Нелинейная динамика. 2012. Т. 8. № 2. С. 219–229.
Полнотекстовая версия в свободном доступе
http://nd.ics.org.ru

УДК: 531.36,531.38,531.66
MSC 2010: 70E55,70F35,70K42, 70E50

К динамике твердого тела, несущего материальную точку

А. П. Маркеев

Рассматривается система, образованная «несущим» твердым телом и «несомой» материальной точкой, которая движется по заданному закону вдоль кривой, жестко скрепленной с телом. Движение происходит в однородном поле тяжести над неподвижной абсолютно гладкой горизонтальной плоскостью. При движении несущее тело может соударяться с плоскостью. Величина коэффициента восстановления при ударе считается произвольной. Получены уравнения, описывающие как свободное движение системы над плоскостью, так и моменты соударений. Указано несколько частных решений уравнений движения, и в некоторых случаях исследована их устойчивость.

В случае, когда несущее тело динамически симметрично, а материальная точка движется вдоль оси симметрии по произвольному закону, найдено общее решение уравнений свободного движения тела в квадратурах, обобщающее решение, соответствующее классической регулярной прецессии в случае Эйлера.

Показано, что для существования поступательного движения несущего тела в режиме его свободного полета над плоскостью в общем случае необходимо, чтобы материальная точка двигалась относительно тела в соответствии с законом площадей.

Ключевые слова: динамика систем твердых тел, соударение, периодическое движение, устойчивость

Получено 19 марта 2012 года
После доработки 25 марта 2012 года

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (11-01-00322), Программы поддержки ведущих научных школ (НШ - 4149.2012.1) и гранта Правительства РФ для государственной поддержки научных исследований, проводимых под руководством ведущих ученых в российских образовательных учреждениях ВПО (дог. № 11.G34.31.0039).

Маркеев Анатолий Павлович
markeev@ipmnet.ru
Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН
119526, Россия, г. Москва, пр. Вернадского, д. 101, корп. 11

1. Уравнения движения

Рассмотрим движение твердого тела массы M в однородном поле тяжести над неподвижной горизонтальной плоскостью. Движение отнесем к неподвижной системе координат $O_aX_aY_aZ_a$ с началом в точке O_a этой плоскости, ось O_aZ_a направим вертикально вверх (рис. 1). Пусть $Oxyz$ — жестко связанная с телом система координат, ее начало поместим в центр масс O тела, а оси Ox, Oy, Oz направим вдоль главных центральных осей инерции тела. Соответствующие главные моменты инерции обозначим через J_x, J_y, J_z. Ориентацию тела зададим при помощи матрицы $\mathbf{A}$ косинусов углов между осями неподвижной и связанной систем координат. В частности, единичный вектор $\mathbf{n}$ вертикальной оси O_aZ_a в связанной системе координат $Oxyz$ задается компонентами a_{31}, a_{32}, a_{33}.

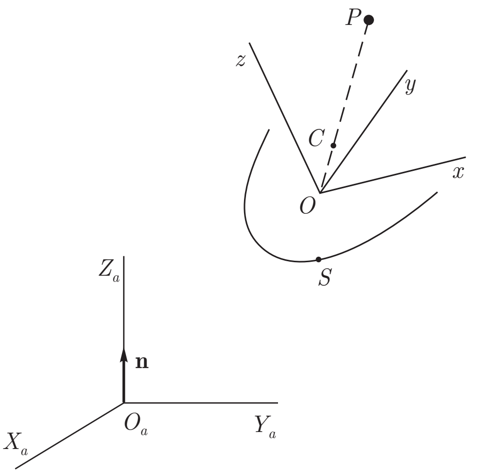

Рис. 1. Системы координат для описания движения тела, несущего материальную точку.

Предположим, что вдоль некоторой кривой, жестко скрепленной с телом, движется материальная точка P массы m. Ее положение в системе координат $Oxyz$ задается вектором $\mathbf{OP}$, компоненты x, y, z которого — заданные функции времени: $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$. Положение центра масс C рассматриваемой системы — твердое тело, несущее материальную точку, задается вектором, который в системе $Oxyz$ определяется равенством $\mathbf{OC} = m/(m+M)\,\mathbf{OP}$.

