



УДК: 531.36

MSC 2010: 70H05, 70H14, 70K05

О движениях гамильтоновой системы с двумя степенями свободы при наличии кратных резонансов третьего порядка

О. В. Холостова

Рассматриваются движения периодической по времени гамильтоновой системы с двумя степенями свободы в окрестности положения равновесия, устойчивого в линейном приближении. Предполагается, что между частотами линейных колебаний системы реализуется несколько резонансных соотношений третьего порядка. Показано, что при наличии в системе двух резонансов третьего порядка имеет место неустойчивость положения равновесия при любом соотношении между резонансными коэффициентами. Получены приближенные (модельные) гамильтонианы, характерные для исследуемых резонансных случаев, проведен подробный анализ нелинейных колебаний отвечающих им систем.

Ключевые слова: гамильтонова система, кратный резонанс, устойчивость, функция Четаева

1. Введение

При исследовании поведения механических систем в окрестности заданного движения (положения равновесия или периодического движения) наиболее интересными и трудными являются случаи наличия в системе резонансов, для которых частоты малых колебаний линеаризованных уравнений возмущенного движения связаны линейными соотношениями специального вида. Первые работы, изучающие влияние резонансов на движения систем в окрестности положения равновесия, появились чуть более века назад [1–3]. В настоящее время вопросы устойчивости и характер поведения системы, как гамильтоновой, так

Получено 25 марта 2012 года

После доработки 27 апреля 2012 года

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 11-01-00322, 10-01-00381) и Программы поддержки ведущих научных школ (проект НШ-4149.2012.1).

Холостова Ольга Владимировна

kholostova_o@mail.ru

Московский авиационный институт (Национальный исследовательский университет)

125993, Россия, г. Москва, Волоколамское ш., 4



и негамильтоновой, в которой имеется один резонанс, изучены достаточно полно, по данной проблеме имеется обширная библиография (см., например, обзоры [4, 5]).

Существенно более сложными являются случаи, когда в системе реализуются одновременно несколько резонансов. Такая ситуация может возникнуть в многопараметрической задаче при некоторых наборах значений параметров.

Некоторые результаты исследования устойчивости положения равновесия автономной негамильтоновой системы при наличии нескольких резонансов одного (нечетного) порядка приведены в работах [6–9]; в монографии [9] также обсуждается случай многократного резонанса четного порядка. Устойчивость положения равновесия многомерной автономной гамильтоновой системы в случае взаимодействия в ней нескольких резонансов третьего порядка изучалась в работах [10, 11].

Отметим недавние работы [12–14], в которых рассматривается близкая к автономной периодическая по времени линейная гамильтонова система с двумя степенями свободы в предположении о наличии в ней двукратного параметрического резонанса; проводится построение областей устойчивости и неустойчивости положения равновесия. Результаты исследования применены к задачам исследования динамики спутников [14–16].

В данной работе рассматриваются движения неавтономной периодической по времени гамильтоновой системы с двумя степенями свободы в окрестности положения равновесия, устойчивого в линейном приближении. Предполагается, что в системе реализуется кратный резонанс третьего порядка (и нет резонансов низших порядков). Проведена классификация резонансных случаев, построены гамильтонианы, характерные для каждого случая кратных резонансов. Известно [17], что в случае однократного (сильного) резонанса третьего порядка тривиальное равновесие системы неустойчиво, если соответствующий резонансный коэффициент отличен от нуля. При помощи метода Четаева в данной работе показано, что для всех случаев двойного резонанса третьего порядка тривиальное положение равновесия будет неустойчивым при любом соотношении резонансных коэффициентов. Это утверждение справедливо и для случая, когда оба резонанса третьего порядка слабые и наличие только одного из них не приводит к неустойчивости.

Подробно исследованы приближенные (модельные) системы, отвечающие автономным системам, в достаточно малой окрестности начала координат. Прослежена эволюция поведения этих систем при изменении соотношения между резонансными коэффициентами. Указаны характерные типы траекторий модельных систем на нулевом и произвольном уровнях энергии.

2. Постановка задачи.

Случаи кратных резонансов третьего порядка

Рассмотрим движения неавтономной 2π -периодической по времени гамильтоновой системы с двумя степенями свободы. Будем предполагать, что начало координат фазового пространства — положение равновесия, и гамильтониан H системы аналитичен в его окрестности. Пусть это положение равновесия устойчиво в линейном приближении, характеристические показатели $\pm i\lambda_j$ соответствующей линеаризованной системы уравнений возмущенного движения — чисто мнимые.

Пусть, кроме того, величины λ_j , $2\lambda_j$ и $\lambda_1 \pm \lambda_2$ не являются целыми числами, то есть в системе нет резонансов первого и второго порядков. Тогда квадратичная часть гамильтониана возмущенного движения может быть приведена к нормальной форме и функция H

представлена в виде

$$H(q_j, p_j, t) = \frac{1}{2}\lambda_1(q_1^2 + p_1^2) + \frac{1}{2}\sigma\lambda_2(q_2^2 + p_2^2) + H_3(q_j, p_j, t) + H_4(q_j, p_j, t) + O_5. \quad (2.1)$$

Здесь q_j и p_j ($j = 1, 2$) — обобщенные координаты и импульсы, $\sigma = 1$ или $\sigma = -1$, $\lambda_j > 0$; $H_k(q_j, p_j, t)$ ($k = 3, 4$) — совокупность слагаемых k -й степени, а O_5 — совокупность слагаемых не менее пятой степени по q_j, p_j с 2π -периодическими по t коэффициентами.

Перейдем к «полярным» координатам φ_j, r_j по формулам $q_j = \sqrt{2r_j} \sin \varphi_j$, $p_j = \sqrt{2r_j} \cos \varphi_j$ ($j = 1, 2$) и перепишем гамильтониан (2.1) в виде

$$\tilde{H}(\varphi_j, r_j, t) = \lambda_1 r_1 + \sigma \lambda_2 r_2 + \tilde{H}_3(\varphi_j, r_j, t) + \tilde{H}_4(\varphi_j, r_j, t) + O_{5/2}, \quad (2.2)$$

где $O_{5/2}$ — совокупность слагаемых пятой и более высоких степеней относительно $r_j^{1/2}$ ($j = 1, 2$).

Если величины λ_1 и λ_2 таковы, что

$$m_1 \lambda_1 + m_2 \lambda_2 = \ell, \quad (2.3)$$

где m_1, m_2, ℓ — целые числа и $|m_1| + |m_2| = 3$, то в системе реализуется резонанс третьего порядка.

Пользуясь терминологией, принятой при исследовании параметрического резонанса в линейных системах [18], назовем резонанс основным, если в резонансном соотношении (2.3) присутствует только одна из величин λ_j , и комбинационным, если в (2.3) имеются обе величины λ_1 и λ_2 . Будем также различать сильные и слабые резонансы, как это принято у ряда авторов [4]. Назовем резонанс сильным, если он может привести к неустойчивости в системе, и слабым, если его наличие не приводит к неустойчивости.

Сильными являются основные резонансы, а также комбинационные резонансы, для которых выполнено соотношение $\sigma m_1 m_2 > 0$. При наличии в системе одного сильного резонанса третьего порядка исследуемое положение равновесия неустойчиво, если соответствующий резонансный коэффициент отличен от нуля [17]. Комбинационный резонанс, для которого $\sigma m_1 m_2 < 0$, является слабым, так как при его наличии в системе имеется положительно определенный формальный интеграл.

Пусть в системе имеются одновременно несколько резонансов третьего порядка. Случаи двойного резонанса третьего порядка реализуются для следующих наборов величин λ_1 и λ_2 (k_1, k_2 — целые числа):

$$\lambda_1 = k_1 + \frac{1}{3}, \quad \lambda_2 = k_2 + \frac{5}{6}; \quad \lambda_1 = k_1 + \frac{2}{3}, \quad \lambda_2 = k_2 + \frac{1}{6}; \quad (2.4)$$

$$\lambda_1 = k_1 + \frac{1}{3}, \quad \lambda_2 = k_2 + \frac{1}{6}; \quad \lambda_1 = k_1 + \frac{2}{3}, \quad \lambda_2 = k_2 + \frac{5}{6}; \quad (2.5)$$

$$\lambda_1 = k_1 + \frac{1}{5}, \quad \lambda_2 = k_2 + \frac{3}{5}; \quad \lambda_1 = k_1 + \frac{3}{5}, \quad \lambda_2 = k_2 + \frac{4}{5}; \quad (2.6)$$

$$\lambda_1 = k_1 + \frac{2}{5}, \quad \lambda_2 = k_2 + \frac{1}{5}; \quad \lambda_1 = k_1 + \frac{4}{5}, \quad \lambda_2 = k_2 + \frac{2}{5}. \quad (2.7)$$

В случаях (2.4) величины $3\lambda_1$ и $\lambda_1 + 2\lambda_2$, а в случаях (2.5) величины $3\lambda_1$ и $\lambda_1 - 2\lambda_2$ — целые числа. При выполнении соотношений (2.6) и (2.7) целыми являются величины $\lambda_1 + 2\lambda_2$ и $\lambda_1 - 2\lambda_2$. Отметим, что для каждого из наборов (2.4)–(2.7) имеются еще резонансы



четвертого порядка, так как целыми будут величины $2\lambda_1 - 2\lambda_2$ (случаи (2.4)), $2\lambda_1 + 2\lambda_2$ (случаи (2.5)), $\lambda_1 + 3\lambda_2$ и $3\lambda_1 - \lambda_2$ (случаи (2.6), (2.7)).

Число резонансных случаев может быть удвоено, если в соотношениях (2.4)–(2.7) индексы 1 и 2 у величин λ_j и k_j поменять местами.

Кроме перечисленных, других случаев кратных резонансов третьего порядка при сделанных предположениях нет.

Другие возможные случаи кратных резонансов третьего порядка требуют наличия в системе резонанса второго порядка. Так, для наборов

$$\lambda_1 = k_1 + \frac{1}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{k_2}{2} + \frac{1}{4} \quad (2.8)$$

в системе есть два комбинационных резонанса третьего порядка ($\lambda_1 \pm 2\lambda_2$ — целые числа), а также резонансы второго и четвертого порядков ($2\lambda_1, 4\lambda_1, 4\lambda_2$ — целые числа). Если

$$\lambda_1 = k_1 + \frac{1}{3}, \quad \lambda_2 = k_2 + \frac{1}{3} \quad \text{или} \quad \lambda_1 = k_1 + \frac{2}{3}, \quad \lambda_2 = k_2 + \frac{2}{3}, \quad (2.9)$$

то целыми являются величины $3\lambda_1, 3\lambda_2, 2\lambda_1 + \lambda_2, \lambda_1 + 2\lambda_2$ (резонансы третьего порядка) и величины $\lambda_1 - \lambda_2$ и $2(\lambda_1 - \lambda_2)$ (резонансы второго и четвертого порядков), а при

$$\lambda_1 = k_1 + \frac{1}{3}, \quad \lambda_2 = k_2 + \frac{2}{3} \quad \text{или} \quad \lambda_1 = k_1 + \frac{2}{3}, \quad \lambda_2 = k_2 + \frac{1}{3} \quad (2.10)$$

величины $3\lambda_1, 3\lambda_2, 2\lambda_1 - \lambda_2, \lambda_1 - 2\lambda_2$, а также $\lambda_1 + \lambda_2$ и $2(\lambda_1 + \lambda_2)$.

Случаи (2.8)–(2.10) в данной работе рассматриваться не будут.

