Министерство образования и науки Российской Федерации
ФГБОУ ВПО «Удмуртский государственный университет»
Кафедра математического анализа

Л.И. Тучинский

# Кратные интегралы

Учебное пособие

Ижевск
2012

УДК 517(075).8
ББК 22.161я73
Т 77

Рекомендовано к изданию Учебно-методическим советом УдГУ.

**Л.И. Тучинский**
**Т 77** Кратные интегралы: учебное пособие. Ижевск. Изд-во «Удмуртский университет», 2012. 201 с.

Данное пособие посвящено одному из важнейших разделов курса математического анализа – кратным интегралам. Понятие кратного интеграла вводится по современной схеме. Дан весь необходимый теоретический материал, который сопровождается большим числом упражнений и приложений в механике. Предназначается для студентов математических специальностей университетов.

УДК 517(075).8
ББК 22.161.1я73

# Оглавление

# Предисловие

Естественно ожидать, что для решения многомерных математических и прикладных задач требуется соответствующий многомерный математический аппарат. Правда, в интегральном исчислении для функций одного аргумента рассматриваются, в частности, задачи вычисления площади и объема. Задачи эти многомерные, а используемый для их решения математический аппарат (определенный интеграл) одномерный. Поэтому решение возможно только в ряде, хотя и важных, но все-таки частных случаях. Полное решение указанных задач, как мы увидим в дальнейшем, дается с помощью многомерных определенных интегралов.

Предлагаемое пособие посвящено изучению многомерных интегралов или как исторически принято говорить — кратных интегралов. Как видно из оглавления, оно состоит из трёх глав. Автор исходит из методического принципа от частного к общему. Поэтому рассмотрению $n$-кратного интеграла предшествует изучение двойного интеграла, вы деленного в отдельную главу.

Понятие $n$-кратного интеграла вводится по современной схеме. Сначала определяется интеграл по $n$-мерному координатному параллелепипеду, а затем посредством характеристической функции делается переход к интегралу по произвольному измеримому множеству. Изложение теории сопровождается большим количеством примеров и приложений.

Отметим некоторые особенности оформления текста книги. Для удобства ссылок в каждой главе ведется двойная нумерация теорем. Точно также по главам в каждом параграфе употребляется тройная нумерация формул. Сначала указывается номер параграфа, затем — номер пункта в данном параграфе и на третьем месте стоит порядковый номер формулы в этом параграфе.

# Глава 1

## Интегралы, зависящие от параметра

Пусть для каждого $\alpha$ из некоторого числового множества $A$ существует в собственном или несобственном смысле $\int\limits_a^b f(x,\alpha)\,dx$. Тогда на множестве $A$ будет определена некоторая числовая функция

$$I(\alpha) = \int\limits_a^b f(x,\alpha)\,dx,$$

где переменная $\alpha$ выступает в роли параметра. Собственно и обозначения аргументов $x$ и $\alpha$ буквами разных алфавитов подчеркивают разную роль указанных переменных.

Замечание. Под эту схему попадает и последовательность

$$I_n = \int\limits_a^b f_n(x)\,dx,$$

где множество $A = \mathbb{N}$ есть множество натуральных чисел.

Целый ряд важных для приложений функций задаются в интегральной форме. Необходимо научиться исследовать поведение таких функций, пользуясь лишь их интегральным представлением.

### § 1. Собственные интегралы, зависящие от параметра

#### 1.1. Непрерывность собственного интеграла по параметру

**Теорема 1.1.** *Если функция $f(x,\alpha)$ непрерывна на прямоугольнике $P = [a,b] \times [c,d]$, то функция*

$$I(\alpha) = \int\limits_a^b f(x,\alpha)\,dx \tag{1.1.1}$$

*непрерывна на отрезке $[c,d]$.*

Доказательство. Очевидно, что при $\alpha_1, \alpha_2 \in [c, d]$

$$I(\alpha_1) - I(\alpha_2) = \int\limits_a^b [f(x, \alpha_1) - f(x, \alpha_2)]\, dx.$$

Так как функция $f(x, \alpha)$ непрерывна на компакте $P$, то она и равномерно непрерывна на нем. Значит,

$$\forall\ \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0, \quad \forall\ \alpha_1, \alpha_2 \in [c, d] \colon |\alpha_1 - \alpha_2| < \delta \Rightarrow$$
$$|f(x, \alpha_1) - f(x, \alpha_2)| < \frac{\varepsilon}{b - a}.$$

Следовательно,

$$|I(\alpha_1) - I(\alpha_2)| < \frac{\varepsilon}{b - a} \cdot (b - a) = \varepsilon \quad \text{при} \quad |\alpha_1 - \alpha_2| < \delta.$$

Таким образом, функция $I(\alpha)$ равномерно непрерывна на отрезке $[c, d]$ и теорема доказана.

### 1.2. Дифференцирование собственного интеграла по параметру

**Теорема 1.2 (правило Лейбница).** *Если функции $f(x, \alpha)$ и $f'_\alpha(x, \alpha)$ непрерывны на прямоугольнике $P = [a, b] \times [c, d]$, то функция $I(\alpha)$ дифференцируема на отрезке $[c, d]$ и*

$$I'(\alpha) = \int\limits_a^b f'_\alpha(x, \alpha)\, dx. \tag{1.2.2}$$

Доказательство. Согласно определения производной

$$I'(\alpha) = \lim_{h \to 0} \frac{I(\alpha + h) - I(\alpha)}{h}.$$

Очевидно, что

$$\frac{I(\alpha + h) - I(\alpha)}{h} = \frac{1}{h} \int\limits_a^b [f(x, \alpha + h) - f(x, \alpha)]\, dx.$$

Применив к разности, стоящей под знаком интеграла, теорему Лагранжа о среднем значении, получим

$$\frac{I(\alpha + h) - I(\alpha)}{h} = \frac{1}{h} \int\limits_a^b f'_\alpha(x, \alpha + \theta h) \cdot h\, dx = \int\limits_a^b f'_\alpha(x, \alpha + \theta h)\, dx, \quad 0 < \theta < 1$$

В силу непрерывности функции $f'_\alpha(x,\alpha)$ на $P$, имеем

$$\forall\, \varepsilon > 0, \exists \delta > 0\colon |h| < \delta \Rightarrow |f'_\alpha(x,\alpha+\theta h) - f'_\alpha(x,\alpha)| < \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Тогда

$$\left|\frac{I(\alpha+h)-I(\alpha)}{h} - \int\limits_a^b f'_\alpha(x,\alpha)dx\right| = \left|\int\limits_a^b [f'_\alpha(x,\alpha+\theta h) - f'_\alpha(x,\alpha)dx]\right| <$$

$$< \frac{\varepsilon}{b-a}\cdot(b-a) = \varepsilon \quad \text{при} \quad |h| < \delta.$$

Тем самым получаем, что

$$\lim_{h\to 0}\frac{I(\alpha+h)-I(\alpha)}{h} = \int\limits_a^b f'_\alpha(x,\alpha)\,dx$$

и теорема доказана.

Формула (1.2.2) носит название правила Лейбница.

Теоремам 1.1 и 1.2 можно придать следующий вид соответственно:

$$\lim_{\alpha\to\alpha_0}\int\limits_a^b f(x,\alpha)\,dx = \int\limits_a^b f(x,\alpha_0)\,dx = \int\limits_a^b \lim_{\alpha\to\alpha_0} f(x,\alpha)\,dx$$

и

$$\left(\int\limits_a^b f(x,\alpha)\,dx\right)'_\alpha = \int\limits_a^b f'_\alpha(x,\alpha)\,dx.$$

Это означает, что знаки предела и производной можно вносить под знак интеграла. Другими словами, эти теоремы являются теоремами о перестановке порядка двух операций: операций предельного перехода и интегрирования, дифференцирования и интегрирования.

## 1.3. Независимость повторного интеграла от порядка интегрирования

Пусть функция $f(x,\alpha)$ непрерывна в прямоугольнике $P = [a,b]\times[c,d]$. Тогда, как уже показано, функция $I(\alpha) = \int\limits_a^b f(x,\alpha)\,dx$ непрерывна на отрезке $[c,d]$. Следовательно, существует

$$\int\limits_c^d I(\alpha)\,d\alpha = \int\limits_c^d \left\{\int\limits_a^b f(x,\alpha)\,dx\right\} d\alpha = \int\limits_c^d d\alpha \int\limits_a^b f(x,\alpha)\,dx. \tag{1.3.3}$$

Аналогично можно рассмотреть функцию $K(x) = \int\limits_c^d f(x,\alpha)\,d\alpha$, для которой существует

$$\int\limits_a^b K(x)\,dx = \int\limits_a^b \left\{ \int\limits_c^d f(x,\alpha)\,d\alpha \right\} dx = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(x,\alpha)\,d\alpha. \tag{1.3.4}$$

Интегралы (1.3.3) и (1.3.4) принято называть повторными интегралами. Они отличаются друг от друга лишь порядком интегрирования. Поэтому возникает вопрос, зависит ли значение повторного интеграла от порядка интегрирования.

**Теорема 1.3.** *Если функция $f(x,\alpha)$ непрерывна на прямоугольнике $P = [a,b] \times [c,d]$, то*

$$\int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(x,\alpha)\,d\alpha = \int\limits_c^d d\alpha \int\limits_a^b f(x,\alpha)\,dx, \tag{1.3.5}$$

*т.е. значение повторного интеграла не зависит от порядка интегрирования.*

Доказательство. Введем вспомогательные функции

$$F(t) = \int\limits_a^t dx \int\limits_c^d f(x,\alpha)\,d\alpha \quad \text{и} \quad G(t) = \int\limits_c^d d\alpha \int\limits_a^t f(x,\alpha)\,dx,$$

$t \in [a,b]$. Для доказательства соотношения (1.3.5) достаточно показать, что $F(t) = G(t)$ на всем отрезке $[a,b]$. Рассмотрим для этого производные этих функций, причем будем учитывать, что $F(t) = \int\limits_a^t I(x)\,dx$, где $I(x) = \int\limits_c^d f(x,\alpha)\,d\alpha$, а $G(t) = \int\limits_c^d K(t,\alpha)\,d\alpha$, где $K(t,\alpha) = \int\limits_a^t f(x,\alpha)\,dx$. Будем иметь

$$F'(t) = I(t) = \int\limits_c^d f(t,\alpha)\,d\alpha \quad \text{и} \quad G'(t) = \int\limits_c^d \left( \int\limits_a^t f(x,\alpha)\,dx \right)'_t d\alpha = \int\limits_c^d f(t,\alpha)\,d\alpha.$$

При дифференцировании использовано правило дифференцирования определенного интеграла по верхнему пределу интегрирования и правило Лейбница. Итак, $F'(t){=}G'(t)$ для всех $t \in [a,b]$. Значит, $F(t) = G(t) + C$. Так как $F(a) = G(a)$, то постоянная $C = 0$. Так что $F(t) = G(t)$ для всех $t \in [a,b]$ и, в частности, $F(b) = G(b)$. Теорема доказана.

