



УДК: 531.7

MSC 2010: 70E18, 76B47

## Динамика шара Чаплыгина с полостью, заполненной жидкостью

А. В. Борисов, И. С. Мамаев

В работе рассмотрена задача о качении по абсолютно шероховатой плоскости шара с эллипсоидальной полостью, заполненной идеальной жидкостью, которая совершает однородное вихревое движение. Указан случай существования инвариантной меры и показано, что при условии осевой симметрии имеется частный случай интегрируемости.

Ключевые слова: вихревое движение, неголономная связь, шар Чаплыгина, инвариантная мера, интегрируемость, твердое тело, идеальная жидкость

### Содержание

Введение . . . . .	104
1. Уравнения движения . . . . .	105
2. Первые интегралы и инвариантная мера . . . . .	107
3. Интегрируемый случай осевой симметрии . . . . .	108

Получено 25 ноября 2011 года

После доработки 18 января 2012 года

Работа выполнена в ФГБОУ ВПО «УдГУ» в рамках гранта Правительства РФ для государственной поддержки научных исследований, проводимых под руководством ведущих ученых в российских образовательных учреждениях ВПО (дог. № 11.G34.31.0039) и Федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России», мероприятие 1.1. «Научно-образовательный центр «Регулярная и хаотическая динамика» (ГК № 02.740.11.0195). Работа поддержана грантом РФФИ 11-01-91056-НЦНИ\_а.

Борисов Алексей Владимирович

[borisov@rcd.ru](mailto:borisov@rcd.ru)

Мамаев Иван Сергеевич

[mamaev@rcd.ru](mailto:mamaev@rcd.ru)

Институт компьютерных исследований

Удмуртский государственный университет

426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, д. 1



## Введение

Задача о движении твердого тела с полостями, заполненными жидкостью, совершающей потенциальное движение в случае неодносвязных полостей и однородное вихревое движение в случае полостей эллипсоидальной формы, впервые была разобрана Н. Е. Жуковским [6]. В различных постановках эта проблема получила дальнейшее развитие в работах А. Пуанкаре [14], В. А. Стеклова [17, 18], В. Вольтерра [21] и др. С обзором этих классических исследований можно ознакомиться по работе [3] и недавно вышедшему сборнику [11] (см. также книгу [9], содержащую подробную библиографию по динамике тел, имеющих полости с жидким наполнением). Теоретические исследования по этой проблематике были обусловлены необходимостью обосновать явление прецессионных движений небесных тел, в частности, Земли, в предположении, что тело состоит из твердой оболочки-мантии, заключающей в себе жидкое ядро. Из современных работ укажем [16], где рассматривается модельная задача для исследования либраций Меркурия.

Отметим также, что исследование динамики тела с неодносвязными полостями, заполненными идеальной жидкостью, явилось одной из причин введения понятия циклических переменных и создания процедуры редукции Рауса–Кельвина. Кроме того, задача о движении тела с эллипсоидальной полостью привела А. Пуанкаре к получению новой формы уравнений в квазискоростях [15] (уравнения Пуанкаре на группе Ли).

Другой круг вопросов, также связанных с обозначенной задачей, относится к динамике волчка и восходит к Уильяму Томсону (лорду Кельвину), увлекавшемуся конструированием и экспериментами с различными моделями волчков с присущими им динамическими эффектами [19, 20] (наиболее известен обнаруженный им необычный эффект подъема волчка, получившего название «волчка Томсона»).<sup>1</sup> Различные эксперименты с волчками подробно описаны в книге Дж. Перри [13]. Так, всем известно, что если вареное яйцо привести каким-либо способом в быстрое вращение, то оно поднимется вдоль более длинной оси; однако если закрутить так сырое яйцо, оно никогда не обнаруживает ни малейшего стремления к подъему и вращению вдоль длинной оси. Этот наглядный пример естественно подводит к вопросу о поведении на плоскости тела, имеющего заполненную жидкостью полость. Из последних работ в этом направлении отметим [7, 8, 10, 12], в которых исследуется задача о качении по плоскости тела с эллипсоидальной полостью, заполненной идеальной жидкостью, совершающей однородное вихревое движение. В указанных работах исследуется устойчивость различных стационарных движений системы. Кроме того, в работе [12] рассмотрена динамика шара Чаплыгина с жидким наполнением в случае наличия в точке контакта силы трения, не создающей момента, и показано, что сохраняется величина момента относительно точки контакта и интеграл площадей, в то время как энергия не возрастает. В работе [7] также показано, что в случае сферической оболочки и осесимметричной полости сохраняется интеграл Джеллетта для произвольного закона трения между оболочкой и плоскостью, при отсутствии момента трения.

