Нелинейная динамика. 2012. Т. 8. № 2. С. 431–441.
Полнотекстовая версия в свободном доступе
http://nd.ics.org.ru

КЛАССИЧЕСКИЕ РАБОТЫ. СТРАНИЦЫ ИСТОРИИ

П. В. Воронец
(1871–1923)

100 лет тому назад в «Mathematische Annalen» появилась третья и последняя из опубликованных в этом журнале работ известного киевского механика Петра Васильевича Воронца. В ней в завершенной форме получены уравнения качения без скольжения твердого тела по неподвижной поверхности. Основной идеей Воронца явилось использование общей теоремы об изменении кинетического момента тела относительно движущейся геометрической точки касания тела с опорной поверхностью. В результате в динамические уравнения не вошел момент силы реакции, действующей на тело со стороны опорной поверхности.

К этим уравнениям Воронец шел почти 10 лет. И получилось так, что, за исключением частных случаев (опорная поверхность — плоскость или тело, ограниченное поверхностью вращения), в самом общем случае полученные уравнения не вошли ни в один учебник, ни в одну монографию по теоретической механике, хотя на данную публикацию имеются ссылки в научной литературе. Приложениями уравнений Воронца в рассматриваемой задаче механики занимались Я. Штаерман (1915), А. Билимович (1916) и Ю. П. Бычков (1965–1967, 2004).

Публикация русского перевода указанной работы классика неголономной механики П. В. Воронца безусловно будет полезна широкому кругу современных специалистов по общей и прикладной механике.

А. С. Сумбатов

Об уравнениях движения твердого тела

П. Воронец

Дифференциальные уравнения движения тела получают обычно в проекциях на оси неподвижной в пространстве системы координат $O_1x_1y_1z_1$ или на оси системы $Oxyz$, которая жестко связана с телом. В немногих случаях используются оси $M\xi\eta\zeta$, которые подвижны как относительно $Oxyz$, так и относительно $O_1x_1y_1z_1$, причем в большинстве таких случаев полюс M либо зафиксирован в неподвижном пространстве, либо совпадает с центром тяжести тела[1)]. Однако можно указать значительный класс задач, в которых полезно использовать оси $M\xi\eta\zeta$ с подвижным полюсом M, который не совпадает с основными точками тела. Например, когда мы рассматриваем движение тела, которое катится без скольжения по заданной поверхности S_1. Если мы выбираем полюсом системы $M\xi\eta\zeta$ точку, в которой поверхность S тела касается поверхности S_1 *в данный* момент, то в уравнения движения тела войдут те моменты действующих сил, которые не зависят от нормальной реакции поверхности S_1 и от компонент силы трения. Пренебрегая моментами трения качения и верчения, в итоге получим уравнения движения и условные уравнения, которым подчинено тело. Они образуют полную систему дифференциальных уравнений, которые определяют движение тела. Остальные уравнения служат только для определения упомянутой нормальной реакции и проекций силы трения.

Данная статья распадается на 2 части. В первой будут получены уравнения движения движущегося тела относительно системы осей $M\xi\eta\zeta$, которая имеет любое заданное движение. Во второй части полученные уравнения применяются к проблеме движения качения и разъясняются на одном простом примере.

В системе осей $M\xi\eta\zeta$ мы записываем следующее[2)] утверждение динамики системы материальных точек: «Геометрическая производная $\dot{P}$ системы векторов P, которая состоит из кинематических величин, характеризующих движение системы материальных точек, эквивалентна системе векторов Π приложенных сил и реакций». Если полюс M, относительно которого рассчитываются моменты систем P и Π, является неподвижной точкой, то имеем уравнения, выражающие эту эквивалентность

$$(\dot{L}) = (\Lambda), \quad (\dot{G}) = (\Gamma),$$

где L, G и Λ, Γ — результирующие векторы и результирующие моменты относительно точки M систем P и Π. Однако если полюс M — подвижная точка, то есть ее координаты x_1, y_1, z_1 относительно неподвижных осей $O_1x_1y_1z_1$ являются функциями времени t, то указанные формулы должны быть заменены следующими:

$$(\dot{L}) = (\Lambda), \quad (\dot{G}) + (K) = (\Gamma). \tag{1}$$

Woronetz P. Über die Bewegungsgleichungen eines starren Körpers // Mathematische Annalen. 1912. Bd. 71. S. 392–403. Перевод с немецкого А. С. Сумбатова.