Повторные интегралы (1.3.3) и (1.3.4) могут существовать не только в случае непрерывности функции $f(x,\alpha)$ в прямоугольнике $P$. В этом общем случае теорема 1.3 может оказаться неверной, что можно подтвердить следующим примером.

Пример. Пусть на прямоугольнике $[0;1]\times[0;1]$ задана функция

$$f(x,\alpha)=\begin{cases}\dfrac{x^2-\alpha^2}{(x^2+\alpha^2)^2} \quad \text{при} \quad (x,\alpha)\neq(0,0),\\[2ex] 0, \quad \text{при} \quad (x,\alpha)=(0,0).\end{cases}$$

Тогда имеем

$$I(\alpha)=\int\limits_0^1 f(x,\alpha)\,dx=\int\limits_0^1 \frac{x^2-\alpha^2}{(x^2+\alpha^2)^2}\,dx=\int\limits_0^1 \frac{2x^2\,dx}{(x^2+\alpha^2)^2}-\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^2+\alpha^2}.$$

Первый интеграл берем по частям, взяв $u=x$, $dv=\dfrac{2x\,dx}{(x^2+\alpha^2)^2}$, и получаем

$$I(\alpha)=-\frac{x}{x^2+\alpha^2}\bigg|_0^1+\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^2+\alpha^2}-\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^2+\alpha^2}=-\frac{1}{1+\alpha^2}.$$

Если переменные $x$ и $\alpha$ поменять ролями, то интеграл поменяет знак, что дает нам значение

$$K(x)=\int\limits_0^1 f(x,\alpha)\,d\alpha=\frac{1}{1+x^2}.$$

Наконец находим повторные интегралы

$$\int\limits_0^1 d\alpha\int\limits_0^1 f(x,\alpha)\,dx=-\int\limits_0^1 \frac{d\alpha}{1+\alpha^2}=-\frac{\pi}{4}$$

и

$$\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^1 f(x,\alpha)\,d\alpha=\int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x^2}=\frac{\pi}{4}.$$

Итак, в общем случае делаем вывод, что менять порядок интегрирования в повторном интеграле нельзя.

Отметим, что в данном примере функция $f(x,\alpha)$ не удовлетворяет условиям теоремы 1.3. В самом деле, если рассмотреть значения функции вдоль луча $x=k\alpha$, то получим $f(x,\alpha)=f(k\alpha,\alpha)=\dfrac{k^2-1}{(k^2+1)^2\alpha^2}$. Следовательно, вдоль всех лучей с $k\neq 1$ функция $f(x,\alpha)$ при стремлении точки $(x,\alpha)$ к точке $(0,0)$, т.е. при $\alpha\to 0$, будем иметь бесконечный предел. Так что в точке $(0,0)$ нет даже конечного предела.

Мы еще обратимся к повторным интегралам в следующей главе.

### 1.4. Случай, когда пределы интегрирования также содержат параметр

Рассмотрим теперь более сложный случай, когда

$$I(\alpha) = \int\limits_{\varphi(\alpha)}^{\psi(\alpha)} f(x, \alpha)\, dx, \tag{1.4.6}$$

где $\alpha$ — любое значение из отрезка $[c, d]$, а функции $\varphi(\alpha)$ и $\psi(\alpha)$ принимают свои значения на отрезке $[a, b]$. В данном случае параметр $\alpha$ входит не только в подынтегральную функцию, но и в пределы интегрирования.

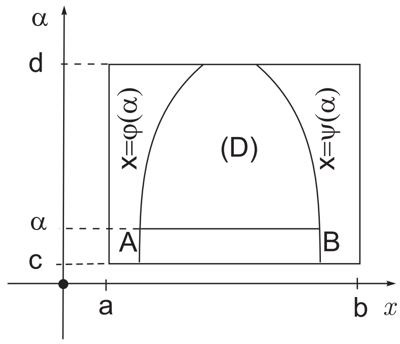



Рис. 1

Геометрически все это можно продемонстрировать на рисунке 1. На нем легко проследить, что интегрирование в $I(\alpha)$ происходит по отрезку $AB$, являющемуся сечением замкнутой области $(D)$, ограниченной линиями $x = \varphi(\alpha)$, $x = \psi(\alpha)$ и прямыми $\alpha = c$, $\alpha = d$.

Если ввести функцию $F(u, v, \alpha) = \int\limits_u^v f(x, \alpha)\, dx$, то функцию $I(\alpha)$ можно рассматривать как сложую функцию $I(\alpha) = F\left(\varphi(\alpha), \psi(\alpha), \alpha\right)$. Поэтому при выполнении следующих условий:

1) функция $f(x, \alpha)$ непрерывна в прямоугольнике $P = [a, b] \times [c, d]$;

2) функции $x = \varphi(\alpha)$ и $x = \psi(\alpha)$ непрерывны на отрезке $[c, d]$

функция $I(\alpha)$ будет непрерывной на отрезке $[c, d]$.

С помощью той же функции $F(u, v, \alpha)$ легко установить и правило дифференцирования функции $I(\alpha)$.

**Теорема 1.4.** *Если функции $f(x,\alpha)$ и $f'_\alpha(x,\alpha)$ непрерывны в прямоугольнике $P = [a,b]\times[c,d]$, а функции $x=\varphi(\alpha)$ и $x=\psi(\alpha)$ дифференцируемы на отрезке $[c,d]$, то функция $I(\alpha)$ дифференцируема на отрезке $[c,d]$ и имеет место формула*

$$I'(\alpha) = \int\limits_{\varphi(\alpha)}^{\psi(\alpha)} f'_\alpha(x,\alpha)\,dx + f\big(\psi(\alpha),\alpha\big)\psi'(\alpha) - f\big(\varphi(\alpha),\alpha\big)\varphi'(\alpha). \qquad (1.4.7)$$

Доказательство. Так как функция $I(\alpha) = F\big(\varphi(\alpha),\psi(\alpha),\alpha\big)$ и $F'_u = -f(u,\alpha)$, $F'_v = f(v,\alpha)$, $F'_\alpha = \int\limits_u^v f'_\alpha(x,\alpha)\,dx$, то по цепному правилу имеем

$$\begin{aligned} I'(\alpha) &= F'_u\big(\varphi(\alpha),\psi(\alpha),\alpha\big)\varphi'(\alpha) + F'_v\big(\varphi(\alpha),\psi(\alpha),\alpha\big)\psi'(\alpha) + F'_\alpha\big(\varphi(\alpha),\psi(\alpha),\alpha\big) = \\ &= \int\limits_{\varphi(\alpha)}^{\psi(\alpha)} f'_\alpha(x,\alpha)\,dx + f\big(\psi(\alpha),\alpha\big)\psi'(\alpha) - f\big(\varphi(\alpha),\alpha\big)\varphi'(\alpha). \end{aligned}$$

Теорема доказана.

## 1.5. Примеры и дополнения

1) Доказать, что $F(t) = \frac{1}{\lambda}\int\limits_0^t f(x)\sin\lambda(t-x)\,dx$, где функция $f(x)$ непрерывна, есть решение уравнения $y''(t) + \lambda^2 y(t) = f(t)$.

*Решение.* Для доказательства нам нужно найти $F''(t)$. Имеем по правилу Лейбница

$$F'(t) = \frac{1}{\lambda}\int\limits_0^t f(x)\lambda\cos\lambda(t-x)\,dx + \frac{1}{\lambda}f(t)\sin\lambda(t-t) = \int\limits_0^t f(x)\cos\lambda(t-x)\,dx,$$

$$F''(t) = -\lambda\int\limits_0^t f(x)\sin\lambda(t-x)\,dx + f(t)\cos\lambda(t-t) = -\lambda\int\limits_0^t f(x)\sin\lambda(t-x)\,dx + f(t).$$

Подставив в уравнение вместо $y''$ найденное выражение для $F''(t)$, а вместо $y$ значение функции $F(t)$, убеждаемся в справедливости нашего утверждения.

2) Возьмем последовательность интегралов

$$I_n(x) = \int\limits_0^x \frac{(x-y)^n}{n!}f(y)\,dy, \quad I_0(x) = \int\limits_0^x f(y)\,dy,$$

где $n$ — натуральное число, а $f(y)$ — непрерывная в рассматриваемом промежутке функция одного переменного. Переменная $x$ выступает здесь в роли параметра.

Применив к интегралу $I_n(x)$ обобщенное правило Лейбница (1.4.7), получаем

$$I'_n(x) = \int\limits_0^x \left( \frac{(x-y)^n}{n!} f(y) \right)'_x dy = I_{n-1}(x).$$

(второй член в формуле (1.4.7) исчезает, ибо $\psi(x) = x$ и подинтегральная функция обращается в нуль при подстановке в нее вместо $y$ значения $\psi(x)$, а третий член исчезает, так как $\varphi(x) = 0$ и $\varphi'(x) = 0$).

Продолжая дифференцировать $I_n(x)$ $n$ раз, мы приходим к равенству

$$I_n^{(n)}(x) = I_0(x) = \int\limits_0^x f(y)\, dy.$$

Дифференцируя последнее соотношение, имеем

$$I_n^{(n+1)}(x) = f(x). \tag{1.5.8}$$

Замечаем по ходу этих дифференцирований, что при любом $k = 1, 2, \ldots, n$, $I_n^{(k)} = 0$. С учетом данного обстоятельства возвращаемся обратно к $I_n(x)$, интегрируя соотношения (1.5.8) $n+1$ раз по промежутку $[0, x]$ и приходим к формуле

$$I_n(x) = \underbrace{\int\limits_0^x dx \int\limits_0^x dx \ \ldots \int\limits_0^x}_{n+1} f(x)\, dx.$$

Подставив данное по условию значение $I_n(x)$, получаем следующее представление

$$\underbrace{\int\limits_0^x dx \int\limits_0^x dx \ \ldots \int\limits_0^x}_{n+1} f(x)\, dx = \frac{1}{n!} \int\limits_0^x (x-y)^n f(y)\, dy. \tag{1.5.9}$$

Доказанную формулу (1.5.9) мы в последствии выведем другим способом.

3) В первой части мы уже приводили две теоремы (Шварца и Юнга), где при различных ограничениях на функцию $g(x, y)$ и ее частные производные доказывалась независимость смешанной производной $g''_{xy}$ от порядка дифференцирования по переменным $x$ и $y$. С помощью правила Лейбница можно дать еще одно достаточно простое доказательство данного факта.

Пусть функция $g(x, y)$ непрерывна и имеет непрерывную производную $g'_x(x, y)$ и непрерывную смешанную производную $g''_{yx}(x, y)$ в прямоугольнике $P = [a, b] \times [c, d]$.