Через S будем обозначать точку поверхности «несущего» твердого тела, ближайшую к неподвижной горизонтальной плоскости $O_aX_aY_a$. Ее положение в системе $Oxyz$ задается вектором $\mathbf{OS}$, компоненты которого x_*, y_*, z_* определяются формой поверхности тела и его ориентацией в системе $O_aX_aY_aZ_a$.

Во время движения «несущее» тело может соударяться с плоскостью $O_aX_aY_a$. Считаем, что плоскость абсолютно гладкая, а коэффициент восстановления e при ударе произволен $(0 \leqslant e \leqslant 1)$.

Уравнения движения получим из теоремы об изменении количества движения системы $\mathbf{Q}$ и теоремы об изменении ее кинетического момента $\mathbf{K}$ относительно центра масс C.

У р а в н е н и я с в о б о д н о г о д в и ж е н и я т е л а н а д п л о с к о с т ь ю. В случае свободного движения имеем два векторных уравнения

$$\frac{d\mathbf{Q}}{dt} = -(m+M)g\mathbf{n}, \quad \frac{d\mathbf{K}}{dt} = 0, \tag{1.1}$$

где g — ускорение свободного падения. Если X_c, Y_c, Z_c — компоненты радиус-вектора $\mathbf{O}_a\mathbf{C}$ центра масс C в неподвижной системе координат $O_aX_aY_aZ_a$, то первое из векторных уравнений движения (1.1) запишется в виде трех скалярных уравнений

$$\ddot{X}_c = 0, \quad \ddot{Y}_c = 0, \quad \ddot{Z}_c = -g. \tag{1.2}$$

Получим скалярную форму второго из уравнений (1.1). Для этого перепишем его в виде

$$\frac{\widetilde{d}\mathbf{K}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{K} = 0, \tag{1.3}$$

где первое слагаемое представляет собой вектор, компоненты которого равны производным по времени от проекций вектора $\mathbf{K}$ на оси жестко связанной с несущим телом системы координат $Oxyz$. Вектор $\boldsymbol{\omega}$ в (1.3) — мгновенная угловая скорость несущего тела, ее проекции на оси Ox, Oy и Oz будем обозначать, соответственно, через ω_x, ω_y и ω_z.

Воспользовавшись хорошо известными правилами [1], можно получить следующее выражение для вектора кинетического момента рассматриваемой системы относительно ее центра масс:

$$\mathbf{K} = \mathbf{J}\boldsymbol{\omega} + \mu\,\mathbf{OP} \times \mathbf{V}_r, \quad \mu = \frac{mM}{m+M}. \tag{1.4}$$

Здесь через $\mathbf{J}$ обозначена симметрическая матрица вида

$$\mathbf{J} = \begin{Vmatrix} J_x + \mu(y^2+z^2) & -\mu xy & -\mu xz \\ -\mu xy & J_y + \mu(z^2+x^2) & -\mu yz \\ -\mu xz & -\mu yz & J_z + \mu(x^2+y^2) \end{Vmatrix}, \tag{1.5}$$

$\mathbf{V}_r$ — вектор скорость точки P относительно несущего тела, имеющий в системе координат $Oxyz$, жестко связанной с телом, компоненты $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$.

Замечание. Можно сказать, что $\mathbf{J}$ — матрица тензора инерции для точки O некоторого воображаемого твердого тела, представляющего собой рассматриваемое несущее твердое тело, к которому в точке с координатами x, y, z жестко прикреплена материальная точка массы μ. Очевидно, что элементы этой матрицы могут принимать только конечные значения. Будем предполагать, что $\det\mathbf{J}$ отличен от нуля, а элементы матрицы $\mathbf{J}^{-1}$, обратной к матрице $\mathbf{J}$, — ограниченные функции времени. Последнее предположение исключает, например, такие экзотические случаи, когда при каких-либо значениях t геометрия масс упомянутого воображаемого тела отвечает геометрии масс бесконечно тонкого стержня.

Компоненты вектора $\mathbf{K}$ в системе координат $Oxyz$ вычисляются по формулам

$$K_x = [J_x + \mu(y^2+z^2)]\omega_x - \mu xy\omega_y - \mu xz\omega_z + \mu(y\dot{z} - z\dot{y}) \quad (x, y, z). \tag{1.6}$$

Здесь и в дальнейшем невыписанные соотношения получаются из выписанных круговой перестановкой символов, указанных в круглых скобках.