[1)] Ср., например, Routh E. J. The advanced part of a treatise on the Dynamics of a system of rigid bodies. Ch. 1.

[2)] Суслов Г. К. Основы аналитической механики: Т. 1, § 190. Киев, 1900.

Здесь K обозначает момент результирующего вектора L относительно «производного» полюса $M'(\dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{z}_1)$. Величины $\dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{z}_1$ — это производные координат x_1, y_1, z_1 полюса по времени t.

I.

Мы полагаем, что в неподвижном пространстве $O_1x_1y_1z_1$ задана система координат $Oxyz$, жестко связанная с твердым телом, и обозначаем через p, q, r, a, b, c, проекции мгновенной угловой скорости ω тела и скорости полюса O на оси x, y, z. Тогда кинетическая энергия T тела будет однородной квадратичной функцией переменных p, q, r, a, b, c с постоянными коэффициентами.

Вводится третья ортогональная система координат $M\xi\eta\zeta$, координаты начала M (полюса) которой в системе $Oxyz$ обозначим через x, y, z и косинусы углов осей ξ, η, ζ с осями x, y, z соответственно — через $\lambda, \lambda', \ldots, \nu''$:

	x	y	z
ξ	λ	λ'	λ''
η	μ	μ'	μ''
ζ	ν	ν'	ν''

Элементы таблицы даны как функции времени t или координат твердого тела.

Проекции σ, τ, n, α, β, γ угловой скорости ω тела и скорости той точки твердого тела, которая совпадает с полюсом M в данный момент времени, на оси ξ, η, ζ определяются формулами

$$\sigma = p\lambda + q\lambda' + r\lambda'',$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\alpha = (a + qz - ry)\,\lambda + (b + rx - pz)\,\lambda' + (c + py - qx)\,\lambda'',$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Разрешив эти уравнения относительно величин p, q, r, a, b, c, получим

$$\begin{gathered} p = \sigma\lambda + \tau\mu + n\nu, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a = \alpha\lambda + \beta\mu + \gamma\nu + \sigma\left(y\lambda'' - z\lambda'\right) + \tau\left(y\mu'' - z\mu'\right) + n\left(y\nu'' - z\nu'\right), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{gathered} \tag{2}$$

и перепишем функцию T в виде

$$T\,(a, b, c, p, q, r) = \Theta\,(\alpha, \beta, \gamma, \sigma, \tau, n)\,,$$

где

$$\begin{gathered} \frac{\partial\Theta}{\partial\alpha} = \frac{\partial T}{\partial a}\lambda + \frac{\partial T}{\partial b}\lambda' + \frac{\partial T}{\partial c}\lambda'', \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{\partial\Theta}{\partial\sigma} = \frac{\partial T}{\partial a}\left(y\lambda'' - z\lambda'\right) + \ldots + \frac{\partial T}{\partial p}\lambda + \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{gathered} \tag{3}$$

Так как производные от T по величинам a, b, c, p, q, r в осях x, y, z определяют результирующий вектор и результирующий момент относительно точки O движения системы материальных точек, составляющих твердое тело, то из полученных формул следует, что

$$\frac{\partial\Theta}{\partial\alpha} = L\cos(L,\xi), \quad \frac{\partial\Theta}{\partial\sigma} = G\cos(G,\xi),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

где L и G, обозначают, как и в формулах (1), результирующий вектор системы P и результирующий момент относительно полюса M.

Если мы обозначим через x_1, y_1, z_1 координаты полюса M в неподвижной системе $O_1x_1y_1z_1$, то координаты «производного» полюса M' в той же системе равны $\dot{x}_1$, $\dot{y}_1$, $\dot{z}_1$, то есть равны производным величин x_1, y_1, z_1 по времени t. Следовательно, координаты вектора M' по отношению к осям, параллельным осям ξ, η, ζ и с началом O_1, равны

$$(\dot{x} + a + qz - ry)\,\lambda + (\dot{y} + b + rx - pz)\,\lambda' + (\dot{z} + c + py - qx)\,\lambda'',$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

или $\xi' + \alpha$, $\eta' + \beta$, $\zeta' + \gamma$, где для краткости использованы обозначения

$$\xi' = \dot{x}\lambda + \dot{y}\lambda' + \dot{z}\lambda'', \quad \eta' = \dot{x}\mu + \ldots, \quad \zeta' = \dot{x}\nu + \ldots. \tag{4}$$

