Нелинейная динамика. 2012. Т. 8. № 2. С. 355–368.
Полнотекстовая версия в свободном доступе
http://nd.ics.org.ru

УДК: 532.517
MSC 2010: 76B47, 34D20, 70K30

Критерий устойчивости правильного вихревого пятиугольника вне круга

Л. Г. Куракин, И. В. Островская

Проведен нелинейный анализ устойчивости стационарного вращения системы пяти одинаковых точечных вихрей, расположенных равномерно на окружности радиуса R_0 вне круговой области радиуса R. Задача сведена к проблеме устойчивости положения равновесия гамильтоновой системы с циклической переменной. Устойчивость трактуется как устойчивость по Раусу. Получены условия устойчивости, формальной устойчивости или неустойчивости в зависимости от значений параметра $q = R^2/R_0^2$.

Ключевые слова: точечный вихрь, стационарное движение, устойчивость, резонанс

Получено 26 января 2012 года
После доработки 24 марта 2012 года

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ в рамках Федеральных целевых программ «Исследования и разработки по приоритетным направлениям развития научно-технического комплекса России на 2007–2013 годы» (госконтракт № 16.516.11.6106), «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 гг. (госконтракт № 14.740.11.0877), Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 10-05-00646, 11-05-01138, 11–05–91052) и Американского фонда гражданских исследований и развития (CRDF), грант RUM1–2943–RO–09.

Куракин Леонид Геннадиевич
kurakin@math.rsu.ru
Факультет математики, механики и компьютерных наук, Южный федеральный университет
344090, Россия, г. Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, д. 8а
Южный математический институт ВНЦ РАН
362027, Россия, г. Владикавказ, ул. Маркуса, д. 22

Островская Ирина Владимировна
ostrov@math.rsu.ru
Факультет математики, механики и компьютерных наук, Южный федеральный университет
344090, Россия, г. Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, д. 8а

Введение

Задачу устойчивости стационарного вращения системы n одинаковых точечных вихрей, расположенных равномерно на окружности (томсоновского вихревого n-угольника), поставил Кельвин (У. Томсон). Имеются ее обобщения на случаи вихрей внутри или вне круговой области. Все эти проблемы решены Хавелоком [1] в линейной постановке. Оказалось, что соответствующие линеаризованные системы имеют экспоненциально растущие решения при $n \geqslant 8$ в задаче Кельвина и при $n \geqslant 7$ — в ее обобщениях. Экспоненциальная неустойчивость имеет место и при $2 \leqslant n \leqslant 6$ (вихри внутри или вне круга), но при определенных значениях параметра задачи. В остальных случаях все собственные значения матрицы линеаризации лежат на мнимой оси, так что для решения задачи устойчивости требуется нелинейный анализ.

Исследования многих авторов проблемы Кельвина при $n \leqslant 7$ завершено в точной нелинейной постановке в работах [2–4]. Результаты нелинейного анализа для круговой области были анонсированы в заметке [5], подробно изложены для четного числа вихрей $n = 2, 4, 6$ в работе [6], а затем отдельно для треугольника [7, 8] и пятиугольника [9].

Устойчивость томсоновского вихревого n-угольника ($n = 2, 4, 6$) вне круговой области исследована в рамках единого подхода в работе [10], а устойчивость вихревого треугольника в работе [11].

В данной работе на основе результатов А. Д. Брюно, А. П. Маркеева и А. Г. Сокольского (см. [12] и обзор [13]) проведен нелинейный анализ устойчивости томсоновского вихревого пятиугольника вне круга.

1. Постановка задачи и формулировка результатов

Движение системы n точечных вихрей на плоскости вне круга радиуса R описывается уравнениями с гамильтонианом (см., например, [14]):

$$\begin{aligned} H = &- \frac{1}{4\pi} \sum_{1\leqslant j<k\leqslant n} \varkappa_j \varkappa_k \ln\bigl|z_j - z_k\bigr|^2 + \frac{1}{8\pi} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \varkappa_j \varkappa_k \ln\bigl|R^2 - z_j \overline{z}_k\bigr|^2 - \\ &- \frac{1}{4\pi} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \varkappa_j \varkappa_k \ln\bigl|z_k\bigr|^2. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Здесь $z_k = x_k + iy_k$, $k = 1, \ldots, n$ — комплексные переменные, x_k, y_k — декартовы координаты k-го вихря, $\varkappa_k$ — его интенсивность.

Далее будем полагать, что все вихри имеют одинаковую интенсивность $\varkappa$. Система с гамильтонианом (1.1) имеет точное решение

$$\begin{aligned} &z_k = e^{i\omega t} u_k, \quad u_k = R_0 e^{2\pi i(k-1)/n}, \quad k = 1, \ldots, n, \\ &\omega = \frac{\varkappa}{4\pi R_0^2} \left(3n - 1 - \frac{2n}{1-q^n}\right), \quad q = \frac{R^2}{R_0^2} < 1. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Таким образом, система n одинаковых вихрей, расположенных на окружности радиуса R_0 в вершинах правильного n-угольника, вращается с постоянной угловой скоростью $\omega = \omega(q)$ (см. рис. 1).

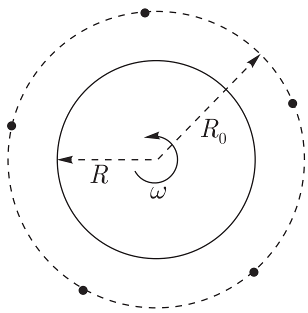

Рис. 1. Стационарное вращение правильного вихревого пятиугольника вне круга. Угловая скорость вращения $\omega = \omega(q)$ зависит от параметра $q = R^2/R_0^2$.

В следующих разделах проведен анализ устойчивости стационарного вращения (1.2) вихревого пятиугольника. Заменами переменных задача сводится к исследованию гамильтоновой системы с циклической переменной. Исключая из системы импульс, отвечающий циклической координате, получаем приведенную гамильтоновую систему. Устойчивость стационарного вращения (1.2) трактуется нами как устойчивость по Раусу [15], то есть как устойчивость по Ляпунову положения равновесия приведенной системы. Соответственно, неустойчивость вихревого многоугольника будет означать неустойчивость по Ляпунову этого положения равновесия.

Далее также используется и понятие формальной устойчивости по Раусу, которое определяется как формальная устойчивость по Ляпунову приведенной системы. Формальная устойчивость по Ляпунову положения равновесия системы означает (см., например, [12]), что существует степенной ряд, возможно расходящийся, который формально является интегралом системы, достигающим минимума на этом положении равновесия.

В данной работе получен критерий устойчивости вихревого пятиугольника, схематично изображенный на рисунке 2. Критическим значениям параметра q

$$q_{05} = .3303989374, \quad q^* = .3333770174, \quad q_{*5} = .3345958365 \tag{1.3}$$

соответствуют резонансы (см. [12, 13]): q_{05} — двукратный нуль (диагонализируемый случай), q^* — резонанс 1 : 2, q_{*5} — резонанс 1 : 1 (недиагонализирумый случай).