Положим $g'_y(x,y) = f(x,y)$. Проинтегрировав это равенство по переменной $y$ на отрезке $[c,y]$, будем иметь

$$\int\limits_c^y g'_y(x,y)\,dy = \int\limits_c^y f(x,\alpha)\,d\alpha.$$

Откуда следует равенство

$$g(x,y) = g(x,c) + \int\limits_c^y f(x,\alpha)\,d\alpha. \tag{1.5.10}$$

Так как функция $f(x,y)$ имеет в прямоугольнике $P$ непрерывную производную по $x$, то к интегралу $\int\limits_c^y f(x,\alpha)\,d\alpha$ применимо правило Лейбница. Поэтому дифференцируя равенство (1.5.10), получаем

$$g'_x(x,y) = g'(x,c) + \int\limits_c^y f'_x(x,\alpha)\,d\alpha,$$

откуда

$$g''_{xy}(x,y) = f'_x(x,y).$$

С другой стороны,

$$g''_{yx} = \left(g'_y\right)'_x = f'_x(x,y).$$

Так что

$$g''_{xy}(x,y) = g''_{yx}(x,y).$$

Замечание. Проведенное рассуждение нисколько не умаляет значения теорем Шварца и Юнга, которые устанавливают равенство смешанных производных $g''_{xy}$ и $g''_{yx}$ в отдельно взятой точке.

4) Найти $F''(x)$, если

$$F(x) = \frac{1}{h^2}\int\limits_0^h d\xi \int\limits_0^h f(x+\xi+\eta)\,d\eta, \quad (h>0),$$

где $f(x)$ — непрерывная функция от одного аргумента.

*Решение.* Если функция $f(x)$ непрерывна, то простая замена аргумента дает нам равенство

$$\int\limits_\alpha^\beta f(t+\omega)\,dt = \int\limits_{\alpha+\omega}^{\beta+\omega} f(t)\,dt.$$

Пользуясь этим равенством и обобщенным правилом Лейбница (1.4.7), получаем

$$F'(x) = \frac{1}{h^2}\left(\int\limits_0^h d\xi \int\limits_{x+\xi}^{x+\xi+h} f(\eta)d\eta\right)'_x = \frac{1}{h^2}\int\limits_0^h \left(\int\limits_{x+\xi}^{x+\xi+h} f(\eta)\,d\eta\right)'_x d\xi =$$

$$= \frac{1}{h^2}\int\limits_0^h \big[f(x+h+\xi) - f(x+\xi)\big]d\xi = \frac{1}{h^2}\left[\int\limits_{x+h}^{x+2h} f(\xi)\,d\xi - \int\limits_x^{x+h} f(\xi)\,d\xi\right].$$

Тогда

$$F''(x) = \frac{1}{h^2}\left[\left(\int\limits_{x+h}^{x+2h} f(\xi)\,d\xi\right)'_x - \left(\int\limits_x^{x+h} f(\xi)\,d\xi\right)'_x\right] =$$

$$= \frac{1}{h^2}[f(x+2h) - f(x+h) - f(x+h) + f(x)] = \frac{1}{h^2}[f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x)].$$

Полученную производную можно выразить через так называемые конечные разности. Напомним эти понятия.

**Определение.** Величина

$$\Delta_h f(x) = f(x+h) - f(x)$$

называется *конечной разностью первого порядка* с шагом $h$ функции $f(x)$ в точке $x$.

Дальше определения идут по индукции.

**Определение.** Величина

$$\Delta_h^2 f(x) = \Delta_h\big(\Delta_h f(x)\big)$$

называется *конечной разностью второго порядка* с шагом $h$ функции $f(x)$ в точке $x$.

**Определение.** Величина

$$\Delta_h^n f(x) = \Delta_h\big(\Delta_h^{n-1} f(x)\big)$$

называется *конечной разностью $n$-го порядка* с шагом $h$ функции $f(x)$ в точке $x$.

Легко видеть, что

$$\Delta_h^2 f(x) = \Delta_h\big(\Delta_h f(x)\big) = \Delta_h\big(f(x+h) - f(x)\big) =$$

$$= f(x+2h) - f(x+h) - f(x+h) + f(x),$$

т.е. окончательно можно записать

$$\Delta_h^2 f(x) = f(x+2h) - 2(x+h) + f(x).$$

Ответ для $F''(x)$ в рассматриваемом примере можно представить в таком виде:

$$F''(x) = \frac{\Delta_h^2 f(x)}{h^2}.$$

Продолжим небольшой экскурс в теорию конечных разностей. Из определения конечной разности первого порядка имеем

$$f(x+h) = f(x) + \Delta_h f(x);$$

отсюда, рассматривая $\Delta$ как символический множитель, можем записать

$$f(x+h) = (1+\Delta) f(x).$$

Последовательно применяя это соотношение $n$ раз, будем иметь

$$f(x+nh) = (1+\Delta)^n f(x).$$

Воспользовавшись формулой бинома Ньютона, окончательно выводим

$$f(x+nh) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \Delta_h^k f(x), \tag{1.5.11}$$

где

$$C_n^k = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}$$

— биномиальные коэффициенты или число сочетаний (комбинаций) из $n$ элементов по $k$.

Формула (1.5.11) выражает последовательные значения функции через конечные разности различных порядков в точке $x$.

Методом математической индукции легко установить еще и следующую формулу

$$\Delta_h^n f(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} C_n^k f\big(x + (n-k)h\big). \tag{1.5.12}$$

Все пропущенные доказательства предоставляются читателю.

Пусть функция $f(x)$ имеет непрерывную производную $f^{(n)}(x)$ на отрезке $[x, x+n\Delta x]$. Тогда справедлива важная формула

$$\Delta_h^n f(x) = f^{(n)}(x + n\theta\Delta x) \cdot (\Delta x)^n, \tag{1.5.13}$$

где $0 < \theta < 1$.

Эту формулу, которая при $n = 1$ есть ничто иное как хорошо известная уже нам формула конечных приращений Лагранжа, также проще всего доказывается методом математической индукции. Ее можно доказывать еще аналогично теореме Лагранжа о среднем значении, строя вспомогательную функцию в форме определителя.

Из формулы (1.5.13) в случае непрерывности производной $f^{(n)}(x)$ следует, что

$$f^{(n)}(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_h^n f(x)}{\Delta x^n}. \tag{1.5.14}$$

Символ $\Delta$ (дельта) можно рассматривать как оператор, ставящий в соответствие функции $y = f(x)$ функцию $\Delta y = f(x+h) - f(x)$ ($h$ постоянно). Легко проверить основные свойства оператора $\Delta$:

1) $\Delta(\alpha u + \beta v) = \alpha\Delta u + \beta\Delta u$;

2) $\Delta^m(\Delta^n y) = \Delta^{m+n} y$, где $m$ и $n$ — целые неотрицательные числа, причем по определению полагают $\Delta^0 y = y$, $\alpha$ и $\beta$ — произвольные числовые множители.

Первое из указанных свойств называют линейностью. Так что $\Delta$ — линейный оператор.

Приведенные выше факты теории конечных разностей можно найти в любом курсе по методам вычислений. Имеются и целые монографии, посвященные данной теории.

Далее мы переходим к примерам на вычисление определенных интегралов, основанном либо на дифференцировании собственного интеграла по параметру, либо на представлении интеграла в виде повторного интеграла с последующей перестановкой порядка интегрирования.

5) Вычислить интеграл

$$I = \int\limits_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x}\, dx, \quad 0 < a \leqslant b.$$

*Решение.* Представим $I$ в виде повторного интеграла, заметив, что

$$\int\limits_a^b x^\alpha\,d\alpha = \frac{x^b - x^a}{\ln x}.$$

Тогда имеем

$$I = \int\limits_0^1 dx \int\limits_a^b x^\alpha\,d\alpha.$$

Так как выполнено условие теоремы 1.3 о непрерывности подинтегральной функции, меняем порядок интегрирования и получаем

$$I = \int\limits_a^b d\alpha \int\limits_0^1 x^\alpha\,dx = \int\limits_a^b \left.\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right|_0^1 d\alpha = \int\limits_a^b \frac{d\alpha}{\alpha+1} = \ln\frac{b+1}{a+1}.$$

Можно вычислить данный интеграл и другим способом. Зафиксировав значение параметра $a$, рассматриваем интеграл $I$ как функцию одного параметра $b$. Тогда по правилу Лейбница имеем

$$\frac{dI}{db} = \int\limits_0^1 \left(\frac{x^b - x^a}{\ln x}\right)'_b dx = \int\limits_0^1 x^b\,db = \frac{1}{b+1}.$$

Интегрируя последний рзультат, находим $I = \ln(b+1) + C$. Полагая теперь $b = a$, получаем значение произвольной постоянной $C = -\ln(a+1)$, так как $I(a) = 0$ В итоге приходим к тому же результату.

6) Вычислить интеграл

$$I(\alpha) = \int\limits_0^{\pi/2} \ln(\sin^2 x + \alpha^2\cos^2 x)\,dx, \quad \alpha \neq 0.$$

*Решение.* Сначала рассмотрим случай $\alpha > 0$ и $\alpha \neq 1$. Так как функция

$$f(x,\alpha) = \ln(\sin^2 x + \alpha^2\cos^2 x)$$

непрерывна и имеет непрерывную производную

$$f'_\alpha(x,\alpha) = \frac{2\alpha\cos^2 x}{\sin^2 x + \alpha^2\cos^2 x}$$

в прямоугольнике $P = \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \times [c,d]$, где $c > 0$, то по правилу Лейбница получаем

$$I'(\alpha) = \int\limits_0^{\pi/2} \frac{2\alpha\cos^2 x}{\sin^2 x + \alpha^2\cos^2 x}\,dx.$$

Используя подстановку $\operatorname{tg} x = t$, находим

$$I'(\alpha) = 2\alpha \int\limits_0^{+\infty} \frac{dt}{(t^2+1)(t^2+\alpha^2)} = \frac{2\alpha}{\alpha^2-1} \int\limits_0^{+\infty} \left( \frac{1}{t^2+2} - \frac{1}{t^2+\alpha^2} \right) dt =$$

$$= \frac{2\alpha}{\alpha^2-1} \left( \operatorname{arctg} t - \frac{1}{\alpha} \operatorname{arctg} \frac{1}{\alpha} \right) \Bigg|_0^{+\infty} = \frac{2\alpha}{\alpha^2-1} \left( \frac{\pi}{2} - \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{\pi}{2} \right) =$$

$$= \frac{2\alpha}{\alpha^2-1} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\alpha-1}{\alpha} = \frac{\pi}{\alpha+1},$$

откуда $I(\alpha) = \pi \ln(\alpha+1) + C$.