Проектируя встретившийся в (1) вектор K на оси ξ, η, ζ, получим

$$K\cos(K,\xi) = \left(\eta' + \beta\right)\frac{\partial\Theta}{\partial\gamma} - \left(\zeta' + \gamma\right)\frac{\partial\Theta}{\partial\beta},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Оси системы $Oxyz$ движутся по отношению к системе $M\xi\eta\zeta$ с угловой скоростью ω_1, проекции которой σ_1, τ_1, n_1 по известным формулам кинематики имеют вид[3)]

$$\sigma_1 = \mu\dot{\nu} + \mu'\dot{v}' + \mu''\dot{v}'', \quad \tau_1 = \nu\dot{\lambda} + \ldots, \quad n_1 = \lambda\dot{\mu} + \ldots, \tag{5}$$

а проекции на оси ξ, η, ζ угловой скорости вращения осей $M\xi\eta\zeta$ относительно неподвижной системы $O_1x_1y_1z_1$ равны $\sigma - \sigma_1$, $\tau - \tau_1$, $n - n_1$.

Если мы воспользуемся теперь геометрическими уравнениями (1), проектируя векторы в (1) на оси ξ, η, ζ, то получим дифференциальные уравнения движения твердого тела в виде

$$\begin{gathered}
\frac{d}{dt}\frac{\partial\Theta}{\partial\alpha} + (\tau - \tau_1)\,\frac{\partial\Theta}{\partial\gamma} - (n - n_1)\,\frac{\partial\Theta}{\partial\beta} = \Lambda_\xi,\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\frac{d}{dt}\frac{\partial\Theta}{\partial\sigma} + (\tau - \tau_1)\,\frac{\partial\Theta}{\partial n} - (n - n_1)\,\frac{\partial\Theta}{\partial\tau} + \left(\eta' + \beta\right)\,\frac{\partial\Theta}{\partial\gamma} - \left(\zeta' + \gamma\right)\,\frac{\partial\Theta}{\partial\beta} = \Gamma_\xi,\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,
\end{gathered} \tag{6}$$

[3)]Действительно, обозначим орты системы координат $M\xi\eta\zeta$ через i, j, k и совместим точки O и M. Так как скорость конца вектора k относительно системы координат $Mxyz$ равна $\dot{k} = (-\omega_1)\times k$, то $j\cdot\dot{k} = j\cdot(-\omega_1\times k) = \omega_1\cdot(j\times k) = \sigma_1$, что совпадает с первой формулой (5). Аналогично доказываются остальные формулы (5). — *Прим. перев.*

где $\Lambda_\xi, \Lambda_\eta, \ldots, \Gamma_\zeta$ — проекции результирующего вектора и результирующего момента действующих на тело сил и реакций, подсчитанного относительно точки M.

Если действующие на тело силы и движение системы осей $M\xi\eta\zeta$ заданы, а реакции и проекции α, β, γ, σ, τ, n скорости точки M и угловой скорости тела выражены координатами тела и их производными по времени, то полученные уравнения (6) определяют эти координаты как функции времени.

II.

Имея общие формулы (6) уравнений движения твердого тела, катающегося без скольжения по данной поверхности S_1, мы предполагаем, что в каждый момент времени есть неподвижная точка тела. Если мы выберем эту точку тела полюсом (началом) системы осей $M\xi\eta\zeta$, то уравнения неголономных связей, которым подчинено движение тела, примут вид

$$a = yr - zq, \quad b = zp - xr, \quad c = xq - yp, \tag{7}$$

и в формулах (6) следует положить

$$\alpha = 0, \quad \beta = 0, \quad \gamma = 0.$$

Кроме того, для простоты, мы считаем, что оси $Oxyz$ совпадают с главными центральными осями инерции тела. Если M — масса, A, B, C — центральные главные моменты инерции тела, то

$$2T = M\left(a^2 + b^2 + c^2\right) + Ap^2 + Bq^2 + Cr^2, \tag{8}$$

так что, согласно формулам (8), (7) и (2), для Θ получим выражение

$$\begin{gathered} 2\Theta = M\left(x^2 + y^2 + z^2\right)\left(\sigma^2 + \tau^2 + n^2\right) - M\left(\xi\sigma + \eta\tau + \zeta n\right)^2 + \\ + A\left(\sigma\lambda + \tau\mu + n\nu\right)^2 + B\left(\sigma\lambda' + \tau\mu' + n\nu'\right)^2 + C\left(\sigma\lambda'' + \tau\mu'' + n\nu''\right)^2 \end{gathered} \tag{9}$$

