



УДК: 531.01:521.131

MSC 2010: 70F07, 70F15

## Периодические орбиты общей задачи трех тел с нулевым кинетическим моментом

В. Б. Титов

В работе ищутся решения общей задачи трех тел с нулевым кинетическим моментом, которые являются расширением известной орбиты-«восьмерки». Полученные орбиты изображаются на евклидовой плоскости и на сфере форм.

Ключевые слова: задача трех тел, периодические решения, орбита-восьмерка, небесная механика

### 1. Введение

Работа Шенсине и Монтгомери [4] положила начало ряду исследований, в результате которых было найдено множество так называемых хореографий — решений задачи  $N$  тел, которые двигаются друг за другом по одной траектории. Найденная авторами орбита-восьмерка особенно интересна тем, что, имея нулевой кинетический момент  $J$ , она оказывается устойчивой. Однако, согласно оценкам Д. Хегги, вероятность существования такой орбиты «где-то между одной на галактику и одной на вселенную» [11]. Было бы интересно найти орбиты, похожие в каком-то смысле на восьмерку, но с меньшими ограничениями, например, отказаться от равенства всех трех масс. Некоторые ограничения, накладываемые симметрией, при этом нужно оставить, чтобы уменьшить размерность задачи. Небесными механиками симметрия при изучении общей задачи трех тел использовалась давно. Еще в 70-е годы XX века Р. Брук и Д. Боггс [3] численно построили несколько плоских симметричных периодических орбит. После работы Шенсине и Монтгомери появились работы, посвященные группам симметрии в задаче  $N$  тел. Классификация групп симметрии плоской

---

Получено 31 января 2012 года

После доработки 22 февраля 2012 года

---

Работа частично поддержана Советом по грантам Президента РФ для поддержки ведущих научных школ, грант НШ-3290.2010.2.

---

Титов Владимир Борисович

[tit@astro.spbu.ru](mailto:tit@astro.spbu.ru)

Санкт-Петербургский государственный университет

199034, Россия, г. Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9



задачи трех тел выполнена в работе В. Барутелло, Д. Феррарио, С. Террачини [1]. В работе [15] построено множество орбит общей задачи трех тел с некоторыми симметриями из списка [1].

Симметрия, связанная с зависимостью потенциала только от взаимных расстояний, используется давно. Еще в первой половине позапрошлого века Якоби ввел координаты, которые позволяют записать уравнения относительного движения в симметричной форме [17]. Координаты Якоби реализуют фактор-пространство пространства конфигураций по переносам [12]. В пространстве взаимных расстояний решения задачи трех тел изучались, например, в [2]; если факторизовать фактор-пространство, реализуемое координатами Якоби по действию вращений, то получим пространство форм. Изучение движения именно в пространстве форм началось относительно недавно: см., например, работу Р. Мёккеля [8], свойства траекторий в пространстве форм изучались Ю.-И. Хсяном и Э. Страуме [5–7] и Р. Монтгомери [4, 10–12].

В настоящей работе исследуются решения с нулевым кинетическим моментом, похожие на восьмерку, в которых не требуется равенства всех масс.

## 2. Симметрия

Симметрия сама по себе очень интересное свойство, мы можем классифицировать орбиты и затем изучать свойства орбит различных классов. В излагаемом подходе важно, что, используя симметрию, мы можем уменьшить число определяемых переменных, поскольку некоторые переменные оказываются нулями или связаны с другими переменными известными соотношениями. Следовательно, используя симметрию, мы можем уменьшить размерность пространства решений задачи.

Однородность и изотропность пространства в ньютоновой механике, то есть инвариантность относительно переносов и вращений, позволяет, выбрав начало системы координат в барицентре, искать координаты только двух тел, поскольку координаты связаны соотношением

$$m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2 + m_3 \mathbf{r}_3 = 0. \quad (2.1)$$

Размерность фазового пространства решений в трехмерном случае уменьшается на 6, размерность конфигурационного пространства — на 3. В следующем разделе для той же цели — исключение (использование) симметрии переносов — используются координаты Якоби. Сферическая симметричность потенциала позволяет исключить симметрию поворотов.

Однородность потенциала задачи  $N$  тел дает нам еще одну симметрию — симметрию растяжения? или симметрию масштаба. Таким образом, в задаче  $N$  тел при поиске периодических решений можно ограничиться периодом  $T = 2\pi$ :

$$\varphi(t) \rightarrow \lambda \varphi(\lambda^{-3/2} t) \quad \forall \lambda > 0;$$

все остальные периодические орбиты получаются масштабированием  $2\pi$ -периодических решений.

Эти общие свойства позволяют уменьшить размерность задачи. Если же потребовать дополнительную симметрию решений, то задача еще упростится. Именно симметрия позволила получить замечательную орбиту-восьмерку. Мы рассмотрим ее в следующих разделах.

Пусть  $G$  — конечная группа:  $G \times X \rightarrow X$ ,  $(g, x) \mapsto gx$ ,  $G$  действует на конфигурационное пространство  $X$  и  $gx \in X$  с групповой операцией  $(g_1, g_2 x) \mapsto (g_2 \cdot g_1)x$ . Пространство  $X$  называется  $G$ -эквивариантным.

