



УДК: 532.5.031
MSC 2010: 76B47

Динамика вихревых колец: чехарда, хореографии и проблема устойчивости

А. В. Борисов, А. А. Килин, И. С. Мамаев

В этой работе мы рассматриваем задачу о движении осесимметричных вихревых колец в идеальной несжимаемой жидкости. Используя топологический подход, мы указываем метод полного качественного анализа динамики в системе двух колец, и, в частности, мы полностью решаем проблему описания условий возникновения чехарды вихревых колец. Кроме того, в задаче двух вихревых колец найдены новые семейства движений, при которых взаимные расстояния остаются конечны, названные нами псевдоchехардой. В задаче трех вихревых колец также найдены решения, описывающие как регулярную, так и хаотическую чехарду колец.

Ключевые слова: идеальная жидкость, вихревое кольцо, чехарда вихревых колец, бифуркационный комплекс, периодическое решение, интегрируемость, хаотическая динамика

Памяти Х. Арефа и В. В. Мелешко

Получено 19 сентября 2011 года
После доработки 27 декабря 2011 года

Работа выполнена в ФГБОУ ВПО «УдГУ» в рамках гранта Правительства РФ для государственной поддержки научных исследований, проводимых под руководством ведущих ученых в российских образовательных учреждениях ВПО (дог. № 11.Г34.31.0039); ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России», мероприятие 1.1. «Научно-образовательный центр «Регулярная и хаотическая динамика» (ГК № 02.740.11.0195), мероприятие 1.5 «Топология и механика» (ГК № 14.740.11.0876). Работа поддержана грантом РФФИ 11-01-91056-НЦНИ_а.

Борисов Алексей Владимирович
borisov@rcd.ru

Килин Александр Александрович
aka@rcd.ru

Мамаев Иван Сергеевич
mamaev@rcd.ru

Институт компьютерных исследований
Удмуртский государственный университет
426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, д. 1

Содержание

| | |
|--|------------|
| Введение | 114 |
| 1. Уравнения движения вихревых колец | 116 |
| 1.1. Осесимметричные вихревые течения без закручивания | 116 |
| 1.2. Торoidalные вихревые кольца | 117 |
| 1.3. Интегралы движения и редукция по симметрии | 119 |
| 2. Два вихревых кольца | 121 |
| 2.1. Чехарда и проблема классификации движений | 121 |
| 2.2. Случай $\gamma > 0$ | 125 |
| 2.3. Случай $\gamma < 0, P > 0$ | 132 |
| 2.4. Случай $\gamma < 0, P \leq 0$ | 137 |
| 3. Три вихревых кольца | 141 |

Введение

В данной статье мы рассматриваем ряд вопросов, связанных с классической задачей о движении симметричных вихревых колец в идеальной жидкости. Задача о движении двух вихревых колец была впервые рассмотрена Г. Гельмгольцем в его знаменитой работе 1858 года [33], заложившей основы всей вихревой динамики. В частности, Гельмгольц качественно описал особенно интересный эффект — *чехарду вихревых колец*, то есть движение, при котором кольца движутся вдоль общей оси симметрии попеременно проходя друг сквозь друга. Однако, теоретического анализа данной задачи он не привел. У. М. Хикс [34–37] и Ф. Дайсон [27, 28] с различной степенью подробности исследовали динамику этой системы и указали ряд частных условий возникновения чехарды. Позднее С. А. Чаплыгин в примечаниях к русскому переводу работы Г. Гельмгольца также пытался объяснить явление чехарды вихревых колец и предложил собственный анализ этой проблемы [16].

Общая задача об описании движения двух осесимметричных вихрей и, в частности, их чехарды, рассматривалась в ряде работ (см. [8, 9, 14] и др.). Нужно отметить, что полученные в них результаты анализа этой системы, несмотря на ее интегрируемость, неполны.

Здесь мы пытаемся дать полный качественный анализ динамики системы двух колец, основываясь на топологическом подходе и понятии *бифуркационного комплекса*, и получить полное описание движения при различных начальных условиях и интенсивностях вихревых колец. Кроме классической чехарды мы указываем еще несколько семейств периодических решений приведенной системы, одному из которых соответствуют весьма экзотические движения, названные нами *псевдоchхардой*. Наш подход использует каноническую гамильтонову форму уравнений движения. В данном случае эта форма не столь фундаментальна, как в случае движения точечных вихрей на плоскости и сфере, так как добавляются члены, обусловленные действием вихря на самого себя, которые зависят от выбора модели распределения завихренности в кольце. Тем не менее, эти члены *не влияют* на гамильтоновость системы и на качественные закономерности движения. Заметим, что впервые гамильтонова форма уравнений движения кольцевых вихрей была получена Н. С. Васильевым [12] (хотя близкая форма уравнений использовалась еще Ф. Дайсоном [28]). Впоследствии гамильтоновость системы вихревых колец неоднократно переоткрывалась (см., например, [49, 50]).



Наряду с исследованием интегрируемой задачи двух вихревых колец в данной работе также рассмотрен вопрос о движении трех колец в идеальной жидкости, который существенно более сложен. Эта задача уже не является интегрируемой. Хаотические движения обсуждаются в работах [22, 39], где приведен ряд фазовых портретов и выполнено численное исследование развития хаотической динамики. Строгое доказательство неинтегрируемости задачи трех колец, использующее метод расщепления сепаратрис, было дано в [3, 19].

Для ограниченной задачи, когда вихревое кольцо бесконечно малой интенсивности движется в поле двух других, в работах [21, 23] выполнено более подробное исследование квазипериодических решений методами КАМ-теории. Однако вследствие сложной формы гамильтониана полное описание динамики этой системы до сих пор отсутствует (нетривиальным является даже построение сечения Пуанкаре на фиксированных уровнях гамильтониана). В настоящей работе мы пытаемся по возможности заполнить этот пробел и исследуем некоторый класс устойчивых периодических орбит (приведенной системы). Оказывается, что эти движения тесно связаны с проблемой, поставленной Дж. Максвеллом, который после выхода работы Г. Гельмгольца с описанием чехарды двух колец создал ряд анимаций, демонстрирующих движение колец почти одинаковой интенсивности. Наблюдая за движением трех колец, Дж. Максвелл указал на их совместную чехарду (см. его письмо У. Томсону [43]¹). Мы показываем, что для рассматриваемого движения в случае равных интенсивностей существует поступательно движущаяся система координат, связанная с центром завихренности колец, в которой вихри совершают периодическое движение вдоль одной и той же кривой. Напомним, что подобного рода движения в небесной механике были указаны в работах [26, 55], где они названы *хореографиями*. В вихревой динамике хореографии обнаружены в [6], здесь мы применяем методы этой работы к исследованию аналогичных вихревых колец.

Численный анализ показывает, что хореографии в задаче трех вихрей являются устойчивыми в достаточно большой области значений интеграла энергии и момента, следовательно, их можно наблюдать в эксперименте. Тем самым мы даем теоретическое обоснование наблюдения Максвелла. Численный анализ также показывает, что устойчивая чехарда трех вихревых колец может наблюдаться и при неравных интенсивностях вихрей, а кроме того, существуют весьма экзотические движения трех колец, названные нами *хаотической чехардой*. В будущем интересно было бы наблюдать существование подобных движений экспериментально.

В заключение отметим, что помимо классической модели вихревых колец (которую мы рассматриваем в этой работе) существует более общее решение уравнений гидродинамики, найденное У. М. Хиксом [37] и описывающее осесимметричные спиральные «вихревые агрегаты». Оно отличается тем, что при этом допускается «закрутка» (swirl) вокруг оси симметрии. Некоторые из результатов Хикса впоследствии неоднократно переоткрывались, с историей этого вопроса и подробной библиографией можно ознакомиться по работе [57]; в настоящей работе модель спирального вихря Хикса обобщается на случай взаимодействия с торроидальным магнитным полем. В работе [20] исследуется ограниченная задача о динамике вихревого кольца в потоке с закруткой в связи с проблемой разрушения вихря (vortex breakdown). Отметим, что данная модель является более сложной и для нее до сих пор не получено полное описание даже задачи двух колец и не найдены условия чехарды.

Помимо этого известна еще одна модель трехмерной вихревой особенности — вортон [15]; она также может применяться для описания вихревых колец и более сложных

¹Перевод письма Дж. Максвелла У. Томсону приводится в этом номере на с. 161–165.

замкнутых вихревых структур в трехмерном пространстве. Уравнения для вихревых структур не обладают инвариантной мерой и не сохраняют интеграл энергии. Численное моделирование при помощи модели вихревых структур взаимодействия осесимметричных вихревых структур выполнено в работе [13]; показано, что при достаточно большом количестве вихревых структур эта модель может быть использована для изучения динамики вихревых колец.

Отметим также, что как стандартная модель вихревых структур (которую мы исследуем в этой статье), так и вихревая и другие модели в отличие от точечных вихрей на плоскости не являются слабым решением уравнений гидродинамики и основываются при выводе на дополнительных физических допущениях. Хотя эти модели не столь фундаментальны, они дают приемлемое описание качественных закономерностей, наблюдаемых в эксперименте.

Приведем неполный список работ, в которых обсуждаются другие вопросы, связанные с динамикой вихревых колец:

- [11, 41, 42] — поведение бесконечной системы колец,
- [31, 48, 51, 58] — существование и устойчивость решений,
- [45, 54] — экспериментальные исследования.

1. Уравнения движения вихревых колец

1.1. Осесимметричные вихревые течения без закручивания

Прежде всего напомним основные гидродинамические уравнения для осесимметричных незакрученных течений [2, 40, 53]. Направим ось Oz вдоль оси симметрии потока и выберем цилиндрические координаты z, r, φ , при этом скорость и завихренность течения представляются в виде

$$\mathbf{v} = v_z(z, r)\mathbf{e}_z + v_r(z, r)\mathbf{e}_r, \quad \boldsymbol{\omega} = \omega(z, r)\mathbf{e}_\varphi,$$

$$\omega = \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial r}.$$

Здесь и далее зависимость функций от времени для краткости не указывается. (Условие отсутствия закручивания течения приводит к тому, что $v_\varphi = 0, \omega_z = 0$.) При этом, как известно, в случае несжимаемой жидкости (то есть при условии $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$) скорость может быть выражена через функцию тока по формулам

$$v_z = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi(z, r)}{\partial r}, \quad v_r = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi(z, r)}{\partial z}.$$

Система гидродинамических уравнений, описывающих вихревые осесимметричные течения несжимаемой жидкости, может быть представлена с помощью функций ψ и ω в следующей форме:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial \omega}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial \omega}{\partial z} = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial r} \omega,$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = -\omega. \quad (1.1)$$

Решение второго уравнения этой системы при помощи функции Грина представляется в виде

$$\psi(z, r) = \int G(z, r, \tilde{z}, \tilde{r}) \omega(\tilde{z}, \tilde{r}) d\tilde{z} d\tilde{r}. \quad (1.2)$$



$G(z, r, \tilde{z}, \tilde{r})$ — функция тока бесконечно тонкой круговой вихревой нити единичной интенсивности (завихренность которой имеет вид $\omega = \delta(z - \tilde{z})\delta(r - \tilde{r})$) задается соотношением

$$G(z, r, \tilde{z}, \tilde{r}) = \frac{\sqrt{r\tilde{r}}}{2\pi} \left(\left(\frac{2}{k} - k \right) K(k) - \frac{2}{k} E(k) \right), \quad k = \left(\frac{4r\tilde{r}}{(z - \tilde{z})^2 + (r + \tilde{r})^2} \right)^{1/2}, \quad (1.3)$$

где $K(k)$ и $E(k)$ — полные эллиптические интегралы первого и второго рода:

$$K(k) = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-k^2x^2}}, \quad E(k) = \int_0^1 \frac{\sqrt{1-k^2x^2}}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

Впервые выражение для функции тока бесконечно тонкого вихревого кольца в несколько иной форме было получено Дж. Максвеллом в 1893 году [44].

Используя уравнения (1.1), можно показать, что осесимметричный вихревой поток с функцией тока (1.2) обладает тремя сохраняющимися величинами

$$\begin{aligned} \Gamma &= \int_S \omega(z, r) dz dr, & P &= \pi \int_S \omega(z, r) r^2 dz dr, \\ E &= \pi \int_S \psi(z, r) \omega(z, r) dz dr, \end{aligned} \quad (1.4)$$

где Γ — полная циркуляция скорости вихревого потока, P — величина импульса вихревого потока [53], а E — его кинетическая энергия (здесь S — сечение области, заполненной жидкостью).

1.2. Тороидальные вихревые кольца

Как хорошо известно, в случае плоскопараллельных течений уравнения вихревого движения допускают «сингулярное решение», описывающее движение точечных вихрей на плоскости. Естественно предположить, что система (1.1) также допускает решение вида

$$\omega = \sum_{i=1}^N \Gamma_i \delta(z - Z_i(t)) \delta(r - R_i(t)), \quad (1.5)$$

где $\delta(x)$ — дельта-функция Дирака, которая описывает суперпозицию соосных «точечных» вихревых колец с цилиндрическими координатами Z_i, R_i . При этом, вследствие теоремы Гельмгольца о переносе вихревых нитей, функции $R_i(t), Z_i(t)$ должны удовлетворять уравнениям вида

$$\begin{aligned} \dot{R}_i(t) &= v_r(z, r) \Big|_{z=Z_i}^{r=R_i} = -\frac{1}{R_i} \frac{\partial}{\partial Z_i} \sum_{j \neq i} \Gamma_j G(R_i, Z_i, R_j, Z_j), \\ \dot{Z}_i(t) &= v_z(z, r) \Big|_{z=Z_i}^{r=R_i} = \frac{1}{R_i} \frac{\partial}{\partial R_i} \left(\sum_{j \neq i} \Gamma_j G(R_i, Z_i, R_j, Z_j) \right) + V_z^{(0)}(Z_i, R_i). \end{aligned} \quad (1.6)$$

Здесь $V_z^{(0)}(Z_i, R_i)$ описывает самопродвижение вихря, то есть скорость вихревой нити, наведенную самой нитью при отсутствии других вихрей. Как известно, в случае плоскости $V_z^{(0)} = 0$, а в осесимметричном случае $V_z^{(0)} = \infty$ (что объясняется ненулевой кривизной нити [10]).

Таким образом, сингулярных решений вида (1.5) для осесимметричных вихревых течений (1.1) не существует, поэтому для описания взаимодействия вихревых колец в идеальной жидкости используют, как правило, модель тонких тороидальных вихревых колец. В этой модели каждое кольцо представляет собой правильный тор с круговым сечением радиуса a_i , центр которого удален от оси симметрии на расстояние R_i (см. рис. 1), где $a_i \ll R_i$. При этом всюду вне тора завихренность предполагается равной нулю, а внутри тора распределение завихренности зависит лишь от расстояния s до центра поперечного сечения тора $\omega = \omega(s)$ (рис. 1).

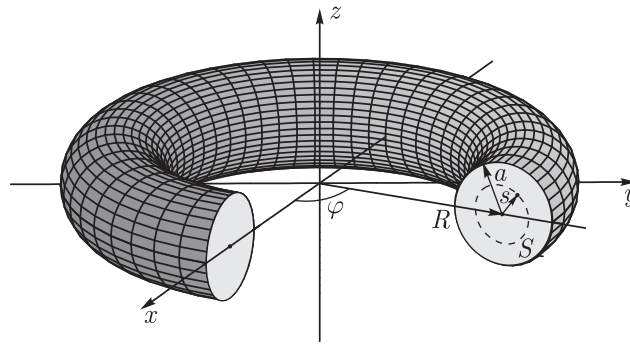


Рис. 1. Вихревое кольцо радиуса R с радиусом поперечного сечения a .

ЗАМЕЧАНИЕ. Более сложные модели вихревых колец, удовлетворяющие дополнительным ограничениям на вид потока, приводятся в работах [28–30, 37]. Известный вихрь Хилла [38, 40] также является частным случаем вихревого кольца, удовлетворяющего требованию стационарности.