с учетом формул

$$\xi = x\lambda + y\lambda' + z\lambda'', \quad \eta = x\mu + \ldots, \quad \zeta = x\nu + \ldots. \tag{10}$$

Что касается теперь производных от Θ по α, β, γ, то уравнения (3) и (8) дают

$$\frac{\partial\Theta}{\partial\alpha} = M\left(a\lambda + b\lambda' + c\lambda''\right),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

или с учетом (7), (2) и (10) [4)]

$$\frac{\partial\Theta}{\partial\alpha} = M\left(\eta n - \zeta\tau\right),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

[4)] $\frac{\partial\Theta}{\partial\alpha}$, $\frac{\partial\Theta}{\partial\beta}$, $\frac{\partial\Theta}{\partial\gamma}$ — проекции количества движения тела на оси ξ, η, ζ. Так как скорость точки контакта M равна нулю и $(-\xi, -\eta, -\zeta)$ — координаты центра масс O, то количество движения тела равно произведению *масса тела* $\cdot\, \omega \times \overrightarrow{MO}$, откуда следуют приведенные ниже формулы. — *Прим. перев.*

Таким образом, последние три уравнения (6) можно записать в виде

$$\begin{gathered}\frac{d}{dt}\frac{\partial\Theta}{\partial\sigma}+(\tau-\tau_1)\,\frac{\partial\Theta}{\partial n}-(n-n_1)\,\frac{\partial\Theta}{\partial\tau}+\\ +M\left[\xi\left(\xi'\sigma+\eta'\tau+\zeta'n\right)-\sigma\left(\xi\xi'+\eta\eta'+\zeta\zeta'\right)\right]=\Gamma_\xi,\end{gathered}\tag{11}$$

. . . .

Эти уравнения будут применены к конкретной задаче о качении.

Следуя К. Нейману[5)], возьмем в качестве координат твердого тела, катающегося по данной поверхности S_1, следующие величины: гауссовы координат u и v той точки M на поверхности S тела, которой поверхность S касается поверхности S_1, гауссовы координаты u_1 и v_1 той же точки M на поверхности S_1 и угол ϑ, который составляет координатная линия u $(v = \text{const})$ с координатной линией v_1 $(u_1 = \text{const})$ в точке M.

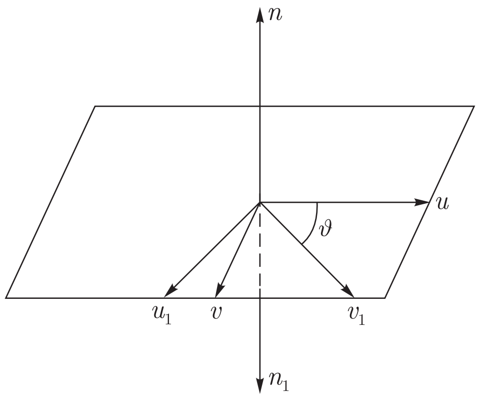

Рис. 1

Традиционно обозначаем через E, F, G, D, D', D'' коэффициенты фундаментальных форм первого и второго порядка[6)] поверхности S. Те же коэффициенты для поверхности S_1 будут E_1, F_1, G_1, D_1, D_1', D_1''. Для простоты мы предполагаем, что линии u и v на S и линии u_1и v_1 на S_1 — это линии кривизны на этих поверхностях:

$$F=0,\quad D'=0,\quad F_1=0,\quad D_1'=0.$$

Если движение тела по поверхности S_1 происходит без скольжения, то скорость точки тела, соприкасающейся с поверхностью S_1, равна нулю. Мы выбираем эту точку в качестве начала координатных осей $M\xi\eta\zeta$, после чего можем воспользоваться формулами (11). При этом сами оси ξ,η,ζ совпадают, соответственно, с касательными к координатным линиям u, v и с нормалью n к S в точке M.

Если задать поверхность S тела конкретными формулами

$$x=x\,(u,v),\quad y=y\,(u,v),\quad z=z\,(u,v),$$

то координаты x,y,z полюса M и девять косинусов

$$\lambda=\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial x}{\partial u},\quad \mu=\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial x}{\partial v},\quad \nu=\frac{1}{\sqrt{EG}}\left(\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}-\frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial u}\right),$$

. . . .

будут заданными функциями координат u и v.