Цель работы — исследование устойчивости тривиального положения равновесия в случаях (2.4)–(2.7) наличия в системе двойного резонанса третьего порядка, а также исследование движений соответствующих модельных систем в достаточно малой окрестности начала координат.

3. Преобразование гамильтониана.

Модельные гамильтонианы

При помощи ряда канонических замен переменных преобразуем гамильтониан (2.2) к виду, характерному для рассматриваемых резонансных случаев.

3.1. *Случаи (2.4), (2.5).* Пусть сначала в системе реализуется один из случаев (2.4). При помощи близкой к тождественной 2π -периодической по времени канонической замены переменных уничтожим в членах третьей и четвертой степеней слагаемые с нерезонансными гармониками и приведем гамильтониан к виду (за переменными оставляем прежние обозначения)

$$\begin{aligned} \widehat{H} = & \lambda_1 r_1 + \sigma \lambda_2 r_2 + \{ar_1^{3/2} \cos[3\varphi_1 - 3\lambda_1 t + 3\varphi_1^*] + \\ & + br_1^{1/2} r_2 \cos[\varphi_1 + 2\sigma\varphi_2 - (\lambda_1 + 2\lambda_2)t + \varphi_1^* + 2\sigma\varphi_2^*]\} + \\ & + \{c_{20}r_1^2 + c_{11}r_1 r_2 + c_{02}r_2^2 + \\ & + dr_1 r_2 \cos[2\varphi_1 - 2\sigma\varphi_2 - (2\lambda_1 - 2\lambda_2)t + 2\varphi_*]\} + O_{5/2}. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Здесь $a, b, d, c_{ij}, \varphi_j^*, \varphi_*$ — константы. Будем считать, что резонансные коэффициенты a, b неотрицательны, этого всегда можно добиться сдвигом по координатам φ_j .

Осуществим далее замену переменных $\varphi_j, r_j \rightarrow \Phi_j, R_j$ ($j = 1, 2$) по формулам

$$R_1 = r_1, \quad R_2 = r_2, \quad \Phi_1 = \varphi_1 + \varphi_1^* - \lambda_1 t, \quad \Phi_2 = \varphi_2 + \varphi_2^* - \sigma \lambda_2 t. \quad (3.2)$$

Это унивалентное каноническое преобразование, задаваемое производящей функцией

$$S = (\varphi_1 + \varphi_1^* - \lambda_1 t)R_1 + (\varphi_2 + \varphi_2^* - \sigma \lambda_2 t)R_2. \quad (3.3)$$

В результате преобразования (3.2) линейная по R_j часть гамильтониана уничтожится, слагаемые третьего и четвертого порядка по $R_j^{1/2}$ не будут содержать времени. Гамильтониан (3.1) преобразуется к виду

$$H^* = [aR_1^{3/2} \cos 3\Phi_1 + bR_1^{1/2} R_2 \cos(\Phi_1 + 2\sigma\Phi_2)] + [c_{20}R_1^2 + c_{11}R_1R_2 + c_{02}R_2^2 + dR_1R_2 \cos(2\Phi_1 - 2\sigma\Phi_2 + \kappa)] + O_{5/2}, \quad (3.4)$$

где $\kappa = 2\varphi_* - 2\varphi_1^* + 2\sigma\varphi_2^* = \text{const}$, а $O_{5/2}$ — совокупность слагаемых, период которых по времени равен 12π .

Для случаев (2.5), аналогично, уничтожим в членах третьей и четвертой степеней гамильтониана (2.2) слагаемые с нерезонансными гармониками и приведем его к виду (3.1), в котором изменены на противоположные знаки вторых слагаемых в комбинациях $\lambda_1 + 2\lambda_2$ и $2\lambda_1 - 2\lambda_2$. Делая затем замену переменных (3.2), получим гамильтониан вида (3.4), в котором надо поменять σ на $-\sigma$.

Введем новую независимую переменную $\tau = bt$ и параметр $\alpha = a/b$ ($\alpha > 0$). Придавая величине σ значения, равные 1 и -1 , получим два гамильтониана, характерных для рассматриваемых резонансных случаев (2.4) и (2.5):

$$\Gamma_1 = \alpha R_1^{3/2} \cos 3\Phi_1 + R_1^{1/2} R_2 \cos(\Phi_1 + 2\Phi_2) + O_2, \quad (3.5)$$

$$\Gamma_2 = \alpha R_1^{3/2} \cos 3\Phi_1 + R_1^{1/2} R_2 \cos(\Phi_1 - 2\Phi_2) + O_2. \quad (3.6)$$

Здесь O_2 — совокупность слагаемых не менее второй степени по R_j .

Гамильтониан (3.5) соответствует наличию в системе двух сильных (основного и комбинационного) резонансов третьего порядка. Гамильтониан (3.6) отвечает случаю одного сильного (основного) и одного слабого (комбинационного) резонансов третьего порядка.

3.2. *Случаи* (2.6), (2.7). Если величины λ_1, λ_2 определяются одним из соотношений (2.6) или (2.7), то гамильтониан (2.2), с учетом имеющихся резонансов, может быть приведен к виду

$$\begin{aligned} \hat{H} = & \lambda_1 r_1 + \sigma \lambda_2 r_2 + \{ar_1 r_2^{1/2} \cos[2\varphi_1 + \sigma\varphi_2 - (2\lambda_1 + \lambda_2)t + 2\varphi_1^* + \sigma\varphi_2^*] + \\ & + br_1^{1/2} r_2 \cos[\varphi_1 - 2\sigma\varphi_2 - (\lambda_1 - 2\lambda_2)t + \varphi_1^* - 2\sigma\varphi_2^*]\} + \\ & + \{c_{20}r_1^2 + c_{11}r_1 r_2 + c_{02}r_2^2 + d_1 r_1^{1/2} r_2^{3/2} \cos[\varphi_1 + 3\sigma\varphi_2 - (\lambda_1 + 3\lambda_2)t + \varphi_*]\} + \\ & + d_2 r_1^{3/2} r_2^{1/2} \cos[3\varphi_1 - \sigma\varphi_2 - (3\lambda_1 - \lambda_2)t + \varphi_{**}] + O_{5/2}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Сделаем в гамильтониане (3.7) замену переменных (3.2) и получим

$$H^* = [aR_1R_2^{1/2} \cos(2\Phi_1 + \sigma\Phi_2) + bR_1^{1/2} R_2 \cos(\Phi_1 - 2\sigma\Phi_2)] + [c_{20}R_1^2 + c_{11}R_1R_2 + c_{02}R_2^2 + d_1R_1^{1/2} R_2^{3/2} \cos(\Phi_1 + 3\sigma\Phi_2 + \kappa_1) + d_2R_1^{3/2} R_2^{1/2} \cos(3\Phi_1 - \sigma\Phi_2 + \kappa_2)] + O_{5/2}. \quad (3.8)$$

Здесь $a, b, d_j, \kappa_j, c_{ij}$ — постоянные, а слагаемое $O_{5/2}$ имеет по времени период, равный 10π .



Вновь введем независимую переменную $\tau = bt$ и параметр $\alpha = a/b$. Придавая параметру σ значения, равные 1 и -1 , получим два гамильтониана, переходящих один в другой, если поменять местами индексы 1 и 2. Поэтому будем рассматривать один гамильтониан, характерный для случаев (2.6), (2.7) и имеющий вид

$$\Gamma_3 = \alpha R_1 R_2^{1/2} \cos(2\Phi_1 + \Phi_2) + R_1^{1/2} R_2 \cos(\Phi_1 - 2\Phi_2) + O_2. \quad (3.9)$$

Этот гамильтониан отвечает наличию в системе двух комбинационных (сильного и слабого) резонансов третьего порядка.

Таким образом, получены три характерных гамильтониана (3.5), (3.6), (3.9), соответствующие случаям двойного резонанса третьего порядка. Отвечающие им системы будем называть системами первого, второго и третьего типов.

4. Исследование устойчивости тривиального положения равновесия

Покажем, что в системах всех трех типов тривиальное положение равновесия неустойчиво при всех значениях параметра α ($\alpha > 0$). При доказательстве будем пользоваться теоремой Четаева о неустойчивости [19], а также некоторыми идеями построения функции Четаева в гамильтоновой системе с двумя степенями свободы при наличии в ней одного резонанса третьего порядка [17].

4.1. Рассмотрим сначала системы с гамильтонианами (3.5), (3.6). Введем для удобства обозначения $\psi_1 = 3\Phi_1$, $\psi_2 = \Phi_1 \pm 2\Phi_2$. Здесь и далее в разделе 5.1 верхний и нижний знаки в соотношениях соответствуют системам первого и второго типов.

Пусть $\alpha > 2\sqrt{2}/3$. Функция Четаева может быть взята такой же, как в случае присутствия в системе одного главного резонанса (этот случай соответствует неограниченным значениям α) [17]:

$$V = -(R_1^p - R_2^2)R_1^{3/2} \cos 2\psi_1 \quad (2 < p < 3).$$

Зададим область $V > 0$ неравенствами $R_1^p > R_2^2$, $\cos 2\psi_1 < 0$; на границе этой области $V = 0$. Указанные неравенства выполняются, если принять, что

$$\frac{\pi}{4} < \psi_1 < \frac{3\pi}{4}, \quad R_2 = \beta R_1^{p/2} \quad (0 < \beta < 1).$$

Производная $dV/d\tau$ с учетом дифференциальных уравнений для переменных ψ_j, R_j ($j = 1, 2$) имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{dV}{d\tau} &= R_1^{p/2} [-A \cos 2\psi_1 + \frac{9}{2}\alpha(1 - \beta^2)B] + o_{p+2}, \\ A &= 3\alpha p \sin \psi_1 \mp 4\beta^2 \sin \psi_2, \quad B = \sin \psi_1 + \sin 2\psi_1 \cos \psi_1, \end{aligned} \quad (4.1)$$

где o_{p+2} — совокупность слагаемых, степень которых по R_1 выше, чем $p + 2$. Для рассматриваемых интервалов изменения величин α, β, p, ψ_1 и для любых значений ψ_2 справедливы оценки

$$A > 3\sqrt{2}\alpha p/2 - 4 > 2p - 4 > 0, \quad 1 \leq B < \sqrt{2}.$$



Отсюда следует, что в достаточно малой окрестности начала координат функция $dV/d\tau$ положительно определена в области $V > 0$. Следовательно, тривиальное положение равновесия в системах первого и второго типов неустойчиво для исследуемого диапазона изменения параметра α .

В случае $0 < \alpha \leq 2\sqrt{2}/3$ введем новые переменные ϱ_j ($j = 1, 2$) по формулам

$$R_j = \varepsilon^p \varrho_j \quad (0 < \varepsilon \ll 1, \quad p > \frac{4\sqrt{2}}{3\alpha} \geq 2).$$

Функцию Четаева возьмем в виде

$$V_1 = -(\varepsilon^s \varrho_1^p - \varrho_2^2) \varrho_1^{3/2} \cos 2\psi_1 \quad (0 < s < p),$$

а область $V > 0$ определим неравенствами

$$\frac{\pi}{4} < \psi_1 < \frac{3\pi}{4}, \quad \varrho_2 = \beta \varepsilon^{s/2} \varrho_1^{p/2} \quad (0 < \beta < 1).$$

Используя дифференциальные уравнения для переменных ψ_j, ϱ_j ($j = 1, 2$), получим следующее выражение для производной $dV_1/d\tau$:

$$\frac{dV_1}{d\tau} = \varepsilon^{s+p/2} \varrho_1^{p+2} [-A \cos 2\psi_1 + \frac{9}{2} \alpha (1 - \beta^2) B] + o(\varepsilon^{s+p/2}),$$

где величины A и B определены формулами (4.1). Для рассматриваемых значений α, β, p и ψ_1 вновь имеем оценки $A > 0$ и $1 \leq B < \sqrt{2}$. Поэтому при достаточно малых значениях ε функция $dV_1/d\tau$ положительно определена в области $V_1 > 0$, и тривиальное положение равновесия систем первого и второго типов неустойчиво.