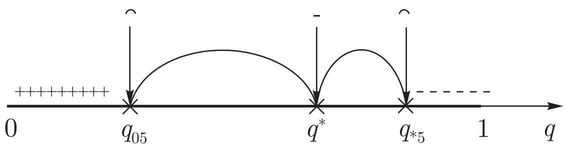

Рис. 2. Критерий устойчивости вихревого пятиугольника вне круга: $q \in (0, q_{05})$ — устойчивость по Раусу $(++)$; $q \in [q_{05}, q^*) \cup (q^*, q_{*5}]$ — формальная устойчивость по Раусу (сплошная дуга); $q = q^*$ и $q \in (q_{*5}, 1)$ — неустойчивость $(--)$. Критические значения параметра q приведены в (1.3).

.

Устойчивость по Раусу, когда $0 < q < q_{05}$, следует из положительной определенности гамильтониана линеаризованной приведенной системы. Неустойчивость при условии $q_{*5} < q < 1$ доказана Хавелоком [1]: соответствующая линеаризованная система имеет экспоненциально растущие решения.

Доказательство формальной устойчивости по Ляпунову приведенной гамильтоновой системы четырех степеней свободы, когда $q \in (q_{05}, q_{*5}) \backslash q^*$, состояло в проверке условий теоремы Брюно [16]. При $q = q_{05}$ в задаче устойчивости имеет место критический случай двукратного нулевого собственного значения (диагонализируемый случай). Формальная устойчивость следует из результатов А. Г. Сокольского (см. [13, 17]). В критическом случае двукратной пары чисто мнимых собственных значений (жорданова клетка) при $q = q_{*5}$ доказательство формальной устойчивости по Раусу повторяет рассуждения работы [18]. При $q = q^*$ имеет место критический случай резонанса 1 : 2. Неустойчивость доказывается применением результатов А. П. Маркеева [13, 19, 20].

2. Устойчивость вихревого пятиугольника. Линейный анализ

Пусть $n = 5$. Заменой переменных

$$z_k(t) = e^{i\omega t} v_k(t), \quad k = 1, \ldots, 5$$

от системы с гамильтонианом (1.1) приходим к системе с гамильтонианом

$$E(v) = H(v) + \frac{\omega}{2} M(v), \quad M = \varkappa \sum_{k=1}^{5} |v_k|^2, \quad v = (v_1, \ldots, v_5) \in \mathbb{C}^5. \tag{2.1}$$

Замена переменных

$$v_k = R_0 \sqrt{2\left(\frac{1}{2} + r_k\right)} e^{i\left(\frac{2\pi}{5}(k-1) + \theta_k\right)}, \quad k = 1, \ldots, 5 \tag{2.2}$$

и масштабирование времени $t \to t/R_0^2$ приводит к гамильтоновой системе

$$\dot r_k = \frac{\partial E}{\partial \theta_k}\big(v(r, \theta)\big), \qquad \dot\theta_k = -\frac{\partial E}{\partial r_k}\big(v(r, \theta)\big), \tag{2.3}$$

где $r = (r_1, \ldots, r_5)$, $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_5)$.

Разложим гамильтониан $E(v(\rho))$, где $\rho \overset{\text{def}}{=} (r, \theta)$, в ряд Тейлора в окрестности нулевого решения:

$$E(v(\rho)) = \frac{\varkappa^2}{4\pi}(E_0 + E_2(v(\rho)) + E_3(v(\rho)) + E_4(v(\rho)) + \ldots). \tag{2.4}$$

Многоточием обозначены слагаемые выше четвертой степени.

Квадратичная форма E_2 представима в виде

$$E_2 = (S\rho, \rho), \quad S = \begin{pmatrix} F_1 & \frac{1}{2} G_0 \\ -\frac{1}{2} G_0 & F_2 \end{pmatrix}. \tag{2.5}$$

Матрица линеаризации системы (2.3) на нулевом решении

$$L = \begin{pmatrix} -G_0 & 2F_2 \\ -2F_1 & -G_0 \end{pmatrix} \tag{2.6}$$

выписана в работе Хавелока [1].

Собственные значения $\lambda_{1k}, \lambda_{2k}$ и $i\lambda_{0k}$ $(k = 1, \ldots, 5)$ матриц F_1, F_2 и G_0, соответственно, имеют вид [1]:

$$\begin{aligned}
\lambda_{1k} &= 4 - \frac{k(5-k)}{2} - \frac{10q^5}{1-q^5} - \frac{25q^{5-k}(1+q^k)^2}{2(1-q^5)^2} - \frac{5k(q^k - q^{5-k})}{2(1-q^5)}, \\
\lambda_{2k} &= \frac{1}{2}k(5-k) - \frac{5k(q^k - q^{5-k})}{2(1-q^5)} - \frac{25q^{5-k}(1-q^k)^2}{2(1-q^5)^2}, \\
\lambda_{0k} &= -\frac{5k(q^k + q^{5-k})}{1-q^5} + \frac{25q^{5-k}(1-q^{2k})}{(1-q^5)^2}.
\end{aligned} \tag{2.7}$$

Матрицы F_1, F_2 имеют общий собственный базис

$$h_m = (1, \cos(m\alpha), \ldots, \cos(4m\alpha))^T, \quad h_{5-m} = (0, \sin(m\alpha), \ldots, \sin(4m\alpha))^T,$$
$$h_5 = (1,1,1,1,1)^T, \quad m = 1, 2, \quad \alpha = \frac{2\pi}{5},$$

так что

$$F_j h_k = \lambda_{jk} h_k, \quad j = 1, 2, \quad k = 1, \ldots, 5.$$

Для матрицы G_0 выполняются соотношения

$$G_0 h_m = -\lambda_{0m} h_{5-m}, \quad G_0 h_{5-m} = \lambda_{0m} h_m, \quad G_0 h_5 = 0.$$

Собственные значения матрицы S получаем, собирая корни полиномов:

$$\Lambda^2 - (\lambda_{1k} + \lambda_{2k})\Lambda + \lambda_{1k}\lambda_{2k} - \frac{1}{4}\lambda_{0k}^2, \quad k = 1, \ldots, 5. \tag{2.8}$$

Собственные значения матрицы линеаризации (2.6) вычисляются по формулам [1]

$$\sigma_k^{\pm} = -i\lambda_{0k} \pm 2\sqrt{-\lambda_{1k}\lambda_{2k}}, \quad k = 1, \ldots, 5. \tag{2.9}$$

