Нелинейная динамика. 2012. Т. 8. № 1. С. 167–172.
Полнотекстовая версия в свободном доступе
http://nd.ics.org.ru

КОММЕНТАРИИ. ДИСКУССИЯ. КРИТИКА

Комментарий к «Замечанию» А. В. Цыганова (НД, 2011, № 3, с. 715)

П. Е. Рябов

Настоящий комментарий написан в связи с публикацией [1].

1. А. В. Цыганов в [1] утверждает, что введенные в работе [2] переменные u_1, u_2 не являются переменными разделения, поскольку не коммутируют относительно исходной скобки Пуассона даже при нулевом значении интеграла площадей. Вопрос о том — должны ли обязательно коммутировать переменные разделения мы рассматриваем ниже: оказывается, не обязаны (это зависит от определения). Начнем с предварительных замечаний. Выпишем полностью уравнения, полученные в [2], которые А. В. Цыганов в своем «Замечании» не приводит.

Обозначим

$$p_1(u) = 2b + k - u^2, \qquad p_2(u) = 2b - k + u^2, \qquad p_3(u) = (u-b)^2 - f^2,$$

$$p_{ij} = p_i(u_j), \qquad r_{ij} = \sqrt{p_{ij}} \qquad (i = 1, 2, 3; \quad j = 1, 2),$$

и пусть $u_{1,2}$ — корни квадратного уравнения

$$zu^2 - 2bu + (2b\xi - kz) = 0, \quad z = \alpha_3^2, \quad \xi = M_1^2 + M_2^2 + \frac{b}{\alpha_3^2}. \tag{1}$$

Теорема 2 [2]. *Переменные u_1, u_2 являются переменными разделения, и их эволюция определяется уравнениями Абеля – Якоби*

$$\frac{du_1}{\sqrt{W(u_1)}} - \frac{du_2}{\sqrt{W(u_2)}} = 0, \qquad \frac{u_1du_1}{\sqrt{W(u_1)}} - \frac{u_2du_2}{\sqrt{W(u_2)}} = dt, \tag{2}$$

Получено 18 декабря 2011 года

Рябов Павел Евгеньевич
orelryabov@mail.ru
Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации
125993, Россия, г. Москва, Ленинградский проспект, 49

где

$$W(u) = b^{-1}p_1(u)p_2(u)p_3(u) = \\ = b^{-1}(2b + k - u^2)(2b - k + u^2)[(u - b)^2 - f^2].$$

При этом фазовые переменные $\boldsymbol{M}$, $\boldsymbol{\alpha}$ *алгебраически выражаются через* u_1, u_2 *по формулам*

$$\begin{aligned}
&M_1 = \mathrm{i}\frac{r_{21}r_{22}}{2\sqrt{2b(u_1+u_2)}}, \quad M_2 = -\frac{r_{11}r_{12}}{2\sqrt{2b(u_1+u_2)}},\\
&M_3 = -\frac{\mathrm{i}}{2\sqrt{b}(u_1^2 - u_2^2)}(r_{12}r_{22}r_{31} + r_{11}r_{21}r_{32}),\\
&\alpha_1 = \frac{1}{2\sqrt{b}(u_1^2 - u_2^2)}(r_{12}r_{21}r_{31} + r_{11}r_{22}r_{32}),\\
&\alpha_2 = -\frac{\mathrm{i}}{2\sqrt{b}(u_1^2 - u_2^2)}(r_{11}r_{22}r_{31} + r_{12}r_{21}r_{32}),\\
&\alpha_3 = \frac{\sqrt{2b}}{\sqrt{u_1+u_2}}.
\end{aligned}$$

Эта теорема проверяется прямой подстановкой. Уравнения (2) можно, очевидно, записать в виде уравнений типа Ковалевской

$$(u_1 - u_2)\frac{du_1}{dt} = \sqrt{W(u_1)}, \qquad (u_1 - u_2)\frac{du_2}{dt} = \sqrt{W(u_2)}.$$

Специалистам нетрудно по приведенным соотношениям сделать вывод, в каких же переменных (*разделенных* или *не разделенных*) представлены указанные уравнения. В сообщении [2] нет упоминания ни скобок Ли–Пуассона, ни гамильтонова формализма. Единственное используемое понятие из теории дифференциальных уравнений — это первый интеграл.