4.2. Рассмотрим систему третьего типа. Введем обозначения $\psi_1 = 2\Phi_1 + \Phi_2, \psi_2 = \Phi_1 - 2\Phi_2$ и осуществим замену переменных $\psi_j, R_j \rightarrow x_j, \varrho_j$ ($j = 1, 2$) по формулам

$$\psi_j = \frac{\pi}{2} + \varepsilon^\ell x_j, \quad R_j = \varepsilon^\ell \varrho_j \quad (j = 1, 2; \quad 0 < \varepsilon \ll 1; \quad \ell > 2).$$

Дифференциальные уравнения для переменных ϱ_j имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{d\varrho_1}{d\tau} &= \varepsilon^{\ell/2} \varrho_1^{1/2} \varrho_2^{1/2} (2\alpha \varrho_1^{1/2} + \varrho_2^{1/2}) + O(\varepsilon^\ell), \\ \frac{d\varrho_2}{d\tau} &= \varepsilon^{\ell/2} \varrho_1^{1/2} \varrho_2^{1/2} (\alpha \varrho_1^{1/2} - 2\varrho_2^{1/2}) + O(\varepsilon^\ell) \end{aligned} \tag{4.2}$$

и в главной части не зависят от переменных x_j ($j = 1, 2$). Дифференциальные уравнения, описывающие изменение x_j , здесь не приводим.

Функцию Четаева выбираем в виде

$$V_2 = [\varepsilon^s \varrho_2^\ell - (\varrho_1 - k\varrho_2)^2] \varrho_1^{\kappa_1} \quad (0 < s < \ell; \quad \kappa_1 > 0). \tag{4.3}$$

Коэффициент k связан с параметром α взаимно однозначным соответствием

$$\alpha = \frac{2k+1}{\sqrt{k(k-2)}} \quad (k > 2). \tag{4.4}$$

При изменении k в интервале $2 < k < +\infty$ параметр α монотонно убывает от неограниченных значений до нуля.



Область $V_2 > 0$ определяем соотношением

$$\varrho_1 = k\varrho_2 + \beta\varepsilon^{s/2}\varrho_2^{\ell/2} \quad (-1 < \beta < 1). \quad (4.5)$$

Производная $dV_2/d\tau$, вычисленная с учетом уравнений (4.2), имеет в области $V_2 > 0$ вид

$$\frac{dV_2}{d\tau} = \frac{5\sqrt{k}}{k-2}\varrho_1^{\kappa_1}\varrho_2^{\ell+1/2}\varepsilon^{s+\ell/2}\left[\ell + \frac{(1+2k)(k-2)}{5k}\beta^2 + (1-\beta^2)\kappa_1\right] + o(\varepsilon^{s+\ell/2}).$$

Отсюда следует, что при достаточно малых значениях ε функция $dV_2/d\tau$ положительно определена в области $V_2 > 0$ при любых значениях параметра k ($k > 2$), а значит, и при любых значениях резонансного коэффициента α . Таким образом, тривиальное равновесие системы третьего типа неустойчиво при всех α .

4.3. Представляет интерес рассмотреть взаимодействие двух слабых комбинационных резонансов третьего порядка (каждый из которых по отдельности сохраняет устойчивость системы) при отсутствии резонансов низших порядков и других резонансов третьего порядка. Этот случай является частным при рассмотрении наборов (2.9), (2.10) величин λ_1, λ_2 , если предположить, что резонансные коэффициенты в слагаемых с гармониками, соответствующими параметрическому резонансу и двум основным резонансам третьего порядка, равны нулю. Данному случаю соответствует нормализованный гамильтониан (четвертого типа) вида

$$\Gamma_4 = \alpha R_1 R_2^{1/2} \cos(2\Phi_1 - \Phi_2) + R_1^{1/2} R_2 \cos(\Phi_1 - 2\Phi_2) + O_2. \quad (4.6)$$

Тривиальное равновесие системы с гамильтонианом (4.6) оказывается неустойчивым при всех значениях параметра α ($\alpha > 0$). Для доказательства этого утверждения введем обозначения $\psi_1 = 2\Phi_1 - \Phi_2$, $\psi_2 = \Phi_1 - 2\Phi_2$ и осуществим замену переменных $\psi_j, R_j \rightarrow x_j, \varrho_j$ ($j = 1, 2$) по формулам

$$\psi_1 = \frac{\pi}{2} + \varepsilon^\ell x_1, \quad \psi_2 = \frac{3\pi}{2} + \varepsilon^\ell x_2, \quad R_j = \varepsilon^\ell \varrho_j \quad (j = 1, 2; 0 < \varepsilon \ll 1). \quad (4.7)$$

Считаем, что $\ell > 2$; ниже диапазон изменения параметра ℓ будет уточнен.

Как и в разделе 4.2, дифференциальные уравнения для переменных ϱ_j в главной части не зависят от x_j ($j = 1, 2$):

$$\begin{aligned} \frac{d\varrho_1}{d\tau} &= \varepsilon^{\ell/2}\varrho_1^{1/2}\varrho_2^{1/2}(2\alpha\varrho_1^{1/2} - \varrho_2^{1/2}) + O(\varepsilon^\ell), \\ \frac{d\varrho_2}{d\tau} &= -\varepsilon^{\ell/2}\varrho_1^{1/2}\varrho_2^{1/2}(\alpha\varrho_1^{1/2} - 2\varrho_2^{1/2}) + O(\varepsilon^\ell). \end{aligned} \quad (4.8)$$

Функцию Четаева выбираем в виде (4.3), в котором величина k ($k > 0$) связана с параметром α взаимно однозначным соответствием

$$\alpha = \frac{2k+1}{\sqrt{k}(k+2)}. \quad (4.9)$$

Область $V_2 > 0$ определяем соотношением (4.5), а производная $dV_2/d\tau$, вычисленная с учетом уравнений (4.8), имеет в этой области вид

$$\begin{aligned} \frac{dV_2}{d\tau} &= \frac{3\sqrt{k}}{k+2}\varrho_1^{\kappa_1}\varrho_2^{\ell+1/2}\varepsilon^{s+\ell/2}[\ell - \beta^2\ell_*(k) + (1-\beta^2)\kappa_1] + o(\varepsilon^{s+\ell/2}), \\ \ell_*(k) &= \frac{(2k+1)(k+2)}{3k}. \end{aligned} \quad (4.10)$$



Функция $\ell_*(k)$ монотонно убывает и монотонно возрастает на интервалах $0 < k < 1$ и $k > 1$ соответственно и в точке $k = 1$ (при $\alpha = 1$) принимает минимальное значение, равное 3.

Если для каждого фиксированного значения k (и отвечающего ему α) параметр ℓ в замене (4.7) выбрать таким, чтобы выполнялось условие $\ell > \ell_*(k) \geq 3$, то при достаточно малых значениях ε функция $dV_2/d\tau$ в (4.10) будет определенно-положительной в области $V_2 > 0$. Это означает неустойчивость тривиального положения равновесия системы с гамильтонианом (4.6).

5. Исследование модельных систем

Отбросим слагаемые O_2 в гамильтонианах $\Gamma_1, \dots, \Gamma_4$ и получим приближенные (модельные) гамильтонианы. Исследуем движения отвечающих им модельных систем в достаточно малой окрестности тривиального положения равновесия.

5.1. Модельные системы первого и второго типов. Дифференциальные уравнения движения модельных систем первого и второго типов представим как дифференциальные уравнения для переменных ψ_j, R_j ($\psi_1 = 3\Phi_1$, $\psi_2 = \Phi_1 \pm 2\Phi_2$). Имеем

$$\begin{aligned} \frac{d\psi_1}{d\tau} &= \frac{9}{2}\alpha R_1^{1/2} \cos \psi_1 + \frac{3}{2} \frac{R_2}{R_1^{1/2}} \cos \psi_2, \\ \frac{d\psi_2}{d\tau} &= \frac{3}{2}\alpha R_1^{1/2} \cos \psi_1 + \frac{R_2 \pm 4R_1}{2R_1^{1/2}} \cos \psi_2, \\ \frac{dR_1}{d\tau} &= R_1^{1/2}(3\alpha R_1 \sin \psi_1 + R_2 \sin \psi_2), \quad \frac{dR_2}{d\tau} = \pm 2R_1^{1/2} R_2 \sin \psi_2. \end{aligned} \quad (5.1)$$

Соотношение

$$\alpha R_1^{3/2} \cos \psi_1 + R_1^{1/2} R_2 \cos \psi_2 = h = \text{const}$$

является первым интегралом (интегралом энергии) систем (5.1).

5.1.1. Положения равновесия. Кроме тривиального равновесия, системы (5.1) имеют еще семейство положений равновесия, задаваемое равенствами

$$R_1 = 0, R_2 = R_{20} = \text{const} > 0, \psi_1 = \psi_{10} = \text{const}, \psi_2 = \psi_{20} \quad (\cos \psi_{20} = 0). \quad (5.2)$$

Все эти равновесия принадлежат нулевому уровню энергии ($h = 0$).

Аналитическое и численное исследование показывает, что при выполнении условий $\cos \psi_{10} \neq 0$ и $\sin \psi_{20} = -1$ положения равновесия (5.2) устойчивы, если возмущения переменных выбирать, оставаясь на нулевом уровне энергии, и неустойчивы, если возмущения берутся на произвольном (близком к нулю) уровне энергии. Если $\cos \psi_{10} \neq 0$ и $\sin \psi_{20} = 1$ или же $\cos \psi_{10} = 0$, то положения равновесия (5.2) неустойчивы при любом выборе возмущений.

5.1.2. Движения на нулевом уровне энергии. Исследуем движения модельных систем на нулевом уровне энергии, отличные от положений равновесия (5.2). Из интеграла энергии при $h = 0$ имеем соотношение

$$\alpha R_1 \cos \psi_1 + R_2 \cos \psi_2 = 0. \quad (5.3)$$

Рассмотрим два частных случая, удовлетворяющих уравнению (5.3).

1. Случай $R_2 \equiv 0$, $\cos \psi_1 = 0$. Из системы (5.1) имеем такие уравнения для R_1 и ψ_2 :

$$\frac{dR_1}{d\tau} = 3\alpha\delta_1 R_1^{3/2}, \quad \frac{d\psi_2}{d\tau} = \pm 2R_1^{1/2} \cos \psi_2 \quad (\delta_1 = \sin \psi_1).$$

Кроме решения $R_1 = 0$, соответствующего положению равновесия в начале координат, эта система имеет также решения, для которых

$$R_1(\tau) = \left(C_1 - \frac{3}{2}\alpha\delta_1\tau\right)^{-2}, \quad (5.4)$$

а $\cos \psi_2 \equiv 0$ или

$$\sin \psi_2(\tau) = \frac{A(\tau) - 1}{A(\tau) + 1}, \quad A(\tau) = C_2 \left(C_1 - \frac{3}{2}\alpha\delta_1\tau\right)^{\mp 8\delta_1/(3\alpha)},$$

где C_j — произвольные постоянные ($C_j > 0, j = 1, 2$).