В данной работе мы рассматриваем задачу о качении по абсолютно шероховатой плоскости шаровой оболочки с эллипсоидальной полостью, содержащей идеальную жидкость. Мы показываем, что в случае, когда центр масс системы совпадает с геометрическим центром оболочки (то есть для шара Чаплыгина с жидким наполнением), уравнения движения допускают инвариантную меру; если, кроме того, распределение масс оболочки и полость осесимметричны относительно одной и той же оси, то имеется инвариантное подмножество, где уравнения движения интегрируются в квадратурах.

<sup>1</sup>См. статью У. Томсона и предвещающий ее фрагмент из книги «Жизнь лорда Кельвина» в этом номере — *Прим. ред.*

### 1. Уравнения движения

Рассмотрим обобщение задачи С. А. Чаплыгина о качении динамически несимметричного шара по горизонтальной плоскости. Будем предполагать, что внутри шара имеется эллипсоидальная полость, заполненная идеальной жидкостью, совершающей движение с однородной завихренностью. Выберем подвижную систему координат  $Gx_1x_2x_3$ , начало которой совпадает с центром масс системы, а оси направлены вдоль главных осей инерции (см. рис. 1). В этой системе координат уравнение полости представляется в форме

$$(\mathbf{x} - \mathbf{x}_c, \mathbf{B}^{-2}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_c)) \leq 1, \tag{1.1}$$

где  $\mathbf{B}^2$  — симметрическая матрица, собственные значения которой совпадают с квадратами главных полуосей полости  $b_1^2, b_2^2, b_3^2$ .

Следуя А. Пуанкаре, представим в системе координат  $Gx_1x_2x_3$  распределение абсолютной скорости течения жидкости в полости в виде [5]

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{V} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x} + \mathbf{B}\boldsymbol{\Xi}\mathbf{B}^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_c), \tag{1.2}$$

где  $\mathbf{V}, \boldsymbol{\omega}$  — скорость центра масс и угловая скорость шара,  $\boldsymbol{\Xi}$  — кососимметричная матрица.

Условие отсутствия проскальзывания в точке контакта  $Q$  записывается в форме

$$\mathbf{V} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = 0, \quad \mathbf{r} = \mathbf{a} - R\boldsymbol{\gamma}, \tag{1.3}$$

где  $\mathbf{r}$  — вектор из центра масс в точку контакта,  $\mathbf{a}$  — вектор из центра масс в центр масс шара,  $\boldsymbol{\gamma}$  — орт вертикали.

Определим вектор  $\boldsymbol{\xi}$ , соответствующий матрице  $\boldsymbol{\Xi}$ , компоненты которого в системе координат  $Gx_1x_2x_3$  задаются соотношением

$$\xi_k = -\varepsilon_{kij}\Xi_{ij}.$$

Уравнения движения этой системы представляются в форме [5]

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial T}{\partial \mathbf{V}}\right)' + \boldsymbol{\omega} \times \frac{\partial T}{\partial \mathbf{V}} &= -mg\boldsymbol{\gamma} + \mathbf{N}, & \left(\frac{\partial T}{\partial \boldsymbol{\omega}}\right)' + \boldsymbol{\omega} \times \frac{\partial T}{\partial \boldsymbol{\omega}} &= \mathbf{r} \times \mathbf{N}, \\ \left(\frac{\partial T}{\partial \boldsymbol{\xi}}\right)' - \boldsymbol{\xi} \times \frac{\partial T}{\partial \boldsymbol{\xi}} &= 0, \end{aligned} \tag{1.4}$$

где  $\mathbf{N}$  — реакция связи,  $T$  — кинетическая энергия системы (вычисленная без учета связи),  $m$  — масса шара с жидкостью,  $g$  — ускорение поля тяжести.