Существует несколько моделей тонких вихревых колец (например, однородное кольцо, полое вихревое кольцо и др.), отличающихся друг от друга распределением завихренности $\omega(s)$. Все они характеризуются приблизительно постоянной скоростью самопродвижения вдоль оси Oz без заметного изменения формы [40]. Не останавливаясь подробно на каждом из них, приведем общую формулу скорости самопродвижения тонких тороидальных вихревых колец, полученную Ф. Сэффманом [52, 53]:

$$V_z^{(0)} = \frac{\Gamma}{4\pi R} \left(\ln \frac{8R}{a} - \frac{1}{2} + \Delta(a) \right), \quad \Delta(a) = \frac{1}{\Gamma^2} \int_0^a \frac{\gamma^2(s)}{s} ds, \quad (1.7)$$

где a — радиус поперечного сечения кольца ($a \ll R$), R — радиус кольца, $\gamma(s) = 2\pi \int_0^s \omega(s')s' ds'$ — циркуляция скорости вокруг центральной части вихревого кольца радиуса s , а $\omega(s)$ — распределение завихренности поперечного сечения. В случае полого вихревого кольца завихренность внутри кольца отсутствует, поэтому $\Delta = 0$ и (1.7) совпадает с формулой Хикса [34, 35]. В случае равномерного распределения завихренности внутри кольца $\Delta = \frac{1}{4}$ и (1.7) совпадает с формулой для скорости, полученной лордом Кельвином [59].

ЗАМЕЧАНИЕ. Более общее выражение для скорости самопродвижения кольца в сжимаемой жидкости при произвольном распределении завихренности по сечению было получено в работе [17].

При взаимодействии нескольких колец в процессе движения их радиусы и толщины становятся переменными, однако (вследствие теоремы Гельмгольца о циркуляции и несжи-

маемости жидкости) для каждого кольца выполняется соотношение

$$R_i a_i^2 = B_i^2 = \text{const}, \quad (1.8)$$

где B_i — константы, характеризующие объемы колец. Будем считать, что все время движения вихри остаются тонкими ($a_i \ll R_i$) и находятся достаточно далеко друг от друга, чтобы не влиять на тороидальность формы и распределение завихренности внутри колец. Тогда в первом приближении по $\frac{a}{R}$ вихревые кольца будут взаимодействовать как бесконечно тонкие вихревые нити (1.5), а их скорости согласно (1.6) и (1.7) могут быть представлены в виде

$$\begin{aligned} \dot{R}_i &= -\frac{1}{R_i} \frac{\partial}{\partial Z_i} \sum_{j \neq i} \Gamma_j G(R_i, Z_i, R_j, Z_j), \\ \dot{Z}_i &= \frac{1}{R_i} \frac{\partial}{\partial R_i} \left(\sum_{j \neq i} \Gamma_j G(R_i, Z_i, R_j, Z_j) \right) + \frac{\Gamma_i}{4\pi R_i} \left(\ln \frac{8R_i}{a_i} - \frac{1}{2} - \Delta(a_i) \right), \end{aligned} \quad (1.9)$$

где G задана формулой (1.3). Более подробный вывод уравнений движения колец можно найти, например, в [2].

Наиболее полные результаты получены для динамики однородных вихревых колец, поэтому всюду в дальнейшем мы ограничимся этим случаем, полагая

$$\Delta = \frac{1}{4}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Для других моделей вихревых колец с соответствующей $\Delta(a)$ несложно получить аналогичные результаты.

Уравнения движения (1.9) можно представить в гамильтоновой форме

$$\dot{Z}_i = \{Z_i, H\} = \frac{1}{\Gamma_i R_i} \frac{\partial H}{\partial R_i}, \quad \dot{R}_i = \{R_i, H\} = -\frac{1}{\Gamma_i R_i} \frac{\partial H}{\partial Z_i},$$

где скобка Пуассона координат Z_i, R_i удовлетворяет соотношениям

$$\{Z_i, R_j\} = \frac{\delta_{ij}}{\Gamma_i R_i}, \quad \{Z_i, Z_j\} = \{R_i, R_j\} = 0,$$

а гамильтониан записывается в виде

$$H = \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^N \Gamma_i^2 R_i \left(\ln \frac{8R_i^{3/2}}{B_i} - \frac{7}{4} \right) + \sum_{i \neq j} \Gamma_i \Gamma_j G(R_i, Z_i; R_j, Z_j). \quad (1.10)$$

Впервые в гамильтоновой форме уравнения движения кольцевых вихрей были представлены в работе [12].

1.3. Интегралы движения и редукция по симметрии

В общем случае уравнения (1.9) помимо гамильтониана обладают еще одним первым интегралом движения

$$P = \sum_{i=1}^N \Gamma_i R_i^2, \quad (1.11)$$



который с точностью до постоянного множителя совпадает со вторым интегралом в (1.4). Существование этого интеграла обусловлено инвариантностью рассматриваемой системы относительно параллельных переносов вдоль оси Oz , при этом гамильтониан (1.10) зависит только от разностей $(Z_i - Z_j)$. Эту симметрию можно также использовать для проведения редукции системы на одну степень свободы.

Редукцию можно выполнить различными способами. Здесь мы опишем метод, близкий к методу Якоби (см., например, [18]) в небесномеханической задаче N тел, причем ограничимся случаем $\sum_{i=1}^N \Gamma_i \neq 0$. Для этого определим центр завихренности всей системы колец на оси Oz

$$\xi_0 = \frac{\sum_{i=1}^N \Gamma_i Z_i}{\sum_{i=1}^N \Gamma_i}, \quad (1.12)$$

а вместо координат Z_i введем координаты центров завихренности групп вихрей

$$\xi_i = Z_{i+1} - \frac{\sum_{j=1}^i \Gamma_j Z_j}{\sum_{j=1}^i \Gamma_j}, \quad i = 1 \dots N-1, \quad (1.13)$$

определяющие (хотя и не непосредственно) положения вихревых колец на оси Oz относительно центра завихренности.

Дополним переменные ξ_i канонически сопряженными им переменными η_i (т. е. $\{\xi_i, \eta_j\} = \delta_{ij}$), которые задаются соотношениями

$$\eta_i = \left(R_{i+1}^2 - \frac{\sum_{j=1}^i \Gamma_j R_j^2}{\sum_{j=1}^i \Gamma_j} \right) \Gamma_{i+1} \frac{\sum_{j=1}^i \Gamma_j}{\sum_{j=1}^{i+1} \Gamma_j}. \quad (1.14)$$

Для краткости обозначим $\mathbf{Z} = (Z_1, \dots, Z_N)$, $\mathbf{R} = (R_1, \dots, R_N)$, $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_{N-1})$, $\boldsymbol{\eta} = (\eta_1, \dots, \eta_{N-1})$. Прямым вычислением можно показать, что преобразование $(\mathbf{Z}, \mathbf{R}) \rightarrow (\boldsymbol{\xi}, \xi_0, \boldsymbol{\eta}, P)$ обратимо, и справедливо

Предложение 9. Уравнения движения приведенной системы имеют канонический вид

$$\dot{\xi}_i = \frac{\partial H}{\partial \eta_i}, \quad \dot{\eta}_i = -\frac{\partial H}{\partial \xi_i}, \quad i = 1 \dots N-1, \quad (1.15)$$

где гамильтониан $H = H(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, P)$ параметрически зависит от значения первого интеграла (1.11).

По заданному закону движения редуцированной системы $\boldsymbol{\xi}(t)$, $\boldsymbol{\eta}(t)$ динамика полной системы восстанавливается с помощью дополнительной квадратуры

$$\dot{\xi}_0 = \frac{\partial H}{\partial P}. \quad (1.16)$$

Заметим, что, в отличие от небесномеханической задачи, в данном случае центр завихренности движется неравномерно: его скорость зависит от конкретной траектории и задается соотношением (1.16). Аналогичное преобразование используется в задаче N точечных вихрей на плоскости и сфере для редукции по симметрии [24].

Как следует из соотношений (1.13), (1.14) приведенная система (1.15) фактически описывает движение в системе координат, связанной с центром завихренности. В связи с этим



для периодических решений приведенной системы (1.15) можно привести интересную геометрическую интерпретацию абсолютного движения, основанную на понятии *хореографии*, введенном К. Муром, А. Шенсине и К. Симо [26, 47, 55] для задачи N тел в небесной механике (для случая точечных вихрей на плоскости хореографии указаны в работе [6]).

Предложение 10. Пусть $(\xi(t), \eta(t))$ — периодическое решение приведенной системы (1.15) с периодом T , тогда в подвижной системе координат, связанной с центром завихренности (1.12), вихревые кольца движутся по замкнутым траекториям (в общем случае различным) с периодом T .

Таким образом, периодические решения приведенной системы соответствуют относительным хореографиям вихревых колец [6, 55].

Доказательство. Для доказательства предложения достаточно показать, что координаты вихревых колец в подвижной системе координат $Z'_i = Z_i - \xi_0$ и R_i являются периодическими функциями времени с периодом T . Для этого представим Z'_i в виде

$$Z'_i = \sum_{j=1}^N \Gamma_j (Z_i - Z_j) \bigg/ \sum_{j=1}^N \Gamma_j, \quad (1.17)$$

где все взаимные расстояния $Z_i - Z_j$ выражаются через переменные Якоби ξ . Таким образом, координаты Z'_i ($i = 1 \dots N$) зависят только от переменных приведенной системы и являются периодическими функциями времени с периодом T . Согласно (1.11), (1.14), при фиксированном значении интеграла $P = P_0 = \text{const}$, все координаты R_i выражаются через координаты приведенной системы η и величину P_0 и, следовательно, также являются периодическими функциями времени с периодом T . Таким образом, на плоскости переменных (Z', R) все вихревые кольца движутся по замкнутым траекториям (в общем случае различным), причем с одним и тем же периодом T . ■

2. Два вихревых кольца

2.1. Чехарда и проблема классификации движений

Рассмотрим задачу о движении двух вихревых колец. Впервые данная задача была исследована Гельмгольцем в [33], где он указал на существование явления *чехарды* вихревых колец. В дальнейшем более подробно эту задачу исследовали Хикс [36], Гребли [32], Дайсон [27] и другие, более подробную библиографию можно найти в [46]. Критерий возникновения чехарды в случае двух вихревых колец одного знака и одинакового объема был указан Хиксом; этот критерий можно сформулировать следующим образом:

пусть в начальный момент вихри располагаются в одной плоскости и отношение их радиусов равно $\Theta = R_1/R_2$, тогда имеется критическое значение Θ_0 , такое, что при $\Theta > \Theta_0$ возникает чехарда, в противном случае вихри разлетаются неограниченно; этому критическому значению Θ_0 соответствует движение, при котором вихри на бесконечности имеют одинаковые скорости.

Для завихренностей разных знаков методика определения критерия чехарды, предложенная Хиксом, становится неприменимой; детальный анализ условий возникновения чехарды в зависимости от значений первых интегралов мы приводим ниже и указываем

соответствующие критерии. Кроме того, при завихренностях одного знака критерий Хикса также нарушается при недостаточно больших значениях P . Мы приведем достаточно подробную классификацию движений двух вихревых колец в зависимости от значений первых интегралов системы. Сформулированное Хиксом утверждение позднее было использовано для определения условия существования чехарды в случае колец неравного объема [14, 46]. Там же были частично классифицированы движения системы двух вихревых колец в зависимости от начальных условий приведенной системы.

Сделаем замену переменных

$$p_1 = R_1^2, \quad p_2 = R_2^2$$

и подберем единицы измерения и нумерацию колец таким образом, что

$$\Gamma_1 = 1, \quad B_1 = 1, \quad \Gamma_2 = \gamma \in (-1, 1], \quad B_2 = \beta \in (0, \infty).$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Случай $\gamma = -1$ соответствует тому, что $\sum \Gamma_i = 0$, поэтому редукция, описанная выше, неприменима.

В результате представим гамильтониан системы двух вихревых колец в виде

$$H = \frac{1}{2\pi} p_1^{1/2} \left(\ln \left(8p_1^{3/4} \right) - \frac{7}{4} \right) + \frac{1}{2\pi} \gamma^2 p_2^{1/2} \left(\ln \left(\frac{8p_2^{3/4}}{\beta} \right) - \frac{7}{4} \right) + \frac{1}{\pi} \gamma p_1^{1/4} p_2^{1/4} C(k), \quad (2.1)$$

$$C(k) = \left(\frac{2}{k} - k \right) K(k) - \frac{2}{k} E(k), \quad k = \frac{4p_1^{1/2} p_2^{1/2}}{(p_1^{1/2} + p_2^{1/2})^2 + (Z_1 - Z_2)^2}.$$

Интеграл P при этом принимает вид

$$P = p_1 + \gamma p_2. \quad (2.2)$$

Используя соотношения (1.13), (1.14), определим новые переменные ξ и η , такие, что p_1, p_2, Z_1, Z_2 выражаются через них следующим образом:

$$p_1 = \frac{P}{1+\gamma} - \eta, \quad p_2 = \frac{P}{1+\gamma} + \frac{\eta}{\gamma}, \quad Z_2 - Z_1 = \xi. \quad (2.3)$$

Здесь ξ определена на всей числовой прямой и имеет смысл расстояния между кольцами, измеряемое вдоль общей оси. При фиксированном значении интеграла P величина η изменяется в следующих пределах:

$$-\frac{\gamma P}{1+\gamma} \leq \eta \leq \frac{P}{1+\gamma}, \quad \text{при } \gamma > 0,$$

$$\eta \leq \frac{-\gamma P}{1+\gamma}, \quad \text{при } \gamma < 0 \text{ и } P > 0,$$

$$\eta \leq \frac{P}{1+\gamma}, \quad \text{при } \gamma < 0 \text{ и } P < 0,$$

причем η пропорционально разности квадратов радиусов колец.

Подставляя эти переменные в (2.1), получим гамильтонову систему с одной степенью свободы, уравнения движений которой представляются в канонической форме

$$\dot{\xi} = \frac{\partial H(\xi, \eta, P)}{\partial \eta}, \quad \dot{\eta} = -\frac{\partial H(\xi, \eta, P)}{\partial \xi}, \quad (2.4)$$

а гамильтониан параметрически зависит от величин γ , β и значения интеграла P (то есть (2.4) представляет собой трехпараметрическое семейство одностепенных систем). Характерный вид фазовых портретов приведенной системы при различных γ и β изображен на рисунке 2. Точками на рисунках обозначены положения равновесия приведенной системы. Пустыми кружочками (на краях фазовых портретов) условно обозначены бесконечно удаленные положения равновесия, которые мы опишем ниже, а жирными линиями — неустойчивые инвариантные многообразия (сепаратрисы).