Так как $I(1) = 0$, то подставляя $\alpha = 1$ имеем $C = -\pi \ln 2$. Значит

$$I(\alpha) = \pi \ln(\alpha+1) - \pi \ln 2 = \pi \ln \frac{\alpha+1}{2} \quad \text{при} \quad \alpha > 0.$$

Если $\alpha < 0$, то в силу четности функции $I(\alpha)$ получаем

$$I(\alpha) = \pi \ln \frac{-\alpha+1}{2}.$$

Объединяя оба случая, находим при $\alpha \neq 0$

$$I(\alpha) = \pi \ln \frac{|\alpha|+1}{2}.$$

7) Рассмотрим прием, с помощью которого Эйлер нашел сумму ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

*Решение.* Возьмем интеграл

$$I = \int\limits_0^1 \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \int\limits_0^1 \arcsin x \, d(\arcsin x) = \frac{1}{2} \left(\arcsin x\right)^2 \Big|_0^1 = \frac{\pi^2}{8}.$$

Подсчитаем далее этот же интеграл другим способом, воспользовавшись известным разложением

$$\arcsin x = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1},$$

которое, как легко проверить с помощью признака Вейерштрасса, равномерно сходится на отрезке $[0;1]$. Следовательно,

$$I = \int\limits_0^1 \left\{ x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \right\} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= \int\limits_0^1 \frac{x\, dx}{\sqrt{1-x^2}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!(2n+1)} \int\limits_0^1 \frac{x^{2n+1}}{\sqrt{1-x^2}}\, dx.$$

Так как после подстановки $x = \cos t$ имеем

$$\int\limits_0^1 \frac{x^{2n+1}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int\limits_0^{\pi/2} \sin^{2n+1} t\,dt = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}^{1},$$

то получается, что

$$I = \frac{\pi^2}{8} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}.$$

Далее рассуждаем следующим образом:

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{1}{4}S + \frac{\pi^2}{8},$$

$$\frac{3}{4}S = \frac{\pi^2}{8}, \quad S = \frac{\pi^2}{6}.$$

---

[1]Чтобы получить указанный результат, найдем рекуррентную формулу для интегралов $I_m = \int\limits_0^{\pi/2} \sin^{2m+1} x\,dx$, $m = 0, 1, 2, \ldots$. Для этого берем данный интеграл по частям, принимая за $u = \sin^{2m} x$, $dv = \sin x\,dx$. Тогда имеем

$$I_m = \int\limits_0^{\pi/2} \sin^{2m+1} x\,dx = -\sin^{2m} x \cos x\Big|_0^{\pi/2} + 2m \int\limits_0^{\pi/2} \sin^{2m-1} x \cos^2 x\,dx =$$

$$= 2m \int\limits_0^{\pi/2} \sin^{2m-1} x \cdot (1 - \sin^2 x)\,dx = 2mI_{m-1} - 2mI_m.$$

Так как $I_m = 2mI_{m-1} - 2mI_m$, то $(2m+1)I_m = 2mI_{m-1}$ и

$$I_m = \frac{2m}{2m+1} I_{m-1}.$$

Запишем это соотношение для значений $m = 1, 2, \ldots, n$:

$$I_n = \frac{2n}{2n+1} I_{n-1};$$

$$I_{n-1} = \frac{2n-2}{2n-1} I_{n-2};$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$I_1 = \frac{2}{3} I_0.$$

Перемножив полученную цепочку равенств, приходим к соотношению

$$I_n = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} I_0,$$

но $I_0 = \int\limits_0^{\pi/2} \sin x\,dx = 1$. Отсюда $I_n = \dfrac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$ и нужный результат доказан.

8) Примем при любом целом положительном индексе $n$, что

$$J_n(x)=\frac{x^n}{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\cos xt\cdot\left(1-t^2\right)^{n-\frac{1}{2}}\,dt. \tag{1.5.15}$$

Доказать, что

$$x^2J_n''(x)+xJ_n'(x)+(x^2-n^2)J_n(x)=0. \tag{1.5.16}$$

*Решение.* Несложный подсчет с использованием правила Лейбница дает нам такие значения для производных $J_n'(x)$ и $J_n''(x)$:

$$J_n'(x)=\frac{nx^{n-1}}{(2n-1)!!}\,\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\cos xt\cdot\left(1-t^2\right)^{n-\frac{1}{2}}\,dt-\frac{x^n}{(2n-1)!!}\,\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}t\sin xt\cdot\left(1-t^2\right)^{n-\frac{1}{2}}\,dt;$$

$$J_n''(x)=\frac{n(n-1)x^{n-2}}{(2n-1)!!}\,\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\cos xt\cdot\left(1-t^2\right)^{n-\frac{1}{2}}\,dt-\frac{2nx^{n-1}}{(2n-1)!!}\,\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}t\sin xt\cdot\left(1-t^2\right)^{n-\frac{1}{2}}\,dt-$$

$$-\frac{x^n}{(2n-1)!!}\,\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}t^2\cos xt\cdot\left(1-t^2\right)^{n-\frac{1}{2}}\,dt.$$

Составляем теперь требуемое выражение

$$A=x^2J_n''(x)+xJ_n'(x)+J_n(x)=\frac{n(n-1)x^n}{(2n-1)!!}\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\cos xt\cdot\left(1-t^2\right)^{n-\frac{1}{2}}dt-$$

$$-\frac{2nx^{n+1}}{(2n-1)!!}\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}t\sin xt\cdot\left(1-t^2\right)^{n-\frac{1}{2}}dt-\frac{x^{n+2}}{(2n-1)!!}\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}t^2\cos xt\cdot\left(1-t^2\right)^{n-\frac{1}{2}}dt+$$

$$+\frac{nx^n}{(2n-1)!!}\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\cos xt\cdot\left(1-t^2\right)^{n-\frac{1}{2}}dt-\frac{x^{n+1}}{(2n-1)!!}\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}t\sin xt\cdot\left(1-t^2\right)^{n-\frac{1}{2}}dt+$$

$$+(x^2-n^2)\frac{x^n}{(2n-1)!!}\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\cos xt\cdot\left(1-t^2\right)^{n-\frac{1}{2}}dt=\frac{x^{n+2}}{(2n-1)!!}\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\cos xt\cdot\left(1-t^2\right)^{n+\frac{1}{2}}dt-$$

$$-\frac{(2n+1)x^{n+1}}{(2n-1)!!}\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}t\sin xt\cdot\left(1-t^2\right)^{n-\frac{1}{2}}dt+$$

$$+\frac{\left[n(n-1)+n-n^2\right]x^n}{(2n-1)!!}\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\cos xt\cdot\left(1-t^2\right)^{n-\frac{1}{2}}dt.$$

Последнее слагаемое очевидным образом равно нулю, а во втором слагаемом возьмем интеграл по частям, принимая за $u=\sin xt$, $dv=t(1-t^2)^{n-\frac{1}{2}}\,dt$:

$$A=\frac{x^{n+2}}{(2n-1)!!}\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\cos xt\cdot\left(1-t^2\right)^{n+\frac{1}{2}}dt-\frac{(2n+1)x^{n+1}}{(2n-1)!!}\ \frac{1}{\pi}\times$$

$$\times\left[-\frac{1}{2}\sin xt\cdot\frac{\left(1-t^2\right)^{n+\frac{1}{2}}}{n+\frac{1}{2}}\Big|_{-1}^{1}+\int\limits_{-1}^{1}x\cos xt\cdot\frac{\left(1-t^2\right)^{n+\frac{1}{2}}}{n+\frac{1}{2}}dt\right]=0.$$

Уравнение

$$x^2u''+xu'+(x^2-n^2)=0 \tag{1.5.17}$$

называется *уравнением Бесселя*, а функции $J_n(x)$, являющиеся решениями этого уравнения, называются *функциями Бесселя*. Функции Бесселя находят применение в астрономии, термодинамике, гидродинамике, дифференциальных уравнениях математической физики [16].

Особо отметим, что функции Бесселя образуют ортогональную систему с весом $\omega(x)=x$. На отрезке $[0;1]$ это означает, что

$$\int\limits_{0}^{1}xJ_n(\alpha x)J_n(\beta x)\,dx=0 \quad \text{и} \quad \int\limits_{0}^{1}xJ_n^2(\alpha x)\,dx\neq 0,$$

где $\alpha$ и $\beta$ два различных положительных корня функции $J_n(x)$. Линейной заменой $x=a+(b-a)t$ случай произвольного отрезка $[a,b]$ приводится к случаю отрезка $[0;1]$.

Ортогонализация системы функций $J_n(\lambda_m x)$, где $0<\lambda_1<\lambda_2<\ldots$ последовательность нулей функции $J_n(x)$ позволяет применять к ней общую теорию ортогональных систем.

В частности, можно строить ряд Фурье по такой системе и рассматривать вопрос о представлении функций таким рядом.

О важности функций Бесселя свидетельствует и наличие таблиц значений этих функций с точностью до двенадцати знаков после запятой.

**Упражнения.**

1) Пусть функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[A,B]$ Доказать, что

$$\lim_{h\to 0}\int\limits_{a}^{x}\left[f(t+h)-f(t)\right]dt=f(x)-f(a) \quad (A<a<x<B).$$

2) Найти $F'(\alpha)$, если

$$F(\alpha) = \int\limits_0^{\alpha^2} dx \int\limits_{x-\alpha}^{x+\alpha} \sin(x^2 + y^2 - \alpha^2)\, dy.$$

3) Пусть $f(x)$ — дважды дифференцируемая функция и $F(x)$ — дифференцируемая функция. Показать, что функция

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\big[f(x-at) + f(x+at)\big] + \frac{1}{2a} \int\limits_{x-at}^{x+at} F(z)\, dz$$

удовлетворяет уравнению колебания струны

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (a \neq 0)$$

и начальным условиям

$$u(x,0) = f(x), \quad u'_t(x,0) = F(x).$$

4) Пусть $J_0(x) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-1}^{1} \frac{\cos xt}{\sqrt{1-t^2}}\, dt$. Доказать, что

а) функция $J_0(x)$ удовлетворяет уравнению Бесселя (1.5.17);

б) $J_1(x) = -J_0'(x)$.

5) Выяснить, равны ли повторные интегралы

$$\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^1 f(x,\alpha)\, d\alpha \quad \text{и} \quad \int\limits_0^1 d\alpha \int\limits_0^1 f(x,\alpha)\, dx,$$

если

$$f(x,\alpha) = \frac{\alpha - x}{(\alpha + x)^3}.$$

6) Вычислить интеграл

$$\int\limits_0^1 \sin\left(\ln \frac{1}{x}\right) \frac{x^b - x^a}{\ln x}\, dx \quad (a < 0, \quad b > 0).$$

7) Применяя дифференцирование по параметру, вычислить интеграл

$$I(\alpha) = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\alpha^2 - \sin^2 \alpha)\, d\alpha, \quad \alpha > 1.$$

## § 2. Несобственные интегралы, зависящие от параметра

Во втором параграфе будут изучаться несобственные интегралы $I(\alpha)=\int\limits_a^b f(x,\alpha)\,dx$, зависящие от параметра. Как правило, будем ограничиваться единственной особой точкой $b$ — конечной или бесконечно удаленной ($b=+\infty$), причем очень часто оба случая охватываются единой схемой и поэтому не различаются. Остальные случаи особых точек (в нижнем пределе, на обоих концах промежутка интегрирования, наличия особых точек внутри промежутка интегрирования) не требуют отдельного рассмотрения, так как они либо аналогичны провозглашенному случаю, либо приводятся к нему.