В нашем случае  $G$  действует на

- временной окружности  $\mathbb{T} \subset \mathbb{R}^2$  (например, отражение или сдвиг на часть периода);
- евклидовом пространстве  $E$  (например, поворот на  $2\pi\theta$ , где  $\theta = p/q$  — рациональное число);
- множестве индексов  $\mathbf{n} = \{1, 2, 3\}$ : с отображением  $\sigma$

$$\forall g \in G: (\sigma(g)(i) = j \Rightarrow m_i = m_j),$$

то есть если  $m_i = m_j$ , то массы можно поменять местами.

Согласно принципу симметричной критичности Пале [13], если функционал  $\mathcal{A}$   $G$ -экви-вариантен, то бесстолкновительная критическая точка  $\mathcal{A}^G$  (среди симметричных путей только) является критической точкой  $\mathcal{A}$ ; таким образом, достаточно найти решение для функционала  $\mathcal{A}^G$ , то есть в пространстве функций с симметрией  $G$ , и это решение будет критической точкой функционала  $\mathcal{A}$ , то есть решением нашей задачи.

Следовательно, мы можем рассматривать ограничение действия Лагранжа только на  $G$ -эквивариантные пути

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^G: \Lambda^G &\rightarrow \mathbb{R} \cup \infty, \\ \mathcal{A}^G(x) &= \int_{\mathbb{T}} L(x(t), \dot{x}(t)) dt. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Чтобы получить решения как минимизаторы функционала действия, необходимо выполнение двух условий: во-первых, нужно исключить столкновения, во-вторых, минимум должен достигаться. Последнее условие выполняется, если функционал коэрцитивен, то есть  $\mathcal{A}^G(x) \rightarrow \infty$  при  $\|x\| \rightarrow \infty$ . Если группы, приводящие к соударениям, и группы с некоэрцитивным действием исключить из рассмотрения, то, как показали Барутелло, Феррарио и Террачини [1], все конечные группы симметрии функционала действия Лагранжа плоской задачи трех тел исчерпываются списком из десяти элементов. В число этих десяти групп входит и диэдральная группа  $D_6$ . Именно такая симметрия позволила Монтомери и Шенсине доказать существование восьмерки, ограничившись промежутком  $T/12$  [4].

### 3. Сфера форм

Ясно, что в задаче трех тел важна именно конфигурация тел. Можно считать одной орбитой все орбиты, получающиеся друг из друга с помощью поворотов. Давайте сделаем это.

Конфигурационное пространство (плоской) задачи трех тел  $\mathbb{R}^6$  или, если исключить тройное соударение,  $\mathbb{R}^6 \setminus \{0\}$ . Воспользуемся симметрией (2.1) и выберем начало координат в центре масс трех тел. Размерность конфигурационного пространства уменьшится до  $\mathbb{R}^4$ . Если мы знаем, например,  $\mathbf{r}_1(t)$  и  $\mathbf{r}_2(t)$ , то положение третьего тела получается просто:

$$\mathbf{r}_3(t) = -(m_1\mathbf{r}_1(t) + m_2\mathbf{r}_2(t))/m_3. \tag{3.1}$$

Целесообразнее, однако, воспользоваться для этого координатами Якоби

$$\xi_1 = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1, \quad \xi_2 = \mathbf{r}_3 - \frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2}{m_1 + m_2} = \mathbf{r}_3 \frac{m_1 + m_2 + m_3}{m_1 + m_2},$$



тогда взаимные расстояния и момент инерции можно выразить в виде

$$\begin{aligned} r_{12} &= |\xi_1|, \\ r_{13} &= \left| \xi_2 + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \xi_1 \right|, \\ r_{23} &= \left| \xi_2 - \frac{m_1}{m_1 + m_2} \xi_1 \right|, \\ I = r^2 &= \mu_1 |\xi_1|^2 + \mu_2 |\xi_2|^2, \end{aligned} \quad (3.2)$$

где  $\mu_1 = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ ,  $\mu_2 = \frac{m_3(m_1 + m_2)}{m_1 + m_2 + m_3}$ .

Следующий шаг — избавиться от поворотов. Делается это с помощью известного отображения Хопфа. Рассматривая  $\xi_1$ ,  $\xi_2$  как точки комплексной плоскости, введем переменные  $w_1$ ,  $w_2$ ,  $w_3$  следующим образом:

$$\begin{aligned} w_1 &= \frac{1}{2} \mu_1 |\xi_1|^2 - \frac{1}{2} \mu_2 |\xi_2|^2, \\ w_2 + iw_3 &= \sqrt{\mu_1 \mu_2} \xi_1 \bar{\xi}_2, \end{aligned} \quad (3.3)$$

при этом

$$w_1^2 + w_2^2 + w_3^2 = \frac{1}{4} I^2 = \frac{1}{4} r^4.$$

Пространство  $(w_1, w_2, w_3)$  представляет собой пространство конгруэнтных треугольников, а единичная сфера  $S = 2w/I$  — пространство, каждая точка которого представляет собой класс подобных треугольников, то есть треугольников, имеющих одинаковую форму. Именно эта сфера и называется *сферой форм*. Точки сферы — это единичные векторы  $(s_1, s_2, s_3)$ . Стороны треугольника связаны с этими векторами следующим образом:

$$\begin{aligned} r_{12}^2/r^2 &= \frac{m_1 + m_2}{2m_1 m_2} (1 + s_1), \\ r_{13}^2/r^2 &= \frac{m_1 + m_3}{2m_1 m_3} + \frac{m_2 m_3 - m_1(m_1 + m_2 + m_3)}{2m_1 m_3(m_1 + m_2)} s_1 + \frac{m_2 \sqrt{m_1 + m_2 + m_3}}{(m_1 + m_2) \sqrt{m_1 m_2 m_3}} s_2, \\ r_{23}^2/r^2 &= \frac{m_2 + m_3}{2m_2 m_3} + \frac{m_1 m_3 - m_2(m_1 + m_2 + m_3)}{2m_2 m_3(m_1 + m_2)} s_1 - \frac{m_1 \sqrt{m_1 + m_2 + m_3}}{(m_1 + m_2) \sqrt{m_1 m_2 m_3}} s_2. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Третья компонента вектора определяется равенством  $s_3 = \pm \sqrt{1 - s_1^2 - s_2^2}$ . Таким образом, форма треугольников  $(s_1, s_2, s_3)$  и  $(s_1, s_2, -s_3)$ , имеющих разную ориентацию, различается. Экватор,  $s_3 = 0$  — это множество вырожденных треугольников, все три тела находятся на одной линии ( $\xi_1$  и  $\xi_2$  коллинеарны). Сингулярные точки двойных соударений  $\mathfrak{C}_1$ ,  $\mathfrak{C}_2$  и  $\mathfrak{C}_3$ , естественно, находятся на экваторе, их координаты можно выразить в виде

$$\begin{aligned} \mathfrak{C}_3: r_{12} &= 0, & S(-1, 0, 0), \\ \mathfrak{C}_2: r_{13} &= 0, & S \left( \frac{m_1(m_1 + m_2 + m_3) - m_2 m_3}{(m_1 + m_2)(m_1 + m_3)}, -\frac{2\sqrt{m_1 m_2 m_3(m_1 + m_2 + m_3)}}{(m_1 + m_2)(m_1 + m_3)}, 0 \right), \\ \mathfrak{C}_1: r_{23} &= 0, & S \left( -\frac{m_1 m_3 - m_2(m_1 + m_2 + m_3)}{(m_1 + m_2)(m_2 + m_3)}, \frac{2\sqrt{m_1 m_2 m_3(m_1 + m_2 + m_3)}}{(m_1 + m_2)(m_2 + m_3)}, 0 \right). \end{aligned} \quad (3.5)$$

На экваторе расположены и три эйлеровы точки  $\mathfrak{E}_1, \mathfrak{E}_2, \mathfrak{E}_3$ , которые являются седловыми точками потенциала задачи на сфере форм. Они определены однозначно, но их координаты выразить не столь просто. Например, для  $\mathfrak{E}_1$ , тело  $m_1$  находится между телами  $m_2$  и  $m_3$ ; вводя переменную  $z = r_{12}/r_{13}$ , имеем для определения  $z$  уравнение

$$(m_1 + m_2)z^5 + (2m_1 + 3m_2)z^4 + (m_1 + 3m_2)z^3 - (m_1 + 3m_3)z^2 - (2m_1 + 3m_3)z - m_1 - m_3 = 0. \quad (3.6)$$

Это уравнение имеет только один положительный корень; подставив этот корень в уравнения (3.4), получим координаты эйлеровой точки  $\mathfrak{E}_1$ . Две другие точки получаются аналогично, для  $\mathfrak{E}_2$  тело  $m_2$  находится между  $m_1$  и  $m_3$ , а для  $\mathfrak{E}_3$  тело  $m_3$  — между  $m_1$  и  $m_2$ .

Потенциал задачи имеет минимум в двух противоположных лагранжевых точках  $\mathfrak{L}_4$  и  $\mathfrak{L}_5$ :

$$\begin{aligned} s_1 &= \frac{m_1 m_2^2 + m_1^2 m_2 - m_1^2 m_3 - m_2^2 m_3}{(m_1 + m_2)(m_1 m_2 + m_1 m_3 + m_2 m_3)}, \\ s_2 &= \frac{(m_1 - m_2)\sqrt{m_1 m_2 m_3 (m_1 + m_2 + m_3)}}{(m_1 + m_2)(m_1 m_2 + m_1 m_3 + m_2 m_3)}, \\ s_3 &= \pm \frac{\sqrt{3 m_1 m_2 m_3 (m_1 + m_2 + m_3)}}{(m_1 m_2 + m_1 m_3 + m_2 m_3)}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

В случае равных масс,  $m_1 = m_2 = m_3$ , точки на сфере форм располагаются особенно симметрично. Эйлеровы точки:  $\mathfrak{E}_1 = (-1/2, -\sqrt{3}/2, 0)$ ,  $\mathfrak{E}_2 = (-1/2, \sqrt{3}/2, 0)$ ,  $\mathfrak{E}_3 = (1, 0, 0)$ ; точки двойных соударений:  $\mathfrak{C}_1 = (1/2, \sqrt{3}/2, 0)$ ,  $\mathfrak{C}_2 = (1/2, -\sqrt{3}/2, 0)$  и  $\mathfrak{C}_3 = (-1, 0, 0)$ ; лагранжевы точки:  $\mathfrak{L}_4 = (0, 0, 1)$ ,  $\mathfrak{L}_5 = (0, 0, -1)$ . Меридианы, проходящие через эйлеровы точки и точки двойных соударений, соответствуют конфигурациям равнобедренных треугольников.