[5)]Neumann C. *Grundzüge der analytischen Mechanik*, Sitzber. Sächs. Akad. 1899.

[6)]Stahl und Kommerell, Die Grundformeln der allgemeinen Flächentheorie, 1893, Formeln (4) § 1 und (1) § 2.

Продифференцировав функции $\lambda, \lambda', \ldots, \mu''$ по t, получим выражения

$$\dot{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{E}}\left(\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}\dot{u} + \frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v}\dot{v}\right) + \frac{\partial x}{\partial u}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\sqrt{E}}\right),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\dot{\mu} = \frac{1}{\sqrt{G}}\left(\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v}\dot{u} + \frac{\partial^2 x}{\partial v^2}\dot{v}\right) + \frac{\partial x}{\partial v}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\sqrt{G}}\right),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

и, следовательно,

$$\nu\dot{\mu} + \nu'\dot{\mu}' + \nu''\dot{\mu}'' = \frac{D''}{\sqrt{G}}\,\dot{v}, \quad \nu\dot{\lambda} + \ldots = \frac{D}{\sqrt{E}}\,\dot{u},$$
$$\lambda\dot{\mu} + \ldots = \frac{1}{2\sqrt{EG}}\left(\frac{\partial E}{\partial v}\,\dot{u} - \frac{\partial G}{\partial u}\,\dot{v}\right).$$

Таким образом, в силу (5) получаем

$$\sigma_1 = -\frac{D''}{\sqrt{G}}\,\dot{v}, \quad \tau_1 = \frac{D}{\sqrt{E}}\,\dot{u}, \quad n_1 = \frac{1}{2\sqrt{EG}}\left(\frac{\partial E}{\partial v}\,\dot{u} - \frac{\partial G}{\partial u}\,\dot{v}\right). \tag{12}$$

Чтобы выразить проекции σ, τ, n мгновенной угловой скорости ω тела через координаты u, v, u_1, v_1, ϑ и обобщенные скорости $\dot{u}, \dot{v}, \ldots$, мы разлагаем угловую скорость ω на три компоненты:

$$(\omega) = (\omega_1) + (\omega_2) + (\omega_3),$$

где ω_1 — угловая скорость поворота системы осей $Oxyz$ относительно системы $Muvn$, ω_2 — угловая скорость поворота системы осей $Muvn$ относительно системы $Mu_1v_1n_1$ (рис. 1) и ω_3 — угловая скорость поворота системы $Mu_1v_1n_1$ относительно $Ox_1y_1z_1$.

Угловая скорость ω_1 определяется тогда формулами (12), скорость ω_2, согласно рисунку 1, направлена вдоль n_1 и равна $\dot{\vartheta}$, скорость ω_3 рассчитывается аналогичным образом, как и ω_1. Мы получаем (см. рис. 1)

$$\begin{aligned}
\sigma &= -\frac{D''}{\sqrt{G}}\,\dot{v} - \frac{D_1''}{\sqrt{G_1}}\,\dot{v}_1\sin\vartheta - \frac{D_1}{\sqrt{E_1}}\,\dot{u}_1\cos\vartheta,\\
\tau &= \frac{D}{\sqrt{E}}\,\dot{u} - \frac{D_1}{\sqrt{E_1}}\,\dot{u}_1\sin\vartheta + \frac{D_1''}{\sqrt{G_1}}\,\dot{v}_1\cos\vartheta,\\
n &= \frac{1}{2\sqrt{EG}}\left(\frac{\partial E}{\partial v}\,\dot{u} - \frac{\partial G}{\partial u}\,\dot{v}\right) + \frac{1}{2\sqrt{E_1G_1}}\left(\frac{\partial E_1}{\partial v_1}\,\dot{u}_1 - \frac{\partial G_1}{\partial u_1}\,\dot{v}_1\right) - \dot{\vartheta}.
\end{aligned} \tag{13}$$

Если мы обозначим через ρ и ε расстояния от центра тяжести O тела до точки M контакта и до касательной плоскости к S в точке M

$$\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2, \quad \varepsilon = x\nu + y\nu' + z\nu'',$$

то ρ и ε являются функциями от u и v, а формулы (10) и (4) дают

$$\xi = \frac{\rho}{\sqrt{E}}\frac{\partial\rho}{\partial u}, \quad \eta = \frac{\rho}{\sqrt{G}}\frac{\partial\rho}{\partial v}, \quad \zeta = \varepsilon,$$
$$\xi' = \sqrt{E}\dot{u}, \quad \eta' = \sqrt{G}\dot{v}, \quad \zeta' = 0.$$