ЗАМЕЧАНИЕ. По известной зависимости  $\boldsymbol{\xi}(t)$  траектории частиц жидкости в полости относительно ее центра можно получить, пользуясь соотношением (1.2). Действительно, выполним линейную замену переменных

$$\mathbf{x}' = \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_c),$$

которая преобразует эллипсоидальную полость в сферу. При этом в системе координат, связанной с оболочкой, соответствующие скорости определяются соотношением

$$\mathbf{v}' = \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{v} - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}) = \boldsymbol{\xi} \times \mathbf{x}',$$

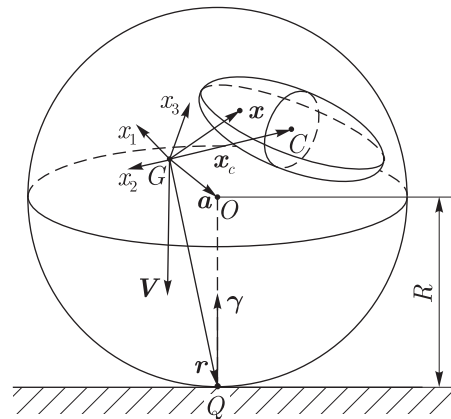


Рис. 1



то есть вихревому течению жидкости в полости соответствует вращение некоторой (воображаемой) сферы  $(\mathbf{x}', \mathbf{x}') \leq 1$  с угловой скоростью  $\boldsymbol{\xi}(t)$ .

Вычисляя кинетическую энергию системы, находим

$$T = \frac{1}{2}m \mathbf{V}^2 + \frac{1}{2}(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{I}\boldsymbol{\omega}) + \frac{1}{2} \text{Tr} (\mathbf{B}\boldsymbol{\Xi}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{J}(\mathbf{B}\boldsymbol{\Xi}\mathbf{B}^{-1})^T) - \text{Tr} (\mathbf{B}\boldsymbol{\Xi}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{J}\boldsymbol{\Omega}), \quad (1.5)$$

компоненты матриц  $\boldsymbol{\Omega}$ ,  $\mathbf{J}$  определяются соотношениями

$$\Omega_{ij} = -\varepsilon_{ijk}\omega_k, \quad J_{ij} = \int_{\text{Cavity}} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_c)_i(\mathbf{x} - \mathbf{x}_c)_j \rho dV = \frac{m_c}{5} \sum_k B_{ik}B_{jk},$$

где интегрирование распространяется на всю полость с жидкостью плотности  $\rho$ , и  $B_{ij}$  — элементы матрицы  $\mathbf{B}$ ,  $m_c$  — масса жидкости в полости. Вследствие симметричности  $\mathbf{B}$ , имеем  $\mathbf{J} = \frac{m_c}{5}\mathbf{B}^2$ , откуда получим

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}(m \mathbf{V}^2 + (\boldsymbol{\omega}, \mathbf{I}\boldsymbol{\omega})) - \frac{m_c}{10} \text{Tr}(\boldsymbol{\Xi}^2\mathbf{B}^2) - \frac{m_c}{5} \text{Tr}(\mathbf{B}\boldsymbol{\Xi}\mathbf{B}^2\boldsymbol{\Omega}) = \\ &= \frac{1}{2}(m \mathbf{V}^2 + (\boldsymbol{\omega}, \mathbf{I}\boldsymbol{\omega})) + (\boldsymbol{\xi}, \mathbf{B}'\boldsymbol{\omega}) + \frac{1}{2}(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{B}''\boldsymbol{\xi}), \\ \mathbf{B}' &= \frac{2m_c \det \mathbf{B}}{5}\mathbf{B}^{-1}, \quad \mathbf{B}'' = \frac{m_c}{5}((\text{Tr} \mathbf{B}^2)\mathbf{E} - \mathbf{B}^2). \end{aligned} \quad (1.6)$$