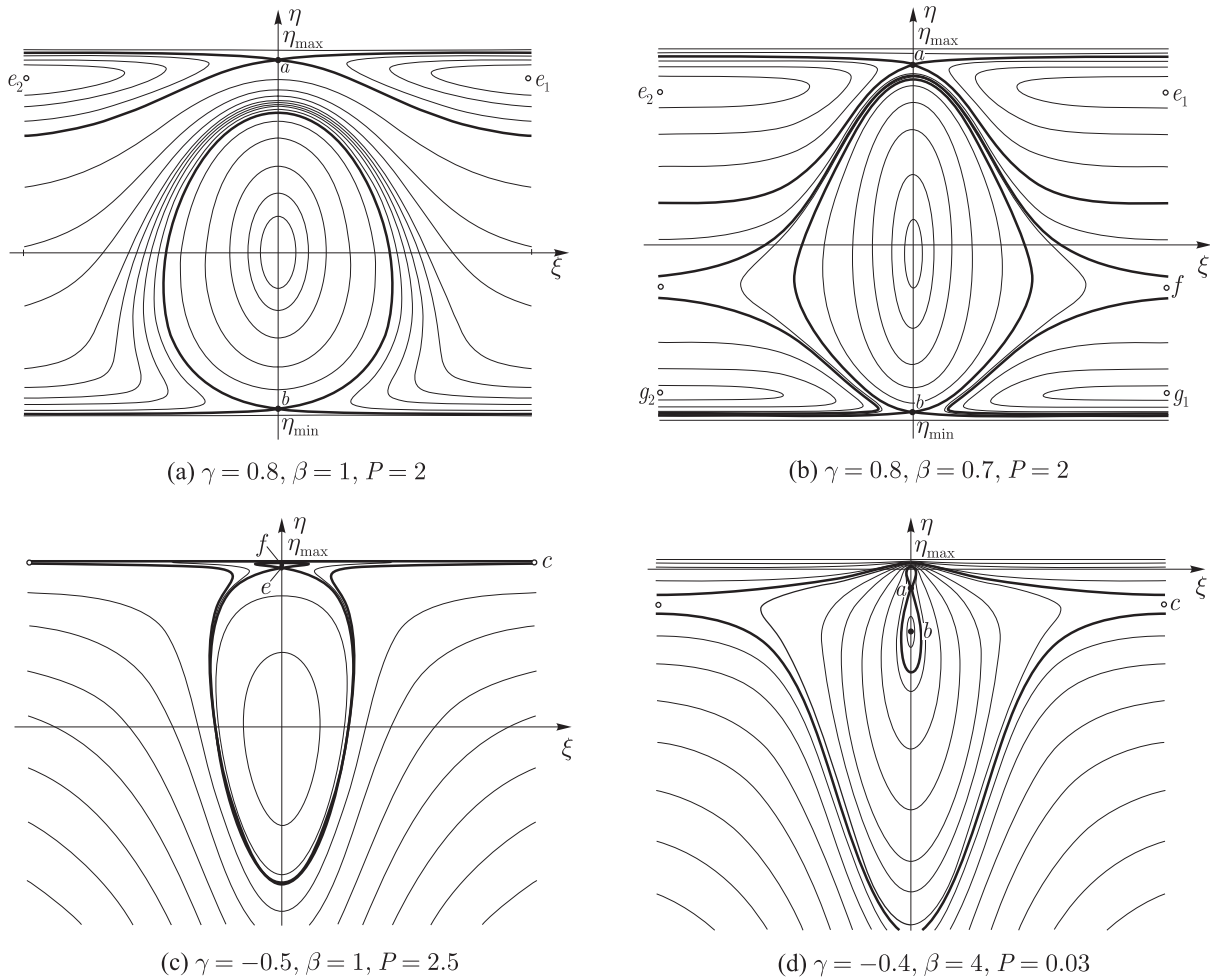


Рис. 2. Характерный вид фазовых портретов приведенной системы двух вихревых колец при различных значениях параметров.

Вследствие интегрируемости системы двух вихревых колец для классификации типов движения в зависимости от значений первых интегралов H, P воспользуемся подходом, развитым в работе [4]. Этот подход основывается на анализе бифуркационной диаграммы системы, при помощи которой строится бифуркационный комплекс, являющийся одним из простейших топологических инвариантов системы [5]. В данном случае различным листам комплекса соответствуют разные типы движения вихрей.

Напомним, что в бифуркационном комплексе каждой области на бифуркационной диаграмме ставится в соответствие такое количество различных листов, каково число несвязанных между собой инвариантных многообразий (в компактном случае торов), которые отве-



чают значениям первых интегралов, принадлежащих данной области. Эти листы склеиваются друг с другом по соответствующим бифуркационным кривым. Грубо говоря, бифуркационный комплекс аналогичен поверхности Римана аналитической функции комплексного переменного. Используя этот комплекс, можно получить достаточно естественную классификацию возможных движений двух вихревых колец.

Вследствие некомпактности движения в данном случае оказывается удобнее исследовать приведенную систему с одной степенью свободы, зависящую от значения интеграла P как от параметра. Далее для иллюстрации метода ограничимся анализом при условии равных объемов вихревых колец $\beta = 1$, в общем случае $\beta \neq 1$ картина качественно не изменяется.

Для построения бифуркационного комплекса в данном случае необходимо рассмотреть:

- *неподвижные точки приведенной системы*, которые являются критическими точками гамильтониана $H(\xi, \eta)$ и определяются из системы уравнений

$$\frac{\partial H}{\partial \eta} = 0, \quad \frac{\partial H}{\partial \xi} = 0, \quad (2.5)$$

- *сингулярности системы*, которые соответствуют точкам, где либо радиус одного из вихрей стремится к нулю, либо вихри сливаются и $H(\xi, \eta) \rightarrow \infty$,
- *особенности системы на бесконечности*.

Отметим, что в работе [4] был рассмотрен лишь компактный случай; вследствие некомпактности интегральных многообразий исследуемой системы необходимо рассматривать сингулярности и поведение траекторий на бесконечности и обобщить соответствующим образом определение бифуркационного комплекса. В качестве примера бифуркационного анализа в некомпактном случае можно привести работу В. М. Алексеева [1], в которой он строит бифуркационные диаграммы для задачи двух неподвижных центров. Мы будем использовать подход, основанный на понятии *бесконечно удаленного положения равновесия* как точки с координатами $(\pm\infty, \eta^*)$, для которой выполняются стандартные условия равенства нулю первых производных гамильтониана:

$$\left. \frac{\partial H}{\partial \xi} \right|_{\eta=\eta^*, \xi \rightarrow \pm\infty} = \left. \frac{\partial H}{\partial \eta} \right|_{\eta=\eta^*, \xi \rightarrow \pm\infty} = 0.$$

Физически этим «положениям равновесия» соответствуют такие движения, при которых вихревые кольца движутся с постоянными скоростями и расположены настолько далеко друг от друга, что их взаимодействием можно пренебречь. Для проведения бифуркационного анализа в этом подходе необходимо расширить понятие связной компоненты уровня первых интегралов (листа бифуркационного комплекса) следующим образом:

две траектории принадлежат одной и той же компоненте связности уровня первых интегралов (лежат на одном и том же листе бифуркационного комплекса), если их сколь угодно малые окрестности пересекаются при движении вдоль фазового потока.

Такое обобщение необходимо для того, чтобы траектории, асимптотические к неустойчивым бесконечно удаленным положениям равновесия (сепаратрисы), принадлежали тому же листу бифуркационного комплекса, что и само положение равновесия (хотя формально они и не пересекаются).



Построим бифуркационные диаграммы на плоскости первых интегралов (P, H) и соответствующие им бифуркационные комплексы. Можно показать, что выделяются три случая, которые качественно отличаются друг от друга:

- 1) $\gamma > 0$,
- 2) $\gamma < 0, P > 0$,
- 3) $\gamma < 0, P \leq 0$.

2.2. Случай $\gamma > 0$

Бифуркационный комплекс

Согласно (2.2), при $\gamma > 0$ величина интеграла импульса изменяется в интервале

$$P \in (0, +\infty).$$

Как будет показано ниже, возможные значения гамильтониана принадлежат интервалу

$$H \in (H_{\min}(P), +\infty),$$

где $H_{\min}(P)$ — минимальное значение гамильтониана при фиксированном значении P .

Неподвижные точки приведенной системы. Им соответствуют такие движения вихревых колец, при которых их размеры и взаимное положение сохраняются. При этом кольца движутся вдоль общей оси как одно целое с постоянной скоростью, задаваемой соотношением (1.16). Как уже отмечалось выше, для нахождения неподвижных точек необходимо подробно исследовать критические точки гамильтониана $H(\xi, \eta)$ при различных значениях величин γ, P . Характерный пример зависимости $H(\xi, \eta)$ при заданных γ и P , соответствующий фазовому портрету на рисунке 2а, приведен на рисунке 3.

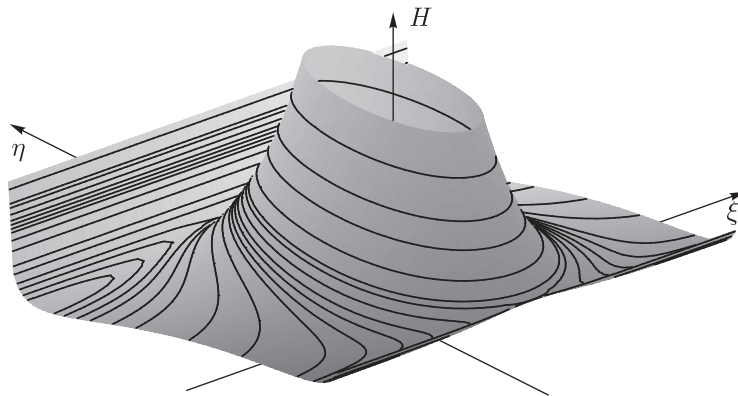


Рис. 3. Поверхность $H(\xi, \eta)$ при $\gamma = 0.8, P = 2$.

Используя соотношения (2.1), (2.3), можно показать, что гамильтониан (2.1) является четной функцией по ξ (то есть $H(\eta, \xi) = H(\eta, -\xi)$), которая при каждом фиксированном η монотонно убывает на промежутке $\xi \in (0, \infty)$. Таким образом, все неподвижные точки приведенной системы лежат на оси $\xi = 0$, а их координаты на этой оси определяются из уравнения

$$\left. \frac{\partial H}{\partial \eta} \right|_{\xi=0} = 0. \tag{2.6}$$

Анализируя асимптотики функции $f(\eta) = H(\eta, 0)$ и знак ее вторых производных $f''(\eta)$, нетрудно показать, что при $\gamma > 0$ уравнение (2.6) всегда имеет два решения $\eta_a > 0$ и $\eta_b < 0$, соответствующие неподвижным точкам a и b на рисунке 2, причем обе точки являются неустойчивыми. Двум семействам неподвижных точек a и b при изменении величины интеграла P на плоскости первых интегралов (P, H) соответствуют бифуркационные кривые $\sigma_a: H_a(P)$ и $\sigma_b: H_b(P)$ (см. рис. 5).

Сингулярности в рассматриваемой задаче возникают, когда радиус одного из вихрей стремится к нулю. Этим случаям соответствуют прямые $\eta = \eta_{\min} = -\frac{\gamma P}{1+\gamma}$ ($p_2 = 0$) и $\eta = \eta_{\max} = \frac{P}{1+\gamma}$ ($p_1 = 0$), ограничивающие фазовый портрет сверху и снизу (см. рис. 2). На бифуркационной диаграмме этим сингулярностям соответствуют кривые, задаваемые соотношениями

$$\begin{aligned}\sigma_c: H_c(P) &= H(\xi, \eta_{\max}) = \frac{1}{2\pi} \gamma^{3/2} P^{1/2} \left(\ln 8 \left(\frac{P}{\gamma} \right)^{3/4} - \frac{7}{4} \right), \\ \sigma_d: H_d(P) &= H(\xi, \eta_{\min}) = \frac{1}{2\pi} P^{1/2} \left(\ln 8 P^{3/4} - \frac{7}{4} \right).\end{aligned}\quad (2.7)$$

Еще одной сингулярностью системы является случай слияния двух колец. На фазовом портрете ему соответствует точка $\xi = 0, \eta = 0$ (см. рис. 2, 6), в которой энергия $H(\xi, \eta) \rightarrow +\infty$. Таким образом, область возможных движений на плоскости первых интегралов не ограничена сверху по энергии.

Особенности приведенной системы на бесконечности ($\xi \rightarrow \pm\infty$). Для корректного описания некомпактных бифуркаций, соответствующих перестройкам фазового портрета на бесконечности, будем использовать подход, описанный выше.

ЗАМЕЧАНИЕ. В некоторых случаях для описания поведения траекторий на бесконечности можно использовать компактификацию фазового пространства [25], но в данном случае это приводит к нефизическому отождествлению траекторий, соответствующих совершенно различным движениям.

Найдем сначала координаты бесконечно удаленных неподвижных точек (положений равновесия) как экстремумы функции

$$H_\infty(\eta) = \lim_{\xi \rightarrow \infty} H(\xi, \eta) = \frac{1}{2\pi} p_1^{1/2} \left(\ln 8 p_1^{3/4} - \frac{7}{4} \right) + \frac{1}{2\pi} \gamma^2 p_2^{1/2} \left(\ln 8 p_2^{3/4} - \frac{7}{4} \right). \quad (2.8)$$

Используя уравнения движения (1.6), нетрудно показать, что

$$\frac{\partial H_\infty}{\partial \eta} = V_2 - V_1 = 0, \quad (2.9)$$

где V_2 и V_1 — скорости вихревых колец на бесконечности, направленные вдоль общей оси симметрии.

ЗАМЕЧАНИЕ. Упомянутый ранее критерий чехарды Хикса о равенстве скоростей вихревых колец на бесконечности — это, в сущности, условие критичности предельных траекторий системы. Определенные бесконечно удаленные критические точки также задают границу области чехарды при произвольных интенсивностях (то есть $\gamma \neq 1$) и объемах колец ($\beta \neq 1$).

Можно показать, что при P , не достигающем некоторого критического значения P^{crit} , функция $H_\infty(\eta)$ имеет один экстремум (минимум), а при $P > P^{\text{crit}}$ — три экстремума. Значение P^{crit} определяется из системы уравнений

$$\frac{\partial H_\infty}{\partial \eta} = 0, \quad \frac{\partial^2 H_\infty}{\partial \eta^2} = 0. \tag{2.10}$$

После некоторых преобразований для P^{crit} находим

$$P^{\text{crit}} = \frac{1 + \alpha\gamma}{16} \exp\left(\frac{2\gamma(1 + \alpha^{3/2})}{\sqrt{\alpha}(1 + \alpha\gamma)} + \frac{1}{3}\right), \tag{2.11}$$

а значение α находится из уравнения

$$\ln \alpha = \frac{2(\sqrt{\alpha} - \gamma)(1 + \alpha^{3/2})}{\sqrt{\alpha}(1 + \alpha\gamma)}. \tag{2.12}$$

Характерный вид функции $H_\infty(\eta)$ при $P < P^{\text{crit}}$ и $P > P^{\text{crit}}$ приведен на рисунке 4.

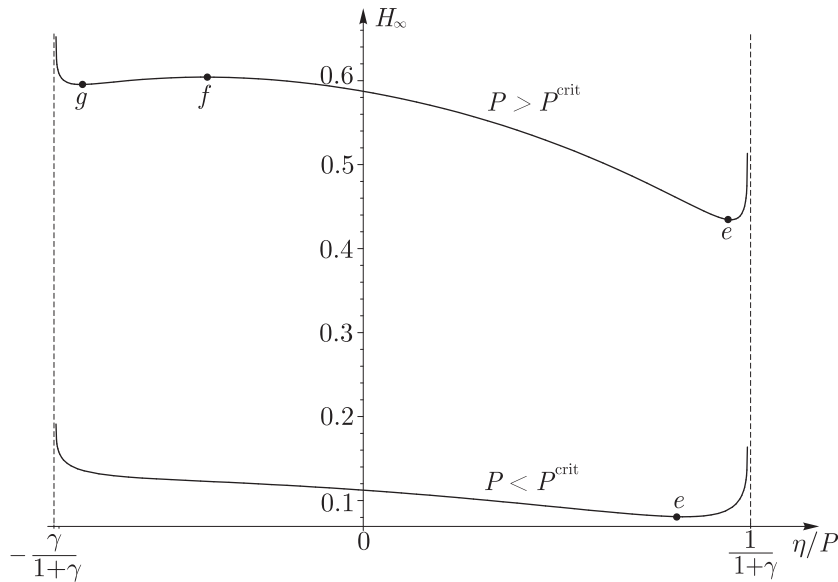


Рис. 4. График функции $H_\infty(\eta)$ при $\gamma = 0.8$.

Точка e на рисунке 4 соответствует устойчивой бесконечно удаленной неподвижной точке e на рисунке 2, а соответствующая ей энергия H_e является глобальным минимумом функции $H(\xi, \eta)$ и на плоскости (P, H) определяет границу области возможных движений, задаваемую кривой σ_e . Точки f и g на рисунке 4 появляются при $P > P^{\text{crit}}$ и соответствуют неустойчивой и устойчивой бесконечно удаленным неподвижным точкам соответственно, им отвечают бифуркационные кривые σ_f, σ_g .

Общий вид бифуркационной диаграммы при $\gamma = 0.8$ приведен на рисунке 5. Серым цветом на диаграмме показана область возможных значений интегралов. Сплошными линиями изображены бифуркационные кривые, соответствующие устойчивым неподвижным точкам приведенной системы (в том числе и бесконечно удаленным), пунктирными линиями отвечают неустойчивые положения равновесия.