Если вектор кинетического момента задачи трех тел равен нулю, то траектории на сфере форм имеют два замечательных свойства [6, 12]:

- по траектории на сфере форм можно с точностью до поворота восстановить траекторию в исходном евклидовом пространстве;
- координата  $s_3$  траектории задачи трех тел на сфере форм является строго монотонной функцией между двумя последовательными локальными экстремумами, эти экстремумы лежат в противоположных полусферах, и, значит, траектория между двумя такими экстремумами пересекает экватор в единственной точке.

Именно рассматривая траекторию задачи трех тел на сфере форм, Шенсине и Монтгомери доказали существование орбиты-восьмерки.

#### 4. Численное определение орбит

Траекторию задачи трех тел можно определить как экстремаль функционала действия:

$$\mathcal{A}(q(t)) = \int_{t_1}^{t_2} L(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) dt. \quad (4.1)$$



Здесь  $L$  — лагранжиан задачи:  $L = K + U$ ,

$$K = \frac{1}{2}(m_1|\dot{\mathbf{r}}_1|^2 + m_2|\dot{\mathbf{r}}_2|^2 + m_3|\dot{\mathbf{r}}_3|^2),$$

$$U = \frac{m_1m_2}{r_{12}} + \frac{m_1m_3}{r_{13}} + \frac{m_2m_3}{r_{23}} = \frac{1}{r}U_S(s_1, s_2, s_3),$$

где  $U_S(s_1, s_2, s_3)$  — потенциал задачи на сфере форм.

Возможность анализа решений задачи  $N$  тел с помощью вариационных методов и важность конфигурации тел были показаны еще Пуанкаре [14]. Правда, этот анализ он выполнил для потенциала сильного взаимодействия  $U = 1/r^2$ . В случае ньютонова потенциала возникает ряд трудностей. Во-первых, действие на траекториях соударения конечно, и орбиты с соударениями нужно исключить, например, рассматривая подходящие симметрии. Во-вторых, если не накладывать никаких ограничений, то минимум функционала (4.1) достигается на орбите, на которой неподвижные тела находятся на бесконечности, что, очевидно, решением не является.

Нас интересуют периодические решения, и это ограничивает пространство функций, в котором они ищутся, пространством периодических функций, причем согласно симметрии масштаба можно ограничиться только периодом  $T = 2/\pi$ .

Мы хотим минимизировать функционал действия  $\mathcal{A}$  в пространстве периодических с периодом  $2\pi$  функций, то есть найти такой набор коэффициентов  $C_{xi}^j, S_{xi}^j, C_{yi}^j, S_{yi}^j$ , который минимизировал бы  $\mathcal{A}$  и удовлетворял бы некоторым условиям симметрии. Таким образом, решения представляются в виде

$$x_j(t) = \sum_{i=1} C_{xi}^j \cos it + S_{xi}^j \sin it,$$

$$y_j(t) = \sum_{i=1} C_{yi}^j \cos it + S_{yi}^j \sin it,$$
(4.2)

где  $j$  — это номер тела. Условие (3.1) позволяет нам ограничиться поиском разложений только для двух тел, на треть сокращая количество определяемых коэффициентов. Похожий подход для поиска экстремума функционала действия в задаче  $N$  тел без привлечения симметрии использовался в [16].

Итак, мы имеем задачу нелинейного программирования:

$$\min A(C_{xi}^j, C_{yi}^j, S_{xi}^j, S_{yi}^j), \quad i = 1, \dots, n, j = 1, 2$$

$$g_k(C_{xi}^j, C_{yi}^j, S_{xi}^j, S_{yi}^j) = 0, \quad k = 1, \dots, m$$

$$g_l(C_{xi}^j, C_{yi}^j, S_{xi}^j, S_{yi}^j) \leq 0, \quad l = m + 1, \dots, l.$$

Ограничения  $g_k$  определяются симметрией, в рассматриваемых случаях некоторые из коэффициентов просто равны нулю или простыми соотношениями связаны с другими, что уменьшает число определяемых коэффициентов.

Методы нелинейного программирования гарантируют решения, если целевая функция  $\mathcal{A}$  и ограничения  $g_k$  и  $g_l$  являются выпуклыми функциями. Лагранжиан задачи  $N$  тел и функционал действия  $\mathcal{A}$  выпуклыми функциями не являются, тем не менее разработанные методы нелинейного программирования зачастую позволяют получить решение и в задаче  $N$  тел. В выполненных расчетах использованы две доступные системы оптимизации: LOQO и Knitro. Обе эти системы решают задачи методом последовательного квадратичного программирования, реализуя алгоритм одновременного решения прямой и двойственной

задачи для внутренних точек. Выбор решения на каждом шаге итерации происходит по-разному, но в целом и та, и другая система дают схожие результаты.

Если мы хотим найти траекторию восьмерки, простую хореографию, когда по одной траектории друг за другом движутся все три тела (равной) массы, и которая имеет диэдральную симметрию  $D_6$ , то нужно найти всего два набора коэффициентов, для координат  $x$  и  $y$ . Подходящий выбор осей позволит представить траекторию в виде

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq 3k}} C_{2i-1} \cos(2i-1)t + S_{2i-1} \sin(2i-1)t, \\ y(t) &= \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq 3k}} C_{2i} \cos 2it + S_{2i} \sin 2it, \end{aligned} \tag{4.3}$$

$$x_j(t) = x(t + 2\pi(j-1)/3), \quad y_j(t) = y(t + 2\pi(j-1)/3), \quad j = 1, 2, 3.$$