В случае, когда главные оси полости и главные оси инерции системы совпадают:

$$\mathbf{B}' = \text{diag} \left( \frac{2}{5}m_c b_2 b_3, \frac{2}{5}m_c b_1 b_3, \frac{2}{5}m_c b_1 b_2 \right), \quad \mathbf{B}'' = \text{diag} \left( \frac{m_c}{5}(b_2^2 + b_3^2), \frac{m_c}{5}(b_1^2 + b_3^2), \frac{m_c}{5}(b_1^2 + b_2^2) \right).$$

Исключая реакцию связи  $\mathbf{N}$  с помощью первого из уравнений (1.4) и связи (1.3), получим следующую систему уравнений:

$$\left( \frac{\partial T}{\partial \boldsymbol{\xi}} \right)' = \boldsymbol{\xi} \times \frac{\partial T}{\partial \boldsymbol{\xi}}, \quad \left( \frac{\partial T}{\partial \boldsymbol{\omega}} + m\mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \right)' = \left( \frac{\partial T}{\partial \boldsymbol{\omega}} + m\mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \right) \times \boldsymbol{\omega} + m\dot{\mathbf{r}} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) + m\mathbf{g}\mathbf{r} \times \boldsymbol{\gamma}. \quad (1.7)$$

Для того чтобы получить замкнутую систему уравнений, необходимо добавить соотношение

$$\dot{\boldsymbol{\gamma}} = \boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\omega}. \quad (1.8)$$

**ЗАМЕЧАНИЕ.** Покажем, как первое из уравнений системы (1.7) связано с уравнением Гельмгольца для завихренности жидкости  $\boldsymbol{\omega}_c$ . Используя соотношения (1.2) и представление (1.6), можно показать, что завихренность в подвижных осях задается уравнением

$$\boldsymbol{\omega}_c = \frac{1}{2} \text{rot } \mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} + \frac{1}{2 \det \mathbf{B}} ((\text{Tr} \mathbf{B}^2)\mathbf{E} - \mathbf{B}^2)\mathbf{B}\boldsymbol{\xi} = (\mathbf{B}')^{-1} \frac{\partial T}{\partial \boldsymbol{\xi}}.$$

Отсюда, используя определение  $\mathbf{B}'$ , находим

$$\mathbf{B}^{-1}\boldsymbol{\omega}_c = k \frac{\partial T}{\partial \boldsymbol{\xi}}, \quad k = \frac{5}{2m_c \det \mathbf{B}} = \text{const}. \quad (1.9)$$

Согласно уравнению Гельмгольца, в подвижных осях  $Gx_1x_2x_3$  (см. [9]), вращающихся с угловой скоростью  $\boldsymbol{\omega}$ , имеем

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_c + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega}_c = (\boldsymbol{\omega}_c, \nabla)\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{\omega}_c + \mathbf{B}\boldsymbol{\Xi}\mathbf{B}^{-1}\boldsymbol{\omega}_c.$$

Пользуясь соотношениями  $\boldsymbol{\Omega}\mathbf{a} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{a}$ ,  $\boldsymbol{\Xi}\mathbf{a} = \boldsymbol{\xi} \times \mathbf{a}$ , где  $\mathbf{a}$  — произвольный вектор, получим уравнения движения для  $\boldsymbol{\omega}_c$  в форме

$$(\mathbf{B}^{-1}\boldsymbol{\omega}_c)' = \boldsymbol{\xi} \times (\mathbf{B}^{-1}\boldsymbol{\omega}_c).$$

Согласно (1.9), оно с точностью до множителя совпадает с первым уравнением в (1.7).