Все собственные значения матрицы L лежат на мнимой оси, когда выполнено неравенство

$$0 < q \leqslant q_{*5}. \tag{2.10}$$

Если же это условие нарушено $(q_{*5} < q < 1)$, то среди них есть собственные значения с положительной вещественной частью [1]. Критическое значение q_{*5} указано в (1.3) и является корнем полинома

$$P = -22q^{10} + 10q^8 - 15q^7 + 74q^5 + 15q^3 + 10q^2 - 2. \tag{2.11}$$

Пусть выполнено условие $q \in (0, q_{*5})$. Введем симплектическую матрицу A нормализующего преобразования квадратичной части гамильтониана E_2 (см., например, [12])

$$A = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} -\nu_1 h_4 & -\nu_2 h_3 & -\nu_2 h_3 & -\nu_1 h_4 & \dfrac{h_5}{\sqrt{2\lambda_{15}}} & \nu_1 h_1 & \nu_2 h_2 & -\nu_2 h_2 & -\nu_1 h_1 & h_0 \\ -\dfrac{h_1}{\nu_1} & -\dfrac{h_2}{\nu_2} & \dfrac{h_2}{\nu_2} & \dfrac{h_1}{\nu_1} & h_0 & -\dfrac{h_4}{\nu_1} & -\dfrac{h_3}{\nu_2} & -\dfrac{h_3}{\nu_2} & -\dfrac{h_4}{\nu_1} & \sqrt{2\lambda_{15}}\, h_5 \end{bmatrix}.$$

Здесь $h_0 = (0,0,0,0,0)^T$ — нулевой вектор-столбец и участвуют величины

$$\nu_m = \sqrt[4]{\frac{|\lambda_{2m}|}{|\lambda_{1m}|}}, \quad m = 1, 2.$$

Замена переменных

$$\begin{pmatrix} r \\ \theta \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \xi \\ \zeta \end{pmatrix}, \quad \xi = (\xi_1, \ldots, \xi_5)^T, \quad \zeta = (\zeta_1, \ldots, \zeta_5)^T \tag{2.12}$$

приводит квадратичные слагаемые E_2 разложения (2.4) к нормальной форме

$$\begin{aligned} E_2(r(\xi,\zeta), \theta(\xi,\zeta)) = &\omega_1(\xi_1^2 + \zeta_1^2) + \omega_2(\xi_2^2 + \zeta_2^2) - \omega_3(\xi_3^2 + \zeta_3^2) + \\ &+ \omega_4(\xi_4^2 + \zeta_4^2) + \frac{1}{2}\xi_5^2, \end{aligned} \tag{2.13}$$

$$\omega_3 \stackrel{\text{def}}{=} -\frac{1}{2}\operatorname{Im}\sigma_3^+, \quad \omega_k \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2}\operatorname{Im}\sigma_k^+, \qquad k = 1, 2, 4. \tag{2.14}$$

Заметим, что переменная ζ_5 — циклическая для полной нелинейной системы с гамильтонианом $E(r(\xi,\zeta), \theta(\xi,\zeta))$. Действительно, относительный гамильтониан $E(v(r,\theta))$ инвариантен относительно замены переменных

$$\begin{pmatrix} r \\ \theta \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} r \\ \theta \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} h_0 \\ h_5 \end{pmatrix},$$

где $\gamma \in R$, а h_0, $h_5 \in R^5$ — нулевой и единичный вектор-столбцы. Переменной ζ_5 отвечает базисный вектор $\sqrt{\frac{2\lambda_{15}}{5}}\begin{pmatrix} h_0 \\ h_5 \end{pmatrix}$, следовательно, гамильтониан $E(r(\xi,\zeta), \theta(\xi,\zeta))$ не зависит от ζ_5.

Полагая $\xi_5 = 0$, получаем приведенный гамильтониан:

$$W(\xi_1, \ldots, \xi_4, \zeta_1, \ldots, \zeta_4) = E(r(\xi^0, \zeta^0), \theta(\xi^0, \zeta^0)), \tag{2.15}$$

где $\xi^0 \stackrel{\text{def}}{=} (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4, 0)$, $\zeta^0 \stackrel{\text{def}}{=} (\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4, 0)$.

Введем комплексные переменные $\mathtt{z}_1, \ldots, \mathtt{z}_4$, так что

$$\xi_k = \frac{1}{2}(\mathtt{z}_k + \overline{\mathtt{z}}_k), \quad \zeta_k = -\frac{1}{2}i(\mathtt{z}_k - \overline{\mathtt{z}}_k), \tag{2.16}$$

и разложим приведенный гамильтониан в ряд Тейлора в окрестности нулевого решения:

$$W = \frac{\varkappa^2}{4\pi}(W_0 + W_2 + W_3 + W_4 + \ldots), \tag{2.17}$$

$$W_2 = \omega_1|\mathtt{z}_1|^2 + \omega_2|\mathtt{z}_2|^2 - \omega_3|\mathtt{z}_3|^2 + \omega_4|\mathtt{z}_4|^2. \tag{2.18}$$

Здесь многоточием обозначены слагаемые выше четвертой степени. Величины ω_j ($j = 1, \ldots, 4$) вычисляются по формулам (2.14), (2.9), (2.7) и изображены на рисунке 3.

Величина q_{05} задана в (1.3), находится из условия $\omega_3 = 0$ и является корнем полинома

$$\begin{aligned} Q = &-33q^{12} - 99q^{11} - 128q^{10} - 15q^9 + 240q^8 + 356q^7 + 333q^6 + \\ &+ 256q^5 + 165q^4 + 60q^3 + 2q^2 - 9q - 3. \end{aligned} \tag{2.19}$$

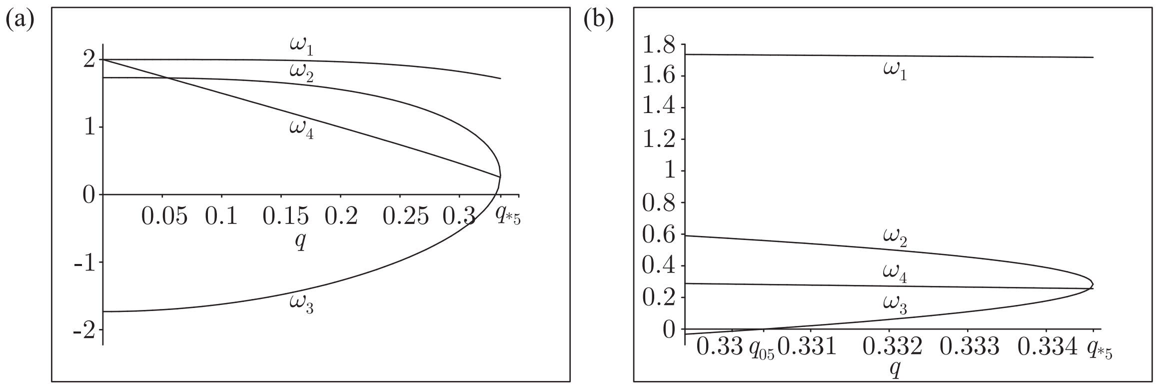

Рис. 3. Зависимость частот $\omega_1, \ldots, \omega_4$ от q на отрезках $[0, q_{*5}]$ (a), $[q_{05} - 10^{-2}, q_{*5}]$ (b).

Пусть выполнено условие $q \in (0, q_{05})$, тогда $\omega_k > 0$, $k = 1, 2, 4$, и $\omega_3 < 0$, так что приведенный гамильтониан положительно определен. Следовательно, стационарное вращение (1.2) устойчиво по Раусу.