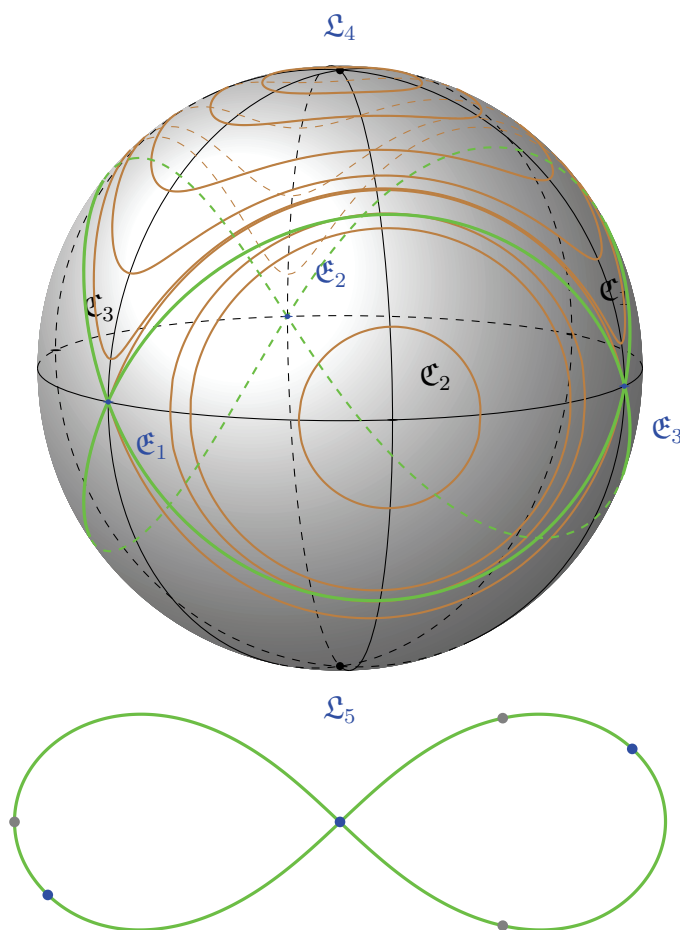


Рис. 1. «Восьмерка» на сфере форм и на плоскости. Синие точки соответствуют эйлеровой конфигурации  $\mathcal{E}_i$ . Коричневые линии — линии уровня потенциала на сфере форм.

Таким образом, чтобы определить разложение решения в ряд Фурье до  $N$  гармоники включительно, нужно определить  $2(N - N/3)$  коэффициентов. Условие (3.1) в этом случае равносильно условию  $i \neq 3k$  и, следовательно, выполняется. Если ограничиться гармониками 24 порядка, то наибольшая амплитуда гармоник будет не более  $5 \cdot 10^{-7}$ ; в приведенных

ниже разложениях отброшены члены с амплитудой, меньшей чем  $10^{-3}$

$$\begin{aligned}
 x = & 0.548 \cos(t) + 0.949 \sin(t) & y = & \\
 & & & 0.292 \cos(2t) + 0.169 \sin(2t) \\
 & & & + 0.048 \cos(4t) - 0.028 \sin(4t) \\
 & - 0.013 \cos(5t) + 0.022 \sin(5t) & & (4.4) \\
 & + 0.003 \cos(7t) + 0.005 \sin(7t) \\
 & & & + 0.003 \cos(8t) + 0.002 \sin(8t) \\
 & & & + 0.001 \cos(10t)
 \end{aligned}$$

На рисунке 1 приведена траектория восьмерки на сфере форм и на евклидовой плоскости. Пусть в начальный момент тела находятся в эйлеровой конфигурации, то есть на одной прямой: одно тело в барицентре, а два других — на равных расстояниях от него. На рисунке это синие точки. Через  $1/12$  периода конфигурация примет вид равностороннего треугольника. На траектории на евклидовой плоскости это серые точки, одна из них на оси абсцисс, абсциссы двух других одинаковы, а ординаты отличаются знаком. На сфере форм все еще проще. Мы имеем только одну точку, движущуюся по траектории на сфере форм, начиная с эйлеровой точки, скажем  $\mathfrak{E}_1$ , через  $1/12$  периода точка проходит через меридиан над  $\mathfrak{E}_2$ , при этом достигается максимальная высота, и еще через  $1/12$  периода точка находится в следующей эйлеровой точке  $\mathfrak{E}_3$  и из северного полушария переходит в южное. И так шесть раз. Напомним, что от минимума (в одном полушарии) до максимума (в другом) высота изменяется монотонно. На сфере форм показаны коричневым цветом линии уровня потенциала  $U_S(s_1, s_2, s_3)$ . Минимальное значение  $U_{min} = 0.19245$  в точках Лагранжа. Точки Эйлера — седловые,  $U_{\mathfrak{E}_i} = 0.22680$ , а в точках двойных соударений потенциал бесконечен. На нашей траектории в точках Эйлера потенциал, разумеется, равен  $0.22680$ , и из рисунка видно, что он мало меняется.