## 2. Первые интегралы и инвариантная мера

В общем случае система (1.7), (1.8) допускает очевидные три первых интеграла

$$\begin{aligned} \text{геометрический} \quad F_0 &= (\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\gamma}) = 1, \\ \text{величина} \quad F_1 &= \left( \frac{\partial T}{\partial \boldsymbol{\xi}}, \frac{\partial T}{\partial \boldsymbol{\xi}} \right), \\ \text{завихренности} \\ \text{энергия} \quad E &= \tilde{T}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\omega}) - mg(\mathbf{r}, \boldsymbol{\gamma}), \end{aligned}$$

где  $\tilde{T}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\omega}) = T(\mathbf{V}, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\omega})|_{\mathbf{V}=\mathbf{r} \times \boldsymbol{\omega}}$ .

Если дополнительно положим  $\mathbf{a} = 0$ , то система уравнений (1.7), (1.8) допускает *инвариантную меру*  $\rho d\boldsymbol{\xi} d\boldsymbol{\omega} d\boldsymbol{\gamma}$ , где плотность задается уравнениями

$$\rho(\boldsymbol{\gamma}) = \left( \det \left\| \frac{\partial \tilde{T}}{\partial z_i \partial z_j} \right\| \right)^{1/2},$$

где  $\mathbf{z} = (\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\omega})$  — шестимерный вектор.

Кроме того, как следует из (1.7), при  $\mathbf{a} = 0$  вектор момента системы относительно точки контакта

$$\mathbf{M} = \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \boldsymbol{\omega}} = \frac{\partial T}{\partial \boldsymbol{\omega}} + m\mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$$

остается постоянным в неподвижной системе координат (так как  $\dot{\mathbf{M}} = \mathbf{M} \times \boldsymbol{\omega}$ ). Следовательно, у системы (1.7), (1.8) при  $\mathbf{a} = 0$  появляется еще пара дополнительных первых интегралов

$$\begin{aligned} \text{квадрат момента} \quad F_2 &= (\mathbf{M}, \mathbf{M}), \\ \text{интеграл площадей} \quad F_3 &= (\mathbf{M}, \boldsymbol{\gamma}). \end{aligned}$$

Аналогичные интегралы в случае, когда имеется безмоментное трение между оболочкой и плоскостью, указаны в работе [12].

Уравнения движения (1.7), (1.8) сходны по форме с уравнениями других известных интегрируемых неголономных систем [4], для которых интегрируемость устанавливается при помощи обобщенной теоремы Эйлера–Якоби [1], а соответствующие инвариантные многообразия — *двумерные торы*. Тем не менее, по-видимому, в данном случае механизм интегрируемости должен быть другим. Действительно, положим  $\mathbf{a} = 0$  и рассмотрим величину  $m$  в уравнениях (1.7) как независимый параметр, положив его равным нулю —  $m = 0$ ; получим

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{K}} &= \boldsymbol{\xi} \times \mathbf{K}, \quad \dot{\mathbf{M}} = \mathbf{M} \times \boldsymbol{\omega}, \\ \mathbf{K} &= \mathbf{B}''\boldsymbol{\xi} + \mathbf{B}'\boldsymbol{\omega}, \quad \mathbf{M} = \mathbf{I}\boldsymbol{\omega} + \mathbf{B}'\boldsymbol{\xi}. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Эти уравнения могут быть представлены в гамильтоновой форме с вырожденной скобкой Ли–Пуассона, соответствующей алгебре  $so(4) = so(3) \oplus so(3)$ ; известные интегрируемые случаи этой системы приведены в книге [5]. В интегрируемых случаях инвариантные многообразия системы (2.1) — двумерные торы; следовательно, для полной системы, содержащей также уравнение для  $\boldsymbol{\gamma}$

$$\dot{\boldsymbol{\gamma}} = \boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\omega},$$

интегральные многообразия представляют собой *трехмерные торы*.

Таким образом, естественно ожидать, что в исходной системе (1.7), (1.8) при  $m \neq 0$  в случае сохранения инвариантной меры невырожденные интегральные многообразия также должны являться трехмерными торами. В частности, для интегрируемости системы при  $\mathbf{a} = 0$  не хватает одного дополнительного первого интеграла, подобная ситуация возникает в неголомомных системах, рассматриваемых в работе [2].