Векторное уравнение (1.3) запишется в виде следующих трех скалярных уравнений:

$$\begin{aligned} &[J_x + \mu(y^2+z^2)]\dot{\omega}_x - \mu xy\dot{\omega}_y - \mu xz\dot{\omega}_z + (J_z - J_y)\omega_y\omega_z + \\ &\quad + \mu[(x\omega_x + y\omega_y + z\omega_z)(y\omega_z - z\omega_y) + 2(y\dot{y} + z\dot{z})\omega_x - \\ &\quad - 2\dot{x}(y\omega_y + z\omega_z) + y\ddot{z} - z\ddot{y}] = 0 \qquad (x, y, z). \end{aligned} \tag{1.7}$$

Согласно (1.2), в случае свободного движения центр масс системы C движется по параболе или вертикальной прямой. Движение же несущего тела относительно его центра масс O описывается уравнениями (1.7). К этим уравнениям следует еще добавить кинематические уравнения Пуассона:

$$\dot{a}_{i1} = \omega_z a_{i2} - \omega_y a_{i3} \qquad (1, 2, 3;\ x, y, z) \quad i = 1, 2, 3. \tag{1.8}$$

Если решение уравнений (1.2) и (1.7), (1.8) найдено, то положение центра масс O несущего тела находится из соотношения

$$\mathbf{O}_a\mathbf{O} = \mathbf{O}_a\mathbf{C} - \mathbf{A}\,\frac{m}{m+M}\,\mathbf{OP}.$$

Система динамических уравнений (1.7) может быть исследована независимо от кинематических уравнений (1.8). Из (1.1) следует, что эта система допускает интеграл

$$K_x^2 + K_y^2 + K_z^2 = K^2 = \text{const}, \tag{1.9}$$

где величины K_x, K_y, K_z задаются равенствами (1.6).

Уравнения, соответствующие моментам соударений. При помощи классической теории удара [2, 3] получим связь кинематических величин, характеризующих движение системы до и после соударения несущего тела с плоскостью. Считаем, что положение центра масс системы в абсолютном пространстве, положение точки P в несущем теле и ориентация несущего твердого тела в абсолютной системе координат $O_aX_aY_aZ_a$ во время удара не изменяются; следовательно, во время удара неизменны координаты x_*, y_*, z_* точки S поверхности несущего тела, которой оно соударяется с плоскостью. Кроме того, предполагаем, что во время удара не изменяется вектор $\mathbf{V}_r$ относительной скорости точки P, что обеспечивается соответствующим управлением, задающим режим $x = x(t), y = y(t), z = z(t)$ движения точки P относительно несущего тела.

Так как плоскость абсолютно гладкая, то ударный импульс $\mathbf{I}$ вертикален и классические уравнения теории удара имеют вид

$$\mathbf{Q}^+ - \mathbf{Q}^- = I\mathbf{n}, \quad \mathbf{K}^+ - \mathbf{K}^- = I\mathbf{d}. \tag{1.10}$$

Здесь верхними значками «−» и «+» обозначены значения величин до и после удара. Через $\mathbf{d}$ в (1.10) обозначен вектор $\mathbf{CS}\times\mathbf{n}$; его компоненты d_x, d_y, d_z не изменяются во время удара:

$$d_x = \left(y_* - \frac{m}{m+M}y\right)a_{33} - \left(z_* - \frac{m}{m+M}z\right)a_{32} \quad (x, y, z;\ a_{31}, a_{32}, a_{33}).$$

Принимая во внимание, что $\mathbf{Q} = (m+M)\mathbf{V}_C$, где $\mathbf{V}_C$ — вектор абсолютной скорости центра масс, и учитывая выражение (1.4) для вектора кинетического момента, из (1.10) находим

$$\dot{X}_C^+ = \dot{X}_C^-, \quad \dot{Y}_C^+ = \dot{Y}_C^-, \quad \dot{Z}_C^+ = \dot{Z}_C^- + \frac{I}{m+M}, \tag{1.11}$$

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}^+ = \dot{\boldsymbol{\omega}}^- + I\,\mathbf{J}^{-1}\mathbf{d}. \tag{1.12}$$