2. А. В. Цыганов в [1] отмечает следующее: «При $b = 0$ переменные разделения были построены С. А. Чаплыгиным в работе [3]». И далее: «Доказательство того, что переменные разделения Чаплыгина являются переменными разделения и для случая Горячева $b \neq 0$, приведено в работе [5]».

Приведем для разъяснения ситуации некоторые формулы. Публикации [5] и [6] идентичны и мы будем ссылаться, для определенности, на [5].

При $b = 0$ переменные разделения Чаплыгина имеют вид [3]:

$$s_{1,2} = \frac{M_1^2 + M_2^2 \pm h}{c\alpha_3^2}, \tag{3}$$

где величина $h^2 = (M_1^2 - M_2^2 + c\alpha_3^2)^2 + 4M_1^2M_2^2$.

Переменные разделения Чаплыгина зависят от величины h, квадрат которой является *одновременно* как функцией динамических переменных, так и (при $b = 0$) постоянной первого интеграла [3].

В работе [5] предложены переменные разделения $q_{1,2}$ как корни квадратного уравнения [5, формула (3.8)]:

$$\lambda^2 - \left(\frac{M_1^2 + M_2^2}{\alpha_3^2} + c\right)\lambda + \frac{cM_2^2}{\alpha_3^2} = 0, \tag{4}$$

где c соответствует параметру c_2 в формуле (3.8) работы [5].

Несложно установить *функциональную* связь между переменными (3) и (4):

$$q_k = \frac{c}{2}s_k + \frac{c}{2}, \quad k = 1, 2. \tag{5}$$

Разделению переменных в работе [5] посвящен параграф 3.1. При этом нет ни единого упоминания об их прямой связи (5) с переменными Чаплыгина. Подчеркнем еще раз, что приводимая здесь простая формула (5) найдена нами и ничего подобного в работе [5] нет. Наоборот, в конце параграфа 3.1 приведено: «Замечание 2. При $c_4 = 0$ мы повторили результат Чаплыгина...». Таким образом, связь с результатом Чаплыгина отмечается лишь при $c_4 = 0$, что соответствует в уравнении (1) $b = 0$, и, следовательно, переменные разделения q_k в [5] подаются как новые. Поэтому утверждение о том, что разделение переменных задачи Д. Н. Горячева в переменных Чаплыгина доказано в работе [5], *не соответствует действительности*. Кроме того, в цитируемой работе А. В. Цыганова [5] и ее английском варианте [6] отсутствуют даже ссылки на посвященную этой задаче оригинальную работу Д. Н. Горячева [4]. В частности, в работах [2, 7, 8] показано, что интеграл, представленный в [5], не является новым и функционально выражается через интеграл Горячева. Относительно истории вопроса можно посмотреть [9].

Являются ли переменные (3) переменными разделения для случая Горячева — это вопрос определений переменных разделения. Он, в конце концов, сводится к вопросу о том, является ли функция

$$h^2 = (M_1^2 - M_2^2 + c\alpha_3^2)^2 + 4M_1^2M_2^2$$

первым интегралом для случая Горячева ($b \neq 0$). Ответ очевидный.

3. А. В. Цыганов в замечании [1] пишет, что «применение геометрического метода Харламова к случаю Горячева в работе [2] приводит к некоммутирующим относительно скобки Пуассона переменным, которые не являются переменными разделения», и, усиливая эту мотивировку, добавляет: «Заметим, что абсолютно такой же сдвиг вспомогательных переменных u_1, u_2 для получения коммутирующих переменных разделения s_1, s_2 использовала и С. В. Ковалевская [10] в своем случае».

Обратимся к оригинальной работе С. В. Ковалевской [10], письму С. В. Ковалевской к Г. Миттаг-Леффлеру [11], а также к оригинальным работам Ф. Кёттера [12] и Г. Г. Аппельрота [13].