### 3. Интегрируемый случай осевой симметрии

Будем полагать, что выполнены следующие условия:

1. центр масс системы совпадает с геометрическим центром оболочки, то есть

$$\mathbf{a} = 0;$$

2. оболочка и полость осесимметричны относительно одной и той же оси, а следовательно, в системе главных осей

$$\mathbf{I} = \text{diag}(I_1, I_1, I_3), \quad \mathbf{B} = \text{diag}(b_1, b_1, b_3);$$

3. квадрат момента системы относительно точки контакта равен нулю

$$M_1^2 + M_2^2 + M_3^2 = 0.$$

Очевидно, что последнее соотношение влечет за собой равенство нулю каждой компоненты вектора момента по отдельности:

$$M_1 = M_2 = M_3 = 0. \quad (3.1)$$

Ограничим уравнения движения на инвариантное многообразие, определенное соотношениями (3.1). Для этого выразим завихренность  $\boldsymbol{\xi}$  и момент завихренности  $\mathbf{K}$  по формулам

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\xi} &= -(\mathbf{B}')^{-1}(\mathbf{I}\boldsymbol{\omega} + D\boldsymbol{\gamma} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\gamma})), \quad D = mR^2, \\ \mathbf{K} &= \frac{\partial T}{\partial \boldsymbol{\xi}} = \mathbf{B}'\boldsymbol{\omega} - \mathbf{B}''(\mathbf{B}')^{-1}(\mathbf{I}\boldsymbol{\omega} + D\boldsymbol{\gamma} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\gamma})) \end{aligned}$$

и подставим в уравнения

$$\dot{\mathbf{K}} = \boldsymbol{\xi} \times \mathbf{K}, \quad \dot{\boldsymbol{\gamma}} = \boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\omega}. \quad (3.2)$$

Полученная система уравнений допускает векторное поле симметрий

$$\hat{\mathbf{v}}_s = \omega_2 \frac{\partial}{\partial \omega_1} - \omega_1 \frac{\partial}{\partial \omega_2} + \gamma_2 \frac{\partial}{\partial \gamma_1} - \gamma_1 \frac{\partial}{\partial \gamma_2}. \quad (3.3)$$

Выберем систему инвариантов (первых интегралов) этого векторного поля в форме  $\gamma_3, \gamma_3^2, K_3, K_n, \mathbf{K}^2$ , где

$$\begin{aligned} K_n &= J_n(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\gamma}), \\ J_n^2 &= I_1^c(I_1 - I_3^c) - I_3^c(I_1^c - I_3^c) - \frac{D(I_1^c(I_1 - I_3) - I_3^c(I_1^c - I_3^c))}{I_3 + D - I_3^c} \gamma_3^2; \end{aligned}$$

здесь  $I_1^c = \frac{m_c}{5}(b_1^2 + b_3^2)$ ,  $I_3^c = \frac{2}{5}m_c b_1^2$  — главные моменты инерции полости относительно ее центра.

ЗАМЕЧАНИЕ. Функция  $J_n(\boldsymbol{\gamma}_3)$  тождественно обращается в нуль лишь при условии

$$I_3 = I_3^c,$$

что возможно только в случае невесомой оболочки.



Уравнения движения в этих переменных приводятся к виду

$$\begin{aligned}(\gamma^2)^\cdot &= (\mathbf{K}^2)^\cdot = 0, \quad \dot{\gamma}_3 = \gamma_1\omega_2 - \omega_2\gamma_1, \\ \dot{K}_3 &= (\gamma_1\omega_2 - \omega_2\gamma_1)\frac{D}{J_n}K_n, \quad \dot{K}_n = (\gamma_1\omega_2 - \omega_2\gamma_1)\frac{\tilde{D}}{J_n}K_3, \\ \tilde{D} &= \frac{I_3^c J_1 J_3 + 2I_1^c I_3^c J_3 - I_1^c J_1 J_3 - (I_3^c)^2 (J_3 + J_1)}{I_3^c (J_3 - I_3^c)},\end{aligned}$$

где для краткости введено обозначение  $J_i = I_i + D$ .