Для вычисления величины модуля ударного импульса I воспользуемся соотношением

$$v_n^+ = -e\,v_n^-, \tag{1.13}$$

где e — коэффициент восстановления, а $v_n = (\mathbf{V}_S, \mathbf{n})$ — проекция на вертикальную ось O_aZ_a вектора абсолютной скорости точки S поверхности несущего тела. Можно показать, что

$$v_n = \dot{Z}_C - \frac{m}{m+M}(\mathbf{V}_r, \mathbf{n}) + (\boldsymbol{\omega}, \mathbf{d}). \tag{1.14}$$

Из (1.11)–(1.14) находим

$$I = -\frac{1+e}{k}\left[\dot{Z}_C^- - \frac{m}{m+M}(\mathbf{V}_r, \mathbf{n}) + (\boldsymbol{\omega}^-, \mathbf{d})\right]. \tag{1.15}$$

Здесь введено обозначение

$$k = \frac{1}{m+M} + (\mathbf{J}^{-1}\mathbf{d}, \mathbf{d}). \tag{1.16}$$

Величина $\mathbf{V}_r$ в (1.15) вычисляется в момент соударения.

Соотношения (1.2), (1.7), (1.8), (1.11), (1.12) с учетом равенств (1.15), (1.16) образуют замкнутую систему уравнений, описывающую движение рассматриваемой материальной системы «несущее тело–материальная точка» на промежутках времени, включающих в себя как интервалы свободного полета, так и моменты соударений несущего тела с плоскостью.

2. О поступательном движении несущего тела

Для приложений (например, в динамике роботов) представляет интерес вопрос о возможности задания такого движения точки P относительно несущего тела, чтобы оно могло совершать поступательное движение.

Условия существования поступательного движения. Положив в уравнениях (1.7) $\omega_x = 0$, $\omega_y = 0$, $\omega_z = 0$, получим три условия

$$y\ddot{z} - z\ddot{y} = 0, \quad z\ddot{x} - x\ddot{z} = 0, \quad x\ddot{y} - y\ddot{x} = 0, \tag{2.1}$$

необходимые для существования поступательного движения несущего тела на этапе его свободного движения над плоскостью.

Эти условия, очевидно, выполнены в том частном случае, когда точка P движется относительно несущего тела по произвольной прямой с постоянной, произвольной по величине, скоростью:

$$x = x_0 + \dot{x}_0 t, \quad y = y_0 + \dot{y}_0 t, \quad z = z_0 + \dot{z}_0 t. \tag{2.2}$$

В общем же случае условия (2.1) выполнены только тогда, когда движение точки P относительно несущего тела происходит в соответствии с законом площадей [4], то есть когда выполняются равенства

$$y\dot{z} - z\dot{y} = c_x, \quad z\dot{x} - x\dot{z} = c_y, \quad x\dot{y} - y\dot{x} = c_z, \tag{2.3}$$

где c_x, c_y, c_z — произвольные постоянные. Следовательно, траектория точки P относительно несущего тела должна быть кривой, лежащей в фиксированной относительно тела плоскости, которая перпендикулярна вектору $\mathbf{c}$ с компонентами c_x, c_y, c_z; при этом радиус-вектор $\mathbf{OP}$ за равные промежутки времени должен заметать равные площади. В частном случае, когда $\mathbf{c} = 0$, движение точки P должно происходить вдоль прямой, проходящей через центр масс O несущего тела, но закон ее движения вдоль этой прямой произвольный (в отличие от случая (2.2), когда прямая не обязательно проходит через центр масс тела, но движение вдоль прямой равномерное).

Поступательное движение несущего тела может существовать и при наличии его соударений с плоскостью. Действительно, пусть выполнены условия (2.1) и несущее тело движется над плоскостью поступательно. Предположим, что при этом материальная точка P движется в несущем теле вдоль вертикальной прямой ℓ_*, которая проходит через центр масс O тела и пересекает поверхность тела в ее наинизшей точке S, причем в этой точке касательная плоскость к поверхности тела перпендикулярна ℓ_*. В момент соударения вектор $\mathbf{CS}$ вертикален, поэтому $\mathbf{d} = \mathbf{CS} \times \mathbf{n} = 0$ и, согласно равенству (1.12), вектор угловой скорости несущего тела остается неизменным. Таким образом, в рассмотренном примере поступательное движение несущего тела существует не только при свободном движении рассматриваемой системы над плоскостью, но и на промежутках времени, включающих и моменты соударений несущего тела и плоскости.