Значение $\alpha=\alpha_0$, при котором интеграл $I(\alpha)$ сходится, называется его *точкой сходимости*, в противном случае — *точкой расходимости*. Если интеграл сходится в каждой точке $\alpha\in A$, то говорят, что он сходится на множестве $A$. Такая сходимость называется *поточечной сходимостью* на множестве. Множество всех точек сходимости называется областью сходимостью интеграла $I(\alpha)$.

Нетрудно заметить аналогию между несобственным интегралом $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ и числовым рядом, несобственным интегралом $\int\limits_a^{+\infty} f(x,\alpha)\,dx$ и функциональным рядом, которая отражена даже в терминологии. Однако не все свойства рядов присущи и несобственным интегралам. В качестве примера можно привести необходимый признак сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$, который формулируется так: если ряд сходится, то его общий член $u_n\to 0$. Соответствующим аналогом должно служить утверждение: если интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится, то $f(x)\to 0$ при $x\to+\infty$. Но это неверно, и понятно почему. Если вдоль некоторой последовательности точек $x_n\to+\infty$ имеем $f(x_n)=1$ то эти значения при любых $x$ не повлияют на значение интеграла $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$, но они не дают возможности $f(x)\to 0$ при $x\to+\infty$.

С другой стороны, несобственный интеграл это все-таки интеграл и он сохраняет многие свойства собственного интеграла, например свойство линейности. Мы займемся в данном параграфе переносом ряда понятий и свойств функциональных рядов на несобственные интегралы, зависящие от параметра, и начнем с понятия равномерной сходимости.

## 2.1. Равномерная сходимость несобственных интегралов

Пусть интеграл

$$I(\alpha) = \int\limits_a^b f(x,\alpha)\,dx \tag{2.1.1}$$

сходится на множестве $\alpha \in A$. Это значит, что в каждой точке $\alpha \in A$ существует конечный предел

$$\lim_{x\to b} \int\limits_a^x f(x,\alpha)\,dx = \int\limits_a^b f(x,\alpha)\,dx \tag{2.1.2}$$

или, согласно определения предела,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon,\alpha), \forall x \in [a,b)\colon x > N \Rightarrow \left|\int\limits_x^b f(t,\alpha)\,dt\right| < \varepsilon. \tag{2.1.3}$$

Как и в случае функционального ряда возникает вопрос, а можно ли указать такое $N$, чтобы неравенство (2.1.3) выполнялось бы сразу для всех $\alpha \in A$. Чтобы ответить на этот вопрос, рассмотрим следующий пример.

Пример. Возьмем $\int\limits_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\,dx$. Здесь единственная особая точка $b = \infty$. При каждом фиксированном $\alpha > 0$ интеграл

$$\int\limits_x^{+\infty} e^{-\alpha t}\,dt = -\frac{1}{\alpha}e^{-\alpha t}\Big|_x^{+\infty} = \frac{1}{\alpha}e^{-\alpha x} \to 0 \quad \text{при} \quad x \to +\infty.$$

Значит, наш интеграл сходится поточечно на промежутке $(0,+\infty)$. Но добиться выполнения неравенства

$$\frac{1}{\alpha}e^{-\alpha x} < \varepsilon$$

сразу для всех $\alpha \in (0,+\infty)$ невозможно, т.к. при любом фиксированном $x > 0$ при $\alpha \to 0$ выражение $\frac{1}{\alpha}e^{-\alpha x} \to +\infty$.

Данный пример дает отрицательный ответ на поставленный выше ответ. В связи с этим возникает новое понятие равномерная сходимость по параметру несобственного интеграла.

**Определение.** Несобственный интеграл (2.1.1), поточечно сходящийся на множестве $\alpha \in A$, называется *равномерно сходящимся* на этом множестве, если

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N(\varepsilon) \in [a,b), \quad \forall x \in (N,b) \quad \text{и} \quad \forall \alpha \in A\colon \left|\int\limits_x^b f(t,\alpha)\,dt\right| < \varepsilon. \tag{2.1.4}$$

При $b = +\infty$ утверждение (2.1.4) может быть расшифровано так:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) \geqslant a, \forall x \in [a, +\infty) \text{ и } \forall \alpha \in A\colon x > N \Rightarrow \left| \int\limits_x^{+\infty} f(t)\, dt \right| < \varepsilon, \tag{2.1.4$'$}$$

а при $b$ конечном —

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0, \forall x \in [a, b) \text{ и } \forall \alpha \in A\colon b - \delta < x < b \Rightarrow \left| \int\limits_x^{b} f(t)\, dt \right| < \varepsilon. \tag{2.1.4$''$}$$

Пример. Снова вернемся к интегралу $I(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\, dx$. Как мы уже видели, он сходится поточечно на промежутке $(0, +\infty)$, но не сходится равномерно на нем. В таком случае говорят ещё, что интеграл сходится неравномерно. А вот на множестве $\alpha \geqslant r > 0$, где $r$ — некоторое фиксированное число, сходимость того же интеграла $I(\alpha)$ будет уже равномерной.

В самом деле, так как

$$\int\limits_x^{+\infty} e^{-\alpha t}\, dt = \frac{1}{\alpha} e^{-\alpha x} \leqslant \frac{1}{r} e^{-rx}$$

и выражение $\frac{1}{r} e^{-rx} \to 0$ при $x \to +\infty$ то

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon), \forall x \in [0, +\infty)\colon x > N \Rightarrow \frac{1}{r} e^{-rx} < \varepsilon$$

и, следовательно, для всех $\alpha \geqslant r$ будет выполнено неравенство

$$\int\limits_x^{+\infty} e^{-\alpha t}\, dt < \varepsilon$$

при $x > N$.

Из данного определения очевидным образом следует, что из равномерной сходимости на множестве вытекает и поточечная сходимость на этом множестве. Рассмотренный пример показывает, что обратное неверно: из поточечной сходимости на множестве равномерная сходимость на этом же множестве не вытекает. Такова связь между понятиями поточечной и равномерной сходимости несобственного интеграла, зависящего от параметра.

Отметим, что понятие равномерной сходимости имеет смысл только на множестве, в то время как поточечная сходимость имеет смысл и в отдельно взятой точке.

Из вышесказанного видно, что равномерная сходимость накладывает на интеграл (2.1.1) дополнительные ограничения в сравнении с поточечной сходимостью и что тем самым класс равномерно сходящихся на данном множестве интегралов уже класса поточечно сходящихся на нем интегралов.

Рассмотрим два критерия равномерной сходимости несобственных интегралов.

**Теорема 2.1 (критерий равномерной сходимости Больцано–Коши[2]).** *Для того чтобы несобственный интеграл* (2.1.1) *равномерно сходился на множестве значений $\alpha \in A$, необходимо и достаточно, чтобы для*

$$\begin{gathered}\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) \in [a, b), \forall x', x'' \in (N, b) \ \text{и} \ \forall \alpha \in A\colon \\ \left| \int\limits_{x'}^{x''} f(t, \alpha)\, dt \right| < \varepsilon.\end{gathered} \tag{2.1.5}$$

Доказательство. *Необходимость.* Требуется показать, что из равномерной сходимости интеграла (2.1.1) следует утверждение (2.1.5). Согласно определения равномерной сходимости для

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) \in [a, b), \forall x \in (N, b) \ \text{и} \ \forall \alpha \in A\colon \ \left| \int\limits_{x}^{b} f(t, \alpha)\, dt \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Тогда при $x', x'' \in (N, b)$

$$\begin{gathered}\left| \int\limits_{x'}^{x''} f(t, \alpha)\, dt \right| = \left| \int\limits_{x'}^{b} f(t, \alpha)\, dt - \int\limits_{x''}^{b} f(t, \alpha)\, dt \right| \leqslant \\ \leqslant \left| \int\limits_{x'}^{b} f(t, \alpha)\, dt \right| + \left| \int\limits_{x''}^{b} f(t, \alpha)\, dt \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.\end{gathered}$$

*Достаточность.* Надо доказать обратное утверждение: из (2.1.5) вытекает равномерная сходимость интеграла (2.1.1).

[2]Известно, что сам Коши не владел понятием равномерной сходимости. Его критерий касался только поточечной сходимости. Тем не менее, в силу важности этого критерия, лежащего в основе понятии полного метрического пространства, мы сохраняем за аналогичным критерием равномерной сходимости название критерия Больцано–Коши.

Из (2.1.5) следует поточечная сходимость интеграла (2.1.1) на множестве $A$. Поэтому при каждом $x \in [a, b)$ и всех $\alpha \in A$ существует

$$\lim_{x' \to b} \int\limits_x^{x'} f(t, \alpha)\, dt.$$

Кроме того, имеем

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) \in [a, b), \forall x, x' \in (N, b) \text{ и } \forall \alpha \in A\colon \left| \int\limits_x^{x'} f(t, \alpha)\, dt \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Устремив в последнем неравенстве $x'$ к $b$, получаем

$$\left| \int\limits_x^{b} f(t, \alpha)\, dt \right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

для $\forall x \in (N, b)$ и $\forall \alpha \in A$. Что и требовалось доказать.

**Теорема 2.2 (**$\sup$**-критерий равномерной сходимости).** *Для того чтобы интеграл* $\int\limits_a^b f(t, \alpha)\, dt$ *равномерно сходился на множестве значений* $\forall \alpha \in A$*, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\lim_{x \to b-0} \sup_{\alpha \in A} \left| \int\limits_x^{b} f(t, \alpha)\, dt \right| = 0. \tag{2.1.6}$$

Доказательство. *Необходимость.* На основании равномерной сходимости интеграла (2.1.1) на множестве $A$ для

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) \in [a, b), \forall x \in (N, b) \text{ и } \forall \alpha \in A\colon \left| \int\limits_x^{b} f(t, \alpha)\, dt \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Тогда

$$\sup_{\alpha \in A} \left| \int\limits_x^{b} f(t, \alpha)\, dt \right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

при $\forall x \in (N, b)$, что и доказывает (2.1.6).

*Достаточность.* Пусть имеет место соотношение (2.1.6). Отсюда следует, что для

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) \in (N, b)\colon \sup_{\alpha \in A} \left| \int\limits_x^{b} f(t, \alpha)\, dt \right| < \varepsilon.$$

Тем более для $\forall \alpha \in A$

$$\int\limits_x^{b} f(t, \alpha)\, dt < \varepsilon$$

при $\forall x \in (N, b)$. Теорема полностью доказана.