Поделив последние два уравнения на  $\dot{\gamma}_3$ , получим систему

$$\frac{dK_3}{d\gamma_3} = \frac{D}{J_n(\gamma_3)}K_n, \quad \frac{dK_n}{d\gamma_3} = \frac{\tilde{D}}{J_n(\gamma_3)}K_3. \quad (3.4)$$

Константы интегрирования этих уравнений определяют пару линейных по угловой скорости первых интегралов исходной системы (3.2).

ЗАМЕЧАНИЕ. Уравнения (3.4) допускают простой квадратичный первый интеграл вида

$$F = DK_n^2 - \tilde{D}K_3^2.$$

Выражая интеграл энергии через функции  $\gamma_3$ ,  $\dot{\gamma}_3$ ,  $K_3$ ,  $K_n$ , получим

$$\begin{aligned}\mathcal{E} = \frac{4}{25}m_c b_1^2 b_3^2 (E - mgR) &= \frac{1}{2}(1 - \gamma_3^2)^{-1} \left[ J_1 (I_1^c (J_1 - I_3^c) - I_3^c (I_1^c - I_3^c)) \dot{\gamma}_3^2 + \right. \\ &+ \left( \frac{J_3 (2I_1^c - I_3^c)}{J_3 - I_3^c} (1 - \gamma_3^2) + \frac{J_1 (I_1^c (J_1 - I_3^c) - I_3^c (I_1^c - I_3^c))}{(J_3 - I_3^c)^2} \gamma_3^2 \right) K_3^2 + \\ &\left. + \left( J_1 - D(1 - \gamma_3^2) - \frac{DJ_1}{J_3 - I_3^c} \gamma_3^2 \right) K_n^2 + 2 \frac{J_1 \gamma_3 J_n(\gamma_3)}{J_3 - I_3^c} K_n K_3 \right].\end{aligned}$$

Подставляя сюда общее решение уравнений (3.4) и выражая из получившегося выражения  $\dot{\gamma}_3^2$ , получим гироскопическую функцию рассматриваемой системы.

ЗАМЕЧАНИЕ. В случае осевой симметрии уравнения движения общей системы (1.7), (1.8) также допускают поле симметрий, аналогичное (3.3), тем не менее уравнения (3.4) не обобщаются. Поэтому интегрируемость данной системы в общем случае остается открытой проблемой.

## Список литературы

- [1] Болсинов А. В., Борисов А. В., Мамаев И. С. Гамильтонизация неголономных систем в окрестности инвариантных многообразий // Нелинейная динамика, 2010, т. 6, № 4, с. 829–854.
- [2] Борисов А. В., Килин А. А., Мамаев И. С. Качение однородного шара по динамически несимметричной сфере // Нелинейная динамика, 2010, т. 6, № 4, с. 869–889.
- [3] Борисов А. В., Газизуллина Л. А., Мамаев И. С. О наследии В. А. Стеклова по классической механике // Нелинейная динамика, 2011, т. 7, № 2, с. 389–403.
- [4] Борисов А. В., Килин А. А., Мамаев И. С. Обобщение преобразования Чаплыгина и явное интегрирование шарового подвеса // Нелинейная динамика, 2011, т. 7, № 2, с. 313–338.