О б у с т о й ч и в о с т и п о с т у п а т е л ь н о г о д в и ж е н и я. Задача об устойчивости поступательного движения несущего тела является довольно сложной. В частном случае, когда несущее тело динамически симметрично, а точка P движется вдоль оси симметрии по гармоническому закону, эта задача изучалась в статье [5].

Здесь рассмотрим устойчивость поступательного движения несущего тела по отношению к возмущениям величин ω_x, ω_y, ω_z на этапе свободного движения тела над плоскостью, причем ограничимся случаем, когда точка P движется вдоль прямой, проходящей через центр масс несущего тела. Закон движения точки P вдоль этой прямой не конкретизируется.

Для рассматриваемого относительного движения точки P постоянные c_x, c_y, c_z в соотношениях (2.3) равны нулю и выражения (1.6) для проекций вектора кинетического момента на оси системы координат $Oxyz$ будут линейными однородными функциями величин ω_x, ω_y, ω_z:

$$K_x = [J_x + \mu(y^2 + z^2)]\omega_x - \mu xy\omega_y - \mu xz\omega_z \quad (x, y, z). \tag{2.4}$$

Покажем, что по отношению к возмущениям величин $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ поступательное движение несущего тела на этапе его свободного движения над плоскостью является устойчивым. Это можно сделать при помощи теоремы Ляпунова об устойчивости движения [6].

Действительно, по предположению матрица (1.5) имеет ограниченную обратную, поэтому из (2.4) следует, что задачи об устойчивости по отношению к возмущениям величин $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ и K_x, K_y, K_z эквивалентны.

В качестве функции Ляпунова V примем функцию из левой части интеграла (1.9):

$$V = K_x^2 + K_y^2 + K_z^2. \tag{2.5}$$

Из сказанного выше и очевидной знакоопределенности функции (2.5) относительно переменных K_x, K_y, K_z сразу следует устойчивость поступательного движения тела относительно возмущений величин $\omega_x, \omega_y, \omega_z$.

3. О свободном движении динамически симметричного несущего тела

Предположим, что $J_x = J_y$, то есть считаем, что ось Oz является осью динамической симметрии несущего тела. И пусть точка P движется вдоль оси симметрии по заданному закону: $x \equiv 0, y \equiv 0, z = z(t)$. В этом случае компоненты (1.6) вектора кинетического момента $\mathbf{K}$ в системе координат $Oxyz$ будут иметь вид

$$K_x = (J_x + \mu z^2)\omega_x, \quad K_y = (J_x + \mu z^2)\omega_y, \quad K_z = J_z\omega_z, \tag{3.1}$$

а система динамических уравнений (1.7), описывающая свободный полет тела над плоскостью, имеет вид

$$\frac{d}{dt}[(J_x + \mu z^2)\omega_x] + (J_z - J_x - \mu z^2)\omega_y\omega_z = 0, \tag{3.2}$$

$$\frac{d}{dt}[(J_x + \mu z^2)\omega_y] - (J_z - J_x - \mu z^2)\omega_z\omega_x = 0, \tag{3.3}$$

$$\frac{d}{dt}(J_z\omega_z) = 0. \tag{3.4}$$

Эти уравнения имеют интеграл (1.9), который с учетом равенств (3.1) можно записать в виде

$$(J_x + \mu z^2)^2\,(\omega_x^2 + \omega_y^2) + J_z^2\omega_z^2 = K^2 = \mathrm{const}. \tag{3.5}$$

Кроме того, имеется интеграл

$$\omega_z = \omega_z^0 = \mathrm{const}. \tag{3.6}$$

С т а ц и о н а р н о е в р а щ е н и е в о к р у г о с и с и м м е т р и и и е г о у с т о й ч и в о с т ь. Пусть u — произвольная ось фиксированного направления в неподвижной системе координат $O_aX_aY_aZ_a$. Направляющие косинусы этой оси во вращающейся вместе с телом системе координат $Oxyz$ обозначим через α_x, α_y, α_z. Очевидно геометрическое тождество

$$\alpha_x^2 + \alpha_y^2 + \alpha_z^2 = 1, \tag{3.7}$$

а также соотношение

$$(J_x + \mu z^2)(\omega_x\alpha_x + \omega_y\alpha_y) + J_z\omega_z\alpha_z = K_u = \mathrm{const}. \tag{3.8}$$

Последнее соотношение означает, что проекция кинетического момента $\mathbf{K}$ системы на любую ось, фиксированную в неподвижной системе координат, не изменяется со временем (см. второе из уравнений (1.1)).