Если $\delta_1 = 1$, то при $\tau \rightarrow 2C_1/(3\alpha)$ величина $R_1(\tau)$ в (5.4) неограниченно возрастает, а $\sin \psi_2(\tau) \rightarrow \pm 1$. Если же $\delta_1 = -1$, то при $\tau \rightarrow +\infty$ величина $R_1(\tau)$ стремится к нулю и $\sin \psi_2(\tau) \rightarrow \pm 1$.

2. Случай $\cos \psi_j = 0$ ($j = 1, 2$). Введем обозначения $\sin \psi_j = \delta_j$ и перепишем уравнения для R_1 и R_2 в виде

$$\frac{dR_1}{d\tau} = R_1^{1/2}(3\alpha\delta_1 R_1 + \delta_2 R_2), \quad \frac{dR_2}{d\tau} = \pm 2\delta_2 R_1^{1/2} R_2. \quad (5.5)$$

Кроме равновесия в начале координат и решений из семейства (5.2), система (5.5) имеет также решение, для которого $R_2 = 0$, а зависимость $R_1(\tau)$ описывается соотношением (5.4). При $R_j \neq 0$ ($j = 1, 2$) исключим из (5.5) τ и получим уравнение

$$\frac{dR_1}{dR_2} = \pm \left(\frac{1}{2} + \kappa \frac{R_1}{R_2}\right), \quad \kappa = \frac{3\alpha\delta_1}{2\delta_2}. \quad (5.6)$$

Его решения при $\kappa \neq 1$ и $\kappa = 1$ имеют, соответственно, вид

$$R_1(R_2) = CR_2^\kappa - \frac{R_2}{2(\kappa \mp 1)} \quad \text{и} \quad R_1(R_2) = \pm \frac{1}{2} R_2 \ln(C'R_2) \quad (C' = \text{const} > 0).$$

Эти соотношения описывают семейства траекторий в фазовой плоскости переменных R_1, R_2 .

Отметим наличие прямолинейной траектории ($C = 0$), при движении вдоль которой величины R_1 и R_2 либо неограниченно возрастают (в случаях $\delta_1 = -1, \delta_2 = 1$ или $\delta_1 = \delta_2 = 1$ при $0 < \kappa < 1$ для системы первого типа и в случае $\delta_1 = 1, \delta_2 = -1$ при $\kappa < -1$ для системы второго типа), либо стремятся к началу координат (в случаях $\delta_1 = \delta_2 = -1$ при $0 < \kappa < 1$ или $\delta_1 = 1, \delta_2 = -1$ для системы первого типа и в случае $\delta_1 = -1, \delta_2 = 1$ при $\kappa < -1$ для системы второго типа).

Пусть теперь $\cos \psi_j \neq 0$ ($j = 1, 2$). Из соотношения (5.3) следует, что величины $\cos \psi_1$ и $\cos \psi_2$ должны быть разных знаков. Выберем для определенности следующую область изменения переменных ψ_1, ψ_2 :

$$-\frac{\pi}{2} < \psi_1 < \frac{\pi}{2}, \quad \frac{\pi}{2} < \psi_2 < \frac{3\pi}{2}. \quad (5.7)$$



При помощи соотношения (5.3) исключим величину R_2 из первых трех уравнений системы (5.1) и перепишем эту систему в виде

$$\begin{aligned} \frac{d\psi_1}{d\tau} &= 3\alpha R_1^{1/2} \cos \psi_1, & \frac{d\psi_2}{d\tau} &= (\alpha \cos \psi_1 \pm 2 \cos \psi_2) R_1^{1/2}, \\ \frac{dR_1}{d\tau} &= \alpha R_1^{3/2} (3 \sin \psi_1 - \cos \psi_1 \operatorname{tg} \psi_2), & \frac{dR_2}{d\tau} &= \pm 2R_1^{1/2} R_2 \sin \psi_2. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Из первых двух уравнений (5.8) следует уравнение

$$\frac{d\psi_2}{d\psi_1} = \frac{1}{3} \pm \kappa' \frac{\cos \psi_2}{\cos \psi_1}, \quad \kappa' = \frac{2}{3\alpha}, \quad (5.9)$$

отделяющееся от двух других уравнений системы (5.8). Его решения описывают фазовые траектории модельной системы (на нулевом уровне энергии) в плоскости переменных ψ_1, ψ_2 .

На рисунках 1 и 2 показана эволюция этих траекторий при изменении параметра α для модельной системы первого и второго типа соответственно: рисунок 1а–f отвечает случаям $\alpha = 0.1; 0.5; 1; 2; 5; 10$, рисунок 2а–f — случаям $\alpha = 0.1; 0.5; 0.8; 1; 3; 10$.

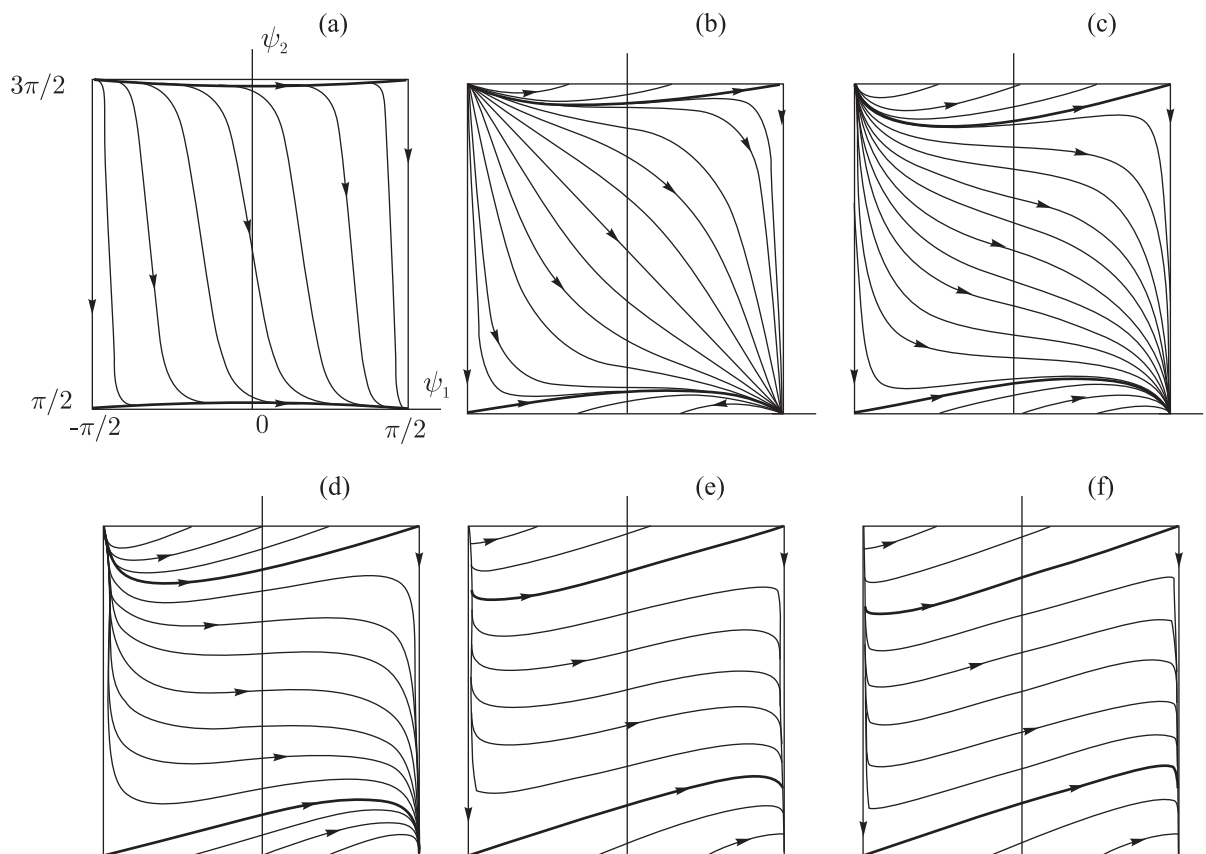


Рис. 1.

Точки на горизонтальных границах области на рисунках 1, 2 соответствуют положениям равновесия из семейства (5.2). Для угловых точек, кроме того, имеются еще движения, описанные в случае 2. Движения вдоль вертикальных границ области отвечают случаю 1.

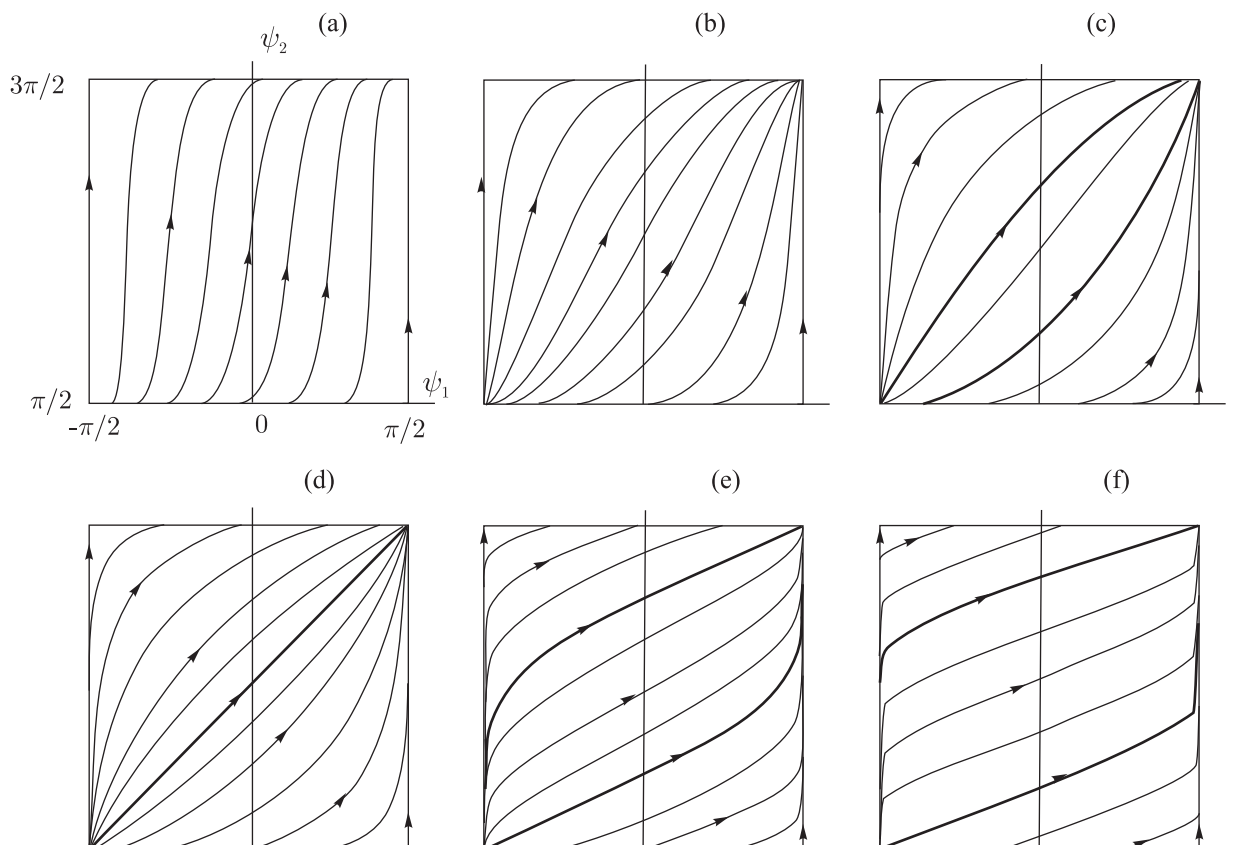


Рис. 2.