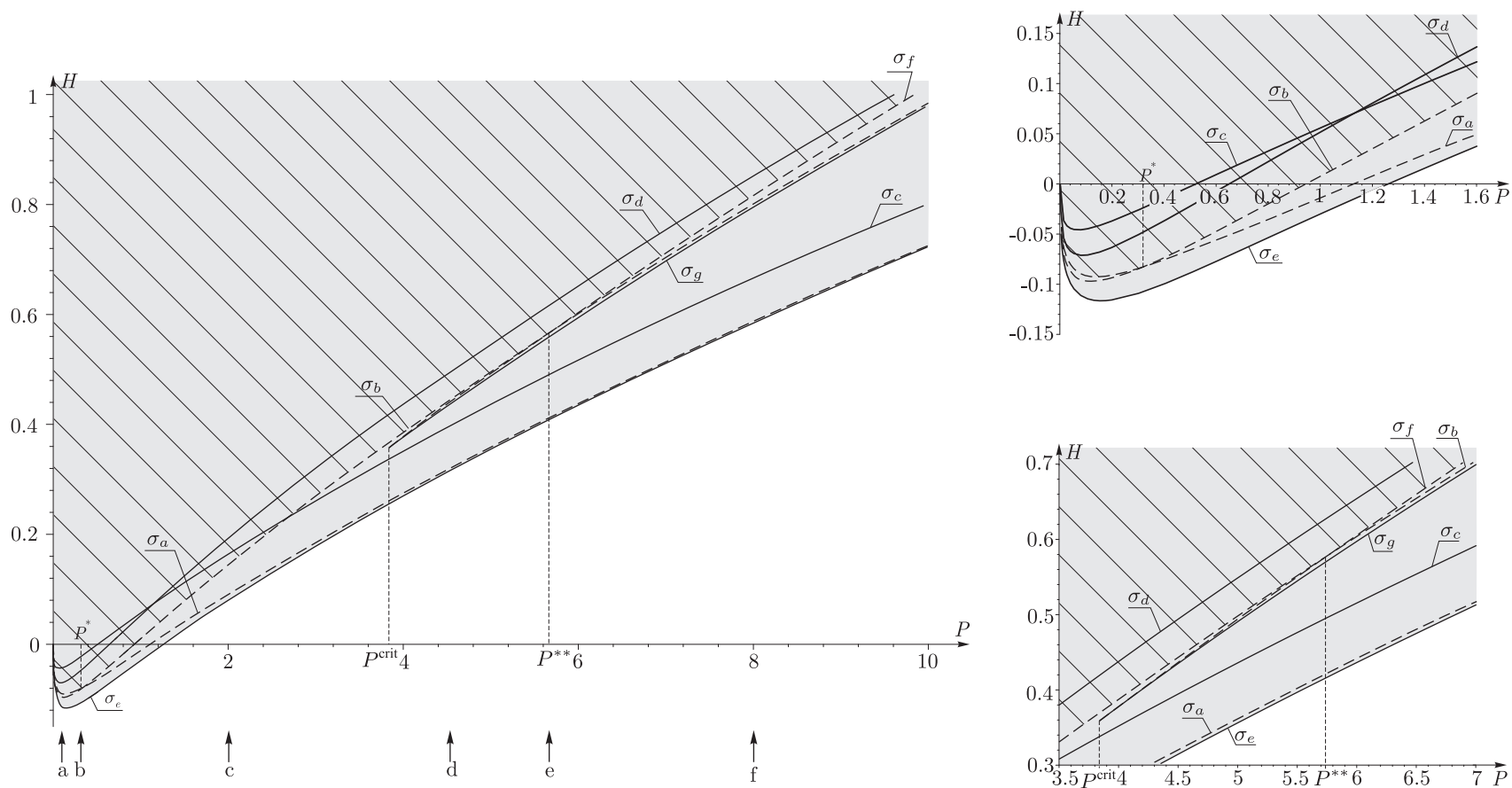


Рис. 5. Общий вид бифуркационной диаграммы (слева) и ее увеличенные фрагменты (справа) для системы двух вихревых колец при $\gamma = 0.8$. Сплошными линиями изображены границы листов бифуркационного комплекса, а пунктирными — бифуркационные кривые, по которым происходит склейка листов. На левом рисунке стрелками снизу указаны значения интеграла P , для которых на следующем рисунке (рис. 6) изображены схематические сечения бифуркационного комплекса и соответствующие фазовые портреты приведенной системы.

Чтобы построить из бифуркационной диаграммы на рисунке 5 бифуркационный комплекс, поставим в соответствие всем областям (которые разделяются между собой бифуркационными кривыми) такое количество различных листов, какое число компонент связности (с учетом определения на с. 124) имеют линии уровня гамильтониана $H(\xi, \eta, P)$ при соответствующих значениях первых интегралов P, H . Свободными краями этих листов являются бифуркационные кривые, изображенные сплошными линиями, а склеиваются листы между собой по пунктирным бифуркационным кривым. Точкам пересечения этих кривых P^* и P^{**} соответствует слияние асимптотических траекторий к различным неустойчивым неподвижным точкам. Удобнее представлять себе этот комплекс в трехмерном пространстве $\mathbb{R}^3 = \{P, H, Q\}$, где координата Q — величина, позволяющая отличать различные листы (например, какая-либо начальная координата для траекторий приведенной системы); схематические профили сечений получившегося объекта плоскостью $P = \text{const}$ приведены на рисунке 6.

В рассматриваемом случае бифуркационный комплекс состоит из восьми листов. Обозначим их последовательностями букв, соответствующих бифуркационным кривым (или их отрезкам), ограничивающим данный лист. Порядок букв соответствует перечислению бифуркационных кривых при обходе границы листа против часовой стрелки (см. рис. 7). Напишем полный список листов бифуркационного комплекса: $Oba, abe_1, abe_2, ca, db, fb, bfg_1, bfg_2$. В названии первого листа бифуркационного комплекса O означает вертикальную прямую $P = 0$. Схематично бифуркационные листы изображены на рисунке 7 и склеиваются следующим образом. Листы abe_1, abe_2, ca, db приклеиваются к листу Oba по кривой σ_a и части кривой σ_b ($P < P^{**}$); листы fb и bfg_1, bfg_2 приклеиваются к листу Oba по кривой σ_f и, кроме того, склеиваются друг с другом и листом db по части кривой σ_b ($P > P^{**}$). На каждом из перечисленных листов за исключением первого возможен только один тип движения вихревых колец, а лист Oba можно разделить на три области с различными типами возможных движений: $ab, fba, Oabf$.

Классификация движений

Всего существует три основных качественно различных типа траекторий, кратко остановимся на каждом из них.

1. Отталкивание колец.

При $t = -\infty$ кольца бесконечно удалены друг от друга и при увеличении времени движутся навстречу друг другу (в системе центра завихренности). Приблизившись на некоторое минимальное расстояние, кольца отталкиваются и снова разлетаются. Во время всего движения происходит монотонное уменьшение радиуса одного кольца и рост другого, причем чем больше P , тем меньше изменяются радиусы колец. Данному типу движения соответствуют листы abe_1, abe_2, bfg_1 и bfg_2 .

2. Однократное прохождение одного кольца сквозь другое.

В данном случае после приближения друг к другу кольца не отталкиваются, а проходят одно сквозь другое, после чего разлетаются на бесконечность. Данному типу движения соответствуют листы ca, db, fb , а также области ab и fba на листе Oba . Отметим, что размеры каждого из колец до взаимодействия ($t \rightarrow -\infty$) совпадают с размерами после взаимодействия ($t \rightarrow +\infty$), тем не менее во время взаимодействия в зависимости от листа и начальных условий они могут изменяться. Так, например, возможны движения, для которых большее кольцо сначала становится меньшим, проходит сквозь второе кольцо, а затем снова становится большим (область ab и часть области fba на листе Oba).

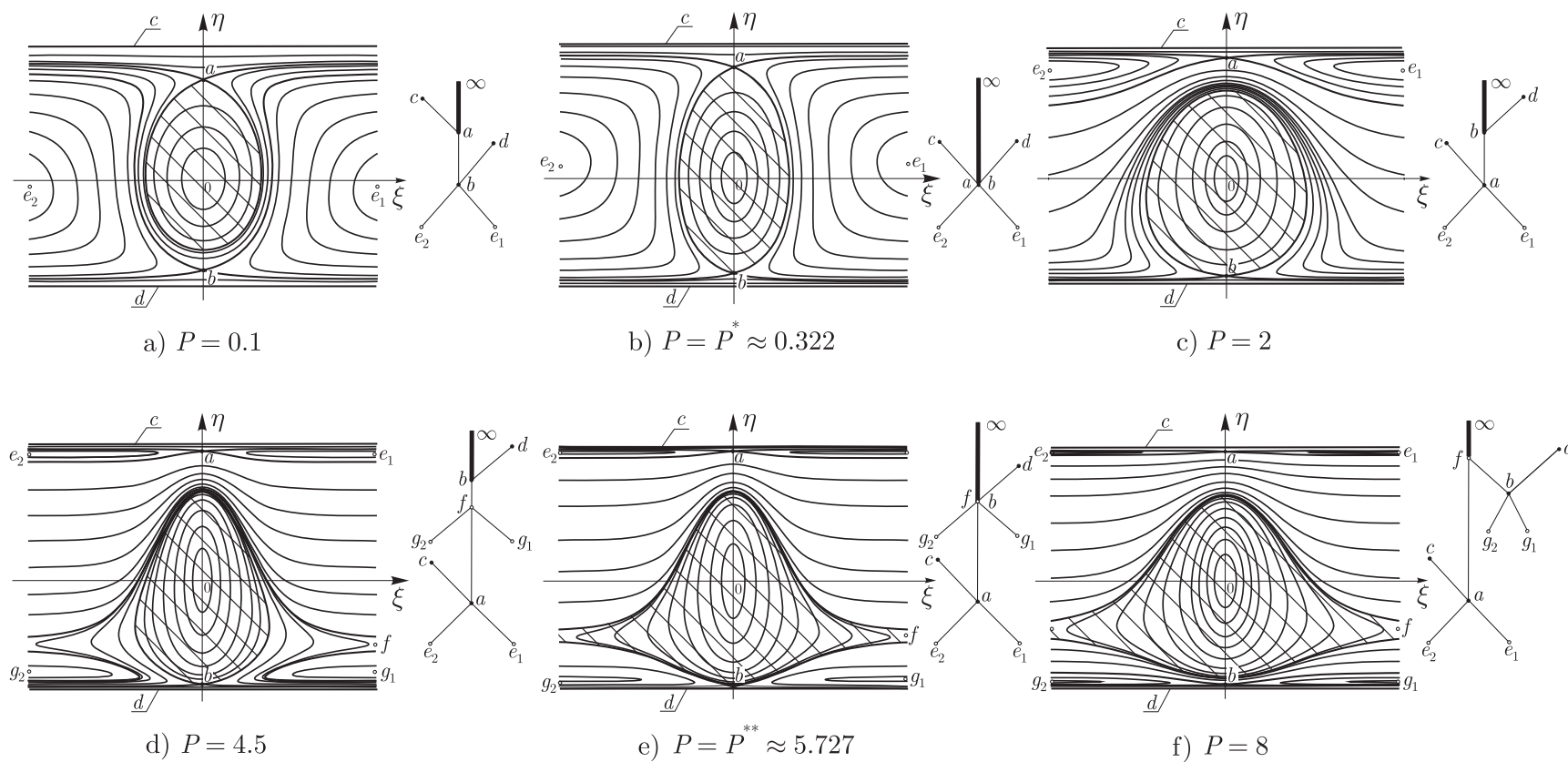


Рис. 6. Различные типы фазовых портретов и соответствующие им профили бифуркационного комплекса при $\gamma = 0.8$ и различных значениях P . Строчными латинскими буквами отмечены неподвижные точки приведенной системы (положение «бесконечно удаленных неподвижных точек» отмечено пустыми кружками), жирными линиями отмечены траектории, асимптотические к неустойчивым неподвижным точкам, а наклонной штриховкой обозначены области чехарды.

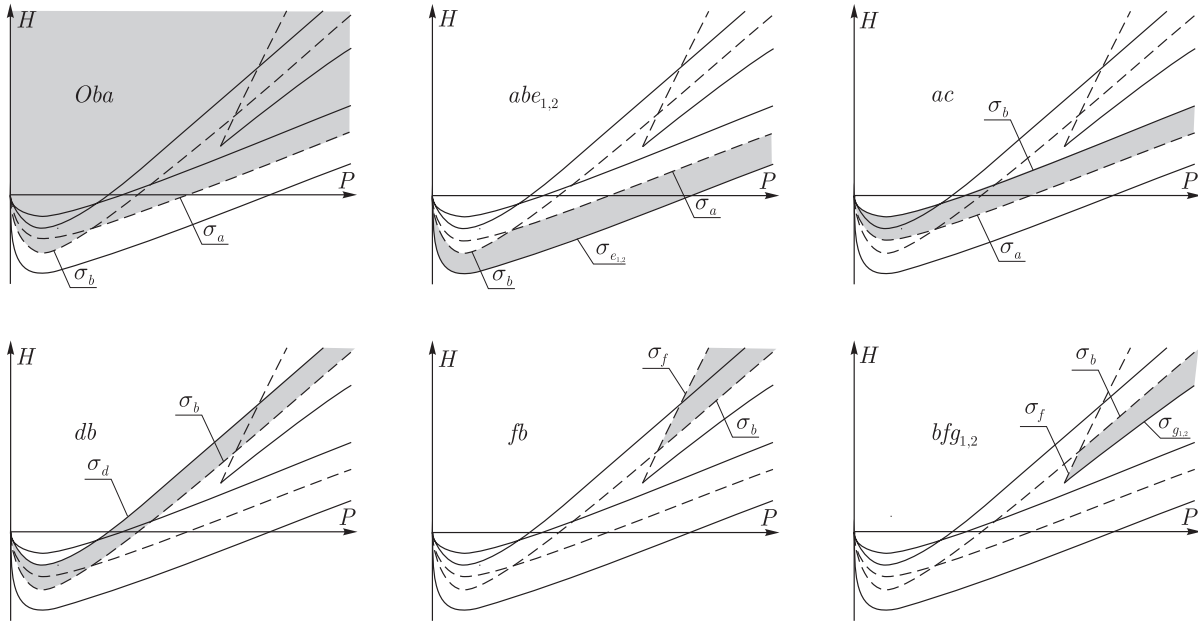


Рис. 7. Схематическое изображение (без соблюдения масштаба) листов бифуркационного комплекса для случая $\gamma > 0$.

3. Чехарда.

Чехардой в задаче о вихревых кольцах называют неравномерное движение, при котором кольца попеременно проходят друг сквозь друга. Данный тип движения наиболее интересен с точки зрения динамики, поэтому остановимся на нем подробнее.

Условие существования чехарды

В терминах траекторий приведенной системы чехарде соответствуют замкнутые траектории, окружающие точку $\xi = 0, \eta = 0$. Соответствующие области фазовых портретов на рисунке 6 заштрихованы наклонной штриховкой, а сегменты профилей бифуркационного комплекса выделены жирными линиями. На бифуркационной диаграмме область существования чехарды лежит на листе *Oba* и также заштрихована. Как видно из диаграммы, условие существования чехарды при разных значениях P различается. Приведем далее полное условие чехарды, обобщающее результаты Хикса.

Теорема 3. При $\gamma > 0$ движение двух вихревых колец является чехардой при одновременном выполнении двух условий:

1. начальные условия соответствуют листу *Oba* бифуркационного комплекса,
2. $H > \max(H_a(P), H_b(P), H_f(P))$.

Отметим, что условие Хикса о равенстве скоростей на бесконечности применимо только в области $P > P^{**}$, где P^{**} вычисляется из уравнения

$$H_b(P^{**}) = H_f(P^{**}).$$

Таким образом, теорема 3 дополняет критерий Хикса в области $P < P^{**}$.