Существует движение несущего тела, когда его ось симметрии имеет фиксированное направление в пространстве (и, например, совпадает с направлением оси u), а само тело вращается вокруг оси симметрии с постоянной угловой скоростью ω_z^0. Для такого стационарного вращения

$$\omega_x = 0, \quad \omega_y = 0, \quad \omega_z = \omega_z^0, \quad \alpha_x = 0, \quad \alpha_y = 0, \quad \alpha_z = 1.$$

При помощи теоремы Ляпунова об устойчивости покажем устойчивость этого вращения относительно возмущений величин ω_x, ω_y, ω_z, α_x, α_y, α_z. Будем полагать, что $\omega_z^0 \neq 0$. (Если $\omega_z^0 = 0$, то движение тела поступательно и, согласно предыдущему разделу, является устойчивым по отношению к возмущениям величин ω_x, ω_y, ω_z.)

Введем возмущения ξ_i $(i = 1, 2, \ldots, 6)$ по формулам

$$\omega_x = \xi_1, \quad \omega_y = \xi_2, \quad \omega_z = \omega_z^0 + \xi_3, \quad \alpha_x = \xi_4, \quad \alpha_y = \xi_5, \quad \alpha_z = 1 + \xi_6.$$

Из (3.5)–(3.8) следует, что в возмущенном движении имеют место интегралы

$$V_1 = K^2 - J_z^2\omega_z^2 = (J_x + \mu z^2)^2\,(\xi_1^2 + \xi_2^2) = \text{const}, \quad V_2 = \xi_3 = \text{const},$$
$$V_3 = \alpha_x^2 + \alpha_y^2 + \alpha_z^2 - 1 = 2\xi_6 + \xi_4^2 + \xi_5^2 + \xi_6^2 = \text{const},$$
$$V_4 = K_u - J_z\omega_z = (J_x + \mu z^2)(\xi_1\xi_4 + \xi_2\xi_5) + J_z(\omega_z^0 + \xi_3)\xi_6 = \text{const}.$$

Функцию Ляпунова возьмем в виде такой суммы:

$$V = V_1 + V_2^2 + V_3^2 + V_4^2. \tag{3.9}$$

Она будет определенно положительной, если функция V_4 будет знакоопределенной при тех значениях ξ_i $(i = 1, 2, \ldots, 6)$, для которых $V_1 = 0$, $V_2 = 0$, $V_3 = 0$. Из последних трех равенств получаем

$$\xi_1 = 0, \quad \xi_2 = 0, \quad \xi_3 = 0, \quad \xi_6 = -\frac{1}{2}(\xi_4^2 + \xi_5^2) + \ldots. \tag{3.10}$$

В выражении для ξ_6 не выписаны члены выше второй степени относительно ξ_4, ξ_5.

При выполнении условий (3.10) функция V_4 будет функцией двух переменных ξ_4, ξ_5:

$$V_4 = -\frac{1}{2}\omega_z^0(\xi_4^2 + \xi_5^2) + \ldots,$$

где многоточие обозначает совокупность членов выше второй степени относительно ξ_4, ξ_5. Эта функция, очевидно, является знакоопределенной. Тем самым устойчивость стационарного вращения доказана.

Общее решение уравнений движения. В рассматриваемом случае, когда $J_x = J_y$, $x \equiv 0$, $y \equiv 0$, общее решение уравнений движения несущего тела при произвольном законе движения $z = z(t)$ материальной точки P вдоль его оси динамической симметрии можно получить в квадратурах. Это решение обобщает классическое решение задачи о движении динамически симметричного твердого тела вокруг неподвижной точки в случае Эйлера, которое отвечает регулярной прецессии тела.

Удобно рассматривать движение несущего тела в поступательно движущейся системе координат $O\widetilde{X}\widetilde{Y}\widetilde{Z}$, начало которой находится в центре масс O тела, а направление оси $O\widetilde{Z}$ совпадает с неизменным направлением вектора кинетического момента $\mathbf{K}$ в неподвижной системе координат $O_aX_aY_aZ_a$. Ориентацию несущего тела относительно системы координат $O\widetilde{X}\widetilde{Y}\widetilde{Z}$ зададим при помощи углов Эйлера ψ, θ, φ (рис. 2).