Система первых интегралов такова:

$$\begin{aligned}
&2(p^2 + q^2) + r^2 = 2\gamma_1 + 6l_1,\\
&2(p\gamma_1 + q\gamma_2) + r\gamma_3 = 2l,\\
&\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1,\\
&\{(p + iq)^2 + \gamma_1 + i\gamma_2\}\{(p - iq)^2 + \gamma_1 - i\gamma_2\} = k^2,
\end{aligned}$$

где l_1, l и k — действительные постоянные первых интегралов.

Вводятся многочлены

$$R(x_1) = -x_1^4 + 6l_1x_1^2 + 4lx_1 + 1 - k^2,$$
$$R(x_2) = -x_2^4 + 6l_1x_2^2 + 4lx_2 + 1 - k^2,$$
$$R(x_1, x_2) = -x_1^2x_2^2 + 6l_1x_1x_2 + 2l(x_1 + x_2) + 1 - k^2.$$

Здесь

$$x_1 = p + iq, \quad x_2 = p - iq.$$

В письме Г. Миттаг-Леффлеру, основателю журнала *Acta Mathematica*, С. В. Ковалевская вводит переменные $\frac{1}{2}w_1, \frac{1}{2}w_2$, где

$$\begin{aligned} w_1 &= \frac{R(x_1, x_2) - \sqrt{R(x_1)}\sqrt{R(x_2)}}{(x_1 - x_2)^2}, \\ w_2 &= \frac{R(x_1, x_2) + \sqrt{R(x_1)}\sqrt{R(x_2)}}{(x_1 - x_2)^2}, \end{aligned} \tag{6}$$

которые в этот момент еще никак не преобразуются и в которых выписаны уравнения Абеля – Якоби [11, с. 166].

Аппельрот в своей работе [13, с. 69] пишет: «При этом Ковалевская вела дело приблизительно так, как это дальше излагается, хотя местами я допускаю и известные от нее отступления, следуя примеру Ф. Кёттера (F. Kötter)...». И далее [13, с. 70]:

«Эти величины w, вернее, величины s_1 и s_2, равные

$$s_1 = w_1 + 3l_1 \qquad \text{и} \qquad s_2 = w_2 + 3l_1, \tag{7}$$

и фигурируют как *новые переменные в анализе Ковалевской, которая, впрочем, держась ближе Вейерштрасса, за s принимала собственно то, что я дальше обозначаю через $\overline{s}$*» (курсив и номер уравнения мои, у Аппельрота это формулы (10) на с. 70. — *П. Р.*). Переменные (7) на самом деле были введены Кёттером [12].

Переменные, которые ввела Ковалевская [10, формулы (9), с. 188], обозначены в [13] через $\overline{s}$:

$$\begin{aligned} \overline{s}_1 &= \frac{R(x_1, x_2) - \sqrt{R(x_1)}\sqrt{R(x_2)}}{2(x_1 - x_2)^2} + \frac{1}{2}l_1, \\ \overline{s}_2 &= \frac{R(x_1, x_2) + \sqrt{R(x_1)}\sqrt{R(x_2)}}{2(x_1 - x_2)^2} + \frac{1}{2}l_1. \end{aligned} \tag{8}$$

Связь переменных Ковалевской (8) с переменными (6) и (7) мы также находим у Аппельрота [13, с. 72]:

$$2\overline{s} + 2l_1 = s = w + 3l_1.$$

Известно [14, 15], что переменные w_1, w_2 не коммутируют

$$\{w_1, w_2\} \neq 0, \tag{9}$$

но коммутируют переменные (7), используемые в классических работах Ф. Кёттера [12], Г. Г. Аппельрота [13], Н. Е. Жуковского [16], В. В. Голубева [17], А. В. Ипатова [18], а также в современных работах, посвященных построению переменных «действие–угол» (последние должны являться каноническими по определению, поэтому свойство коммутируемости здесь мотивировано). Итак,

$$\{s_1, s_2\} \equiv 0.$$

Но тогда

$$\{\overline{s}_1, \overline{s}_2\} = \frac{1}{4}[\{w_1, w_2\} - \{L_1, w_1 - w_2\}] \tag{10}$$