Опишем другие траектории уравнения (5.9) и соответствующие изменения функций $R_1(\tau)$, $R_2(\tau)$.

Модельная система первого типа. Для каждого значения параметра α исследуемая область изменения параметров ψ_1, ψ_2 может быть разделена на три подобласти с различным характером траекторий. Границами подобластей служат кривые — траектории уравнения (5.9), соединяющие две верхние и две нижние угловые точки области; они показаны на рисунке 1 полужирными линиями. В малой окрестности угловых точек $(-\pi/2, \pi/2)$ и $(\pi/2, 3\pi/2)$ указанные кривые аппроксимируются отрезками прямых с углами наклона $\arctg(3(1 + \kappa'))^{-1}$ к горизонтали.

Все движения системы в выделенных подобластях происходят в течение конечного времени. Фазовые траектории в верхней подобласти выходят из угловой точки $(-\pi/2, 3\pi/2)$ (в ее малой окрестности величины R_1, R_2 принимают неограниченные значения) и заканчиваются на верхней горизонтальной границе области, при этом система достигает одного из положений равновесия семейства (5.2). Для движений вдоль фазовых траекторий в нижней подобласти характер движений аналогичен при замене τ на $-\tau$. Фазовые траектории из средней подобласти соединяют угловые точки $(-\pi/2, 3\pi/2)$ и $(\pi/2, \pi/2)$, и вблизи этих точек значения R_1, R_2 неограниченны. Характерные графики функций $R_1(\tau)$, $R_2(\tau)$, соответствующие движениям по фазовым траекториям в верхней, средней и нижней подобластях на рисунке 1, представлены на рисунке 3а-с. Для движений вдоль верхней и нижней граничных кривых имеем, соответственно, $R_j \rightarrow 0$ и $R_j \rightarrow +\infty$ ($j = 1, 2$) за бесконечное и за конечное время.

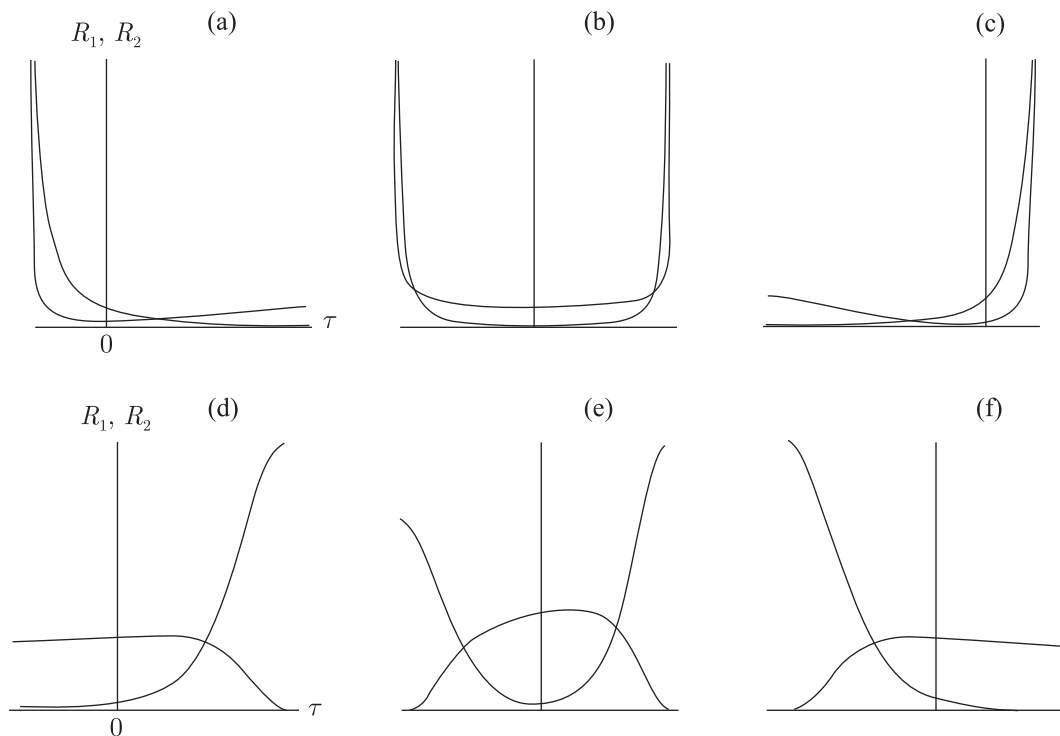


Рис. 3.

Отметим, что верхняя подобласть вне малой окрестности угловых точек $(\pm\pi/2, 3\pi/2)$ оказывается «зоной устойчивости» системы (на нулевом уровне энергии), несмотря на наличие двух сильных резонансов третьего порядка: траектории системы остаются в малой окрестности начала координат $R_1 = R_2 = 0$, если начальные значения R_{10}, R_{20} достаточно малы. Эта «зона» весьма мала при малых значениях α , увеличивается с ростом α (см. рис. 1) и при больших значениях α занимает заметную часть области.

Характер фазовых траекторий системы в плоскости (ψ_1, ψ_2) и свойства функций $R_j(\tau)$ качественно одинаковы для всех значений резонансного коэффициента α . Количественные характеристики зависят от α , например, размеры описанных подобластей в плоскости (ψ_1, ψ_2) . Вместе с α меняются углы наклона фазовых траекторий. Так, траектории в средней подобласти почти вертикальны при малых α (когда преобладает комбинационный резонанс), с ростом α эти траектории отклоняются от вертикали. При $\alpha = 0.5$ (рис. 1b) через центральную точку области проходит прямолинейная фазовая траектория $\psi_2 = \pi - \psi_1$ с углом наклона $\pi/4$ к вертикали. При $\alpha = 2$ (рис. 1d) аналогичная траектория имеет горизонтальную касательную. С дальнейшим ростом α (когда начинает преобладать основной резонанс) фазовые траектории почти параллельны (рис. 1e, f), углы их отклонения от вертикали увеличиваются и (вне малой окрестности вертикальных границ) приближаются к значению $\pi/2 - \arctg(1/3)$.

Модельная система второго типа. При $0 < \alpha < 2/3$ доминирующее влияние оказывает слабый комбинационный резонанс. Траектории уравнения (5.9) соединяют точки нижней и верхней горизонтальных границ области (см. рис. 2a, b). Функции $R_1(\tau), R_2(\tau)$ ограничены, их графики показаны на рисунке 3d. Вся рассматриваемая область (кроме малых окрестностей точки $(\pi/2, 3\pi/2)$ и правой вертикальной границы) является «зоной устойчивости» системы.

При малых значениях параметра α фазовые траектории почти вертикальны. С ростом α углы наклона траекторий к вертикали растут; наблюдается скопление начальных и конечных точек фазовых траекторий вблизи угловых точек $(-\pi/2, \pi/2)$ и $(\pi/2, 3\pi/2)$. При этом из точки $(-\pi/2, \pi/2)$ выходит и в точку $(\pi/2, 3\pi/2)$ входит только одна (вертикальная) траектория.

Точка $\alpha = 2/3$ (т.е. $\kappa' = 1$) есть точка перестройки фазового портрета. При $\alpha > 2/3$ ($\kappa' < 1$) из угловой точки $(-\pi/2, \pi/2)$ выходит пучок траекторий с общей вертикальной касательной и одна траектория, угол наклона которой к горизонтали равен $\arctg(3(1 - \kappa'))^{-1}$; аналогично, в угловую точку $(\pi/2, 3\pi/2)$ входит пучок траекторий с общей вертикальной касательной и одна траектория с тем же углом наклона. Две отмеченные траектории показаны на рисунке 2с-f полужирными линиями. При $\alpha = 1$ эти траектории сливаются и представляют прямолинейный отрезок, описываемый уравнением $\psi_2 = \pi + \psi_1$ (рис. 2d).

Указанные кривые разбивают исследуемую область плоскости ψ_1, ψ_2 на три подобласти (на две подобласти при $\alpha = 1$). Характер движений системы в случаях, когда изображающая точка (ψ_1, ψ_2) движется в верхней или нижней подобластях, такой же, как для аналогичных подобластей модельной системы первого типа; графики функций $R_1(\tau), R_2(\tau)$ представлены на рисунке 3а, с.

Фазовые траектории в средней подобласти в случаях $2/3 \leq \alpha < 1$ (см. рис. 2с), аналогично траекториям в случае $\alpha < 2/3$, начинаются и заканчиваются на горизонтальной границе области. При $\alpha > 1$ фазовые траектории (см. рис. 2е, f), включая граничные кривые, соединяют угловые точки $(-\pi/2, \pi/2)$ и $(\pi/2, 3\pi/2)$. Графики функций $R_1(\tau)$ и $R_2(\tau)$ для случаев $2/3 \leq \alpha < 1$ и $\alpha > 1$ представлены на рисунках 3d и 3b соответственно.

Таким образом, в случае $2/3 \leq \alpha < 1$ «зону устойчивости» составляют верхняя и средняя подобласти, а при $\alpha \geq 1$ — только верхняя подобласть; в обоих случаях следует исключить малые окрестности угловой точки $(\pm\pi/2, 3\pi/2)$. С ростом α , при усилении роли сильного резонанса, площадь «зоны устойчивости» уменьшается.

Для больших значений α фазовые траектории вне малой окрестности вертикальных границ почти параллельны и имеют к вертикали угол наклона, близкий к $\pi/2 - \arctg(1/3)$.

5.1.3. Движения на ненулевых уровнях энергии. Численный анализ показывает, что характер движений модельной системы первого типа на ненулевом уровне энергии качественно один и тот же для всех значений параметров h и α и при любых начальных условиях. Движение происходит за конечное время, при приближении к левому или правому концам временного интервала функции $R_j(\tau)$ ($j = 1, 2$) становятся неограниченными (см. рис. 3b).

Качественный характер движения модельной системы второго типа определяется значением резонансного коэффициента α , а при выбранном α не зависит от константы h и начальных условий. Характерные графики функций $R_j(\tau)$ представлены на рис. 4а (случай $\alpha = 0.2$) и рис. 4b (случай $\alpha = 0.5$); выбранные масштабы по обеим осям различны.

Движение системы в случае $\alpha = 0.2$, когда еще преобладает слабый резонанс, происходит в течение длительного времени (при $\alpha = 0$ время движения системы неограниченно). В некоторые моменты времени наблюдаются «всплески» значений функций $R_j(\tau)$ порядка нескольких десятков (см. рис. 4а). При $\alpha = 0.5$ интервал времени движения системы существенно короче, чем в предыдущем случае, и при приближении к границам этого интервала значения функций $R_j(\tau)$ неограниченно возрастают (см. рис. 4b). «Всплески» значений этих функций внутри временного интервала достигают порядка нескольких сотен. При $\alpha \geq 1$ наблюдается решающее влияние сильного резонанса, временной интервал движения еще более сокращается, при этом графики функций $R_j(\tau)$ имеют вид, как на рисунке 3b.