Имея (11), запишем теперь уравнения движения тела в форме

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\,\frac{\partial\Theta}{\partial\sigma}+(\tau-\tau_1)\,\frac{\partial\Theta}{\partial n}-(n-n_1)\,\frac{\partial\Theta}{\partial\tau}+M\left(\rho\,\frac{\partial\rho}{\partial u}\,\frac{\tau}{\sqrt{E}}-\rho\,\frac{\partial\rho}{\partial v}\,\frac{\sigma}{\sqrt{G}}\right)\sqrt{G}\dot{v}=\Gamma_\xi,\\
&\frac{d}{dt}\,\frac{\partial\Theta}{\partial\tau}+(n-n_1)\,\frac{\partial\Theta}{\partial\sigma}-(\sigma-\sigma_1)\,\frac{\partial\Theta}{\partial n}-M\left(\rho\,\frac{\partial\rho}{\partial u}\,\frac{\tau}{\sqrt{E}}-\rho\,\frac{\partial\rho}{\partial v}\,\frac{\sigma}{\sqrt{G}}\right)\sqrt{E}\dot{u}=\Gamma_\eta,\\
&\frac{d}{dt}\,\frac{\partial\Theta}{\partial n}+(\sigma-\sigma_1)\,\frac{\partial\Theta}{\partial\tau}-(\tau-\tau_1)\,\frac{\partial\Theta}{\partial\sigma}+M\varepsilon\left(\sqrt{E}\dot{u}\sigma+\sqrt{G}\dot{v}\tau\right)-\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad -M\left(\rho\,\frac{\partial\rho}{\partial u}\,\dot{u}+\rho\,\frac{\partial\rho}{\partial v}\,\dot{v}\right)n=\Gamma_\zeta,
\end{aligned}
\tag{14}
$$

где Θ из (9) принимает вид

$$
\begin{aligned}
2\Theta=M\rho^2\left(\sigma^2+\tau^2+n^2\right)-M\left(\rho\frac{\partial\rho}{\partial u}\frac{\sigma}{\sqrt{E}}+\rho\frac{\partial\rho}{\partial v}\frac{\tau}{\sqrt{G}}+\varepsilon n\right)^2+\\
+A\left(\sigma\lambda+\tau\mu+n\nu\right)^2+B\left(\sigma\lambda'+\tau\mu'+n\nu'\right)^2+C\left(\sigma\lambda''+\tau\mu''+n\nu''\right)^2.
\end{aligned}
\tag{15}
$$

Итак, Θ — однородная функция второй степени по переменным σ, τ, n с коэффициентами, которые зависят только от u и v.

Следует отметить, что в (14) величины Γ_ξ, Γ_η, Γ_ζ обозначают проекции моментов действующих сил, взятых относительно точки M, в то время как ни нормальная реакция со стороны поверхности S_1, ни сила трения не дают момента относительно полюса M.

Запишем еще неголономные уравнения связи (7) через координаты тела и обобщенные скорости. Для этого заметим, что скорость V, с которой движется точка M контакта по поверхности S тела, геометрически идентична скорости V_1 движения точки M на поверхности S_1. Таким образом, для проекций векторов V и V_1 на направления u_1 и v_1 получаем

$$
\begin{aligned}
\sqrt{E_1}\dot{u}_1&=\sqrt{G}\dot{v}\cos\vartheta-\sqrt{E}\dot{u}\sin\vartheta,\\
\sqrt{G_1}\dot{v}_1&=\sqrt{G}\dot{v}\sin\vartheta+\sqrt{E}\dot{u}\cos\vartheta.
\end{aligned}
\tag{16}
$$

Восемь дифференциальных уравнений первого порядка (13), (14) *и* (16) *определяют координаты* u, v, u_1, v_1, ϑ *тела и три величины* σ, τ, n *как функции времени* t.[7)]

Пусть твердое тело, например, материальная плоскость

$$
\begin{gathered}
x=u\cos v,\quad y=u\sin v,\quad z=0,\quad \rho^2=u^2,\quad \varepsilon=0,\\
E=1,\quad G=u^2,\quad D=0,\quad D''=0,\quad \sigma_1=0,\quad \tau_1=0,\quad n_1=-\dot{v},
\end{gathered}
\tag{17}
$$