Для дальнейшего применения общей теории устойчивости положений равновесий гамильтоновых систем нормализуем приведенный гамильтониан (2.15) до четвертого порядка включительно. При этом резонансные случаи не выше четвертого порядка подлежат отдельному рассмотрению (см., например, [12, 13]). Они указаны в таблице 1. Три из них разбираются в разделах 4–6. Это случай двукратного нуля ($\omega_3 = 0$), резонанс 1 : 2 ($\omega_4 = 2\omega_3$), резонанс 1 : 1 ($\omega_2 = \omega_3$). Остальные резонансы не играют роли, поскольку, как показывают вычисления, в разложении приведенного гамильтониана отсутствуют отвечающие им специфические резонансные слагаемые.

Таблица 1. Перечень всех резонансных соотношений порядка $\leqslant 4$

Двукратный нуль, диагонализируемый случай	$\omega_3 = 0$	$q = q_{05} = .3303989374$
Резонанс 1 : 2	$\omega_2 = 2\omega_3$	$q = .3341203892$
	$\omega_4 = 2\omega_3$	$q = q_* = .3333770174$
Резонанс 1 : 3	$\omega_4 = 3\omega_3$	$q = .3326133065$
	$\omega_2 = 3\omega_3$	$q = .3335293271$
Резонанс 1 : 1	$\omega_4 = \omega_3$	$q = .3345535197$
	$\omega_2 = \omega_3$	$q = q_{*5} = .3345958365$
Резонанс 1 : 1 : 2	$\omega_2 + \omega_4 = 2\omega_3$	$q = .3345910432$

3. Применение теоремы Брюно в случае $q \in (q_{05}, q_{*5}) \backslash q^*$

Пусть $q \in (q_0, q_*)$. Квадратичная форма (2.18) знакопеременна ($\omega_k > 0$, $k = 1, \ldots, 4$), но все собственные значения матрицы линеаризации L лежат на мнимой оси. Форма третьей степени разложения (2.17) имеет вид

$$W_3 = Re\, U_3, \tag{3.1}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{U}_3 = i(&a_1\,\mathsf{z}_4{}^2\,\overline{\mathsf{z}}_3 - a_2\,\mathsf{z}_1\,\mathsf{z}_3\,\overline{\mathsf{z}}_4 + a_3\,\mathsf{z}_2\,\mathsf{z}_4\,\overline{\mathsf{z}}_1 + a_4\,\mathsf{z}_4{}^2\,\mathsf{z}_2 + \\ &+ a_5\,\mathsf{z}_2{}^2\,\overline{\mathsf{z}}_4 - a_6\,\mathsf{z}_3{}^2\,\mathsf{z}_4 - a_7\,\mathsf{z}_1{}^2\,\overline{\mathsf{z}}_2 + a_8\,\mathsf{z}_2{}^2\,\mathsf{z}_1 - \\ &- a_9\,\mathsf{z}_1{}^2\,\mathsf{z}_3 - a_{10}\,\overline{\mathsf{z}}_2\,\mathsf{z}_4\,\mathsf{z}_3 - a_{11}\,\overline{\mathsf{z}}_1\,\mathsf{z}_3{}^2 + a_{12}\,\mathsf{z}_1\,\mathsf{z}_2\,\overline{\mathsf{z}}_3).\end{aligned} \tag{3.2}$$

Графики вещественных коэффициентов a_j $(j = 1, \ldots, 12)$ изображены на рисунке 4.

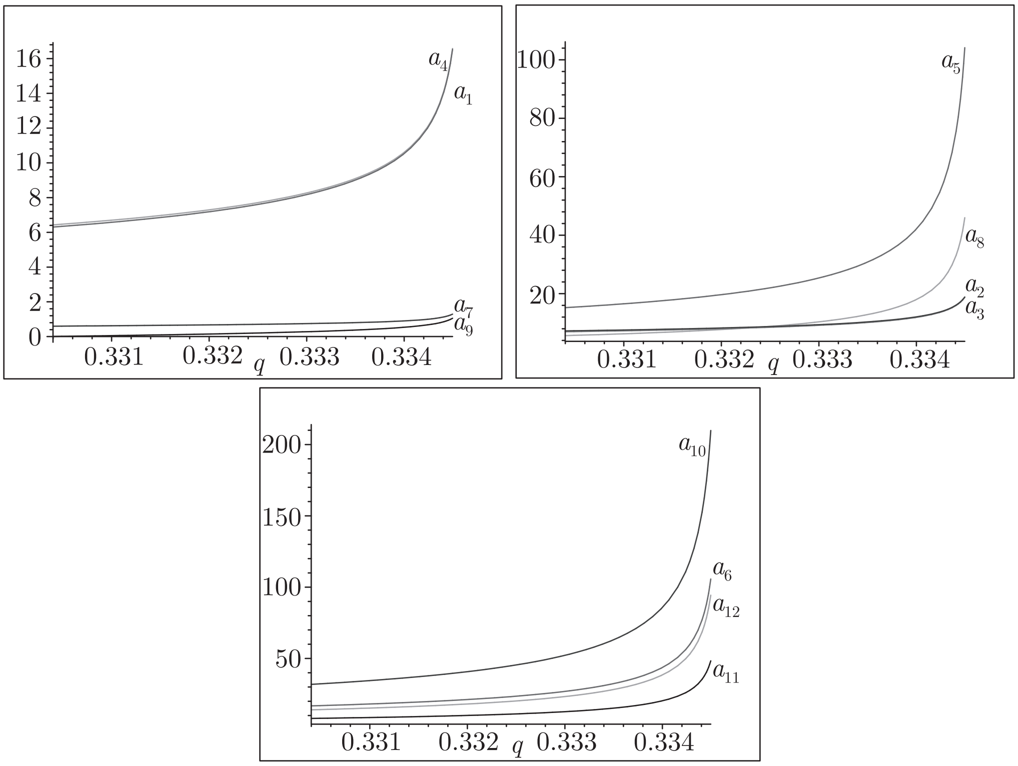

Рис. 4. Зависимость коэффициентов $a_1, \ldots, a_{12}$ от q на интервале (q_{05}, q_{*5}).

Форма четвертой степени W_4 имеет вид

$$W_4 = \sum_{1 \leqslant k \leqslant j \leqslant 4} c_{kj} |\mathsf{z}_k|^2 |\mathsf{z}_j|^2 + \ldots . \tag{3.3}$$

Многоточием обозначены слагаемые четвертой степени вида $\mathsf{z}_1^{m_1}\mathsf{z}_2^{m_2}\mathsf{z}_3^{m_3}\mathsf{z}_4^{m_4}\overline{\mathsf{z}}_1^{k_1}\overline{\mathsf{z}}_2^{k_2}\overline{\mathsf{z}}_3^{k_3}\overline{\mathsf{z}}_4^{k_4}$, кроме выписанных в (3.3), для которых величина $\sum\limits_{\ell=1}^{4} \ell(m_\ell - k_\ell)$ кратна пяти. Графики величин c_{kj} приведены на рисунке 5.

