. 538–545.

[9] Fedorov Yu. N., Kozlov V. V. Various aspects of n-dimentional rigid body dinamics // Dynamical systems in classical mechanics / V. V. Kozlov (Ed.). (Adv. Math. Sci. Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, vol. 168.) Providence, RI: AMS, 1995. P. 141–171.

[10] Суслов Г. К. Теоретическая механика. М.–Л.: Гостехиздат, 1946. 655 с.

[11] Веселов А. П., Веселова Л. Е. Потоки на группах Ли с неголономной связью и интегрируемые негамильтоновы системы // Функц. анализ и его прил., 1986, т. 20, № 4, с. 65–66.

[12] Козлов В. В., Колесников Н. Н. О теоремах динамики // ПММ, 1978, т. 42, № 1, с. 28–33.

On invariant manifolds of nonholonomic systems

Valery V. Kozlov

Steklov Mathematical Institute, Russian Academy of Sciences
Gubkina st. 8, Moscow, 119991, Russia
kozlov@pran.ru

Invariant manifolds of equations governing the dynamics of conservative nonholonomic systems are investigated. These manifolds are assumed to be uniquely projected onto configuration space. The invariance conditions are represented in the form of generalized Lamb's equations. Conditions are found under which the solutions to these equations admit a hydrodynamical description typical of Hamiltonian systems. As an illustration, nonholonomic systems on Lie groups with a left-invariant metric and left-invariant (right-invariant) constraints are considered.

MSC 2010: 70Hxx, 37J60
Keywords: invariant manifold, Lamb's equation, vortex manifold, Bernoulli's theorem, Helmholtz' theorem

Received December 27, 2011, accepted January 23, 2012
Citation: *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2012, vol. 8, no. 1, pp. 57–69 (Russian)