Применим последний критерий к интегралу $\int\limits_0^{+\infty} e^{-\alpha t}\,dt$. Так как $\int\limits_x^{+\infty} e^{-\alpha t}\,dt = \frac{1}{\alpha}e^{-\alpha x}$, то при каждом $x > 0$, $\sup\limits_{\alpha>0} \int\limits_x^{+\infty} e^{-\alpha t}\,dt = +\infty$, следовательно, согласно критерия, сходимость рассматриваемого интеграла на множестве значений параметра $\alpha > 0$ неравномерная. Если же $\alpha \geqslant r > 0$, где $r$ — некоторое фиксированное число, то при $x > 0$ имеем

$$\int\limits_x^{+\infty} e^{-\alpha t}\,dt = \frac{1}{\alpha}e^{-\alpha x} \leqslant \frac{1}{r}e^{-rx}$$

и

$$\sup_{\alpha \geqslant r} \int\limits_x^{+\infty} e^{-\alpha t}\,dt = \frac{1}{r}e^{-rx} \to 0 \quad \text{при} \quad x \to +\infty.$$

Значит, на множестве значений параметра $\alpha \geqslant r > 0$ данный интеграл сходится равномерно.

Рассмотрим далее признак равномерной сходимости, являющийся только достаточным, но зато простым в употреблении.

**Теорема 2.3 (признак Вейерштрасса).** *Если на множестве $A$ выполнено неравенство $|f(x,\alpha)| \leqslant \varphi(x)$, где $x \in [a,b]$ и интеграл $\int\limits_a^b \varphi(x)\,dx$ сходится, то интеграл $\int\limits_a^b f(x,\alpha)\,dx$ равномерно сходится на множестве значений параметра $\alpha \in A$.*

Доказательство. Так как по условию интеграл $\int\limits_a^b \varphi(x)\,dx$ сходится, то для

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) \in [a,b), \forall x', x'' \in (N,b)\colon \int\limits_{x'}^{x''} \varphi(t)\,dt < \varepsilon.$$

Следовательно, $\left|\int\limits_{x'}^{x''} f(t,\alpha)\,dt\right| \leqslant \int\limits_{x'}^{x''} \varphi(tl)\,dt < \varepsilon$ при $\forall x', x'' \in (N,b)$ и $\forall \alpha \in A$. Согласно критерия Больцано-Коши, интеграл $\int\limits_a^b f(x,\alpha)dx$ равномерно сходится на множестве $A$. Теорема доказана.

Пример. Рассмотрим $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2+\alpha^2}$. Очевидно, что для всех действительных значений $\alpha$, $\frac{1}{x^2+\alpha^2} \leqslant \frac{1}{x^2}$. Известно, что интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ сходится. Значит согласно признака Вейерштрасса данный интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2+\alpha^2}$ равномерно сходится на множестве значений параметра $\alpha \in (-\infty, +\infty)$.

**Теорема 2.4 (признак равномерной сходимости Дини).** *Если неотрицательная функция* $f(x,\alpha)$ *непрерывна на множестве* $P=[a,b)\times[c,d]$ *и функция* $I(\alpha)=$ $=\int\limits_a^b f(x,\alpha)\,dx$ *непрерывна на отрезке* $[c,d]$*, то интеграл* $\int\limits_a^b f(x,\alpha)\,dx$ *равномерно сходится на множестве значений параметра* $\alpha\in[c,d]$.

Доказательство. По условию $\int\limits_a^b f(x,\alpha)\,dx$ сходится в каждой точке $\alpha_0\in[c,d]$. Это означает, что в каждой точке $\alpha_0$

$$\forall\varepsilon>0, \exists N(\varepsilon,\alpha_0)\in[a,b)\colon \int\limits_N^b f(t,\alpha_0)\,dt<\varepsilon.$$

Заметим, что

$$\int\limits_N^b f(t,\alpha)\,dt=\int\limits_a^b f(t,\alpha)\,dt-\int\limits_a^N f(t,\alpha)\,dt$$

есть функция параметра $\alpha$, непрерывная на отрезке $[c,d]$, т.к. первое слагаемое в правой части непрерывно по условию, а второе слагаемое есть собственный интеграл от непрерывной функции $f(x,\alpha)$.

В силу непрерывности указанного интеграла по параметру для каждой точки $\alpha_0\in[c,d]$ существует окрестность $U_\delta(\alpha_0)$, в которой для $\forall\alpha$ сохраняется неравенство

$$\int\limits_N^b f(t,\alpha)\,dt<\varepsilon.$$

Полученные окрестности образуют открытое покрытие компактного множества $[c,d]$, и из него можно выделить конечное число окрестностей $U_{\delta_1}(\alpha_1),U_{\delta_2}(\alpha_2),\ldots,U_{\delta_p}(\alpha_p)$, покрывающих весь отрезок $[c,d]$ и для каждой из которых существует такое $N_i$, что

$$\int\limits_{N_i}^b f(t,\alpha)\,dt<\varepsilon.$$

Выберем из чисел $N_i$ наибольшее $N=\max\{N_1,N_2,\ldots,N_p\}$, которое зависит уже только от $\varepsilon$ и от $\alpha$ не зависит.

Берем теперь произвольное $\alpha\in[c,d]$. Оно принадлежит некоторой из выделенных окрестностей $U_{\delta_i}(\alpha_i)$ и рассмотрим $\int\limits_N^b f(t,\alpha)\,dt$. В силу неотрицательности подинтегральной функции $f(t,\alpha)$ интеграл от нее увеличивается с расширением промежутка интегрирования. Поэтому

$$\int\limits_N^b f(t,\alpha)\,dt \leqslant \int\limits_{N_i}^b f(t,\alpha)\,dt < \varepsilon.$$

Итак, имеем

$$\int\limits_N^b f(t,\alpha)\,dt < \varepsilon.$$

Тогда для $\forall x \in (N,b)$

$$\int\limits_x^b f(t,\alpha)\,dt \leqslant \int\limits_N^b f(t,\alpha)\,dt < \varepsilon.$$

В итоге мы получили, что для

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) \in [a,b), \forall x \in (N,b) \text{ и } \forall \alpha \in [c,d]\colon \int\limits_x^b f(t,\alpha_0)\,dt < \varepsilon.$$

Теорема доказана.

Далее будут рассмотрены приложения понятия равномерной сходимости несобственного интеграла.

### 2.2. Непрерывность функции, заданной несобственным интегралом

Пусть $P = [a,b) \times [c,d]$ и $I(\alpha) = \int\limits_a^b f(x,\alpha)\,dx$.

**Теорема 2.5.** *Если функция $f(x,\alpha)$ непрерывна на множестве $P$ и интеграл $\int\limits_a^b f(x,\alpha)\,dx$ равномерно сходится на отрезке $[c,d]$, то функция $I(\alpha)$ непрерывна на $[c,d]$.*

Доказательство. Из равномерной сходимости интеграла $\int\limits_a^b f(x,\alpha)\,dx$ для

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N[a,b) \in [a,b), \forall \alpha \in [c,d]\colon \left|\int\limits_N^b f(t,\alpha)\,dt\right| < \frac{\varepsilon}{3}. \qquad (*)$$

Возьмем произвольную точку $\alpha \in [c,d]$ и представим приращение функции $I(\alpha)$ в этой точке в виде

$$I(\alpha+h) - I(\alpha) = \int\limits_a^b f(t,\alpha+h)\,dt - \int\limits_a^b f(t,\alpha)\,dt =$$

$$= \int\limits_a^N \big[f(t,\alpha+h) - f(t,\alpha)\big]dt + \int\limits_N^b f(t,\alpha+h)dt - \int\limits_N^b f(t,\alpha)dt = I_1 + I_2 - I_3.$$

Интегралы $I_2$ и $I_3$ очевидным образом удовлетворяют утверждению $(*)$, что дает нам неравенства

$$|I_2| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{и} \quad |I_2| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

При оценке интеграла $I_1$ мы воспользуемся непрерывностью функции $f(x, \alpha)$ на множестве $[a, N] \times [c, d]$, на основании которой для всякого $\varepsilon > 0$ существует число $\delta > 0$ такое, что при $|h| < \delta$ будем иметь $|f(t, \alpha + h) - f(t, \alpha)| < \dfrac{\varepsilon}{3(N-a)}$. Тогда

$$|I_1| = \left| \int\limits_a^N \big[f(t, \alpha + h) - f(t, \alpha)\big]\, dt \right| < \frac{\varepsilon}{3(N-a)}(N - \alpha) = \frac{\varepsilon}{3}.$$

В итоге получаем

$$|I(\alpha + h) - I(\alpha)| \leqslant |I_1| + |I_2| + |I_3| < \frac{\varepsilon}{3} \cdot 3 = \varepsilon,$$

если только $|h| < \delta$.

Тем самым непрерывность функции $I(\alpha)$ в каждой точке $\alpha \in [c, d]$ доказана, и вместе с этим полностью доказана рассматриваемая теорема.

Пример. Рассмотрим функцию $\Gamma(p) = \int\limits_0^{+\infty} x^{p-1} e^{-x}\, dx$, которую принято называть гамма функцией Эйлера или просто гамма функцией. Представим данный интеграл в виде

$$\Gamma(p) = \int\limits_0^1 x^{p-1} e^{-x}\, dx + \int\limits_0^{+\infty} x^{p-1} e^{-x}\, dx = \Gamma_1(p) + \Gamma_2(p),$$

где каждый из интегралов имеет по единственной особой точке и исследуем каждый из них на равномерную сходимость с помощью признака Вейерштрасса.

Интеграл $\Gamma_1(p)$ сходится равномерно на множестве значений параметра $p \geqslant r$, где $r$ — некоторое произвольно взятое число, так как, во-первых, на этом множестве справедливо неравенство

$$x^{p-1} e^{-x} \leqslant x^{r-1} e^{-x},$$

и, во-вторых, $x^{r-1} e^{-x} = O^* \left( \dfrac{1}{x^{1-r}} \right)$ при $x \to 0$. А интеграл $\Gamma_2(p)$ сходится равномерно на множестве значений $0 < p \leqslant \mathscr{R}$, поскольку

$$x^{p-1} e^{-x} \leqslant x^{\mathscr{R}-1} e^{-x}.$$

Объединив оба результата, имеем, что интеграл $\Gamma(p)$ равномерно сходится на множестве значений параметра $r \leqslant p \leqslant \mathscr{R}$, где $r > 0$ и $\mathscr{R}$ — некоторые произвольно взятые числа. Следовательно, по теореме 2.5 функция $\Gamma(p)$ непрерывна на отрезке $[r, \mathscr{R}]$. Так как любое значение $p > 0$ можно погрузить в некоторые отрезок $[r, \mathscr{R}]$ с $r > 0$, то получаем, что гамма функция $\Gamma(p)$ непрерывна на промежутке $(0, +\infty)$.

### 2.3. Дифференцирование несобственного интеграла по параметру

Пусть $P = [a, b) \times [c, d]$ и $I(\alpha) = \int\limits_a^b f(x, \alpha)\, dx$.