При помощи нормализующей замены (см., например, [12])

$$(\mathsf{z}_i, \overline{\mathsf{z}}_i) \to (Z_i, \overline{Z}_i), \quad i = 1, \ldots, 4,$$

приводим гамильтониан (2.15) к нормальной форме до четвертого порядка включительно:

$$W = \omega_1 |Z_1|^2 + \omega_2 |Z_2|^2 - \omega_3 |Z_3|^2 + \omega_4 |Z_4|^2 + \sum_{1 \leqslant k \leqslant j \leqslant 4} C_{kj} |Z_k|^2 |Z_j|^2 + \ldots . \tag{3.4}$$

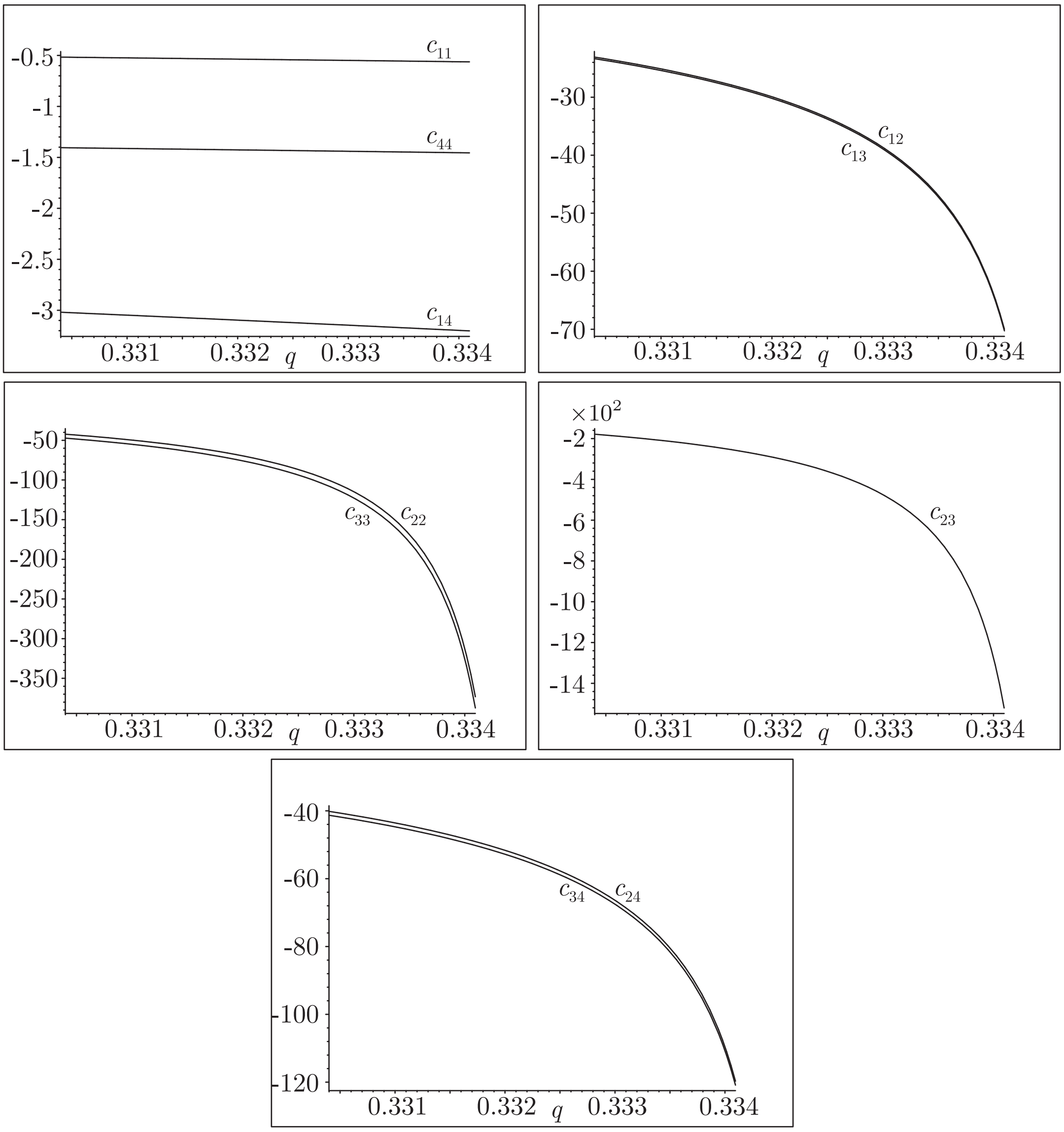

Рис. 5. Графики коэффициентов $c_{kj}(q)$ на интервале (q_{05}, q_{*5}).

Здесь многоточием обозначены слагаемые четвертой степени и выше, кроме выписанных. Коэффициенты C_{kj} задаются выражениями

$$C_{11} = \frac{1}{4}\,\frac{{a_7}^2}{-\omega_2 + 2\,\omega_1} - \frac{1}{4}\,\frac{{a_9}^2}{2\,\omega_1 - \omega_3} + c_{11},$$

$$C_{12} = \frac{1}{4}\,\frac{{a_{12}}^2}{\omega_2 + \omega_1 + \omega_3} + \frac{1}{4}\,\frac{{a_3}^2}{-\omega_2 + \omega_1 - \omega_4} - \frac{{a_7}^2}{-\omega_2 + 2\,\omega_1} - \frac{{a_8}^2}{2\,\omega_2 + \omega_1} + c_{12},$$

$$C_{13} = -\frac{1}{4}\,\frac{{a_{12}}^2}{\omega_2 + \omega_1 + \omega_3} + \frac{1}{4}\,\frac{{a_2}^2}{\omega_1 - \omega_3 - \omega_4} + \frac{{a_{11}}^2}{\omega_1 + 2\,\omega_3} - \frac{{a_9}^2}{2\,\omega_1 - \omega_3} + c_{13},$$

$$C_{14} = \frac{1}{4}\,\frac{{a_3}^2}{-\omega_2 + \omega_1 - \omega_4} - \frac{1}{4}\,\frac{{a_2}^2}{\omega_1 - \omega_3 - \omega_4} + c_{14},$$

$$
\begin{aligned}
C_{22} &= -\frac{1}{4}\,\frac{{a_8}^2}{2\,\omega_2+\omega_1}+\frac{1}{4}\,\frac{{a_5}^2}{2\,\omega_2-\omega_4}+c_{22},\\
C_{23} &= -\frac{1}{4}\,\frac{{a_{12}}^2}{\omega_2+\omega_1+\omega_3}+\frac{1}{4}\,\frac{{a_{10}}^2}{\omega_2-\omega_4+\omega_3}+c_{23},\\
C_{24} &= \frac{1}{4}\,\frac{{a_{10}}^2}{\omega_2-\omega_4+\omega_3}-\frac{1}{4}\,\frac{{a_3}^2}{-\,\omega_2+\omega_1-\omega_4}-\frac{{a_4}^2}{\omega_2+2\,\omega_4}-\frac{{a_5}^2}{2\,\omega_2-\omega_4}+c_{24},\\
C_{33} &= \frac{1}{4}\,\frac{{a_6}^2}{-\,\omega_4+2\,\omega_3}-\frac{1}{4}\,\frac{{a_{11}}^2}{\omega_1+2\,\omega_3}+c_{33},\\
C_{34} &= -\frac{1}{4}\,\frac{{a_2}^2}{\omega_1-\omega_3-\omega_4}-\frac{1}{4}\,\frac{{a_{10}}^2}{\omega_2-\omega_4+\omega_3}-\frac{{a_1}^2}{2\,\omega_4+\omega_3}+\frac{{a_6}^2}{-\,\omega_4+2\,\omega_3}+c_{34},\\
C_{44} &= \frac{1}{4}\,\frac{{a_1}^2}{2\,\omega_4+\omega_3}-\frac{1}{4}\,\frac{{a_4}^2}{\omega_2+2\,\omega_4}+c_{44}.
\end{aligned}
\tag{3.5}
$$