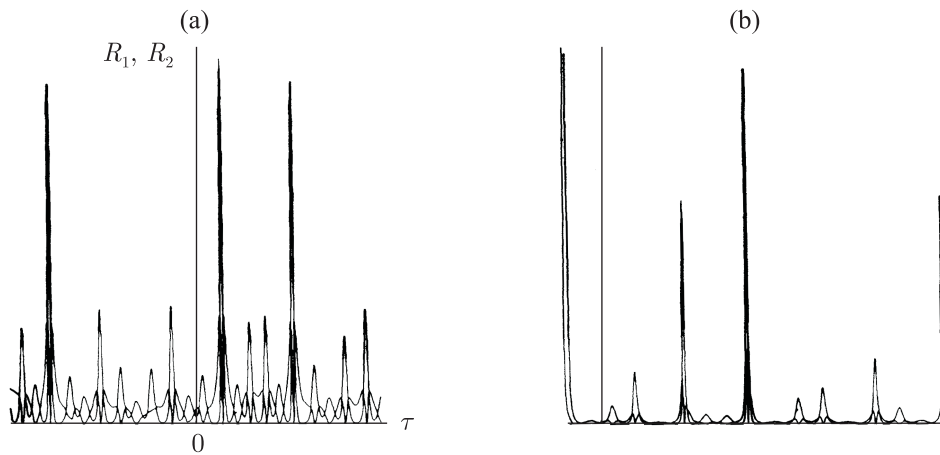


Рис. 4.

5.2. Исследование модельных систем третьего и четвертого типов. Дифференциальные уравнения, описывающие движения систем с гамильтонианами Γ_3, Γ_4 (без слагаемых O_2) имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{d\psi_1}{d\tau} &= \alpha \frac{4R_2 \pm R_1}{2R_2^{1/2}} \cos \psi_1 + \frac{R_2 \pm R_1}{R_1^{1/2}} \cos \psi_2, \\ \frac{d\psi_2}{d\tau} &= \alpha \frac{R_2 - R_1}{R_2^{1/2}} \cos \psi_1 + \frac{R_2 - 4R_1}{2R_1^{1/2}} \cos \psi_2, \\ \frac{dR_1}{d\tau} &= R_1^{1/2} R_2^{1/2} (2\alpha R_1^{1/2} \sin \psi_1 + R_2^{1/2} \sin \psi_2), \\ \frac{dR_2}{d\tau} &= R_1^{1/2} R_2^{1/2} (\pm \alpha R_1^{1/2} \sin \psi_1 - 2R_2^{1/2} \sin \psi_2), \end{aligned} \quad (5.10)$$

где $\psi_1 = 2\Phi_1 \pm \Phi_2, \psi_2 = \Phi_1 - 2\Phi_2$, а верхние и нижние знаки здесь и далее в этом разделе отвечают системе третьего и четвертого типов.

Соотношение

$$\alpha R_1 R_2^{1/2} \cos \psi_1 + R_1^{1/2} R_2 \cos \psi_2 = h = \text{const}$$

является первым интегралом системы (5.10).

5.2.1. Движения на нулевом уровне энергии. Как и в предыдущих случаях, все положения равновесия системы (5.10) принадлежат нулевому уровню энергии. Помимо тривиального, имеются еще положения равновесия, для которых

$$\begin{aligned} R_1 = 0, \quad R_2 = R_{20} = \text{const} > 0 \quad \text{или} \quad R_2 = 0, \quad R_1 = R_{10} = \text{const} > 0, \\ \psi_j = \psi_{j0} = \text{const} \quad (\cos \psi_{j0} = 0, \quad j = 1, 2). \end{aligned} \quad (5.11)$$

Все эти положения равновесия неустойчивы.

Для остальных движений нулевого уровня энергии выполняется соотношение

$$\alpha R_1^{1/2} \cos \psi_1 + R_2^{1/2} \cos \psi_2 = 0. \quad (5.12)$$

Учитывая, что уравнение (5.12) может быть удовлетворено только при условии $\cos \psi_1 \cos \psi_2 \leq 0$, выбираем для исследования область

$$-\frac{\pi}{2} \leq \psi_1 \leq \frac{\pi}{2}, \quad \frac{\pi}{2} \leq \psi_2 \leq \frac{3\pi}{2}. \quad (5.13)$$

Рассмотрим сначала частный случай, когда $\cos \psi_1 = \cos \psi_2 \equiv 0$. Из двух последних уравнений системы (5.10) исключим время τ и найдем

$$\frac{dR_1}{dR_2} = \frac{2\alpha\delta R_1^{1/2} + R_2^{1/2}}{\pm \alpha\delta R_1^{1/2} - 2R_2^{1/2}} \quad (\delta = \sin \psi_1 \sin \psi_2). \quad (5.14)$$

Решения этого уравнения описывают траектории в фазовой плоскости переменных R_1, R_2 .

На рисунке 5а–с показаны семейства траекторий уравнения (5.14) для системы третьего типа. Рисунок 5а относится к точке $\psi_1 = \pi/2, \psi_2 = \pi/2$, рисунки 5б и 5с — к точке $\psi_1 = \pi/2, \psi_2 = 3\pi/2$ при $\alpha < \alpha_*$ и $\alpha > \alpha_*$ соответственно; здесь $\alpha_* = \sqrt{83 + 13\sqrt{65}}/8 \approx 1.713$. Прямолинейные траектории на рисунках 5а и 5с задаются уравнениями $R_1 = kR_2$ и $R_1 = \tilde{k}_j R_2 (j = 1, 2)$ соответственно. Здесь k — корень уравнения (4.4), а \tilde{k}_j — два корня уравнения

$$\alpha = \frac{2k + 1}{\sqrt{k}(2 - k)}$$

при $0 < k < 2$ и $\alpha > \alpha_*$.

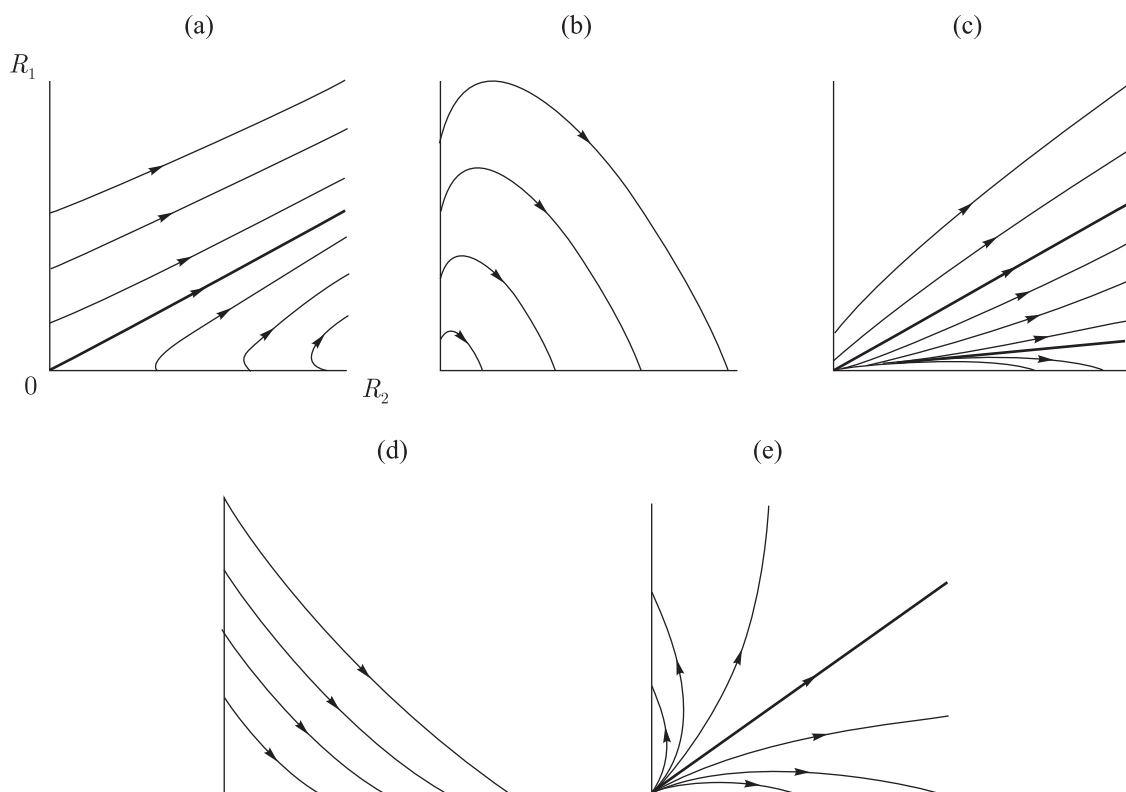


Рис. 5.

Семейства траекторий уравнения (5.14) для системы четвертого типа показаны на рисунках 5d и 5е для точек $\psi_1 = \pi/2, \psi_2 = \pi/2$ и $\psi_1 = 3\pi/2, \psi_2 = \pi/2$ соответственно. Прямолинейная траектория на рисунке 5е задается уравнением $R_1 = kR_2$, где k — корень уравнения (4.9).

Фазовые траектории модельных систем третьего и четвертого типов, относящиеся к точкам $\psi_1 = -\pi/2, \psi_2 = 3\pi/2$ и $\psi_1 = -\pi/2, \psi_2 = \pi/2$, такие же, как фазовые траектории, соответственно, для точек $\psi_1 = \pi/2, \psi_2 = \pi/2$ и $\psi_1 = \pi/2, \psi_2 = 3\pi/2$ на рисунке 5, но направления движений на них следует поменять на противоположные.

Пусть теперь $\cos \psi_j \neq 0$ ($j = 1, 2$). При помощи соотношения (5.12) исключим величину R_2 из правых частей системы (5.10) и перепишем ее в виде

$$\begin{aligned} \frac{d\psi_1}{d\tau} &= \frac{1}{2}R_1^{1/2} \frac{\pm \cos^2 \psi_2 - 2\alpha^2 \cos^2 \psi_1}{\cos \psi_2}, \\ \frac{d\psi_2}{d\tau} &= -\frac{1}{2}R_1^{1/2} \frac{\alpha^2 \cos^2 \psi_1 + 2 \cos^2 \psi_2}{\cos \psi_2}, \\ \frac{dR_1}{d\tau} &= -\alpha^2 R_1^{3/2} \frac{\cos^2 \psi_1}{\cos \psi_2} (2\operatorname{tg} \psi_1 - \operatorname{tg} \psi_2), \\ \frac{dR_2}{d\tau} &= \alpha^2 R_1^{3/2} \frac{\cos^2 \psi_1}{\cos \psi_2} (\mp \operatorname{tg} \psi_1 - 2\operatorname{tg} \psi_2). \end{aligned} \tag{5.15}$$

Из первых двух уравнений системы (5.15) следует уравнение

$$\frac{d\psi_1}{d\psi_2} = \frac{2\alpha^2 \cos^2 \psi_1 \mp \cos^2 \psi_2}{\alpha^2 \cos^2 \psi_1 + 2 \cos^2 \psi_2}, \tag{5.16}$$

описывающее траектории модельных систем (на нулевом уровне энергии) в фазовой плоскости переменных ψ_1, ψ_2 .

Эволюция траекторий уравнения (5.16) для систем третьего и четвертого типов в области (5.13) представлена на рисунках 6 и 7 соответственно. Рисунки 6а–h отвечают случаям $\alpha^2 = 0.01; 0.1; 0.5; 1; 2; 3; 6; 10$, рисунки 7а–f — случаям $\alpha^2 = 0.1; 0.5; 1; 1.5; 6; 10$.

Модельная система третьего типа. Для каждого значения параметра α из угловой точки $\psi_1 = \pi/2, \psi_2 = \pi/2$ выходит и в угловую точку $\psi_1 = -\pi/2, \psi_2 = 3\pi/2$ входит ровно по одной фазовой траектории (полужирные линии на рис. 6); вблизи угловых точек они аппроксимируются отрезками прямых с углами наклона к горизонтали, равными $\operatorname{arctg} k(\alpha)$, где $k(\alpha)$ — корень уравнения

$$\alpha^2 = \frac{1 - 2k}{k^2(2 + k)}$$

при $0 < k < 1/2$.