ЗАМЕЧАНИЕ 4. Заметим, что модель тонких вихревых колец подразумевает, что радиусы колец значительно больше их поперечного сечения, то есть в выбранных обозначениях $p_1 \gg 1$, $p_2 \gg \beta^{4/3}$. В случае $\gamma > 0$ это приводит к тому, что физически значимые движения вихревых колец лежат в области больших импульсов $P \gg 1 + \gamma\beta^{4/3}$. При равных или почти равных интенсивностях колец (то есть когда γ близко к единице) область чехарды при больших P ограничивается кривой $H_f(P)$, а значит, выполняется критерий Хикса. Однако при уменьшении γ критическое значение P^{crit} , при котором появляется решение H_f , очень быстро стремится к бесконечности и в область больших P попадает кривая $H_b(P)$ (см. рис. 5). Таким образом, при условии тонкости колец в случае их существенно различной завихренности теорема 3 обобщает критерий Хикса условий возникновения чехарды.

2.3. Случай $\gamma < 0$, $P > 0$

Бифуркационный комплекс

По аналогии с предыдущим случаем структура фазового портрета и классификация движений системы определяется неподвижными точками, сингулярностями и особенностями на бесконечности. Рассмотрим их последовательно.

Неподвижные точки. Как и в случае $\gamma > 0$, все неподвижные точки лежат на оси $\xi = 0$, а их координаты η определяются из уравнения (2.6). В рассматриваемом случае уравнение (2.6) в зависимости от значения интеграла P может иметь либо два решения, либо ни одного, причем в случае существования двух решений одно из них соответствует неустойчивой неподвижной точке, а второе — устойчивой. Таким образом, при $\gamma < 0$, $P > 0$ существуют орбитально устойчивые движения, при которых оба кольца движутся как одно целое вдоль общей оси с постоянной скоростью. Критические значения P , при которых происходит рождение (либо исчезновение) пары неподвижных точек, находятся из решения системы уравнений

$$\frac{\partial H_0(\eta, P)}{\partial \eta} = 0, \quad \frac{\partial^2 H_0(\eta, P)}{\partial \eta^2} = 0, \quad (2.13)$$

где $H_0(\eta, P) = H(\xi, \eta, P)|_{\xi=0}$.

Численный анализ показывает, что система (2.13) имеет по крайней мере два решения P_1^{crit} и P_2^{crit} . При $P_1^{\text{crit}} < P < P_2^{\text{crit}}$ уравнение (2.6) не имеет решений, а при $P < P_1^{\text{crit}}$ или $P > P_2^{\text{crit}}$ имеет два решения. На бифуркационной диаграмме (рис. 8) и фазовых портретах (рис. 10) соответствующие семейства неподвижных точек будем обозначать буквами a и b при $P < P_1^{\text{crit}}$ и буквами e и f при $P > P_2^{\text{crit}}$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Для полного доказательства отсутствия других решений P^{crit} (при $\beta = 1$) необходимо численно построить пересечение двумерных поверхностей (2.13) в трехмерном пространстве $\mathbb{R}^3 = \{(\eta, P, \gamma)\}$.

Сингулярности системы. В рассматриваемом случае $\gamma < 0$, $P > 0$ существует только две сингулярности. Первая — это случай слияния двух колец $\xi = 0$, $\eta = 0$, при этом $H(\xi, \eta) \rightarrow -\infty$ (тогда как в рассмотренном выше случае $\gamma > 0$ энергия обращалась в $+\infty$). При $\gamma < 0$ и фиксированном $P > 0$ радиусы колец могут быть сколь угодно большими, что соответствует бесконечно большому значению энергии ($H(\xi, \eta) \rightarrow +\infty$), поэтому в рассматриваемом случае областью возможных движений является вся полуплоскость $P > 0$.

Вторая сингулярность — это случай, когда радиус второго кольца обращается в нуль. На фазовых портретах этому случаю соответствует граница области возможных движений



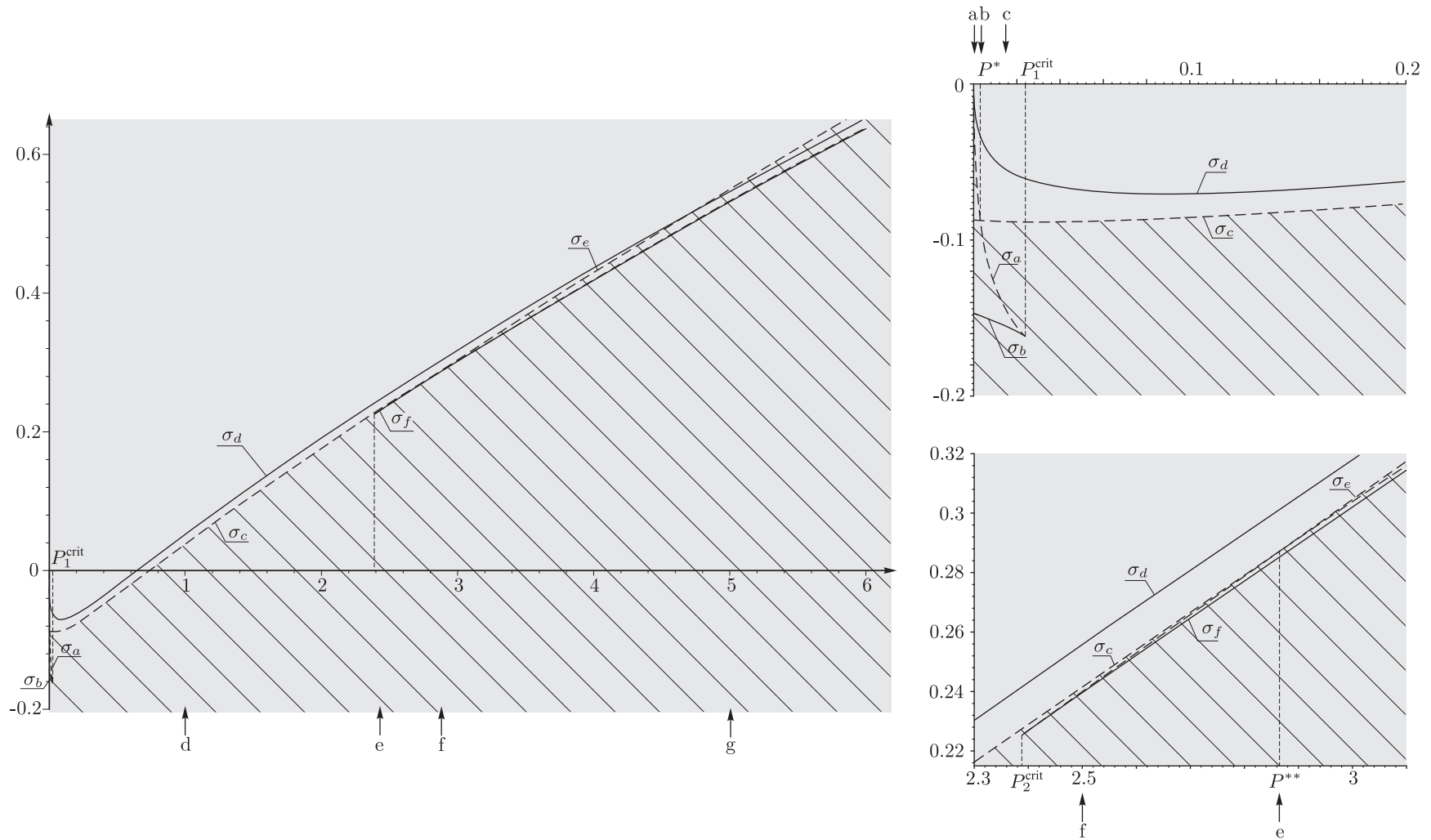


Рис. 8. Общий вид бифуркационной диаграммы (слева) и ее увеличенные фрагменты (справа) для системы двух вихревых колец при $\gamma = -0.5$. Сплошными линиями изображены границы листов бифуркационного комплекса, а пунктирными — бифуркационные кривые, по которым происходит склейка листов. На левом рисунке стрелками снизу указаны значения интеграла P , для которых на следующем рисунке (рис. 6) показаны схематические сечения бифуркационного комплекса и соответствующие фазовые портреты приведенной системы.

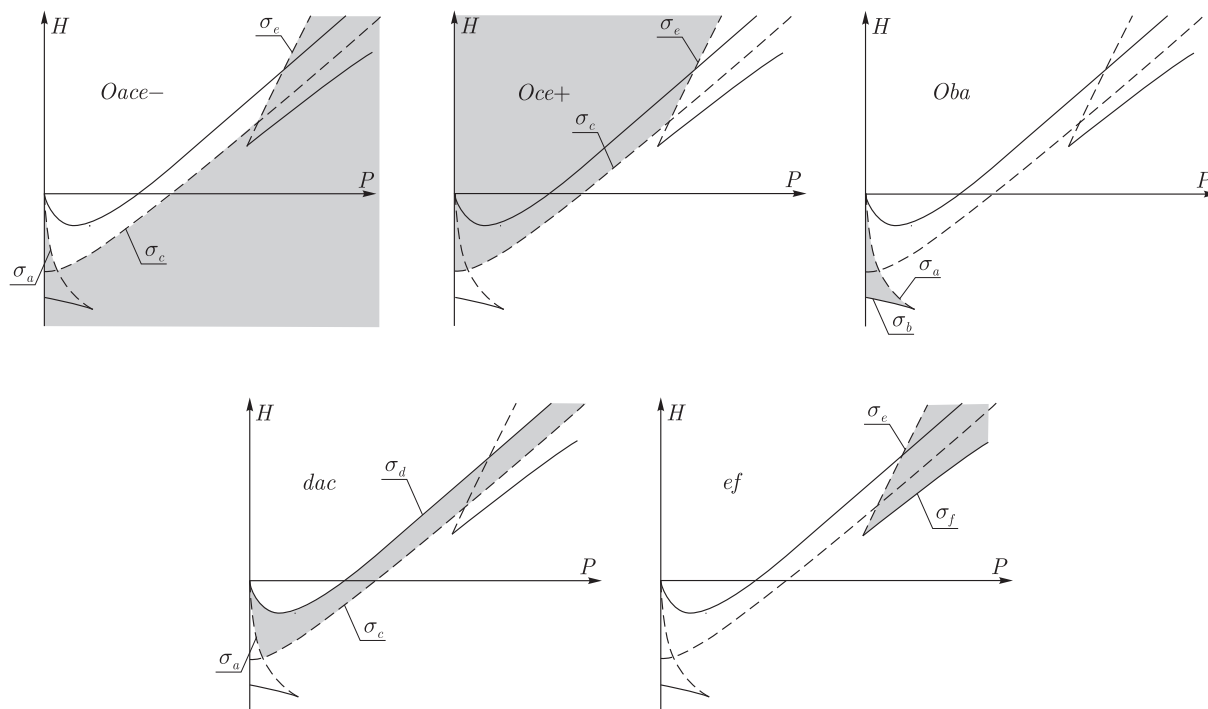


Рис. 9. Схематическое изображение (без соблюдения масштаба) листов бифуркационного комплекса при $\gamma < 0$, $P > 0$.

в виде прямой $\eta = \eta_{\max} = \frac{-\gamma P}{1 + \gamma}$, а на бифуркационной диаграмме — кривая

$$\sigma_d: H_d(P) = H(\xi, \eta_{\max}) = \frac{1}{2\pi} P^{1/2} \left(\ln 8P^{3/4} - \frac{7}{4} \right), \quad (2.14)$$

которая является границей одного из листов бифуркационного комплекса.

Особенности на бесконечности. Как и в случае $\gamma > 0$, для анализа поведения на бесконечности необходимо исследовать функцию $H_\infty(\eta) = \lim_{\xi \rightarrow \infty} H(\xi, \eta)$. Как показывает численный анализ, в рассматриваемом случае функция $H_\infty(\eta)$ при всех значениях P обладает по крайней мере одним минимумом, который соответствует неустойчивому бесконечно удаленному положению равновесия. На фазовых портретах (рис. 10) соответствующие положения равновесия обозначены буквой s , а отвечающая им бифуркационная кривая на рисунке 8 обозначена σ_c . Так как положение равновесия неустойчиво, то этой же бифуркационной кривой соответствуют две сепаратрисы, которые отмечены на фазовых портретах жирными линиями.

Общий вид бифуркационной диаграммы приведен на рисунке 8. Для построения бифуркационного комплекса проанализируем фазовые портреты при различных фиксированных значениях $P = \text{const}$ и построим все возможные сечения комплекса (рис. 10). На основании полученной информации заключаем, что в рассматриваемом случае комплекс состоит уже из пяти листов $Oace-$, $Oce+$, Oba , dac и ef . Знаки $+$ и $-$ в названии определяют, какая часть плоскости первых интегралов относится к листу (выше задаваемой границы или ниже). Схематично листы изображены на рисунке 9, а их склейка производится следующим образом. Листы Oba и ef приклеиваются к листу $Oace-$ по кривым σ_a и σ_e ; лист dac

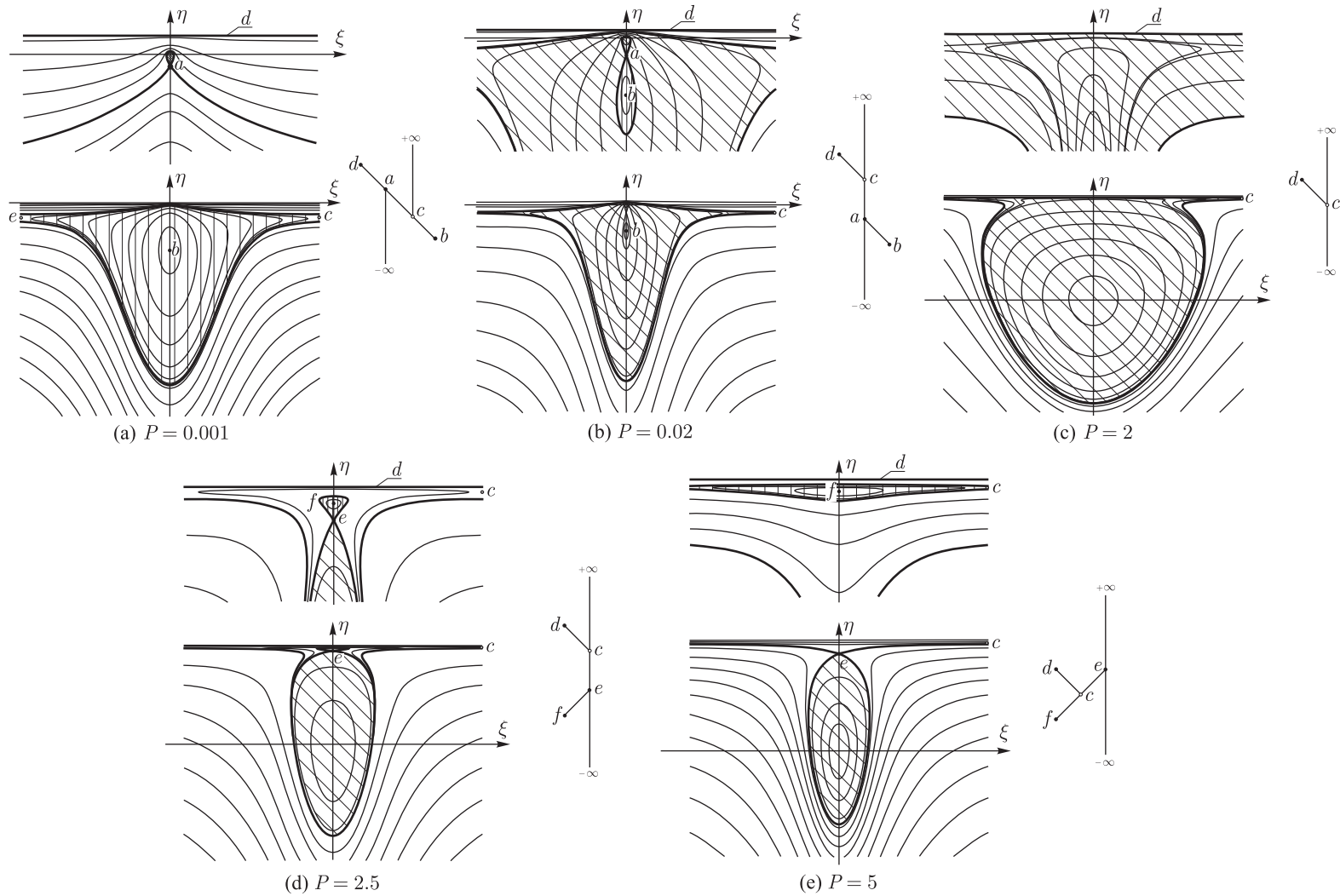


Рис. 10. Различные типы фазовых портретов и соответствующие им профили бифуркационного комплекса при $\gamma = -0.5$ и различных значениях P . Строчными латинскими буквами отмечены неподвижные точки приведенной системы (положение «бесконечно удаленных неподвижных точек» отмечено пустыми кружками), жирными линиями отмечены траектории, асимптотические к неустойчивым неподвижным точкам, а наклонной штриховкой — области чехарды.