Введем обозначение

$$
\mathbf{C}(\rho_1,\rho_2,\rho_3,\rho_4)\overset{\text{def}}{=}\sum_{1\leqslant k\leqslant j\leqslant 4} C_{kj}\rho_k\rho_j. \tag{3.6}
$$

Из теоремы А. Д. Брюно [16] следует, что нулевое положение равновесия гамильтоновой системы с гамильтонианом (3.4) формально устойчиво по Ляпунову, если квадратичная форма

$$
\begin{aligned}
\mathbf{D}(\rho_1,\rho_2,\rho_4) &= \mathbf{C}\left(\rho_1,\rho_2,\frac{1}{\omega_3}\sum_{k\neq 3}\omega_k\rho_k,\rho_4\right)= \\
&= D_{11}\rho_1^2+D_{22}\rho_2^2+D_{44}\rho_4^2+2D_{12}\rho_1\rho_2+2D_{14}\rho_1\rho_4+2D_{24}\rho_2\rho_4
\end{aligned}
\tag{3.7}
$$

является знакоопределенной в положительном полупространстве $\rho_j \geqslant 0$.

Коэффициенты D_{ij} все положительны на интервале $q \in (q_{05}, q^*)$ (см. рис. 6) и отрицательны на интервале $q \in (q^*, q_{*5})$ (см. рис. 7). Отсюда и следует формальная устойчивость по Раусу стационарного вращения (1.2) правильного вихревого пятиугольника вне круговой области при выполнении условий $q \in (q_{05}, q_{*5})\backslash q^*$.

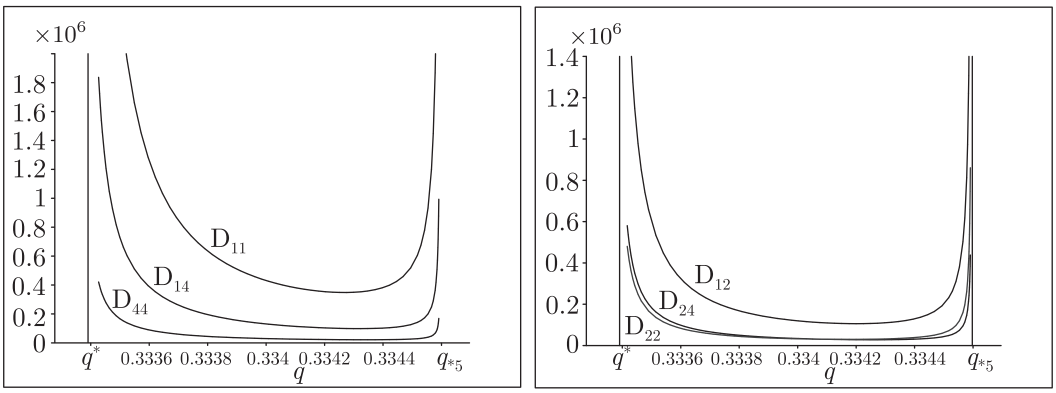

Рис. 6. Графики коэффициентов $D_{ij}\cdot 10^6$ на интервале (q^*, q_{*5}).

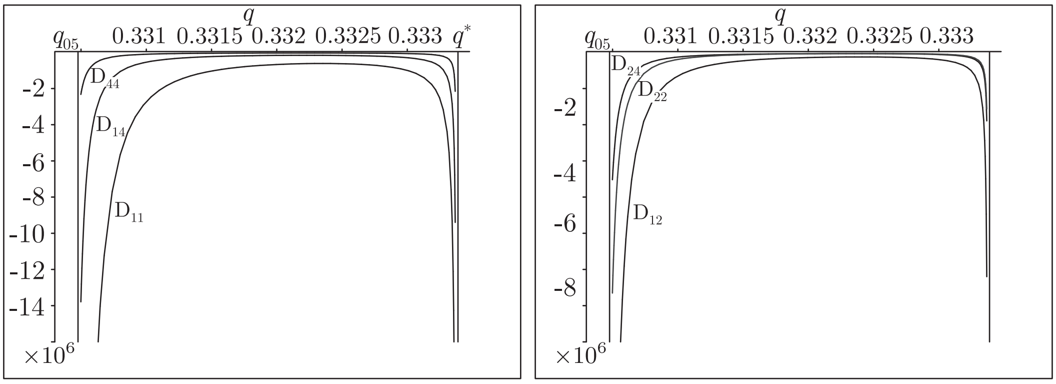

Рис. 7. Графики коэффициентов $D_{ij} \cdot 10^6$ на интервале $q \in (q_{05}, q^*)$.

4. Критический случай двукратной пары чисто мнимых собственных значений: резонанс 1 : 1, $q = q_{*5}$

Пусть выполнено условие $q = q_{*5}$. Из представлений (2.7) следует, что $\lambda_{12}(q_{*5}) = \lambda_{13}(q_{*5}) = 0$. Спектр (2.9) матрицы линеризации L состоит из двукратного нулевого собственного значения $\sigma = 0$, двукратной пары чисто мнимых собственных значений $\sigma = \pm i\omega_*$, где $\omega_* = \lambda_{02}(q_{*5}) = .5678764813$, и двух простых пар чисто мнимых собственных значений. Каждому двукратному собственному значению соответствует жорданова клетка в жордановой форме матрицы L.

Понятие нормальной формы квадратичного гамильтониана в критических случаях двукратных жордановых клеток обсуждается в работах [21, 22] вместе с алгоритмом построения матрицы нормализации. В рассматриваемых условиях квадратичную часть гамильтониана E_2 приводит к нормальной форме замена

$$\begin{pmatrix} r \\ \theta \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} \xi \\ \zeta \end{pmatrix}, \tag{4.1}$$

где $B = \dfrac{1}{\sqrt{5}} \parallel B_1, B_2, \ldots, B_{10} \parallel$ — симплектическая матрица:

$$\begin{aligned}
&B_1 = -\begin{pmatrix} \nu_1 h_4 \\ \nu_1^{-1} h_1 \end{pmatrix}, && B_2 = -\frac{k_0}{x}\begin{pmatrix} h_0 \\ h_2 \end{pmatrix}, && B_3 = -\frac{k_0}{x}\begin{pmatrix} h_0 \\ h_3 \end{pmatrix}, && B_4 = \begin{pmatrix} -\nu_1 h_4 \\ \nu_1^{-1} h_1 \end{pmatrix},\\
&B_6 = \begin{pmatrix} \nu_1 h_1 \\ -\nu_1^{-1} h_4 \end{pmatrix}, && B_7 = k_0 x\begin{pmatrix} h_2 \\ h_0 \end{pmatrix}, && B_8 = k_0 x\begin{pmatrix} h_3 \\ h_0 \end{pmatrix}, && B_9 = -\begin{pmatrix} \nu_1 h_1 \\ \nu_1^{-1} h_4 \end{pmatrix},\\
&B_5 = \frac{1}{y}\begin{pmatrix} h_5 \\ h_0 \end{pmatrix}, && B_{10} = y\begin{pmatrix} h_0 \\ h_5 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Здесь введены обозначения $k_0 = \sqrt{2}$, $x = \sqrt{2\lambda_{22}(q_{*5})}$, $y = \sqrt{2\lambda_{15}(q_{*5})}$.