Попробуем теперь получить орбиты, похожие на восьмерку, чуть ослабив условия симметрии. Теперь траектория не будет простой хореографией, каждое тело будет двигаться по своей орбите, но симметрия все же останется. Пусть  $m_1 = m_2$ ; будем искать траектории в виде

$$\begin{aligned}
 x_1(t) &= \sum_{i=1} C_{2i-1} \cos(2i-1)t + S_{2i-1} \sin(2i-1)t, \\
 y_1(t) &= b_0 + \sum_{i=1} C_{2i} \cos 2it + S_{2i} \sin 2it, \\
 x_2(t) &= \sum_{i=1} C_{2i-1} \cos(2i-1)t - S_{2i-1} \sin(2i-1)t, \\
 y_2(t) &= -b_0 - \sum_{i=1} C_{2i} \cos 2it + S_{2i} \sin 2it.
 \end{aligned} \tag{4.5}$$

Чтобы определить разложение решения в ряд Фурье до  $N$  гармоники включительно, нужно определить  $2N+1$  коэффициентов. Условие (3.1) даст нам разложение для координат третьего тела. Так же, как и для восьмерки, и с той же точностью найдем разложения для



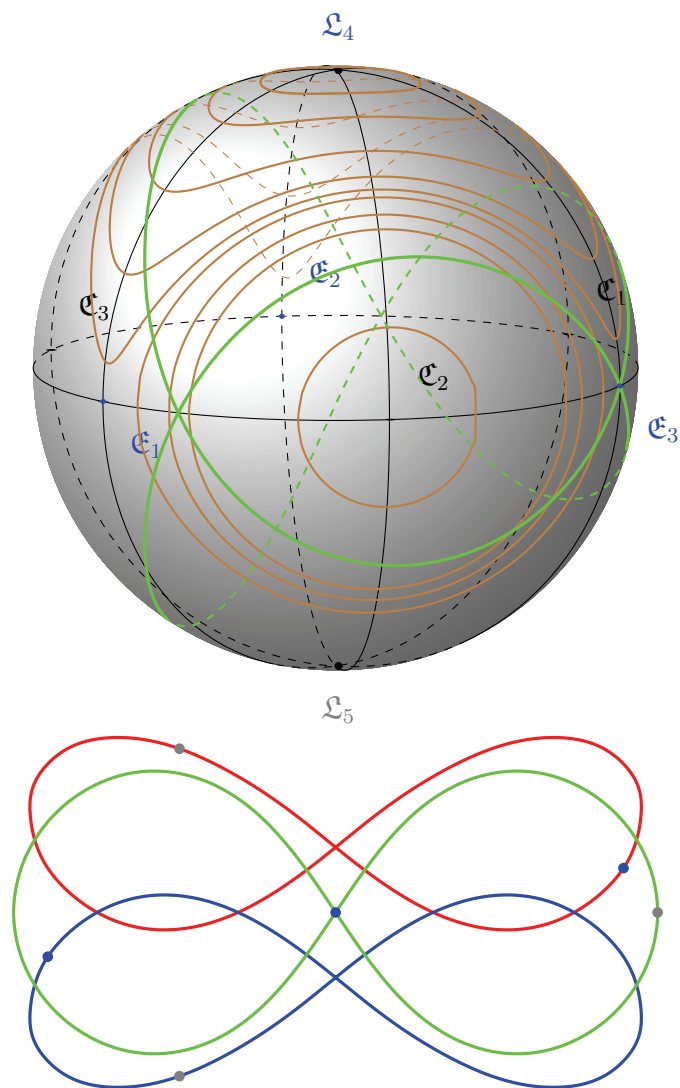


Рис. 2. «Расщепленная восьмерка» на сфере форм и на плоскости. Синие точки соответствуют эйлеровой конфигурации. Коричневые линии — линии уровня потенциала на сфере форм. Отношение масс  $m_1 : m_2 : m_3 = 1 : 1 : 0.97$ .

распределения масс  $m_1 = m_2 = 1, m_3 = 0.97$  (заметим, что важны только отношения масс):

$$\begin{aligned}
 x_1 &= 0.526 \cos(t) + 0.883 \sin(t) & y_1 &= 0.311 \\
 &+ 0.006 \cos(3t) - 0.060 \sin(3t) & &+ 0.213 \cos(2t) + 0.206 \sin(2t) \\
 &- 0.022 \cos(5t) + 0.014 \sin(5t) & &+ 0.031 \cos(4t) - 0.043 \sin(4t) \\
 &+ 0.008 \cos(7t) + 0.003 \sin(7t) & &- 0.017 \cos(6t) + 0.001 \sin(6t) \\
 & & &+ 0.004 \cos(8t) + 0.005 \sin(8t)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - 0.004 \sin(9t) \\
& - 0.001 \cos(11t) - 0.001 \sin(11t) \\
& + 0.001 \sin(13t) \\
& - 0.001 \cos(10t) - 0.002 \sin(10t) \\
& - 0.001 \cos(12t)
\end{aligned}$$

На рисунке 2 представлена эта траектория на плоскости и на сфере форм. Тело меньшей массы описывает восьмерку, а два тела равной массы двигаются по симметричным квазивосьмеркам. Эйлера конфигурация проходится лишь дважды, когда третье тело находится в центре масс. А через четверть периода после эйлеровой конфигурации мы имеем конфигурацию равнобедренного треугольника, меньшее тело находится на оси абсцисс. На сфере форм траектория проходит через эйлерову точку  $\mathfrak{E}_3$  и, согласно принятому ограничению, симметрична относительно меридиана  $\mathfrak{E}_3 - \mathfrak{L}_4 - \mathfrak{E}_3$ . На этом меридиане высота траектории достигает максимального (и минимального) значения, (равнобедренный) треугольник здесь ближе всего к равностороннему.