и

$$0 = \{s_1, s_2\} = \{w_1, w_2\} - 3\{L_1, w_1 - w_2\}. \tag{11}$$

Здесь $L_1 = \frac{1}{3}H$ — первый интеграл, имеющий своей константой l_1. Из (11) получаем

$$\{L_1, w_1 - w_2\} = \frac{1}{3}\{w_1, w_2\}. \tag{12}$$

Подставляя (12) в выражение (10) и используя свойство (9), приводимое как факт в [14, 15], получаем

$$\{\overline{s}_1, \overline{s}_2\} = \frac{1}{6}\{w_1, w_2\} \neq 0.$$

Таким образом, в оригинальной работе [10] ни переменные $\frac{1}{2}w_1$, $\frac{1}{2}w_2$, ни переменные разделения $\overline{s}_1, \overline{s}_2$, сдвинутые от $\frac{1}{2}w_1$, $\frac{1}{2}w_2$ на величину $\frac{1}{2}l_1$, *не коммутируют*. Других переменных разделения в оригинальной работе Ковалевской нет. Некоммутируемость переменных разделения Ковалевской также отмечена в [19, с. 187].

4. Вывод.

- В [2] для случая Горячева получены в явном виде уравнения Абеля – Якоби с многочленом шестой степени под радикалом. В качестве разделенных переменных выбраны параметры двух семейств прямолинейных образующих однополостного гиперболоида. Вопрос о том, должны они коммутировать или нет, — это вопрос определений. Как показывает оригинальная работа [10], переменные разделения Ковалевской (8) *не коммутируют*.
- В работе [5] и ее английском варианте [6] отсутствует явное указание на то, что переменные Чаплыгина являются переменными разделения (в каком-либо смысле) в случае Д. Н. Горячева.
- В указанных работах А. В. Цыганова отсутствуют также ссылки на посвященную этой задаче оригинальную работу Д. Н. Горячева [4] и на варианты построения переменных разделения, предложенные А. В. Борисовым и И. С. Мамаевым [19, 20].

Список литературы

[1] Цыганов А. В. Замечание к статье П. Е. Рябова «Явное интегрирование и топология случая Д. Н. Горячева» // Нелинейная динамика, 2011, т. 7, № 3, с. 715–717.

[2] Рябов П. Е. Явное интегрирование и топология случая Д. Н. Горячева // Докл. РАН, 2011, т. 439, вып. 3, с. 315–318.