Переменная ζ_5 — циклическая переменная для полной нелинейной системы. Полагая $\xi_5 = 0$, получаем приведенный гамильтониан $\mathcal{W}$ с рядом Тейлора в окрестности нуля:

$$\mathcal{W} = \frac{\varkappa^2}{4\pi}(\mathcal{W}_0 + \mathcal{W}_2 + \mathcal{W}_3 + a_*({\zeta_3}^2 + {\zeta_2}^2)^2 + \ldots). \tag{4.2}$$

Многоточиями обозначены слагаемые четвертой степени и выше, кроме выписанных, причем $a_* = -57.271076$, $\mathcal{W}_2$ — квадратичная форма

$$\mathcal{W}_2 = \omega_{*1}\,({\xi_1}^2 + {\zeta_1}^2) + \frac{1}{2}\,({\xi_2}^2 + {\xi_3}^2) + \omega_*\,(\xi_3\,\zeta_2 - \xi_2\,\zeta_3) + \omega_{*4}\,({\xi_4}^2 + {\zeta_4}^2) \tag{4.3}$$

с коэффициентами

$$\omega_{*1} = \omega_1(q_{*5}) = 1.717773311, \quad \omega_{*4} = \omega_4(q_{*5}) = .2554286482, \quad \omega_* = .5678764814, \tag{4.4}$$

а $\mathcal{W}_3$ — кубическая форма

$$\begin{aligned}\mathcal{W}_3 = \alpha_1\,(\xi_3(\zeta_1\zeta_4 + \xi_1\xi_4) - \xi_2(\xi_4\zeta_1 - \xi_1\zeta_4)) + \alpha_2\left({\xi_2}^2\zeta_1 - {\xi_3}^2\zeta_1 + 2\,\xi_1\xi_2\xi_3\right) + \\ + \alpha_3\left(-{\xi_1}^2\xi_3 + \xi_3{\zeta_1}^2 + 2\,\xi_1\xi_2\zeta_1\right) + \alpha_4\left({\xi_2}^2\zeta_4 - {\xi_3}^2\zeta_4 - 2\,\xi_2\xi_3\xi_4\right) + \\ + \alpha_5\left(-\xi_3{\xi_4}^2 + \xi_3{\zeta_4}^2 - 2\,\xi_2\xi_4\zeta_4\right) + \alpha_6\left(\zeta_2{\zeta_4}^2 - {\xi_4}^2\zeta_2 + 2\,\xi_4\zeta_3\zeta_4\right) + \\ + \alpha_7\,(\xi_1(\xi_2\zeta_2 - \xi_3\zeta_3) - \zeta_1(\xi_2\zeta_3 + \xi_3\zeta_2)) + \alpha_8\,(\zeta_3(\xi_1\zeta_4 - \xi_4\zeta_1) - \zeta_2(\xi_1\xi_4 + \zeta_1\zeta_4)) + \\ + \alpha_9\left({\zeta_1}^2\zeta_2 - {\xi_1}^2\zeta_2 - 2\,\xi_1\zeta_1\zeta_3\right) + \alpha_{10}\left({\zeta_3}^2\zeta_4 - {\zeta_2}^2\zeta_4 + 2\,\xi_4\zeta_2\zeta_3\right) + \\ + \alpha_{11}\,(\zeta_4(\xi_2\zeta_3 + \xi_3\zeta_2) + \xi_4(\xi_2\zeta_2 - \xi_3\zeta_3)) + \alpha_{12}\left(\zeta_1{\zeta_2}^2 - \zeta_1{\zeta_3}^2 + 2\,\xi_1\zeta_2\zeta_3\right)\end{aligned} \tag{4.5}$$

с коэффициентами

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= .2649565946, & \alpha_2 &= .3461307873, & \alpha_3 &= .5640080910,\\ \alpha_4 &= .1258475195, & \alpha_5 &= .1132967762, & \alpha_6 &= 6.899876845,\\ \alpha_7 &= 2.358051096, & \alpha_8 &= 7.834591892, & \alpha_9 &= .4926700326,\\ \alpha_{10} &= 18.20295882, & \alpha_{11} &= 1.566468753, & \alpha_{12} &= 8.191044555. \end{aligned}$$

Согласно общей теории, нормализованная до членов четвертого порядка включительно функция Гамильтона (4.2) имеет вид

$$\begin{aligned}\mathcal{W}(\psi,\phi) = \frac{\varkappa^2}{4\pi}(E_0 + \omega_{*1}\,({\psi_1}^2 + {\phi_1}^2) + \frac{1}{2}\,({\psi_2}^2 + {\psi_3}^2) + \omega_*\,(\psi_3\,\phi_2 - \psi_2\,\phi_3) + \\ + \omega_{*4}\,({\psi_4}^2 + {\phi_4}^2) + A_*(\phi_2^2 + \phi_3^2)^2 + \ldots),\end{aligned} \tag{4.6}$$

где $\psi = (\psi_1, \ldots, \psi_4), \phi = (\phi_1, \ldots, \phi_4)$ — новые переменные, а многоточием обозначены слагаемые четвертой степени и выше, кроме выписанных. Выкладки показали, что коэффициет A_* вычисляется по формуле

$$A_* = a_* - \frac{1}{4}\frac{\alpha_{10}^2}{\omega_* + \omega_{*4}} + \frac{1}{4}\frac{\alpha_{12}^2}{\omega_* - \omega_{*1}} = 200.5128207608. \tag{4.7}$$

Нулевое равновесие приведенной гамильтоновой системы с гамильтонианом (4.2) формально устойчиво по Раусу, поскольку величина A_* положительна. Доказательство дословно повторяет рассуждения в задаче устойчивости лагранжевых решений ограниченной проблемы трех тел [18].