**Теорема 2.6.** *Если* 1) *функция* $f(x, \alpha)$ *непрерывна и имеет непрерывную производную* $f'_\alpha(x, \alpha)$ *на множестве* $P$;

2) *интеграл* $\int\limits_a^b f(x, \alpha)\, dx$ *сходится на отрезке* $[c, d]$;

3) *интеграл* $\int\limits_a^b f'_\alpha(x, \alpha)\, dx$ *равномерно сходится на отрезке* $[c, d]$,

*то функция* $I(\alpha)$ *дифференцируема на отрезке* $[c, d]$ *и*

$$I'(\alpha) = \int\limits_a^b f'_\alpha(x, \alpha)\, dx. \tag{2.3.7}$$

Доказательство. Будем опираться на следующую теорему о почленном дифференцировании функционального ряда.

Пусть дан функциональный ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} u_i(\alpha)$, члены которого непрерывно дифференцируемы на отрезке $[c, d]$. Если данный ряд сходится, а ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} u'_i(\alpha)$ равномерно сходится на $[c, d]$, то исходный функциональный ряд можно почленно дифференцировать на $[c, d]$, т.е. на этом отрезке справедливо равенство

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty} u_i(\alpha)\right)' = \sum_{i=1}^{\infty} u'_i(\alpha). \tag{2.3.8}$$

Выберем на промежутке $[a, b)$ возрастающую последовательность точек $x_1 < x_2 < \ldots < x_i < \ldots$, сходящуюся к точке $b$ $(x_i \to b)$ и рассмотрим ряды

$$\sum_{i=1}^{\infty} \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} f(t, \alpha)\, dt, \tag{$*$}$$

и
$$\sum_{i=1}^{\infty} \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} f'_\alpha(t,\alpha)\,dt, \tag{$**$}$$
где $x_0 = a$. Ввиду соотношений
$$s_n = \sum_{i=1}^{n} u_i(\alpha) = \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} f(t,\alpha)\,dt = \int\limits_{a}^{x_n} f(t,\alpha)\,dt \to \int\limits_{a}^{b} f(t,\alpha)\,dt$$
и
$$\mathfrak{S}_n = \sum_{i=1}^{n} u'_i(\alpha) = \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} f'_\alpha(t,\alpha)\,dt = \int\limits_{a}^{x_n} f'_\alpha(t,\alpha)\,dt \to \int\limits_{a}^{b} f'_\alpha(t,\alpha)\,dt$$
на $[c,d]$ выполнены условия приведенной выше теоремы о почленном дифференцировании функционального ряда. Используя ее и правило Лейбница дифференцирования собственного интеграла по параметру, применимого к интегралу $\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} f(t,\alpha)\,dt$, получаем
$$\left(\sum_{i=1}^{\infty} \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} f(t,\alpha)\,dt\right)'_\alpha = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} f(t,\alpha)\,dt\right)'_\alpha = \sum_{i=1}^{\infty} \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} f'_\alpha(t,\alpha)\,dt$$
или, что то же самое,
$$\left(\int\limits_{a}^{b} f(t,\alpha)\,dt\right)'_\alpha = \int\limits_{a}^{b} f'_\alpha(t,\alpha)\,dt.$$

Теорема доказана.

### 2.4. Перестановка порядка интегрирования в несобственных интегралах

Если существуют интегралы (собственные или несобственные) $I(\alpha) = \int\limits_a^b f(x,\alpha)\,dx$ и
$$\int\limits_{c}^{d} I(\alpha)\,d\alpha = \int\limits_{c}^{d} \left\{ \int\limits_{a}^{b} f(x,\alpha)\,dx \right\} d\alpha = \int\limits_{c}^{d} d\alpha \int\limits_{a}^{b} f(x,\alpha)\,dx, \tag{2.4.9}$$
то интеграл (2.4.9) называется *повторным интегралом.* В математике и ее приложениях часто возникает потребность в перестановке порядка интегрирования в таких интегралах и в обосновании ее законности. Мы начнем со случая, когда внутренний интеграл несобственный, а внешний — собственный.

Замечание. Вопрос о перестановке порядка действия двух операций в математическом анализе очень важен. Мы сталкиваемся с ним почти на каждом шагу, начиная уже с непрерывности.

**Теорема 2.7.** *Если функция $f(x,\alpha)$ непрерывна на множестве $P=[a,b)\times[c,d]$ и интеграл $\int\limits_a^b f(x,\alpha)\,dx$ равномерно сходится на $[c,d]$, то оба повторных интеграла существуют и равны, т.е.*

$$\int\limits_c^d d\alpha\int\limits_a^b f(x,\alpha)\,dx=\int\limits_a^b dx\int\limits_c^d f(x,\alpha)\,d\alpha. \tag{2.4.10}$$

Доказательство. Как показано в теореме 2.5, функция $I(\alpha)$ непрерывна на $[c,d]$. Отсюда сразу следует существование повторного интеграла $\int\limits_c^d d\alpha\int\limits_a^b f(x,\alpha)\,dx$.

При каждом $x\in[a,b)$ имеем

$$\int\limits_c^d I(\alpha)\,d\alpha=\int\limits_c^d d\alpha\int\limits_a^b f(t,\alpha)\,dt=\int\limits_c^d d\alpha\int\limits_a^x f(t,\alpha)\,dt+\int\limits_c^d d\alpha\int\limits_x^b f(t,\alpha)\,dt=I_1+I_2.$$

В повторном интеграле $I_1$ и внешний и внутренний интегралы собственные и по теореме 1.3 имеем

$$\int\limits_c^d d\alpha\int\limits_a^x f(t,\alpha)\,dt=\int\limits_a^x dt\int\limits_c^d f(t,\alpha)\,d\alpha.$$

Для оценки интеграла $I_2$ воспользуемся равномерной сходимостью интеграла $\int\limits_a^b f(x,\alpha)\,dt$, согласно которой

$$\forall\varepsilon>0,\exists N(\varepsilon)\in[a,b),\forall x\in(N,b)\text{ и }\forall\alpha\in[c,d]\colon\ \left|\int\limits_x^b f(t,\alpha)dt\right|<\frac{\varepsilon}{d-c}.$$

Тогда

$$I_2=\left|\int\limits_c^d d\alpha\int\limits_x^b f(t,\alpha)\,dt\right|<\frac{\varepsilon}{d-c}(d-c)=\varepsilon$$

при любом $x\in(N,b)$ и $\forall\alpha\in[c,d]$ и из соотношения

$$\int\limits_c^d d\alpha\int\limits_a^b f(t,\alpha)\,dt=\int\limits_a^x dt\int\limits_c^d f(t,\alpha)\,dt+I_2$$

можно сделать заключение, что существует

$$\int\limits_a^b dt\int\limits_c^d f(t,\alpha)\,dt=\lim_{x\to b}\int\limits_a^x dt\int\limits_c^d f(t,\alpha)\,d\alpha=\int\limits_c^d d\alpha\int\limits_a^b f(t,\alpha)\,dt.$$

Теорема доказана.

Вопрос о перемене порядка интегрирования, когда и внешний и внутренний интегралы несобственные, значительно сложнее. Мы ограничимся лишь случаем $b=+\infty$ и $d=+\infty$, причем при достаточно жестких ограничениях.

**Теорема 2.8.** *Если:* 1) *неотрицательная функция* $f(x,\alpha)$ *непрерывна на множестве* $P = [a,+\infty) \times [c,+\infty)$*;* 2) *функция* $I(\alpha) = \int\limits_a^{+\infty} f(x,\alpha)\,dx$ *непрерывна на промежутке* $[c,+\infty)$*;* 3) *функция* $K(x) = \int\limits_c^{+\infty} f(x,\alpha)\,d\alpha$ *непрерывна на промежутке* $[a,+\infty)$*, то из существования одного из повторных интегралов*

$$\int\limits_a^{+\infty} K(x)\,dx = \int\limits_a^{+\infty} dx \int\limits_c^{+\infty} f(x,\alpha)\,d\alpha \quad \text{или} \quad \int\limits_c^{+\infty} I(\alpha)\,d\alpha = \int\limits_c^{+\infty} d\alpha \int\limits_a^{+\infty} f(x,\alpha)\,dx$$

*следует существование другого повторного интеграла и их равенство.*

Доказательство. Пусть существует $\int\limits_c^{+\infty} I(\alpha)\,d\alpha$. Покажем, что

$$\lim_{b\to+\infty} \int\limits_a^{b} K(x)\,dx = \int\limits_c^{+\infty} I(\alpha)\,d\alpha.$$

Прежде всего заметим, что в силу теоремы Дини интегралы $I(\alpha)$ и $K(x)$ равномерно сходятся соответственно на промежутках $[c,+\infty)$ и $[a,+\infty)$.

Рассмотрим величину

$$A = \int\limits_c^{+\infty} I(\alpha)d\alpha - \int\limits_a^{b} K(x)dx = \int\limits_c^{+\infty} d\alpha \int\limits_a^{+\infty} f(x,\alpha)dx - \int\limits_a^{b} dx \int\limits_c^{+\infty} f(x,\alpha)d\alpha.$$

Второе слагаемое, в котором внутреннее интегрирование идет по бесконечному промежутку $[c,+\infty)$, а внешнее — по конечному промежутку $[a,b] \subset [a,+\infty)$, удовлетворяет условиям теоремы 2.7. Поэтому в нем можно поменять порядок интегрирования. Тогда:

$$A = \int\limits_c^{+\infty} d\alpha \int\limits_a^{+\infty} f(x,\alpha)dx - \int\limits_c^{+\infty} d\alpha \int\limits_a^{b} f(x,\alpha)dx = \int\limits_c^{+\infty} d\alpha \int\limits_b^{+\infty} f(x,\alpha)dx =$$
$$= \int\limits_c^{d} d\alpha \int\limits_b^{+\infty} f(x,\alpha)dx + \int\limits_d^{+\infty} d\alpha \int\limits_b^{+\infty} f(x,\alpha)\,dx = I_1 + I_2,$$

где $d \in [c,+\infty)$ будет определено чуть позднее.

Так как из существования $\int\limits_c^{+\infty} I(\alpha)\,d\alpha$ для

$$\forall\varepsilon > 0, \quad \exists d \in [c,+\infty)\colon \int\limits_d^{+\infty} d\alpha \int\limits_a^{+\infty} f(x,\alpha)\,dx < \frac{\varepsilon}{2},$$

то в силу неотрицательности функции $f(x,\alpha)$ при $\forall b \geqslant a$ будем иметь

$$I_2 = \int\limits_d^{+\infty} d\alpha \int\limits_b^{+\infty} f(x,\alpha)\,dx \leqslant \int\limits_d^{+\infty} d\alpha \int\limits_a^{+\infty} f(x,\alpha)\,dx < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Для оценки интеграла $I_1$ используем равномерную сходимость интеграла $I_1$, которая означает, что

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) \in [a,+\infty), \forall b > N, \forall \alpha \in [c,+\infty) \colon \int\limits_b^{+\infty} f(x,\alpha)dx < \frac{\varepsilon}{2(d-c)}.$$

Следовательно, при $b > N$ $I_1 = \int\limits_c^d d\alpha \int\limits_b^{+\infty} f(x,\alpha)\,dx < \frac{\varepsilon}{2(d-c)}(d-c) = \frac{\varepsilon}{2}$. В итоге

$$A = I_1 + I_2 < \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Теорема доказана.