приклеивается к листу $Oase-$ по частям кривых σ_a ($P < P^*$) и σ_c ($P^* < P < P^{**}$) и приклеивается к листу ef по части кривой σ_c ($P > P^{**}$); лист $Ose+$ приклеивается к листу Oba по части кривой σ_c ($P < P^*$), к листу $Oase-$ по части кривой σ_c ($P^* < P < P^{**}$) и части кривой σ_e ($P > P^{**}$).

Классификация движений

Остановимся вкратце на классификации возможных типов движения. В рассматриваемом случае существует три основных типа движения.

1. Однократное прохождение одного кольца сквозь другое.

Данный тип движения аналогичен наблюдаемому в случае $\gamma > 0$ и наблюдается на листах $Ose+$, das , в области Osa на листе Oba и в области es на листе ef .

2. Чехарда.

На бифуркационной диаграмме (рис. 8) и фазовых портретах (рис. 10) области, соответствующие движениям типа чехарды, отмечены наклонной штриховкой. Критерий возникновения чехарды в этом случае описывается следующей теоремой.

Теорема 4. *Движение двух вихревых колец интенсивностей разных знаков при $P > 0$ является чехардой в случае, когда начальные условия соответствуют листу $Oase-$ бифуркационного комплекса.*

3. Колебания с продвижением.

Данный тип движения является еще одним (помимо чехарды) периодическим ограниченным относительным движением двух вихревых колец. Эти движения на фазовых портретах лежат вокруг устойчивых положений равновесия b и f . Как уже говорилось выше, этим положениям равновесия соответствуют конфигурации колец, при которых они находятся друг в друге и движутся как одно целое вдоль оси с постоянной скоростью.

Решения, лежащие вокруг положений равновесия, представляют собой движения, при которых большее кольцо движется вдоль оси с некоторой непостоянной скоростью, а меньшее — колеблется внутри большего, то обгоняя, то отставая. При этом можно сказать, что большее кольцо захватывает меньшее. На бифуркационной диаграмме (рис. 8) области, соответствующие данным решениям, отмечены вертикальной штриховкой. Как видно из рисунка 8, на плоскости первых интегралов существует две области, в которых происходит описанное движение. Первая лежит на листе Oba в области $Obac$, а вторая — на листе ef в области cef . Отличие этих решений заключается в том, что в области $Obac$ большим является кольцо с отрицательной интенсивностью, а в области cef — кольцо с положительной интенсивностью. Кроме того, во втором случае размеры колец все время остаются почти постоянными, а в первом достаточно сильно изменяются во время движения. Отметим также, что в первом случае максимальное сближение колец происходит с наибольшей скоростью. В результате этого при быстром движении создается впечатление, что кольца проходят друг сквозь друга, хотя на самом деле этого не происходит. Подобные движения мы назвали *псевдоchехардой*.

Для иллюстрации указанных решений на рисунке 11 приведен характерный вид траекторий вихревых колец в неподвижной системе координат и в системе координат, связанной с центром завихренности.

Отметим, что траектории колец в абсолютном пространстве зависят не только от вида кривых, по которым кольца движутся в системе центра завихренности, но и от скорости центра завихренности, задаваемой соотношением (1.16). В частности, подбором начальных условий и интенсивностей колец можно добиться того, что смещение центра завихренности

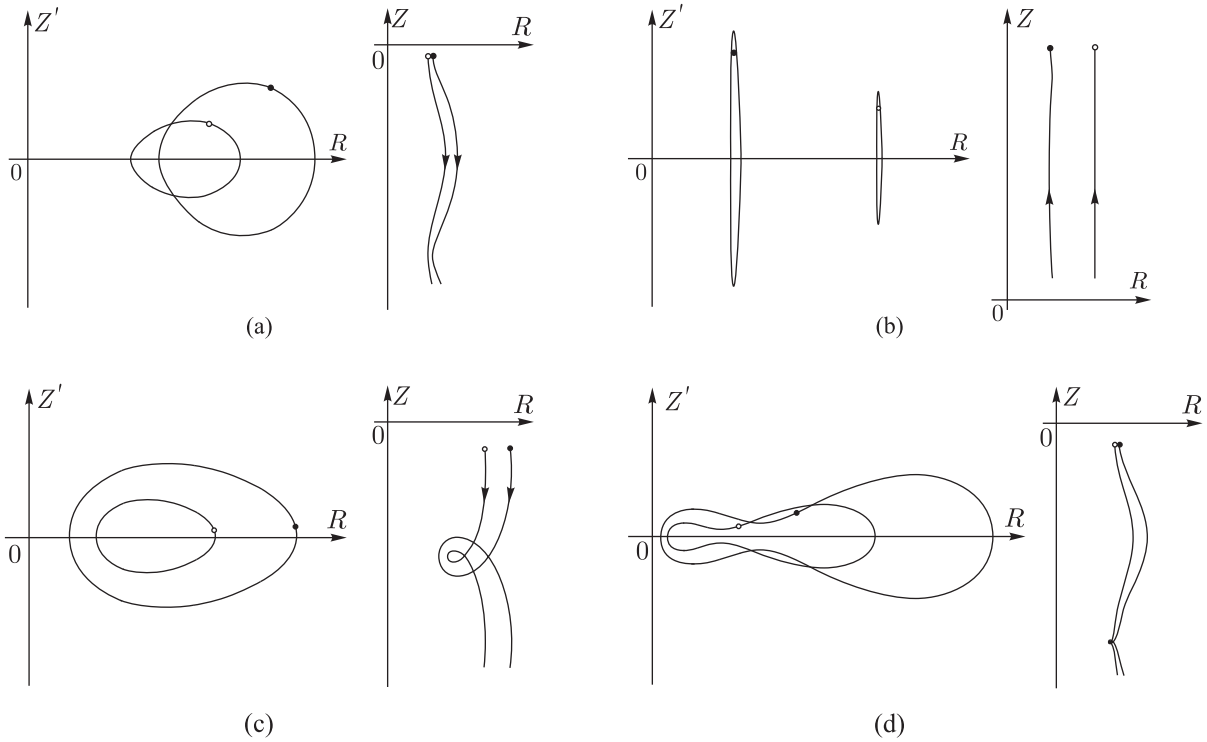


Рис. 11. Траектории вихревых колец на плоскости (Z, R) в системе центра завихренности (слева) и в подвижном пространстве (справа) при $\gamma = -0.5$ и различных значениях P : а) $P = 0.001$ (область *Obac* на рис. 8), захват отрицательного вихревого кольца положительным, б) $P = 5$ (область *cef* на рис. 8), захват положительного вихревого кольца отрицательным, в) $P = 0.02$ и $E < E_a$ (область *Oase-* на рис. 8), чехарда, д) $P = 0.02$ и $E_a < E < E_c$ (область *Oase-* на рис. 8), чехарда.

за один период приведенной системы будет равняться нулю. Таким образом, вихревые кольца будут совершать движение типа чехарды, оставаясь на одном месте. Такие движения, в терминологии [26, 47, 55], можно назвать абсолютными хореографиями.

ЗАМЕЧАНИЕ. Отметим, что в рассматриваемом случае $\gamma < 0$ условие тонкости колец не приводит к явному наложению ограничений на значение интеграла P , так как он может быть близок к нулю даже при больших радиусах колец. Таким образом, область физически значимых движений лежит на всей полуплоскости $P > 0$.

2.4. Случай $\gamma < 0, P \leq 0$

Бифуркационный комплекс

Неподвижные точки приведенной системы. Как показывает анализ решений уравнения (2.6), в рассматриваемом случае в зависимости от значения γ возможны два варианта.

1. При значениях γ , превышающих некоторое критическое значение $\gamma^* = -0.8775$ (которое в общем случае зависит от β), при всех значениях P существует только одна устойчивая неподвижная точка, которую будем обозначать буквой a , а соответствующую бифуркационную кривую — σ_a (см. рис. 12, 15).

2. При $\gamma < \gamma^*$ в зависимости от значения P может существовать либо одна устойчивая неподвижная точка ($P > P_1^{\text{crit}}$ и $P < P_2^{\text{crit}}$), либо две устойчивые и одна неустойчивая неподвижная точка ($P_2^{\text{crit}} < P < P_1^{\text{crit}}$). На фазовых портретах и бифуркационной диаграмме устойчивые точки будем обозначать буквами a и d , а неустойчивую — e (см. рис. 13, 16).

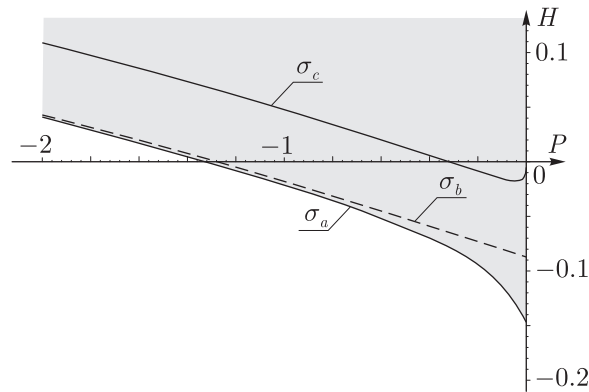


Рис. 12. Бифуркационная диаграмма для системы двух вихревых колец при $\gamma = -0.5$. Сплошными линиями изображены границы листов бифуркационного комплекса, а пунктирными — бифуркационные кривые, по которым происходит склейка листов. Серым цветом обозначена область возможных движений.

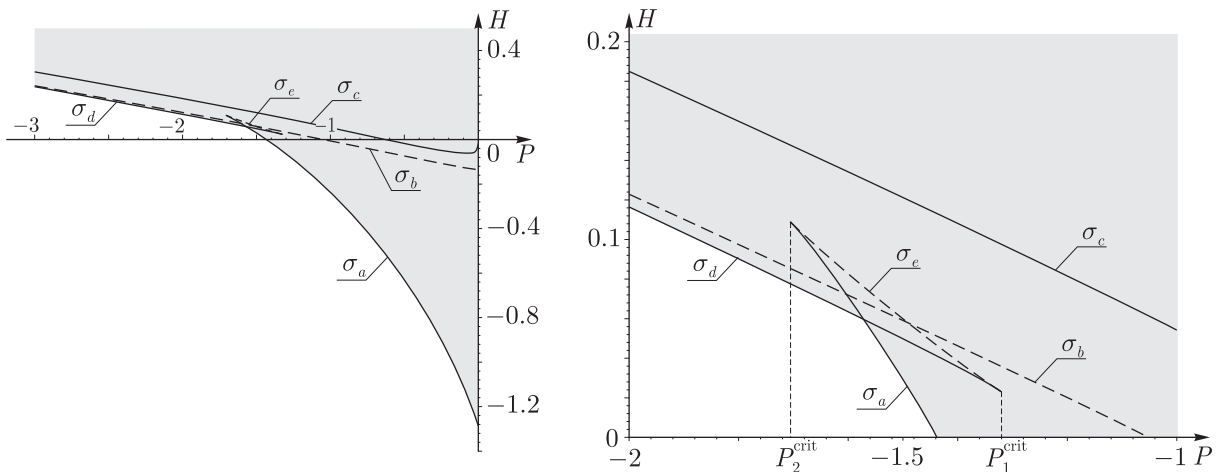


Рис. 13. Бифуркационная диаграмма (слева) и ее увеличенный фрагмент (справа) для системы двух вихревых колец при $\gamma = -0.95$. Сплошными линиями изображены границы листов бифуркационного комплекса, а пунктирными — бифуркационные кривые, по которым происходит склейка листов. Серым цветом показана область возможных движений.

Сингулярности системы. В данном случае из условий $\gamma < 0$ и $P < 0$ следует, что радиус кольца с отрицательной интенсивностью всегда больше радиуса кольца с положительной интенсивностью; таким образом, остается только одна сингулярность — случай, когда радиус первого кольца обращается в нуль. На фазовых портретах этому случаю соответствует граница области возможных движений $\eta = \eta_{\max} = \frac{P}{1 + \gamma}$, а на бифуркационной диаграмме — кривая

$$\sigma_c: H_c(P) = \frac{1}{2\pi} \gamma^2 \sqrt{\frac{P}{\gamma}} \left(\ln 8 \left(\frac{P}{\gamma} \right)^{3/4} - \frac{7}{4} \right),$$

которая является границей одного из листов бифуркационного комплекса.

Особенности на бесконечности. Так же, как и при $\gamma < 0$ и $P > 0$, в рассматриваемом случае при всех значениях P существует только одно неустойчивое бесконечно удаленное положение равновесия, которое будем обозначать буквой b .



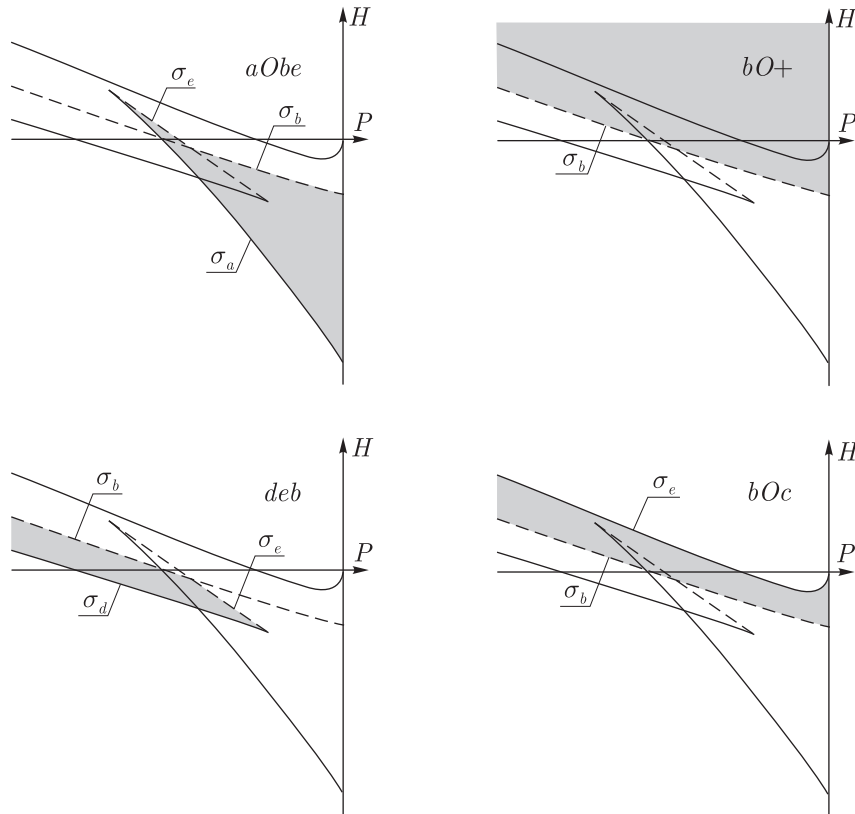


Рис. 14. Схематичное изображение (без соблюдения масштаба) листов бифуркационного комплекса при $\gamma < \gamma^*$, $P \leq 0$.