При $\alpha < \alpha_*$ (рис. 6а–е) все фазовые траектории, кроме указанных, начинаются и заканчиваются на горизонтальных и вертикальных границах области. Точкам горизонтальных границ соответствуют значения $R_1 = \operatorname{const} \neq 0, R_2 = 0$, точкам вертикальных границ — значения $R_1 = 0, R_2 = \operatorname{const} \neq 0$. Графики функций $R_1(\tau), R_2(\tau)$, отвечающие движениям по траекториям в верхней, средней и нижней подобластях на рис. 6а–е, представлены на рис. 3d, 3е и 3f, все движения происходят за конечное время.



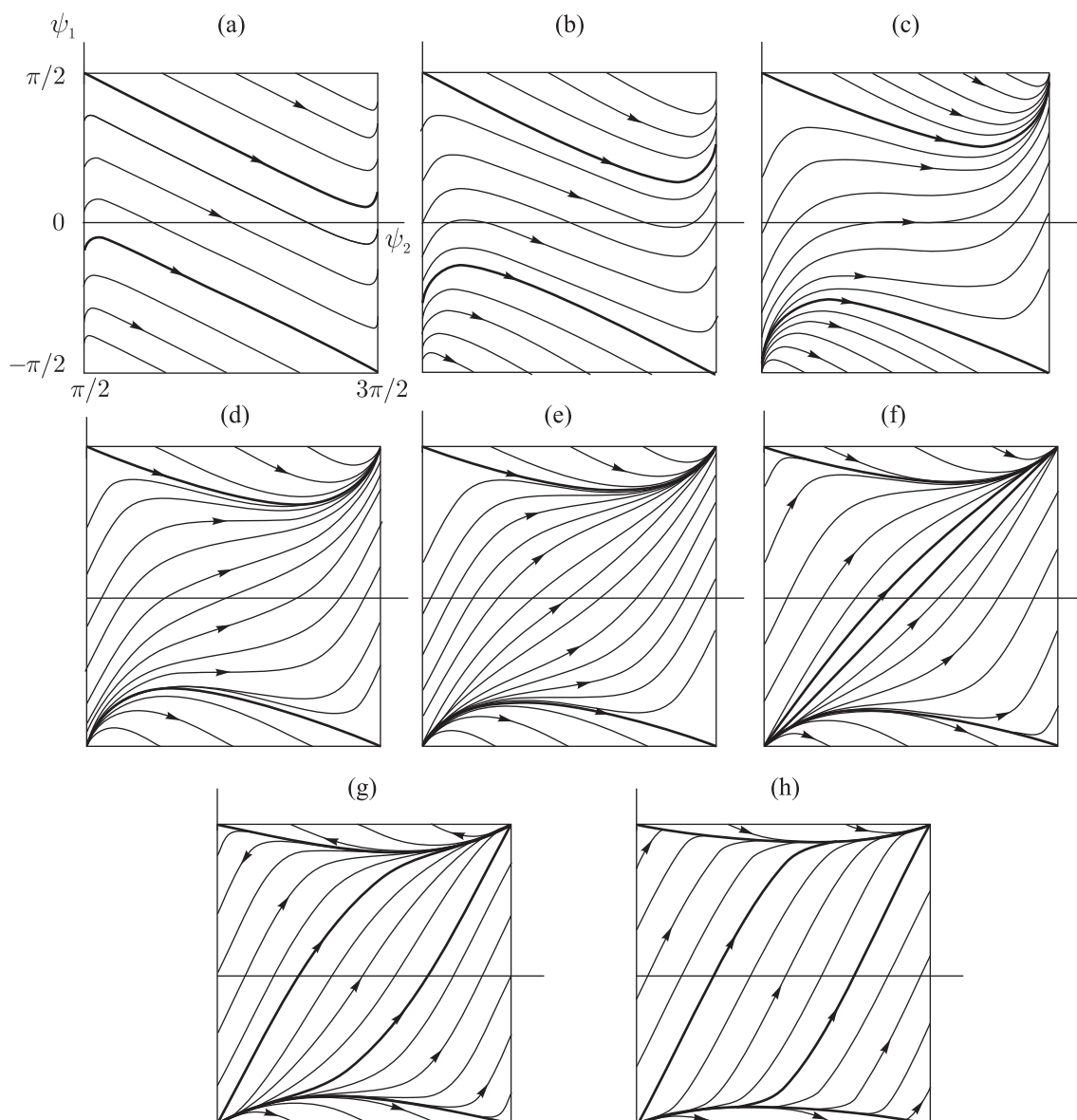


Рис. 6.

Таким образом, в рассматриваемом диапазоне параметра α преимущественное влияние оказывает слабый параметрический резонанс. Почти вся область (кроме малых окрестностей угловой точки $\psi_1 = \pi/2, \psi_2 = \pi/2$ и нижней граничной кривой) является «зоной устойчивости».

При малых значениях α фазовые траектории почти параллельны (с углом наклона к горизонтали, близким к $\arctg(1/2)$, см. рис. 6а). С ростом α происходит перестройка фазовых траекторий; наблюдается скопление выходящих траекторий вблизи точки $\psi_1 = -\pi/2, \psi_2 = \pi/2$ и входящих траекторий вблизи точки $\psi_1 = \pi/2, \psi_2 = 3\pi/2$, но ни одна из траекторий через указанные угловые точки не проходит.

Точка $\alpha = \alpha_*$ является точкой перестройки фазовых траекторий системы в плоскости (ψ_2, ψ_1) . Напомним, что при переходе через эту же точку изменяется характер фазовых

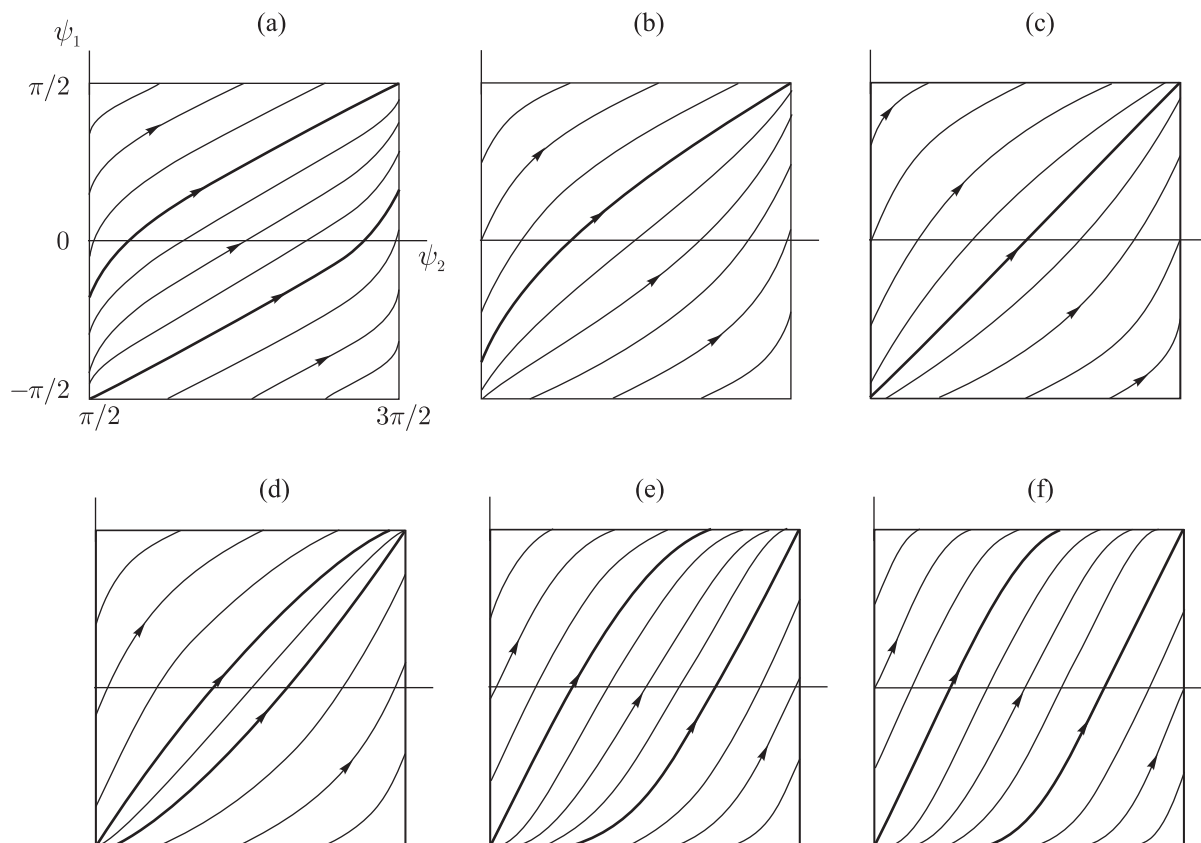


Рис. 7.

траекторий в плоскости R_1, R_2 (см. рис. 5b,c), соответствующих угловым точкам $\psi_1 = -\pi/2, \psi_2 = \pi/2$ и $\psi_1 = \pi/2, \psi_2 = 3\pi/2$.

При $\alpha > \alpha_*$ выделенная ранее средняя подобласть может быть разделена, в свою очередь, еще на три части (см. рис. 6f–h). Границами служат две дополнительные граничные кривые (показанные также полужирными линиями), соединяющие противоположные угловые точки области. Левая кривая выходит из точки $\psi_1 = -\pi/2, \psi_2 = \pi/2$ под углом $\arctg k_1(\alpha)$ к горизонтали, а правая, вместе с нижней граничной кривой и пучком других траекторий, составляющих три подобласти на рассматриваемых фазовых портретах, — под углом $\arctg k_2(\alpha)$ к горизонтали. Эти же кривые входят в угловую точку $\psi_1 = \pi/2, \psi_2 = 3\pi/2$ под углами $\arctg k_2(\alpha)$ и $\arctg k_1(\alpha)$. Здесь $k_1(\alpha)$ и $k_2(\alpha)$ — больший и меньший из двух корней уравнения

$$\alpha^2 = \frac{2k + 1}{k^2(2 - k)} \quad (0 < k < 2),$$

существующих при условии $\alpha > \alpha_*$. Отметим, что при $\alpha^2 = 3$ (см. рис. 6f) одна из описываемых границ — отрезок прямой $\psi_1 = \psi_2 - \pi/2$ (при этом $k_2 = 1$).

Как и в случае $\alpha < \alpha_*$, точкам горизонтальных и вертикальных границ соответствуют значения $R_1 = \text{const} \neq 0, R_2 = 0$ и $R_1 = 0, R_2 = \text{const} \neq 0$, а при стремлении фазовой траектории в одну из угловых точек (при $\tau > 0$ или $\tau < 0$) значения величин R_1, R_2 неограниченно возрастают. Поэтому характерные графики функций $R_1(\tau)$ и $R_2(\tau)$, соответствующие фазовым траекториям в верхней подобласти и левой части средней подобласти,



имеют вид, как на рисунке 3с; эти же графики для траекторий из нижней подобласти и правой части средней подобласти показаны на рисунке 3а. Наконец, графики функций $R_1(\tau)$, $R_2(\tau)$, отвечающие траекториям из центральной части средней подобласти, изображены на рисунке 3б.

Таким образом, «зоной устойчивости» в рассматриваемом случае $\alpha > \alpha_*$, когда доминирующим является сильный комбинационный резонанс, являются нижняя подобласть и правая часть средней подобласти (вне малых окрестностей граничных кривых).

При больших значениях α фазовые траектории в средней подобласти почти параллельны и наклонены к горизонтали под углом, близким к $\arctg 2$.