- [5] Борисов А. В., Мамаев И. С. Динамика твердого тела. М.–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. 384 с.
- [6] Жуковский Н. Е. О движении твердого тела, имеющего полости, наполненные однородною капельной жидкостью: I, II, III // Собр. соч.: Т. 1 / Н. Е. Жуковский. М.: ГИТТЛ, 1949. С. 31–152.
- [7] Карапетян А. В., Прокопина О. В. Об устойчивости равномерных вращений волчка с полостью, заполненной жидкостью, на плоскости с трением // ПММ, 2000, т. 64, № 1, с. 85–91.
- [8] Маркеев А. П. Об устойчивости вращения волчка с полостью, наполненной жидкостью // МГТ, 1985, № 3, с. 19–26.
- [9] Моисеев Н. Н., Румянцев В. В. Динамика твердого тела с полостями, содержащими жидкость. М.: Наука, 1965. 440 с.
- [10] Руденко Т. В. Об устойчивости стационарных движений гиростата с жидкостью в полости // ПММ, 2002, т. 66, № 2, с. 183–191.
- [11] Стеклов В. А. Работы по механике 1902–1909 гг.: Переводы с французского. М.–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Ижевский инст. компьютерн. исслед., 2011. 492 с.
- [12] Liu Y. Z. The stability of a fluid-filled top rotating on a horizontal plane // Arch. Appl. Mech., 1992, vol. 62, pp. 487–494.
- [13] Perry J. Spinning top and gyroscopic motions. New York: Dover, 1957. 102 pp. [Перри Дж. Вращающийся волчок. М.–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. 112 с.]
- [14] Poincaré H. Sur la précession des corps déformables // Bull. Astron., 1910, vol. 27, pp. 321–356; *см. также*: Пуанкаре А. Последние работы. Ижевск: РХД, 2001. С. 74–111.
- [15] Poincaré H. Sur la forme nouvelle des equations de la mecanique // C. R. Acad. Sci. Paris, 1901, vol. 132, pp. 369–371; *см. также*: Пуанкаре А. Последние работы. Ижевск: РХД, 2001. С. 72–73.
- [16] Rambaux N., Van Hoolst T., Dehant V., Bois E. Inertial core-mantle coupling and libration of Mercury // Astron. Astrophys., 2007, vol. 468, no. 2, pp. 711–719.
- [17] Stekloff V. A. Sur la théorie des tourbillons // Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (2), 1908, vol. 10, pp. 271–334 [Стеклов В. А. О теории вихрей // Работы по механике 1902–1909 гг.: Переводы с французского / В. А. Стеклов. М.–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Ижевский инст. компьютерн. исслед., 2011. С. 83–151].
- [18] Stekloff V. A. Sur le mouvement d'un corps solide ayant une cavité de forme ellipsoïdale remplie par un liquide incompressible et sur les variations des latitudes // Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (3), 1909, vol. 1, pp. 145–256 [Стеклов В. А. О движении твердого тела, имеющего полость эллипсоидальной формы, заполненную несжимаемой жидкостью, и об изменении широт // Работы по механике 1902–1909 гг.: Переводы с французского / В. А. Стеклов. М.–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Ижевский инст. компьютерн. исслед., 2011. С. 283–408].
- [19] Thompson S. Ph. The life of William Thomson, Baron Kelvin of Largs: Vol. 2. London: McMillan, 1910. Chap. 18: Gyrostatics and wave motion, pp. 736–752 [Томпсон С. Ф. Гиростаты и волновое движение (глава 18 книги «Жизнь лорда Кельвина») // Нелинейная динамика, 2012, т. 8, № 1, с. 149–153].
- [20] Thomson W. On the precessional motion of a liquid // Nature, 1877, vol. 15, pp. 297–298 [Томсон У. О прецессионном движении жидкости // Нелинейная динамика, 2012, т. 8, № 1, с. 155–159].
- [21] Volterra V. Sur la théorie des variations des latitudes // Acta. Math., 1899, vol. 22, pp. 201–358.

## The dynamics of the Chaplygin ball with a fluid-filled cavity

Alexey V. Borisov<sup>1</sup>, Ivan S. Mamaev<sup>2</sup>

<sup>1,2</sup>Institute of Computer Science,  
Udmurt State University  
Universitetskaya 1, Izhevsk, 426034 Russia  
<sup>1</sup>borisov@rcd.ru, <sup>2</sup>mamaev@rcd.ru





We consider the problem of rolling of a ball with an ellipsoidal cavity filled with an ideal fluid, which executes a uniform vortex motion, on an absolutely rough plane. We point out the case of existence of an invariant measure and show that there is a particular case of integrability under conditions of axial symmetry.

MSC 2010: 70E18, 76B47

Keywords: vortex motion, non-holonomic constraint, Chaplygin ball, invariant measure, integrability, rigid body, ideal fluid

Received November 25, 2011, accepted January 18, 2012

Citation: *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2012, vol. 8, no. 1, pp. 103–111 (Russian)