Из интеграла (3.6) и соотношения $J_z\omega_z = K\cos\theta$, где K — неизменный по величине модуль кинетического момента (см. рис. 2 и формулы (3.1)), следует, что угол нутации θ постоянен во все время движения: $\theta = \theta^0 = \text{const}$, причем

$$\cos\theta^0 = \frac{J_z\omega_z^0}{K}\,. \tag{3.11}$$

При $\theta = \theta^0$ имеем такие выражения для проекций вектора угловой скорости тела на оси Ox, Oy, Oz:

$$\omega_x = \dot\psi\sin\theta^0\sin\varphi, \quad \omega_y = \dot\psi\sin\theta^0\cos\varphi, \quad \omega_z^0 = \dot\psi\cos\theta^0 + \dot\varphi. \tag{3.12}$$

А проекции K_x, K_y кинетического момента на оси Ox, Oy, согласно (3.1), задаются равенствами

$$(J_x + \mu z^2)\omega_x = K\sin\theta^0\sin\varphi, \quad (J_x + \mu z^2)\omega_y = K\sin\theta^0\cos\varphi. \tag{3.13}$$

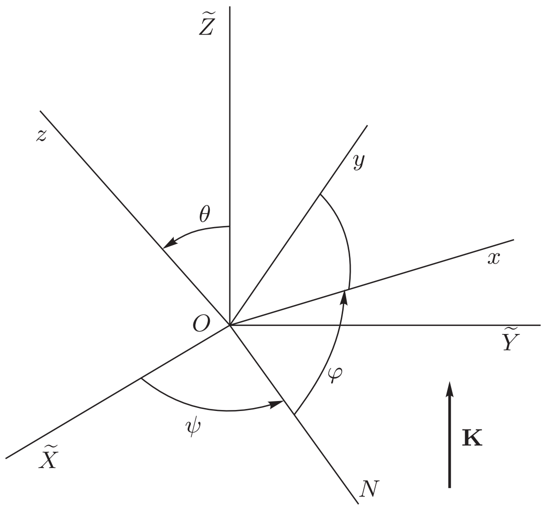

Рис. 2. К случаю свободного движения при наличии динамической симметрии.

Из соотношений (3.12) и (3.13) находим

$$\dot{\psi} = \frac{K}{J_x + \mu z^2}, \quad \dot{\varphi} = \omega_z^0\left(1 - \frac{J_z}{J_x + \mu z^2}\right). \tag{3.14}$$

Если бы величина $J_x + \mu z^2$ не зависела от времени, то производные $\dot{\psi}$ и $\dot{\varphi}$ были бы постоянными и движение несущего тела было бы регулярной прецессией. В рассматриваемом же случае движение тела является более сложным, нежели регулярная прецессия. Для него угол нутации постоянен ($\theta = \theta^0$), а углы прецессии и собственного вращения определяются из равенств (3.14) при помощи квадратур.

4. О некоторых других частных случаях свободного движения несущего тела

Укажем еще несколько точных решений динамических уравнений (1.7), существующих при специальном выборе закона движения точки P относительно несущего тела.

П л о с к и е д в и ж е н и я. Пусть $z \equiv 0$, то есть материальная точка P во все время движения остается в главной плоскости инерции Oxy несущего тела. Тогда система уравнений (1.7) имеет решение, в котором $\omega_x = 0, \omega_y = 0$, а $\omega_z(t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$[J_z + \mu(x^2 + y^2)]\dot{\omega}_z + \mu[x\ddot{y} - y\ddot{x} + 2(x\dot{x} + y\dot{y})\omega_z] = 0. \tag{4.1}$$

Это уравнение допускает интеграл

$$[J_z + \mu(x^2 + y^2)]\omega_z + \mu(x\dot{y} - y\dot{x}) = \text{const}, \tag{4.2}$$

и при заданном движении точки P в плоскости Oxy задача нахождения ω_z как функции времени сводится к квадратуре.