Модельная система четвертого типа. Движения модельной системы четвертого типа на нулевом уровне энергии схожи с аналогичными движениями модельной системы третьего типа при небольших значениях параметра α (т.е. в случае преобладания слабого комбинационного резонанса). Рассматриваемая область плоскости ψ_2, ψ_1 разделена на три подобласти кривыми, одна из которых выходит из угловой точки $\psi_1 = -\pi/2, \psi_2 = \pi/2$, а вторая входит в угловую точку $\psi_1 = \pi/2, \psi_2 = 3\pi/2$ (полужирные линии на рис. 7). Углы наклона к горизонтали этих кривых в окрестности угловых точек равны $\arctg k(\alpha)$, где $k(\alpha)$ — корень уравнения

$$\alpha^2 = \frac{2k-1}{k^2(2-k)} \quad (1/2 < k < 2).$$

При $\alpha = 1$ имеем $k = 1$, а обе граничные кривые сливаются и представляют отрезок прямой $\psi_1 = \psi_2 - \pi/2$.

Графики функций $R_1(\tau)$ и $R_2(\tau)$, соответствующие траекториям из верхней, средней и нижней подобластей (см. рис. 7), показаны, соответственно, на рисунках 3f, 3e и 3d. Диапазон изменения величин R_1, R_2 ограничен, время движения конечно. «Зоной устойчивости» является вся рассматриваемая область, за исключением малых окрестностей угловой точки $\psi_1 = -\pi/2, \psi_2 = \pi/2$ и граничной кривой, входящей в угловую точку $\psi_1 = \pi/2, \psi_2 = 3\pi/2$.

5.2.2. Движения на ненулевых уровнях энергии. Как для модельной системы второго типа, качественный характер движений модельных систем третьего и четвертого типов на произвольном уровне энергии определяется только значением параметра α .

Характерные графики функций $R_1(\tau), R_2(\tau)$ для системы третьего типа показаны на рисунках 8а–с, соответственно, для случаев $\alpha = 0.2; 0.3; 0.35$. Масштабы изображений по обеим осям для всех графиков различны.

При небольших значениях α (когда доминирует слабый резонанс) время движения системы велико, часто происходят «всплески» значений величин R_1, R_2 порядка нескольких единиц (рис. 8а). С ростом α наблюдаются «волнообразные всплески» по обоим переменным R_1, R_2 (на рис. 8b показаны два из них), максимальная амплитуда которых достигает порядка нескольких десятков; внутри каждой «волны» происходят «быстрые колебания» с растущей или затухающей амплитудой; общее время движения сокращается. С дальнейшим ростом α (рис. 8с) время движения существенно сокращается, на обеих границах временного интервала значения величин R_1, R_2 становятся неограниченными, а наблюдаемые в окрестности обеих границ «всплески» достигают порядка нескольких сотен или тысяч. В случаях $\alpha \geq 1$ графики функций $R_1(\tau)$ и $R_2(\tau)$ приобретают вид, как на рисунке 3б.

На рисунке 8d–f изображены характерные графики функций $R_1(\tau), R_2(\tau)$ модельной системы четвертого типа при $\alpha = 0.3; 1; 3$. Первый и третий из этих графиков соответствуют случаям преобладания одного из двух слабых комбинационных резонансов и качественно похожи на аналогичные графики для системы третьего типа в случаях умеренных значений

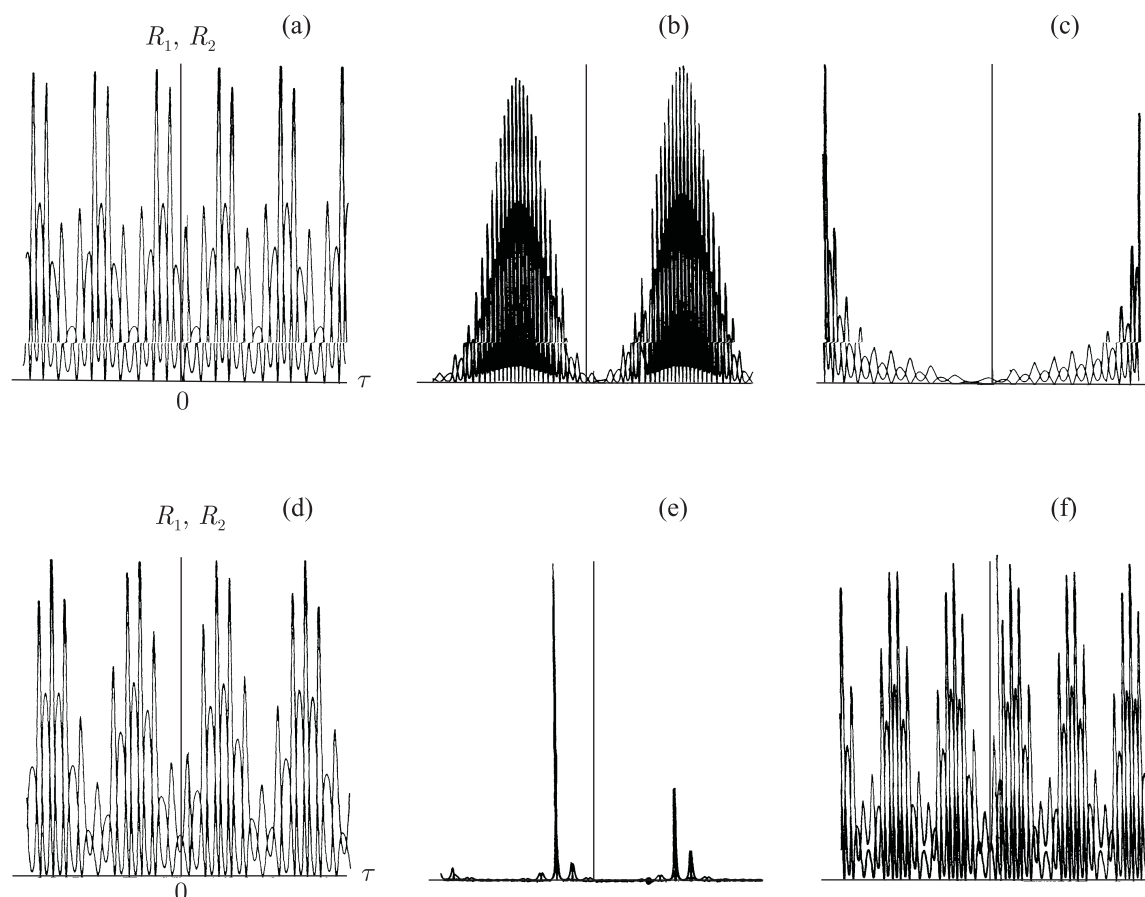


Рис. 8.

параметра α ; наблюдаемые «всплески» значений величин R_1, R_2 имеют порядок нескольких единиц или десятков. Рисунок 8b отвечает случаю равного влияния обоих слабых резонансов; «волнообразный» характер движения исчезает, время от времени возникают сильные «всплески» значений R_1, R_2 порядка нескольких сотен или тысяч. Неустойчивость движения проявляется в этом случае наиболее отчетливо.

Список литературы

- [1] Korteweg D. J. Sur certaines vibrations d'ordre supérieur et d'intensité anormale // Arch. Néerl. Sci. Exactes et Natur., ser. 2, 1898, vol. 1, pp. 229–260.
- [2] Beth H. I. E. Les oscillations autour d'une position dans le cas d'existence d'une relation linéaire simple entre les nombres vibratoires // Arch. Néerl. Sci. Exactes et Natur., ser. 2, 1910, vol. 15, pp. 246–283.
- [3] Beth H. I. E. Les oscillations autour d'une position dans le cas d'existence d'une relation linéaire simple entre les nombres vibratoires (suite) // Arch. Néerl. Sci. Exactes et Natur., ser. 3A, 1912, vol. 1, pp. 185–213.
- [4] Куницын А. Л., Маркеев А. П. Устойчивость в резонансных случаях. (Итоги науки и техники. Сер. Общая механика, т. 4.) М.: ВИНТИ, 1979. С. 58–139.
- [5] Маркеев А. П. Устойчивость гамильтоновых систем // Нелинейная механика / В. М. Матросов, В. В. Румянцев, А. В. Карапетян. М.: Физматгиз, 2001. С. 114–130.

- [6] Куницын А. Л. Об устойчивости в критическом случае чисто мнимых корней при внутреннем резонансе // Дифференциальные уравнения, 1971, т. 7, № 9, с. 1704–1706.
- [7] Хазина Г. Г. Некоторые вопросы устойчивости при наличии резонансов // ПММ, 1974, т. 38, № 1, с. 56–65.
- [8] Куницын А. Л., Медведев С. В. Об устойчивости при наличии нескольких резонансов // ПММ, 1977, т. 41, № 3, с. 422–429.
- [9] Куницын А. Л., Тапимов Л. Т. Некоторые задачи устойчивости нелинейных резонансных систем. Алма-Ата: Гылым, 1990. 196 с.
- [10] Хазин Л. Г. Об устойчивости положения равновесия гамильтоновых систем дифференциальных уравнений: (Взаимодействие резонансов третьего порядка). Препринт № 133. М.: Инст. прикл. матем. АН СССР, 1981. 20 с.
- [11] Хазин Л. Г. Взаимодействие резонансов третьего порядка в задачах устойчивости гамильтоновых систем // ПММ, 1984, т. 48, № 3, с. 494–498.
- [12] Маркеев А. П. О кратном резонансе в линейных системах Гамильтона // Докл. РАН, 2005, т. 402, № 3, с. 339–343.
- [13] Маркеев А. П. О кратном параметрическом резонансе в системах Гамильтона // ПММ, 2006, т. 70, № 2, с. 200–220.
- [14] Маркеев А. П. Линейные гамильтоновы системы и некоторые задачи об устойчивости движения спутника относительно центра масс. М.–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Институт компьютерных исследований, 2009. 396 с.
- [15] Маркеев А. П. Об одном особом случае параметрического резонанса в задачах небесной механики // Письма в Астрономический журнал, 2005, т. 31, № 5, с. 388–394.
- [16] Маркеев А. П. Кратный резонанс в одной задаче об устойчивости движения спутника относительно центра масс // Письма в Астрономический журнал, т. 31, № 9, с. 701–708.
- [17] Маркеев А. П. Точки либрации в небесной механике и космодинамике. М.: Наука, 1978. 312 с.
- [18] Якубович В. А., Старжинский В. М. Параметрический резонанс в линейных системах. М.: Наука, 1987. 328 с.
- [19] Малкин И. Г. Теория устойчивости движения. М.: Наука, 1966. 532 с.

Motions of a two-degree-of-freedom Hamiltonian system in the presence of multiple third-order resonances

Olga V. Kholostova

Moscow Aviation Institute (State Research University)

Volokolamskoe Shosse 4, Moscow, 125993, Russia

kholostova_o@mail.ru

Motions of a time-periodic, two-degree-of-freedom Hamiltonian system in a neighborhood of a linearly stable equilibrium are considered. It is assumed that there are several resonant third-order relations between the frequencies of linear oscillations of the system. It is shown that in the presence of two third-order resonances the equilibrium is unstable at any ratio between resonant coefficients. Approximate (model) Hamiltonians are obtained which are characteristic of the resonant cases under consideration. A detailed analysis is made of nonlinear oscillations of systems corresponding to them.

MSC 2010: 70H05, 70H14, 70K05

Keywords: Hamiltonian system, multiple resonance, stability, Chetaev function

Received March 25, 2012, accepted April 27, 2012

Citation: *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2012, vol. 8, no. 2, pp. 267–288 (Russian)