5. Критический случай двукратного нулевого собственного значения: $q = q_{05}$

Пусть выполнено условие $q = q_{05}$. Из представлений (2.7) следует, что $\lambda_{12}(q_{05}) = \lambda_{13}(q_{05}) = 0$. В этом случае $\omega_3(q_{05}) = 0$. Замечаем, что в разложении (2.17) форма третьей степени (3.1) не содержит слагаемых z_3^3, $z_3^2\overline{z}_3$, $z_3\overline{z}_3^2$ и $\overline{z}_3^3$, и потому нормализованный до четвертого порядка гамильтониан задается разложением (3.4), (3.5) при $q = q_{05}$ и для него в окрестности нуля справедлива следующая асимптотика:

$$H = \omega_1^\circ|Z_1|^2 + \omega_2^\circ|Z_2|^2 + \omega_4^\circ|Z_4|^2 + C_{33}^\circ|Z_3|^4 + o(|Z_1|^2 + |Z_2|^2 + |Z_3|^4 + |Z_4|^2). \tag{5.1}$$

Здесь знак $^\circ$ означает, что коэффициенты вычислены в точке $q = q_{05}$, так что

$$\omega_1^\circ = 1.732776825, \quad \omega_2^\circ = .5600506530, \quad \omega_4^\circ = .2819304602, \tag{5.2}$$

$$C_{33}^\circ = -\frac{1}{4}\frac{(a_6^\circ)^2}{\omega_4^\circ} - \frac{1}{4}\frac{(a_{11}^\circ)^2}{\omega_1^\circ} + c_{33}^\circ = -305.8673983682. \tag{5.3}$$

Здесь $a_6^\circ = 16.77119148$, $a_{11}^\circ = 7.984450360$, $c_{33}^\circ = -47.2526452941$.

Коэффициент $C_{33}^\circ < 0$ и, согласно [13, 17, 22], имеет место формальная устойчивость по Ляпунову приведенной системы.

6. Критический случай резонанса 1 : 2

Пусть $q = q^*$. В этом случае $\omega_4 = 2\omega_3 = .2631689590$. Таким образом, в задаче устойчивости нулевого решения гамильтоновой системы с гамильтонианом (2.17) имеет место критический случай резонанса 1 : 2. Среди слагаемых третьей степени разложения (3.2) есть резонансное слагаемое: $-a_6 i z_3^2 z_4$, $a_6 = 30.73366162$. Согласно результатам [13, 19, 20], имеет место неустойчивость.

Список литературы

[1] Havelock T. H. The stability of motion of rectilinear vortices in ring formation // Philos. Mag., 1931, vol. 11, no. 70, pp. 617–633.

[2] Куракин Л. Г. Об устойчивости правильного вихревого n-угольника // Докл. РАН, 1994, т. 335, № 6, с. 729–731.

[3] Куракин Л. Г., Юдович В. И. О нелинейной устойчивости стационарного вращения правильного вихревого многоугольника // Докл. РАН, 2002, т. 384, № 4, с. 476–482.

[4] Kurakin L. G., Yudovich V. I. The stability of stationary rotation of a regular vortex polygon // Chaos, 2002, vol. 12, pp. 574–595.

[5] Куракин Л. Г. Устойчивость, резонансы и неустойчивость правильных вихревых многоугольников внутри круговой области // Докл. РАН, 2004, т. 399, № 1, с. 52–55.

[6] Kurakin L. G. On stability of a regular vortex polygon in the circular domain // J. Math. Fluid Mech., 2005, vol. 7, suppl. 3, S376–S386.

[7] Куракин Л. Г. Об устойчивости томсоновских вихревых конфигураций внутри круговой области // Нелинейная динамика, 2009, т. 5, № 3, с. 295–317.

[8] Kurakin L. G. On the stability of Thomson's vortex configurations inside a circular domain // Regul. Chaotic Dyn., 2010, vol. 15, no. 1, pp. 40–58.

[9] Куракин Л. Г. Об устойчивости томсоновского вихревого пятиугольника внутри круга // Нелинейная динамика, 2011, т. 7, № 3, с. 465–488.

[10] Куракин Л. Г., Островская И. В. Об устойчивости томсоновского вихревого многоугольника с четным числом вихрей вне круговой области // Сиб. матем. журн., 2010, т. 51, № 3, с. 584–598.

[11] Куракин Л. Г. Об устойчивости стационарного вращения системы трех равноудаленных вихрей вне круга // ПММ, 2011, т. 75, № 2, с. 327–337.

[12] Маркеев А. П. Точки либрации в небесной механике и космодинамике. М.: Наука, 1978. 312 с.

[13] Куницын А. Н., Маркеев А. П. Устойчивость в резонансных случаях. (Итоги науки и техники. Сер. Общая механика, т. 4.) М.: ВИНИТИ, 1979. С. 58–139.

[14] Milne-Thomson L. M. Theoretical hydrodynamics. 5th ed. New York: Macmillan, 1968. 768 pp. [Милн-Томсон Л. М. Теоретическая гидродинамика. М.: Мир, 1964. 660 с.]

[15] Routh E. J. A treatise on the stability of a given state motion. London: Macmillan, 1877. 108 pp.

[16] Брюно А. Д. О формальной устойчивости системы Гамильтона // Матем. заметки, 1967, т. 1, № 3, с. 325–330.

[17] Сокольский А. Г. Исследование устойчивости движения в некоторых задачах небесной динамики: Автореф. дисс.... канд. физ.-мат. наук, Моск. физ.-техн. ин-т, 1976.

[18] Сокольский А. Г. Об устойчивости лагранжевых решений ограниченной задачи трех тел при критическом отношении масс // ПММ, 1975, т. 39, № 2, с. 366–369.

[19] Маркеев А. П. Об устойчивости канонической системы с двумя степенями свободы при наличии резонанса // ПММ, 1968, т. 32, № 4, с. 738–744.

[20] Маркеев А. П. О методе точечных отображений и некоторых его приложениях в задаче трех тел: Препринт № 49. М.: Инст. прикл. матем. АН СССР, 1973.

[21] Сокольский А. Г. Об устойчивости автономной гамильтоновой системы с двумя степенями свободы при резонансе первого порядка // ПММ, 1977, т. 41, № 1, с. 24–33.

[22] Сокольский А. Г. Об устойчивости автономной гамильтоновой системы с двумя степенями свободы в случае равных частот // ПММ, 1974, т. 38, № 5, с. 791–799.

The stability criterion of a regular vortex pentagon outside a circle

Leonid G. Kurakin, Irina V. Ostrovskaya

[1,2]Southern Federal University, Faculty of Mathematics, Mechanics and Computer Sciences
Mil'chakova 8a, Rostov-on-Don, 344090, Russia
[1]South Mathematical Institute of VSC RAS
Markusa 22, Vladikavkaz, 362027, Russia
[1]`kurakin@math.rsu.ru`, [2]`ostrov@math.rsu.ru`

The nonlinear stability analysis of a stationary rotation of a system of five identical point vortices lying uniform on a circle of radius R_0 outside a circular domain of radius R is performed. The problem is reduced to the problem of equilibrium of Hamiltonian system with cyclic variable. The stability of stationary motion is interpreted as Routh stability. The conditions of stability, formal stability and instability are obtained subject to the parameter $q = R^2/R_0^2$.

MSC 2010: 76B47, 34D20, 70K30
Keywords: point vortices, stationary rotation, stability, resonance

Received January 26, 2012, accepted March 24, 2012
Citation: *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2012, vol. 8, no. 2, pp. 355–368 (Russian)