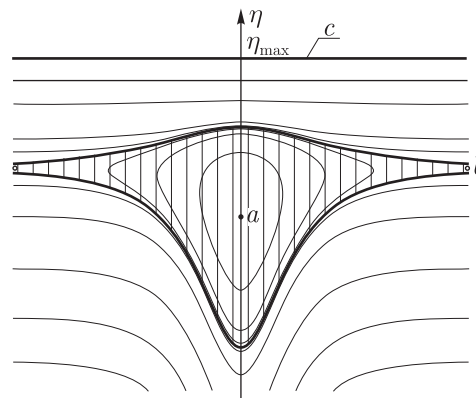


Рис. 15. Фазовый портрет и профиль бифуркационного комплекса при $\gamma = -0.5$, $P = -1$. Строчными латинскими буквами отмечены неподвижные точки приведенной системы, положение бесконечно удаленных неподвижных точек условно отмечено пустыми кружками, жирными линиями отмечены траектории, асимптотические к неустойчивым неподвижным точкам, вертикальной штриховкой показаны области, в которых происходит захват одного кольца другим.

Общий вид бифуркационной диаграммы приведен на рисунке 12 для $\gamma > \gamma^*$ и на рисунке 13 для $\gamma < \gamma^*$. Соответствующие фазовые портреты и сечения бифуркационного комплекса приведены на рисунках 15 и 16. Как видно из рисунков 12 и 15, в случае $\gamma > \gamma^*$ существует всего один тип фазового портрета приведенной системы, а бифуркационный комплекс состоит из трех листов: aOb , $bO+$ и bOc . В случае $\gamma < \gamma^*$ существует четыре воз-



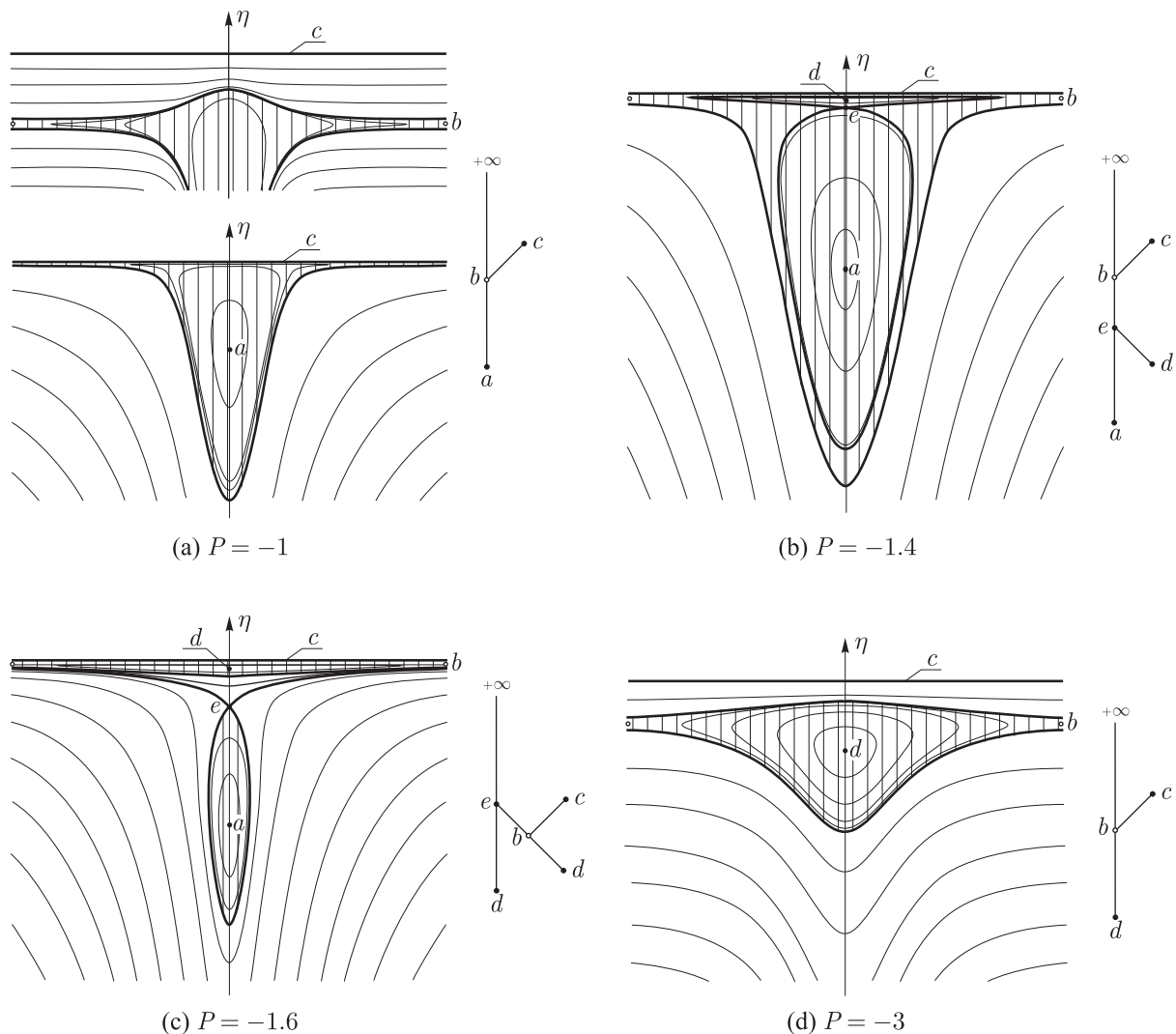


Рис. 16. Различные типы фазовых портретов и соответствующие профили бифуркационного комплекса при $\gamma = -0.95$ и различных значениях P . Строчными латинскими буквами отмечены неподвижные точки приведенной системы, положение бесконечно удаленных неподвижных точек условно отмечено пустыми кружками, жирными линиями отмечены траектории, асимптотические к неустойчивым неподвижным точкам, вертикальной штриховкой показаны области, в которых происходит от колебания с продвижением.

можных типа фазовых портретов (см. рис. 16), а комплекс состоит уже из четырех листов $aObe$, $bO+$, deb и bOc (см. рис. 13).

Возможные типы движений

Как уже говорилось выше, в рассматриваемом случае одно вихревое кольцо всегда больше другого, следовательно, *при $\gamma < 0$ и $P < 0$ не существует движений типа чехарды*. Все возможные движения в этом случае ограничиваются двумя типами:

1. Однократное прохождение одного кольца сквозь другое (листы $bO+$ и bOc).
2. Захват первого кольца вторым (листы aOb при $\gamma > \gamma^*$ и листы $aObe$ и deb при $\gamma < \gamma^*$).



3. Три вихревых кольца

Рассмотрим теперь задачу о движении трех коаксиальных вихревых колец. Согласно предложению 9 (с. 120) уравнения движения (1.9) для трех вихревых колец могут быть приведены к системе с двумя степенями свободы с помощью замены

$$\begin{aligned} \xi_1 &= Z_2 - Z_1, & \eta_1 &= (R_2^2 - R_1^2) \frac{\Gamma_1 \Gamma_2}{\Gamma_1 + \Gamma_2}, \\ \xi_2 &= Z_3 - \frac{\Gamma_1 Z_1 + \Gamma_2 Z_2}{\Gamma_1 + \Gamma_2}, & \eta_2 &= \left(R_3^2 - \frac{\Gamma_1 R_1^2 + \Gamma_2 R_2^2}{\Gamma_1 + \Gamma_2} \right) \frac{\Gamma_3 (\Gamma_1 + \Gamma_2)}{\Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3}. \end{aligned}$$

Используя стандартный подход (см., например, [7]) для приведенной системы, можно построить сечение Пуанкаре на уровне гамильтониана $H(\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2, P) = \text{const}$. В качестве секущей выберем плоскость $\xi_1 = 0$. Сечение уровня гамильтониана этой плоскостью задает в трехмерном пространстве $\mathbb{R}^3 = \{(\xi_2, \eta_2, \eta_1)\}$ довольно сложную (некомпактную) двумерную поверхность $M_{h, P_0} = \left\{ (\xi_2, \eta_2, \eta_1) \mid H(\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2, P) \Big|_{\substack{\xi_1=0 \\ P=P_0}} = h \right\}$. Очевидно, что такой достаточно произвольный выбор плоскости сечения не гарантирует глобальной возвращаемости траекторий на сечение. Кроме того, часть траекторий может уходить на бесконечность, что затрудняет анализ отображения. Однако для поиска периодических траекторий этого оказывается достаточно.

На рисунке 17 приведен ряд отображений Пуанкаре, для удобства спроецированных на плоскость (ξ_2, η_2) в случае трех одинаковых вихревых колец. Жирными точками на рисунке показаны неподвижные точки отображения, которым соответствуют периодические решения приведенной системы. Согласно предложению 10 (с. 121), этим периодическим решениям соответствуют такие движения вихревых колец, при которых в системе центра завихренности они движутся по замкнутым траекториям, то есть являются *относительными хореографиями*. Примеры таких траекторий, соответствующих различным периодическим решениям приведенной системы, изображены на рисунке 18.

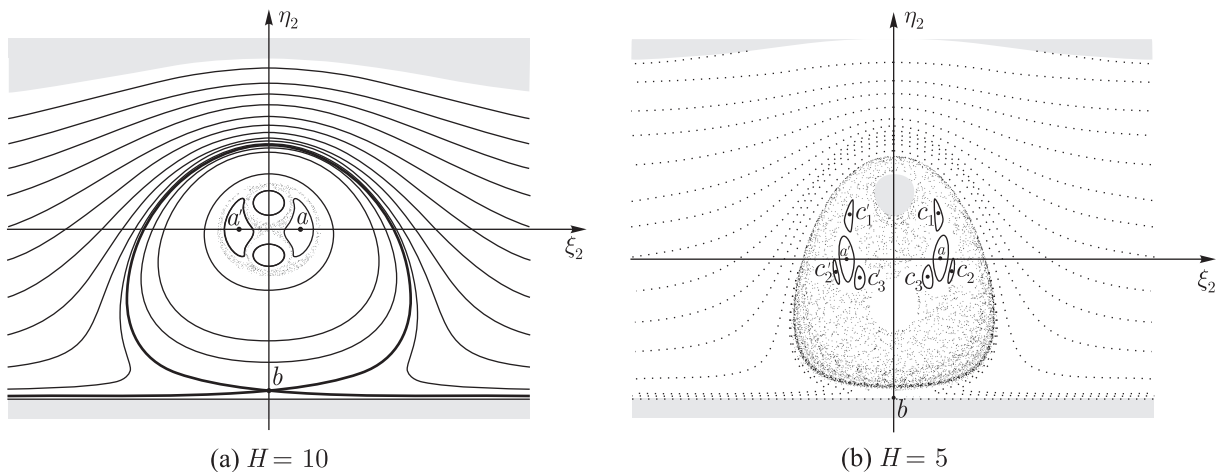


Рис. 17. Отображения Пуанкаре задачи о трех вихревых кольцах при $\Gamma_1 = \Gamma_2 = \Gamma_3 = 1$, $B_1 = B_2 = B_3 = 1$, $P = 10$ и различных значениях гамильтониана H . Серым цветом закрашены области, в которых невозможно движение. Строчными латинскими буквами обозначены неподвижные точки отображения.

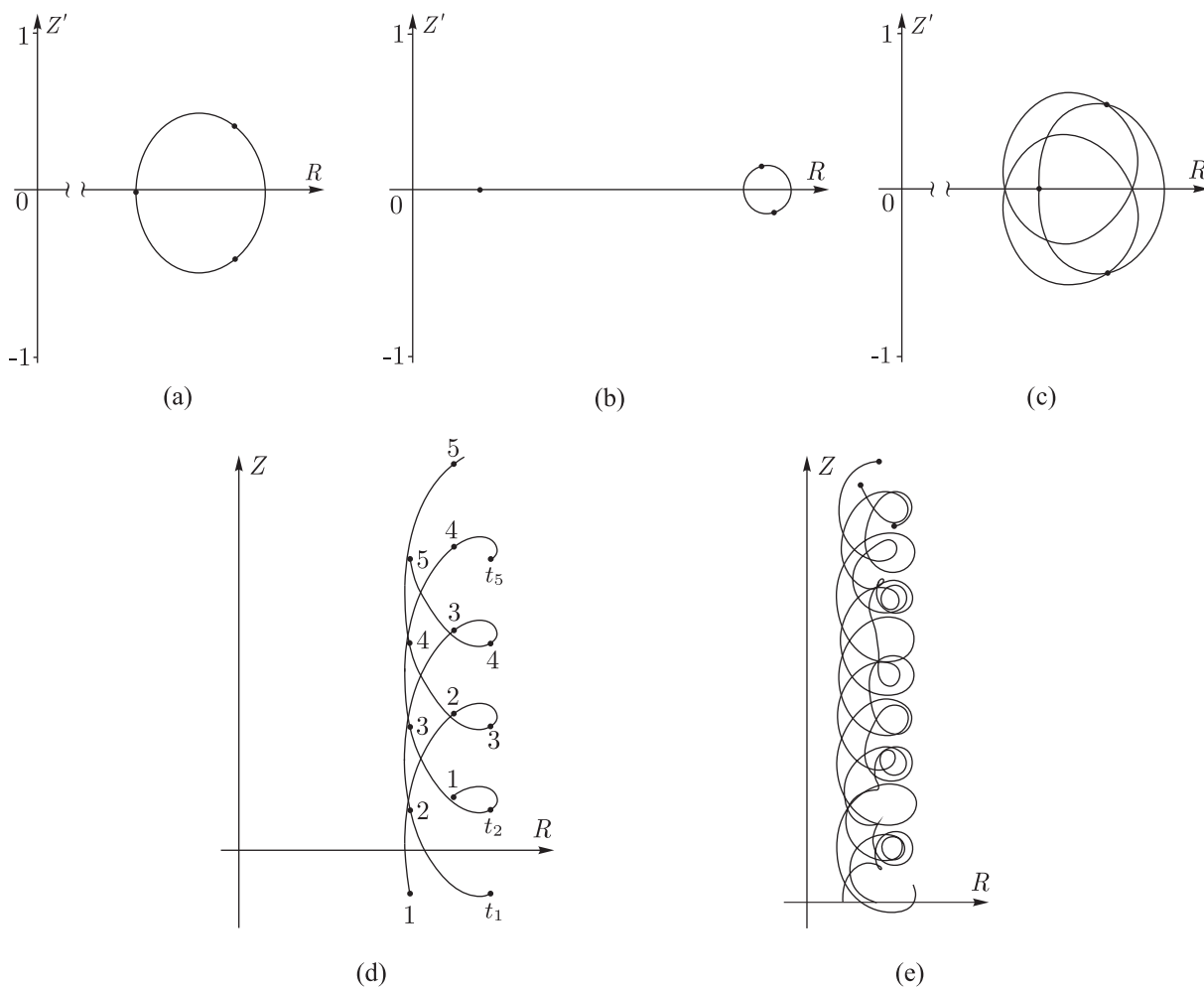


Рис. 18. Траектории вихревых колец в системе, связанной с центром завихренности (рис. а, b, с) и в неподвижной системе координат (рис. d, e). Рисунки (а) и (d) соответствуют периодическому решению *a* на рисунке 17b, рисунки (b) и (c) — решениям *b* и *c* соответственно, а рисунок (e) соответствует хаотической чехарде вихревых колец. На рисунке (d) отмечены положения вихрей в моменты времени t_i .

При больших значениях энергии динамика системы трех вихревых колец, так же как и в случае двух колец, разделяется на ограниченное и неограниченное движение. Границей между ними является петля сепаратрис, асимптотических к неустойчивой неподвижной точке *b* (рис. 17). При этом, как видно из рисунка, ограниченное движение может носить как регулярный, так и хаотический характер.

При уменьшении энергии происходит разрушение инвариантных торов и рост хаотических слоев как вокруг начала координат, так и вблизи точки *b*. После разрушения последнего инвариантного тора, разделяющего хаотические слои, происходит их слияние (см. рис. 17b) и можно ставить вопросы о хаотическом рассеянии, вероятности захвата одного кольца парой других и т. д. [56].