[3] Чаплыгин С. А. Новое частное решение задачи о движении твердого тела в жидкости // Тр. отд. физич. наук об-ва любителей естествознания, 1903, т. 11, №2, с. 7–10.
[4] Горячев Д. Н. Новые случаи интегрируемости динамических уравнений Эйлера // Изв. Варшавск. ун-та, 1916, кн. 3, с. 1–13.
[5] Tsiganov A. V. On the generalized Chaplygin system // Зап. научн. сем. ПОМИ, 2010, т. 374, с. 250–267.
[6] Tsiganov A. V. On the generalized Chaplygin system // J. Math. Sci. (N. Y.), 2010, vol. 168, no. 8, pp. 901–911.
[7] Ryabov P. E. Separation of variables in one partial integrable case of Goryachev. arXiv:1012.4379v2 [nlin.SI].
[8] Ryabov P. E. The separation of variables and bifurcations of first integrals in one problem of D. N. Goryachev. arXiv:1102.2588v1 [nlin.SI].
[9] Yehia H. M. Comment on «On the Kowalevsky–Goryachev–Chaplygin gyrostat» // J. Phys. A, 2002, vol. 35, no. 49, pp. 10669–10670.
[10] Kowalevski S. Sur le problème de la rotation d'un corps solide autour d'un point fixe // Acta Math., 1889, vol. 12, pp. 177–232.
[11] Переписка С. В. Ковалевской и Г. Миттаг-Леффлера. (Научное наследство, т. 7.) М.: Наука, 1984. 316 с.
[12] Kötter F. Sur le cas traité par M^{me} Kowalevski de rotation d'un corps solide pesant autour d'un point fixe // Acta Math., 1893, vol. 17, pp. 209–263.
[13] Аппельрот Г. Г. Не вполне симметричные тяжелые гироскопы // Движение твердого тела вокруг неподвижной точки. М.–Л.: АН СССР, 1940. С. 61–156.
[14] Dullin H. R., Richter P. H., Veselov A. P. Action variables of the Kovalevskaya top // Regul. Chaotic Dyn., 1998, vol. 3, no. 3, pp. 18–31.
[15] Komarov I. V. Remarks on Kowalevski's top // J. Phys. A., 2001, vol. 34, no. 11, pp. 2111–2120.
[16] Жуковский Н. Е. Геометрическая интерпретация рассмотренного С. В. Ковалевской случая движения тяжелого твердого тела около неподвижной точки // Матем. сб., 1896, т. 19, №1, с. 45–93.
[17] Голубев В. В. Лекции по интегрированию уравнений движения тяжелого твердого тела около неподвижной точки. М.: ГИТТЛ, 1953. 287 с.
[18] Ипатов А. Ф. Движение гироскопа С. В. Ковалевской на границе области ультраэллиптичности // Учен. зап. Петрозаводск. ун-та, 1970, т. 18, вып. 2, с. 6–93.
[19] Борисов А. В., Мамаев И. С. Современные методы теории интегрируемых систем. М.–Ижевск: ИКИ, 2003. 296 с.
[20] Борисов А. В., Мамаев И. С. Динамика твердого тела: Гамильтоновы методы, интегрируемость, хаос. М.–Ижевск: ИКИ, 2005. 576 с.

A reply to "Comments" by A. V. Tsiganov (ND, 2011, no. 3, p. 715)

Pavel E. Ryabov

Financial University under the Government of the Russian Federation
Leningradsky Prospect 49, Moscow, 125993, Russia
orelryabov@mail.ru

Received December 18, 2011
Citation: *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2012, vol. 8, no. 1, pp. 167–172 (Russian)

Комментарий редколлегии.

Завершая данную дискуссию, отметим, что цель публикации в «НД» «Замечаний ...» А. В. Цыганова состояла не в критике автора, а в том, чтобы разъяснить читателям, что переменные П. Е. Рябова — это не новые переменные разделения, а переменные Чаплыгина, сдвинутые на константу интеграла энергии. И, в силу этого, в отличие от переменных

Чаплыгина, переменные Рябова не коммутируют друг с другом. Поскольку П. Е. Рябовым этот вопрос ранее так и не был разъяснен, редколлегия сочла уместным опубликовать комментарий А. В. Цыганова.

Рассмотрим интегрируемую систему, допускающую разделение переменных в эллиптических координатах q и соответствующих моментах p. Следуя Якоби, в этом случае уравнения движения приводятся к уравнениям Абеля

$$\frac{q_1^k \dot{q}_1}{\sqrt{F(q_1)}} + \cdots + \frac{q_n^k \dot{q}_n}{\sqrt{F(q_n)}} = 0\,, \qquad k = 0, \ldots, n-1\,,$$

где F — полином с коэффициентами, зависящими от интегралов движения. Переменные $u_i = q_i + H$, $\widehat{u}_i = q_i^2 + H$ или $\widetilde{u}_i = q_i^2 p_i^2 + H$, а также все другие подобные переменные попрежнему удовлетворяют уравнениям Абеля, которые по теореме Пуанкаре бирационально эквивалентны исходным уравнениям.

При этом никто не называет подобные переменные новыми переменными разделения, отличными от эллиптических координат, которые выделены не только тем, что были введены Эйлером и Якоби, а еще и тем, что они являются коммутирующими переменными относительно канонической скобки Пуассона.