обкатывает без проскальзывания некоторый шар

$$
\begin{gathered}
x_1=R_1\sin u_1\cos v_1,\quad y_1=R_1\sin u_1\sin v_1,\quad z_1=R_1\cos u_1,\\
E_1={R_1}^2,\quad G_1={R_1}^2\sin^2 u_1,\quad D_1=-R_1,\quad D_1''=-R_1\sin^2 u_1.
\end{gathered}
\tag{18}
$$

[7)]Полученные дифференциальные уравнения качения твердого тела более удобны для применения, чем те, которые приведены в моей работе «О движении твердого тела, катящегося без скольжения на произвольной поверхности» (*Math. Ann., 70*). В самом деле, при использовании уравнений движения в форме (14) нет необходимости выполнять довольно сложный переход от $\Theta\,(u,v,\sigma,\tau,n)$ к $\Theta(u,v,\ u_1,v_1,\vartheta,\dot{u},\dot{v},\dot{\vartheta})$ с помощью (13) и (16).

Действующие на плоскость силы имеют равнодействующую, которая проходит через центр масс O плоскости, центр O_1 шара и зависит только от расстояния между точками O и O_1. Следовательно,

$$\Gamma_\xi = 0, \quad \Gamma_\eta = -\varphi \frac{R_1 u}{\sqrt{{R_1}^2 + u^2}}, \quad \Gamma_\zeta = 0,$$

$$\varphi = F\left(\sqrt{{R_1}^2 + u^2}\right).$$

Полагаем, что моменты инерции A и B равны. Тогда

$$A = B = \frac{1}{2}C,$$

так что в силу (15)

$$2\Theta = A\sigma^2 + \left(A + Mu^2\right)\tau^2 + \left(2A + Mu^2\right)n^2. \tag{19}$$

Восемь дифференциальных уравнений (16), (13) и (14) определяют движение плоскости. Имеем

$$\begin{gathered}
R_1\dot u_1 = u\dot v\cos\vartheta - \dot u\sin\vartheta,\\
R_1\dot v_1\sin u_1 = u\dot v\sin\vartheta + \dot u\cos\vartheta,\\
\sigma = \dot v_1\sin u_1\sin\vartheta + \dot u_1\cos\vartheta = \frac{u}{R_1}\dot v,\\
\tau = \dot u_1\sin\vartheta - \dot v_1\sin u_1\cos\vartheta = -\frac{1}{R_1}\dot u,\\
n = -\dot v - \dot v_1\cos u_1 - \dot\vartheta,\\
\frac{d\sigma}{dt} + (n - \dot v)\,\tau = 0,\\
\left(A + Mu^2\right)\frac{d\tau}{dt} + Mu\dot u\tau - \left(A + Mu^2\right)\sigma n + A\sigma\dot v = -\varphi\frac{R_1 u}{\sqrt{{R_1}^2 + u^2}},\\
\left(2A + Mu^2\right)\frac{dn}{dt} + Mu\dot u n + Mu^2\sigma\tau = 0.
\end{gathered} \tag{20}$$

Рассмотрим первое частное решение

$$u = u_0 = \mathrm{const},$$

для которого в силу (20)

$$\tau = 0, \quad \sigma = \sigma_0, \quad n = n_0, \quad \dot v = R_1\frac{\sigma_0}{u_0}, \quad v = R_1\frac{\sigma_0}{u_0}t + v_0,$$

где константы σ_0, n_0, u_0 связаны соотношением

$$\left(A + Mu_0^2\right)\sigma_0 n_0 - A\sigma_0^2\,\frac{R_1}{u_0} = \varphi_0\frac{R_1 u_0}{\sqrt{{R_1}^2 + u_0^2}}.$$

Точка M описывает, в силу (17), на плоскости S окружность с постоянной угловой скоростью. В центр окружности проектируется центр тяжести шара.

Для определения траектории движения точки M на сфере S_1 из (20) получаем уравнения

$$\dot{u}_1 = \sigma_0 \cos\vartheta, \quad \dot{v}_1 \sin u_1 = \sigma_0 \sin\vartheta,$$

$$\dot{\vartheta} = -\sigma_0 \left(P + \operatorname{ctg} u_1 \sin\vartheta\right), \quad P = \frac{n_0}{\sigma_0} + \frac{R_1}{u_0},$$

интегралы которых имеют вид

$$\sin u_1 \sin\vartheta = P\cos u_1 + C_1, \quad v_1 - C_2 = \arccos\frac{P + C_1\cos u_1}{\sqrt{1 + P^2 - {C_1}^2}\sin u_1},$$

$$\sigma_0\sqrt{1+P^2}\,(t - C_3) = \arccos\frac{\left(1+P^2\right)\cos u_1 + PC_1}{\sqrt{1+P^2-{C_1}^2}},$$

где константы C_1, C_2, C_3 имеют произвольные значения. С помощью (18) легко находим отсюда, что точка M на сферической поверхности S_1 описывает большой или малый круг в зависимости от того, равна величина P нулю или нет.