С т а ц и о н а р н ы е в р а щ е н и я. Несущее тело может совершать стационарные вращения вокруг его главных центральных осей инерции, например, вокруг оси Oz:

$$\omega_x = 0, \quad \omega_y = 0, \quad \omega_z = \omega = \text{const}. \tag{4.3}$$

Подставив эти величины в уравнения (1.7), получим условия, которым должно удовлетворять относительное движение точки P для существования стационарного вращения (4.3):

$$zy\omega^2 + y\ddot{z} - z\ddot{y} - 2\dot{x}z\omega = 0, \tag{4.4}$$

$$-xz\omega^2 + z\ddot{x} - x\ddot{z} - 2\dot{y}z\omega = 0, \tag{4.5}$$

$$x\ddot{y} - y\ddot{x} + 2(x\dot{x} + y\dot{y})\omega = 0. \tag{4.6}$$

Не останавливаясь на подробном анализе этих условий, укажем только некоторые частные случаи существования стационарного вращения (4.3).

1. Случай, когда точка P движется вдоль оси Oz, то есть когда $x \equiv 0, y \equiv 0$, а $z = z(t)$ — произвольная функция времени. Для динамически симметричного тела это стационарное вращение рассмотрено в предыдущем разделе.

2. Случай, когда точка P движется по прямой, параллельной главной оси инерции Oz, по гармоническому закону с частотой ω, равной угловой скорости вращения тела:

$$x = x^0 = \text{const}, \quad y = y^0 = \text{const}, \quad \ddot{z} + \omega^2 z = 0. \tag{4.7}$$

3. Случай, когда точка P совершает периодическое движение, в котором

$$x = R\cos\frac{\omega}{2}t, \quad y = -R\sin\frac{\omega}{2}t, \quad \ddot{z} + \frac{\omega^2}{4}z = 0. \tag{4.8}$$

Определяемая этими соотношениями траектория точки P является замкнутой кривой, лежащей на поверхности прямого кругового цилиндра произвольного радиуса R, ось же цилиндра совпадает с осью Oz; при этом угловая скорость стационарного вращения (4.3) равна удвоенной частоте периодического движения точки P относительно несущего тела.

Представляет интерес непростая задача об устойчивости упомянутых стационарных вращений.

Список литературы

[1] Маркеев А. П. Теоретическая механика. М.–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Институт компьютерных исследований, 2007. 592 с.

[2] Иванов А. П. Динамика систем с механическими соударениями. М.: Международная программа образования, 1997. 336 с.

[3] Леви-Чивита Т., Амальди У. Курс теоретической механики: Т. 2, Ч. 2: Динамика систем с конечным числом степеней свободы. М.: ГИИЛ, 1951. 556 с.

[4] Дубошин Г. Н. Небесная механика: Основные задачи и методы. М.: Физматлит, 1963. 587 с.

[5] Маркеев А. П. О периодическом движении твердого тела, несущего материальную точку, при наличии его соударений с горизонтальной плоскостью // Нелинейная динамика, 2012, т. 8 , № 1, с. 71–81.

[6] Малкин И. Г. Теория устойчивости движения. М.: Наука, 1966. 532 с.

On the dynamics of a rigid body carrying a material point

Anatoly P. Markeev

A. Ishlinsky Institite for Problems in Mechanics, Russian Academy of Sciences
pr. Vernadskogo 101-1, Moscow, 119526, Russia
markeev@ipmnet.ru

In this paper we consider a system consisting of an outer rigid body (a shell) and an inner body (a material point) which moves according to a given law along a curve rigidly attached to the body. The motion occurs in a uniform field of gravity over a fixed absolutely smooth horizontal plane. During motion the shell may collide with the plane. The coefficient of restitution for an impact is supposed to be arbitrary. We present a derivation of equations describing both the free motion of the system over the plane and the instances where collisions with the plane occur. Several special solutions to the equations of motion are found, and their stability is investigated in some cases. In the case of a dynamically symmetric body and a point moving along the symmetry axis according to an arbitrary law, a general solution to the equations of free motion of the body is found by quadratures. It generalizes the solution corresponding to the classical regular precession in Euler's case. It is shown that the translational motion of the shell in the free flight regime exists in a general case if the material point moves relative to the body according to the law of areas.

MSC 2010: 70E55,70F35,70K42, 70E50
Keywords: rigid body dynamics, collision, periodic motion, stability

Received March 19, 2012, accepted March 25, 2012
Citation: *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2012, vol. 8, no. 2, pp. 219–229 (Russian)