Рассмотрим еще одно распределение масс,  $m_1 : m_2 : m_3 = 1 : 1 : 0.87$ . Для такого распределения получаем следующие разложения:

$$\begin{aligned}
x_1 = & 0.444 \cos(t) + 0.720 \sin(t) \\
& + 0.018 \cos(3t) - 0.092 \sin(3t) \\
& - 0.032 \cos(5t) + 0.014 \sin(5t) \\
& + 0.014 \cos(7t) + 0.008 \sin(7t) \\
& - 0.001 \cos(9t) - 0.008 \sin(9t) \\
& - 0.003 \cos(11t) + 0.003 \sin(11t) \\
& + 0.002 \cos(13t) + 0.001 \sin(13t) \\
& - 0.001 \sin(15t) \\
& - 0.001 \cos(17t) + 0.001 \sin(17t) \\
& + 0.001 \cos(19t) \\
y_1 = & 0.612 \\
& + 0.139 \cos(2t) + 0.225 \sin(2t) \\
& + 0.033 \cos(4t) - 0.054 \sin(4t) \\
& - 0.026 \cos(6t) \\
& + 0.007 \cos(8t) + 0.010 \sin(8t) \\
& + 0.002 \cos(10t) - 0.006 \sin(10t) \\
& - 0.003 \cos(12t) + 0.001 \sin(12t) \\
& + 0.002 \cos(14t) + 0.001 \sin(14t) \\
& - 0.001 \sin(16t) \\
& - 0.001 \cos(18t)
\end{aligned}$$

Эта траектория интересна тем, что, во-первых, две квазивосьмерки, по которым двигаются тела равной массы, не пересекаются и расположены в разных полуплоскостях, это

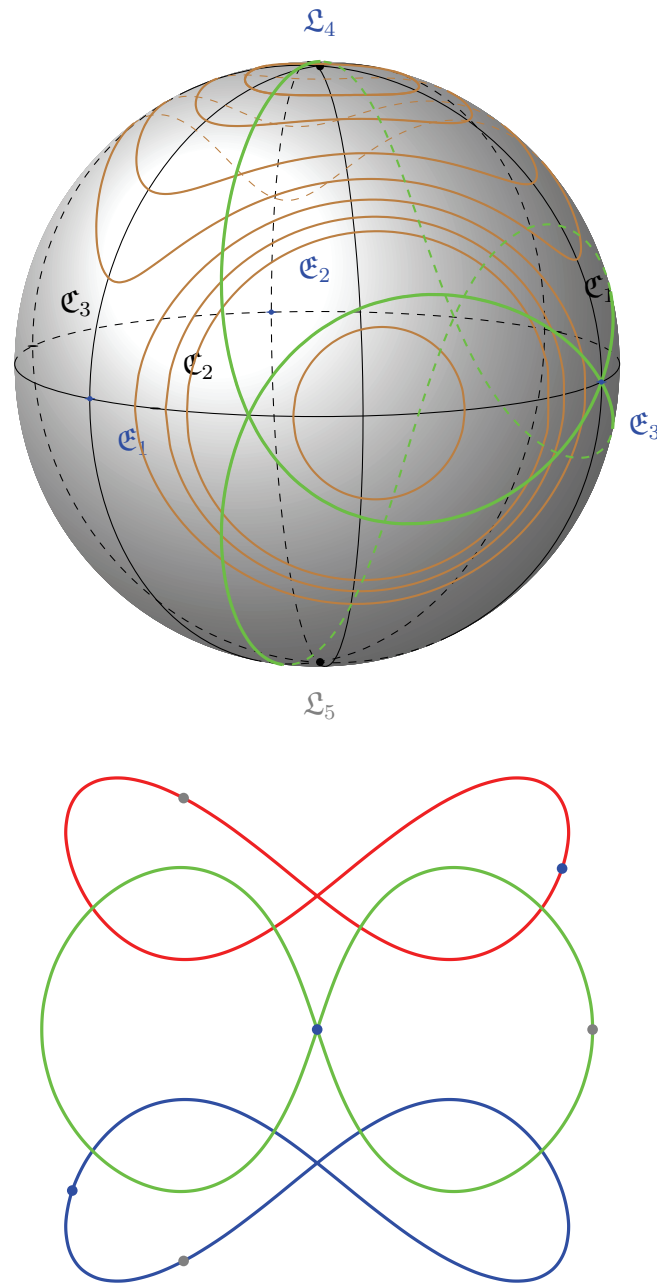


Рис. 3. «Расщепленная восьмерка» на сфере форм и на плоскости. Синие точки соответствуют эйлеровой конфигурации. Коричневые линии — линии уровня потенциала на сфере форм. Отношение масс  $m_1 : m_2 : m_3 = 1 : 1 : 0.87$ .

свойство появляется при  $m_1 : m_2 : m_3 = 1 : 1 : 0.96$ ; а во-вторых, равнобедренная конфигурация близка к равностороннему треугольнику, на сфере форм траектория очень близко подходит к точке  $\mathcal{L}_4$ , то есть достигает максимально возможной высоты. Поскольку высота траектории на сфере форм монотонно изменяется между двумя последовательными экстремумами, находящимися в разных полушарах, то траектории этого типа с отношением масс меньшим, чем  $m_1 : m_2 : m_3 = 1 : 1 : 0.86 \dots$ , не существует.

## 5. Несколько замечаний

1. Траектории получены с помощью численных методов оптимизации со многими неизвестными, и точность определяемых коэффициентов не очень высока, порядка  $10^{-5}$ . Но получаются не начальные условия для той или иной орбиты, а сами решения, функции, представляющие движение по этой орбите. Таким образом, начальные условия на любой момент времени известны. Их можно уточнять обычными методами. Результаты численного интегрирования уравнений движения согласуются с полученными разложениями.