Пусть $\dot{u}$ не равна нулю, выберем u в качестве независимой переменной. Тогда из (20) для определения σ и n как функций от u имеем два линейных дифференциальных уравнения первого порядка

$$\frac{d\sigma}{du} - \frac{n}{R_1} + \frac{\sigma}{u} = 0, \quad \left(2A + Mu^2\right)\frac{dn}{du} + Mun - Mu^2\frac{\sigma}{R_1} = 0. \tag{21}$$

Эти уравнения имеют частное решение

$$\sigma = 0, \quad n = 0,$$

для которого, в силу (20), имеем

$$\dot{v} = 0, \quad v = v_0 = \text{const}.$$

Точка контакта M описывает прямую линию на плоскости S, которая проходит через центр плоскости.

Другие координаты тела удовлетворяют остальным уравнениям (20)

$$\frac{du_1}{du} = -\frac{1}{R_1}\sin\vartheta, \quad \frac{dv_1}{du}\sin u_1 = \frac{1}{R_1}\cos\vartheta, \quad \frac{d\vartheta}{du} = -\frac{1}{R_1}\operatorname{ctg}\, u_1\cos\vartheta,$$

которые интегрируются:

$$\sin u_1\cos\vartheta = C_1, \quad v_1 - C_2 = \arcsin\frac{C_1\operatorname{ctg} u_1}{\sqrt{1-{C_1}^2}},$$

$$\frac{1}{R_1}(u - C_3) = \arcsin\frac{\cos u_1}{\sqrt{1-{C_1}^2}}.$$

Точка M описывает, в силу (18), большой круг на сферической поверхности S_1. Время t как функция u определяется квадратурой из интеграла живых сил

$$\left(A + Mu^2\right)\frac{\dot{u}^2}{{R_1}^2} = 2U + 2h,$$

где U — силовая функция, h — постоянная.

В общем случае, полагая $A = Mk^2$, находим интегралы уравнений (21) с двумя произвольными константами C_1 и C_2 в виде

$$\sigma u = C_1 e^{\frac{1}{R_1}\sqrt{2k^2+u^2}} + C_2 e^{-\frac{1}{R_1}\sqrt{2k^2+u^2}},$$
$$n\sqrt{2k^2+u^2} = C_1 e^{\frac{1}{R_1}\sqrt{2k^2+u^2}} - C_2 e^{-\frac{1}{R_1}\sqrt{2k^2+u^2}}.$$

В силу соотношения

$$\left(2k^2+u^2\right)n^2 = u^2\sigma^2 - 4C_1C_2,$$

интеграл живых сил по формулам (19) и (20) примет вид

$$M\left(k^2+u^2\right)\left(\sigma^2+\tau^2\right) = 2U + 2h + 4MC_1C_2.$$

Силовая функция U является функцией расстояния между точками O и O_1 и, таким образом, зависит только от $\sqrt{{R_1}^2+u^2}$.

Если мы заметим, что в силу (20)

$$\sigma^2+\tau^2 = \frac{1}{{R_1}^2}\left(\dot{u}^2+u^2\dot{v}^2\right), \quad u\sigma = \frac{1}{R_1}u^2\dot{v},$$

то увидим, что установленные формулы дают скорость движения точки контакта M по плоскости S относительно центра масс O как функцию расстояния u от точки M до точки O. Движение самой точки M по плоскости S может, таким образом, быть найдено в квадратурах.

Что касается движения точки M по сферической поверхности S_1, то определение этого движения, как и в случае движения произвольного тела вращения по сфере[8)], приводится к интегрированию уравнения Риккати.

Киев, январь 1911.

Über die Bewegungsgleichungen eines starren Körpers

P. Woronetz

Citation: *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2012, vol. 8, no. 2, pp. 431–441 (Russian)

Originally published in: Mathematische Annalen. 1912. Bd. 71. S. 392–403.

[8)] См. мою вышеупомянутую статью, глава III, § 14.