Отметим, что практически на всем интервале изменения энергии вблизи начала координат существуют *устойчивые* неподвижные точки, обозначенные на фазовых портретах буквами *a* и *a'*. Далее изображены соответствующие им траектории вихревых колец в системе, связанной с центром завихренности (рис. 18a), и в неподвижной системе координат

(рис. 18b). Как видно из рисунков 18a и 18b, решения a представляют собой *тройную чехарду* вихревых колец, предположения о существовании которой были высказаны еще Дж. Максвеллом [43]. Как показывает анализ отображения Пуанкаре, эти периодические решения, отвечающие тройной чехарде, существуют и устойчивы в широком диапазоне значений интегралов P, H . Это, в частности, говорит о возможности наблюдения данного явления экспериментально.

Еще одним свойством периодических решений a и a' является связность соответствующей хореографии: в системе центра завихренности все три кольца движутся по одной и той же траектории с отставанием в $\frac{1}{3}$ периода (рис. 18a).

Заметим, что кроме решений a также почти при всех значениях энергии существует еще шесть устойчивых периодических решений c , которые получаются друг из друга путем комбинаторных перестановок вихрей и их траекторий в системе центра завихренности. Этим периодическим траекториям также соответствует движение типа чехарды, однако в этом случае кольца движутся уже по разным траекториям (см. рис. 18c).

Таким образом, в системе трех одинаковых кольцевых вихрей в широком диапазоне значений интегралов P, H существуют устойчивые периодические движения в системе центра завихренности, которым соответствует регулярная чехарда колец в неподвижной системе, то есть движение, при котором попеременно каждое из колец проходит сквозь два других.

Как уже говорилось выше, при больших значениях энергии существуют ограниченные хаотические траектории (см. рис. 17a). Этим траекториям соответствуют такие движения вихревых колец, при которых они хаотическим образом проходят друг сквозь друга, не разбегаясь на бесконечность. Такие движения можно назвать *хаотической чехардой*. Пример траекторий вихревых колец в неподвижной системе координат, соответствующих хаотической чехарде, приведен на рисунке 18e.

Таким образом, в задаче о трех одинаковых вихревых кольцах при больших значениях энергии существует область начальных условий, соответствующая хаотической чехарде.

Отметим, что при малых значениях энергии также может наблюдаться хаотическая чехарда. Однако в этом случае уже отсутствуют инвариантные торы, разделяющие ограниченное и неограниченное движение (см. рис. 17b), поэтому после определенного времени вихревые кольца могут рассеяться и уйти на бесконечность.

Заключение

В этой работе мы, используя классическую конечномерную модель вихревого взаимодействия коаксиальных вихрей, дали полный анализ динамики двух произвольных вихревых колец и частично изучили взаимодействие трех вихревых колец равной интенсивности. Наиболее интересным движением в обоих случаях является чехарда вихрей, описанная еще Гельмгольцем. Несомненно, что, несмотря на приближенный характер уравнений движения и некоторые неочевидные допущения при их выводе, основные положения работы могут быть проверены экспериментально или уточнены при рассмотрении более точных моделей (например, вортонная модель или моделирование прямым счетом уравнений Навье–Стокса). Было бы интересно провести этот анализ в связи с тем, что кольцевые вихревые

структуры постоянно наблюдаются при обтекании осесимметричных тел вязкой жидкостью и ответственны за возникновение вихревого сопротивления. В последнее время существует ряд предложений по использованию вихревых колец для практических целей (тушение очагов возгорания, применение в новых типах оружия и так далее).

Авторы благодарят С. М. Рамоданова за прочтение рукописи и полезные замечания.

Список литературы

- [1] Алексеев В. М. Обобщенная пространственная задача двух неподвижных центров: Классификация движений // Бюллетень ИТА, 1965, т. 10, № 4(117), с. 241–271.
- [2] Ахметов Д. Г. Вихревые кольца. Новосибирск: Академическое изд-во «Гео», 2007. 151 с.
- [3] Багрец А. А., Багрец Д. А. Неинтегрируемость гамильтоновых систем вихревой динамики // Регул. и хаотич. динам., 1997, т. 2, № 1, с. 36–43; № 2, с. 58–65.
- [4] Болсинов А. В., Борисов А. В., Мамаев И. С. Топология и устойчивость интегрируемых систем // УМН, 2010, т. 65, № 2(392), с. 71–132.
- [5] Болсинов А. В., Фоменко А. Т. Интегрируемые гамильтоновы системы: Геометрия, топология, классификация: В 2-х тт. Ижевск: УдГУ, 1999. 443 с.; 448 с.
- [6] Борисов А. В., Килин А. А., Мамаев И. С. Абсолютные и относительные хореографии в задаче о движении точечных вихрей на плоскости // Докл. РАН, 2005, т. 400, № 4, с. 457–462.
- [7] Борисов А. В., Мамаев И. С. Динамика твердого тела: Гамильтоновы методы, интегрируемость, хаос. М.–Ижевск: ИКИ, 2005. 576 с.
- [8] Бояринцев В. И., Левченко Е. С., Савин А. С. О движении двух вихревых колец // МЖГ, 1985, № 5, с. 176–177.
- [9] Брутян М. А., Крапивский П. Л. Движение системы вихревых колец в несжимаемой жидкости // ПММ, 1984, т. 48, № 3, с. 503–506.
- [10] Бэтчелор Дж. Введение в гидродинамику жидкости. М.: Мир, 1973. 758 с.
- [11] Васильев Н. С. О движении бесконечного ряда круговых колец одинакового радиуса, имеющих общую ось // Записки физ.-мат. фак-та Имп. Новороссийск. ун-та, 1914, т. 10, с. 1–44.
- [12] Васильев Н. С. Приведение уравнений движения круговых вихревых колец, имеющих общую ось, к канонической форме // Записки мат. отд. Новороссийск. общ-ва естествозн., 1913, т. 21, с. 1–12.
- [13] Гринченко В. Т., Мелешко В. В., Гуржий А. А., Хейст Г. Я. Ф., Эйсенга А. Г. М. Два подхода к анализу коаксиального взаимодействия вихревых колец // Прикл. гидромехан., 2000, т. 2, № 3, с. 40–52.
- [14] Гуржий А. А., Константинов М. Ю., Мелешко В. В. Взаимодействие коаксиальных вихревых колец в идеальной жидкости // МЖГ, 1988, № 2, с. 78–84.
- [15] Новиков Е. А. Обобщенная динамика трехмерных вихревых особенностей (вортонов) // ЖЭТФ, 1983, т. 84, № 3, с. 975–981.
- [16] Чаплыгин С. А. Заметки о жизни и трудах Гельмгольца // Два исследования по гидродинамике: I. О вихревом движении; II. О прерывном движении жидкости / Г. Гельмгольц. М., 1902. С. 75–99; см. также: Гельмгольц Г. Основы вихревой теории. М.–Ижевск: Инст. компьютерн. исслед., 2002. С. 57–73.
- [17] Черемных О. К. О движении вихревых колец в несжимаемой среде // Нелинейная динамика, 2008, т. 4, № 2, с. 417–428.
- [18] Шарлье К. Л. Небесная механика. М.: Наука, 1966. 627 с.
- [19] Bagrets A. A., Bagrets D. A. Nonintegrability of two problems in vortex dynamics // Chaos, 1997, vol. 7, № 3, pp. 368–375.



- [20] Blackmore D., Brons M., Goulet A. A coaxial vortex ring model for vortex breakdown // *Phys. D*, 2008, vol. 237, pp. 2817–2844.
- [21] Blackmore D., Champanerkar J., Wang Ch. A generalized Poincaré-Birkhoff theorem with applications to coaxial vortex ring motion // *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B*, 2005, vol. 5, no. 1, pp. 15–33.
- [22] Blackmore D., Knio O. Transition from quasiperiodicity to chaos for three coaxial vortex rings // *ZAMM Z. Angew. Math. Mech.*, 2000, vol. 80, pp. 173–176.
- [23] Blackmore D., Knio O. KAM theory analysis of the dynamics of three coaxial vortex rings // *Phys. D*, 2000, vol. 140, pp. 321–348.
- [24] Borisov A. V., Kilin A. A., Mamaev I. S. Reduction and chaotic behavior of point vortices on a plane and a sphere // *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, 2005, suppl., pp. 100–109.
- [25] Borisov A. V., Mamaev I. S. Isomorphisms of geodesic flows on quadrics // *Regul. Chaotic Dyn.*, 2009, vol. 14, nos. 4–5, pp. 455–465.
- [26] Chenciner A., Montgomery R. A remarkable periodic solution of the three body problem in the case of equal masses // *Ann. of Math. (2)*, 2000, vol. 152, pp. 881–901; *см. также: Современные проблемы хаоса и нелинейности: Сб. ст. / К. Симо, С. Смейл, А. Шенсине и др. М.–Ижевск: НИЦ «РХД», Инст. компьютерн. исслед., 2002. С. 179–201.*
- [27] Dyson F. W. The potential of an anchor ring // *Philos. Trans. Roy. Soc. London Ser. A*, 1893, vol. 184, pp. 43–95.
- [28] Dyson F. W. The potential of an anchor ring: P. 2 // *Philos. Trans. Roy. Soc. London Ser. A*, 1893, vol. 184, pp. 1041–1106.
- [29] Fraenkel L. E. On steady vortex rings of small cross-section in a ideal fluid // *Proc. R. Soc. London Ser. A*, 1970, vol. 316, pp. 29–62.
- [30] Fraenkel L. E. Examples of steady vortex rings of small cross-section in an ideal fluid // *J. Fluid Mech.*, 1972, vol. 51, pp. 119–135.
- [31] Fraenkel L. E., Berger M. S. A global theory of steady vortex rings in an ideal fluid // *Acta Math.*, 1974, vol. 132, pp. 13–51.
- [32] Gröbli W. Spezielle Probleme über die Bewegung geradliniger paralleler Wirbelfäden // *Vierteljschr. Naturf. Ges. Zürich*, 1877, vol. 22, pp. 37–82, 129–168.
- [33] Helmholtz H. Über Integrale der hydrodynamischen Gleichungen, welche den Wirbelbewegungen entsprechen // *J. Reine Angew. Math.*, 1858, vol. 55, pp. 25–55 [Гельмгольц Г. Об интегралах уравнений гидродинамики, соответствующих вихревым движениям // *Нелинейная динамика*, 2006, т. 2, № 4, с. 473–507].
- [34] Hicks W. M. On the steady motion of a hollow vortex // *Proc. R. Soc. London*, 1883, vol. 35, pp. 304–308.
- [35] Hicks W. M. Researches on the theory of vortex rings: P. 2 // *Philos. Trans. Roy. Soc. London Ser. A*, 1885, vol. 176, pp. 725–780.
- [36] Hicks W. M. On the mutual threading of vortex rings // *Proc. R. Soc. London Ser. A*, 1922, vol. 102, pp. 111–113.
- [37] Hicks W. M. Researches in vortex motion: P. 3. On spiral or gyrostatic vortex aggregates // *Philos. Trans. Roy. Soc. London Ser. A*, 1899, vol. 192, pp. 33–99.
- [38] Hill M. J. M. On a spherical vortex // *Philos. Trans. Roy. Soc. London Ser. A*, 1894, vol. 185, pp. 213–245.
- [39] Konstantinov M. Chaotic phenomena in the interaction of vortex rings // *Phys. Fluids*, 1994, vol. 6, no. 5, pp. 1752–1767.
- [40] Lamb H. *Hydrodynamics*. 6th ed. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1932. 768 pp. [Ламб Г. *Гидродинамика*. М.–Л.: Гостехиздат, 1947. 928 с.]
- [41] Levy H., Forsdyke A. G. The stability of an infinite system of circular vortices // *Proc. R. Soc. London Ser. A*, 1927, vol. 114, pp. 594–604.



- [42] Levy H., Forsdyke A. G. The vibrations of an infinite system of vortex rings // Proc. R. Soc. London Ser. A, 1927, vol. 116, pp. 352–379.
- [43] Maxwell J. C. Letter to William Thomson, 6 October 1868 // The scientific letters and papers of James Clerk Maxwell: Vol. 2 / P. M. Harman (ed.). Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1990. P. 446–448 [Письмо Дж. Максвелла У. Томсону от 6 октября 1868 года // Нелинейная динамика, 2012, т. 8, № 1, с. 161–165].
- [44] Maxwell J. C. A treatise on electricity and magnetism: In 2 vols. Oxford: Clarendon, 1873. 464 pp.; 456 pp.
- [45] Maxworthy T. Some experimental studies of vortex rings // J. Fluid Mech., 1977, vol. 81, pp. 465–495.
- [46] Meleshko V. V. Coaxial axisymmetric vortex rings: 150 years after Helmholtz // Theor. Comput. Fluid Dynam., 2010, vol. 24, pp. 403–431.
- [47] Moore C. Braids in classical gravity // Phys. Rev. Lett., 1993, vol. 70, pp. 3675–3679.
- [48] Moore D. W., Saffman P. G. A note on the stability of a vortex ring of small cross-section // Proc. R. Soc. London Ser. A, 1974, vol. 338, no. 1615, pp. 535–537.
- [49] Roberts P. H., Donnelly R. J. Dynamics of vortex rings // Phys. Lett. A, 1970, vol. 31, pp. 137–138.
- [50] Novikov E. A. Hamiltonian description of axisymmetric vortex flows and the system of vortex rings // Phys. Fluids, 1985, vol. 28, no. 9, pp. 2921–2922.
- [51] Pocklington H. C. The complete system of the periods of a hollow vortex ring // Philos. Trans. Roy. Soc. London Ser. A, 1895, vol. 186, pp. 603–619.
- [52] Saffman P. G. The velocity of viscous vortex rings // Stud. Appl. Math., 1970, vol. 49, pp. 371–380.
- [53] Saffman P. G. Vortex dynamics. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1992. 311 pp. [Сэффмэн Ф. Дж. Динамика вихрей. М.: Научный мир, 2000. 376 с.]
- [54] Shariff K. Vortex rings // Annu. Rev. Fluid Mech. 1992, vol. 24, pp. 235–279.
- [55] Simó C. Dynamical properties of the figure eight solution of the three-body problem // Celestial mechanics (Evanston, IL, 1999). (Contemp. Math., vol. 292.) Providence, RI: AMS, 2002. P. 209–228; см. также: Современные проблемы хаоса и нелинейности: Сб. ст. / К. Симо, С. Смейл, А. Шенсине и др. М.–Ижевск: НИЦ «РХД», Инст. компьютерн. исслед., 2002. С. 183–205.
- [56] Simó C., Stuchi T. J. Central stable/unstable manifolds and the destruction of KAM tori in the planar Hill problem // Phys. D, 2000, vol. 140, nos. 1–2, pp. 1–32.
- [57] Llewellyn Smith S. G., Hattori Y. Axisymmetric magnetic vortices with swirl // Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul., 2012 (в печати).
- [58] Thomson J. J. On the vibrations of a vortex ring, and the action upon each other of two vortices in a perfect fluid // Philos. Trans. Roy. Soc. London, 1882, vol. 173, pp. 493–521.
- [59] Thomson W. On vortex atoms // Philos. Mag. Ser. 4, 1867, vol. 34, pp. 15–24.

The dynamics of vortex rings: Leapfrogging, choreographies and the stability problem

Alexey V. Borisov¹, Alexander A. Kilin², Ivan S. Mamaev³

^{1,2,3}Institute of Computer Science

Udmurt State University

Universitetskaya 1, Izhevsk, 426034 Russia

¹borisov@rcd.ru, ²aka@rcd.ru, ³mamaev@rcd.ru

We consider the problem of the motion of axisymmetric vortex rings in an ideal incompressible fluid. Using the topological approach, we present a method for complete qualitative analysis of the dynamics of a system of two vortex rings. In particular, we completely solve the problem of describing the conditions for the onset of leapfrogging motion of vortex rings. In addition, for



the system of two vortex rings we find new families of motions in which the mutual distances remain finite (we call them pseudo-leapfrogging). We also find solutions for the problem of three vortex rings, which describe both the regular and chaotic leapfrogging motion of vortex rings.

MSC 2010: 76B47

Keywords: ideal fluid, vortex ring, leapfrogging motion of vortex rings, bifurcation complex, periodic solution, integrability, chaotic dynamics

Received September 19, 2011, accepted December 27, 2011

Citation: *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2012, vol. 8, no. 1, pp. 113–147 (Russian)