2. Удовлетворяя условиям (4.5), мы получаем соответствующие орбиты при  $1 \leq m_1/m_3 < 0.86$ ; дальнейшее уменьшение этого отношения невозможно, так как это нарушило бы монотонность изменения высоты траектории на сфере форм от минимума в южном полушарии до максимума в северном. При  $m_1/m_3 > 1$  найти орбиты с рассматриваемой симметрией не удастся. Нужно изменить условия (4.5).

3. Шенсине и Монтгомери [4] строили орбиту, которая последовательно проходит через три эйлеровы конфигурации. Полученные орбиты проходят только через одну эйлерову конфигурацию. Было бы интересно найти орбиты с неравными массами, которые проходят через все три эйлеровы точки.

## Список литературы

- [1] Barutello V., Ferrario D., Terracini S. Symmetry groups of the planar 3-body problem and action-minimizing trajectories // Arch. Ration. Mech. Anal., 2008, vol. 190, no. 2, pp. 189–226.
- [2] Broucke R., Lass H. A note on relative motion in the general three-body problem // Celestial Mech., 1973, vol. 8, pp. 5–10.
- [3] Broucke R., Boggs D. Periodic general orbits in three-body problem // Celestial Mech., 1975, vol. 11, pp. 13–38.
- [4] Chenciner A., Montgomery R. A remarkable periodic solution of the three-body problem in the case of equal masses // Ann. of Math. (2), 2000, vol. 152, no. 2, pp. 881–901. (См. также: Современные проблемы хаоса и нелинейности: Сб. ст. / К. Симо, С. Смейл, А. Шенсине и др. М.–Ижевск: НИЦ «РХД», Институт компьютерных исследований, 2002, с.183–205.)
- [5] Hsiang W.-Y., Straume E. Geometric study of the three-body problem: 1 // PAM-620 Center for Pure and Applied Math. preprint series, Berkeley: Univ. of California, 1994.
- [6] Hsiang W.-Y., Straume E. Global geometry of 3-body trajectories with vanishing angular momentum: 1 // Chinese Ann. Math. Ser. B, 2008, vol. 29, pp. 1–54.
- [7] Hsiang W.-Y., Straume E. Kinematic geometry of triangles and the stude of the three-body problem // Lobachevskii J. Math., 2007, vol. 25, pp. 9–130.
- [8] Moeckel R. Some qualitative features of the three-body problem // Contemp. Math., 1988, vol. 81, pp. 1–21. (См. также: Задача Кеплера: Столкновения. Регуляризация: Сб. ст. М.–Ижевск: НИЦ «РХД», Институт компьютерных исследований, 2006, с. 264–286.)
- [9] Moore C. Braids in classical dynamics // Phys. Rev. Lett., 1993, vol. 70, pp. 3675–3679. (См. также: Относительные равновесия: Периодические решения: Сб. ст. М.–Ижевск: НИЦ «РХД», Институт компьютерных исследований, 2006, с. 163–174.)
- [10] Montgomery R. The geometric phase of the three-body problem // Nonlinearity, 1996, vol. 9, pp. 1341–1360.
- [11] Montgomery R. A new solution to the three-body problem // Notices Amer. Math. Soc., 2001, vol. 48, no. 5, pp. 471–481.



- [12] Montgomery R. Infinitely many syzygies // Arch. Ration. Mech. Anal., 2002, vol. 162, no. 4, pp. 311–330. (См. также: Различные аспекты задачи  $N$  тел: Сб. ст. / А. В. Борисов, А. Шенсине. М.–Ижевск: НИЦ «РХД», Институт компьютерных исследований, 2011, с. 7–64.)
- [13] Palais R. S. The principle of symmetric criticality // Comm. Math. Phys., 1979, vol. 69, pp. 19–30.
- [14] Poincaré H. Sur les solutions périodiques et le principe de moindre action // C. R. Acad. Sci., 1896, vol. 123, pp. 915–918. (См. также: Относительные равновесия: Периодические решения: Сб. ст. М.–Ижевск: НИЦ «РХД», Институт компьютерных исследований, 2006, с. 159–162.)
- [15] Titov V. Symmetrical periodic orbits in the three body problem — the variational approach // Few-Body Problem: Theory and Computer Simulation (Turku, 2005) / Ch. Flynn. Turku: Univ. of Turku, 2006. P. 9–15.
- [16] Vanderbei R. New orbits for the  $n$ -body problem // Ann. New York Acad. Sci., 2004, vol. 1017, pp. 422–433.
- [17] Субботин М. Ф. Введение в теоретическую астрономию. М.: Наука, 1968. 800 с.

### Some periodic orbits of general three body problem with vanishing angular momentum

Vladimir B. Titov

Saint-Petersburg State University  
Universitetskaya nab. 7–9, St. Petersburg, 199034, Russia  
tit@astro.spbu.ru

The periodic solutions of general three body problem are found. The solutions under discussion are extension of well-known figure-eight orbit. Found orbits are described on the Euclidean plane and on the sphere.

MSC 2010: 70F07, 70F15

Keywords: three body problem, periodic orbits, figure-eight, celestial mechanics

Received January 31, 2012, accepted February 22, 2012

Citation: *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2012, vol. 8, no. 2, pp. 377–389 (Russian)