### 2.5. Вычисление некоторых несобственных интегралов

1. Интеграл Пуассона[3]. Рассмотрим интеграл $I = \int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$. Чтобы установить его сходимость, достаточно ограничиться интегралом $\int\limits_1^{+\infty} e^{-x^2}dx$. Так как на промежутке $[1+\infty)$ имеем $e^{-x^2} \leqslant e^{-x}$ и $\int\limits_1^{+\infty} e^{-x^2}dx = e$, то интеграл $I = \int\limits_1^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$ сходится. Делаем далее в интеграле $I$ подстановку $x = \alpha t$ $(\alpha > 0)$ и получаем, что

$$I = \alpha \int\limits_0^{+\infty} e^{-\alpha^2 t^2} dt.$$

Это равенство умножаем на $e^{-\alpha^2}$ и интегрируем в пределах от 0 до $+\infty$. Тогда имеем цепочку соотношений

$$Ie^{-\alpha^2} = \alpha e^{-\alpha^2} \int\limits_0^{+\infty} e^{-\alpha^2 t^2} dt, \quad I \int\limits_0^{+\infty} e^{-\alpha^2} d\alpha = \int\limits_0^{+\infty} \alpha e^{-\alpha^2} d\alpha \int\limits_0^{+\infty} e^{-\alpha^2 t^2} dt,$$

$$I^2 = \int\limits_0^{+\infty} dt \int\limits_0^{+\infty} \alpha e^{-\alpha^2(1+t^2)} d\alpha, \quad \int\limits_0^{+\infty} \alpha e^{-\alpha^2(1+t^2)} dt = \frac{1}{2(1+t^2)},$$

$$I^2 = \frac{1}{2} \int\limits_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{4}, \quad I = \int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

[3]Данный интеграл введен еще Эйлером, хотя его принято приписывать Пуассону.

В одном из звеньев указанной цепочки совершена перемена порядка интегрирования. Остается ее обосновать. Воспользуемся для этого теоремой 2.8. Как легко видеть:

1) функция $f(t,\alpha) = \alpha e^{-\alpha^2(1+t^2)} \geqslant 0$ и непрерывна на множестве $[0,+\infty)\times[0,+\infty)$;

2) функция $I(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} \alpha e^{-\alpha^2(1+t^2)}dt = Ie^{-\alpha^2}$ непрерывна на множестве значений $\alpha \in [0,+\infty)$, а функция $K(t) = \int\limits_0^{+\infty} \alpha e^{-\alpha^2(1+t^2)}dt = \dfrac{1}{2(1+t^2)}$ непрерывна на промежутке значений $t \in [0,+\infty)$.

Таким образом, выполнены все условия теоремы 2.8.

2. Переходим к интегралу $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}dx$. Для доказательства его сходимости также достаточно ограничиться промежутком $[1,+\infty)$. Взяв этот интеграл по частям, получаем

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}dx = -\int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{x}d(\cos x) = -\frac{1}{x}\cos x\Big|_1^{+\infty} - \int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}dx.$$

Так как $\left|\dfrac{\cos x}{x^2}\right| \leqslant \dfrac{1}{x^2}$, то последний интеграл сходится по признаку сравнения, а вместе с ним сходится и интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}dx$.

Чтобы вычислить данный интеграл, вводим несобственный интеграл с параметром

$$I(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\frac{\sin x}{x}dx, \tag{2.5.11}$$

из которого предложенный интеграл получается при $\alpha = 0$, т.е.

$$I(0) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}dx.$$

В силу неравенства $\left|e^{-\alpha x}\dfrac{\sin x}{x}\right| \leqslant e^{-\alpha x}$ интеграл $I(\alpha)$ сходится при любом $\alpha > 0$. Таким образом, функция $I(\alpha)$ непрерывна на этом промежутке. Тогда $I(0)$ определим как $\lim\limits_{\alpha\to 0} I(\alpha)$.

Легко подсчитать, что функция

$$\Phi_\alpha(t) = \frac{e^{-\alpha t}(\alpha\sin t + \cos t)}{1+\alpha^2}$$

является первообразной для функции $e^{-\alpha t}\sin t$. Из данного выражения для всех $\alpha > 0$ следует оценка

$$|\Phi_\alpha(t)| \leqslant \frac{\alpha}{1+\alpha^2} + \frac{1}{1+\alpha^2} < \frac{1}{2} + 1 < 2.$$

Теперь берем по частям интеграл $\int\limits_x^{+\infty} e^{-\alpha t}\frac{\sin t}{t}dt$, взяв за $u = \frac{1}{t}$, $dv = e^{-\alpha t}\sin t dt$. Это дает нам соотношение

$$\int\limits_x^{+\infty} e^{-\alpha t}\frac{\sin t}{t}dt = \frac{\Phi_\alpha(t)}{t}\bigg|_x^{+\infty} + \int\limits_x^{+\infty}\Phi_\alpha(t)\frac{dt}{t^2} = -\frac{\Phi_\alpha(x)}{x} + \int\limits_x^{+\infty}\Phi_\alpha(t)\frac{dt}{t^2}. \tag{2.5.12}$$

Ввиду неравенства

$$\left|\int\limits_x^{+\infty}\Phi_\alpha(t)\frac{dt}{t^2}\right| < 2\int\limits_x^{+\infty}\frac{dt}{t^2} = \frac{2}{x}$$

на основании (2.5.12) имеем тогда для $\alpha > 0$

$$\left|\int\limits_x^{+\infty} e^{-\alpha t}\frac{\sin t}{t}dt\right| < \frac{4}{x} \quad \text{при} \quad x \to +\infty.$$

Это означает, что интеграл $I(\alpha)$ равномерно сходится на множестве значений $\alpha > 0$, а, следовательно, и на множестве $\alpha \geqslant 0$. Так что в силу теоремы 2.5 функция $I(\alpha)$ непрерывна на промежутке $[0, +\infty)$.

Чтобы выразить $I(\alpha)$, найдем $I'(\alpha)$, причем сначала на множестве значений $\alpha \geqslant r$, где $r$ — некоторое фиксированное положительное число. Формальное применение правила дифференцирования Лейбница дает значение

$$I'(\alpha) = -\int\limits_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\sin x\, dx. \tag{2.5.13}$$

Для обоснования равенства (2.5.13) надо лишь установить равномерную сходимость на $[0, +\infty)$ интеграла (2.5.13), которая согласно признака Вейерштрасса немедленно следует из неравенства $|e^{-\alpha x}\sin x| \leqslant e^{-rx}$ при $\alpha \geqslant r$. Учитывая, что для каждого $\alpha > 0$ найдется $r > 0$, при котором $\alpha \geqslant r$, то формула (2.5.13) справедлива для всех $\alpha > 0$.

Так как

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\sin x\, dx = -\frac{e^{-\alpha x}(\alpha\sin x + \cos x)}{1+\alpha^2}\bigg|_0^{+\infty} = \frac{1}{1+\alpha^2},$$

то соотношение (2.5.13) дает нам

$$I'(\alpha) = -\frac{1}{1+\alpha^2}.$$

Отсюда имеем

$$I(\alpha) = -\operatorname{arctg}\alpha + C. \tag{2.5.14}$$

Остается найти значение постоянной $C$. Изучим для этого поведение $I(\alpha)$ при $\alpha \to +\infty$. Используя оценку

$$|I(\alpha)| = \left| \int\limits_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \frac{\sin x}{x} dx \right| \leqslant \int\limits_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \, dx = \frac{1}{\alpha},$$

получаем, что $I(\alpha) \to 0$ при $\alpha \to +\infty$. Тогда, переходя к пределу при $\alpha \to +\infty$ в равенстве (2.5.14), получим $C = \frac{\pi}{2}$. Поэтому при $\alpha > 0$ равенство (2.5.13) примет вид

$$I(\alpha) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \alpha.$$

Следовательно,

$$I(0) = \lim_{\alpha \to 0} I(\alpha) = \frac{\pi}{2},$$

т.е.

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}. \tag{2.5.15}$$

3. Интеграл Дирихле. Так называется интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x} dx$.

Для его вычисления при $\alpha > 0$ используем подстановку $\alpha x = t$ и получаем

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x} dx = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}.$$

Если же $\alpha < 0$, то имеем

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x} dx = -\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin |\alpha| x}{x} dx = -\frac{\pi}{2}.$$

Фиксируем окончательный результат

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x} dx = \begin{cases} \frac{\pi}{2} \quad \text{при} \quad \alpha > 0, \\ 0 \quad \text{при} \quad \alpha = 0, \\ -\frac{\pi}{2} \quad \text{при} \quad \alpha < 0. \end{cases} \tag{2.5.16}$$

Равенство (2.5.14) позволяет дать интегральное представление для функции $\operatorname{sign} \alpha$

$$\operatorname{sign} \alpha = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x} dx. \tag{2.5.17}$$

4. Вычислим еще один интеграл Эйлера

$$I(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} dx. \tag{2.5.18}$$

Найдем сначала его область сходимости. У него две особые точки $x = +\infty$ и $x = 0$ (при $a > 1$ она не будет особой). Поэтому разобьем $I(\alpha)$ на два интеграла

$$I(\alpha) = \left( \int\limits_0^1 + \int\limits_1^{+\infty} \right) \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} dx = I_1 + I_2.$$

В интеграле $I_1$ справедлива оценка

$$\frac{x^{\alpha-1}}{1+x} dx = O\left(\frac{1}{x^{1-\alpha}}\right) \quad \text{при} \quad x \to 0.$$

Поэтому он сходится при $1 - \alpha < 1$, т.е. при $\alpha > 0$. Во втором интеграле подинтегральная функция при $x \to +\infty$ имеет порядок $O\left(\frac{1}{x^{2-\alpha}}\right)$. Следовательно, он сходится при $2 - \alpha > 1$, т.е. для $\alpha < 1$. В итоге интеграл $I(\alpha)$ сходится на множестве $0 < \alpha < 1$.

Для $0 < x < 1$ функция $\frac{1}{1+x}$ раскладывается в степенной ряд

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k,$$

который равномерно сходится на любом отрезке $[a, b]$, строго лежащем внутри интервала $(0; 1)$. Так как функция $x^{\alpha-1}$ ограничена на таком отрезке, то имеем разложение

$$\frac{x^{\alpha-1}}{1+x} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{\alpha+k-1},$$

которое равномерно сходится на каждом отрезке $[a, b]$, строго лежащем внутри интервала $(0; 1)$, и которое можно почленно интегрировать по рассматриваемому промежутку. Тогда имеем

$$I_1 = \int\limits_0^1 \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} dx = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \int\limits_0^1 x^{\alpha+k-1} dx = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{\alpha+k}.$$

Интеграл $I_2$ подстановкой $x = \frac{1}{z}$ приводится к виду

$$I_2 = \int\limits_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} dx = \int\limits_0^1 \frac{1}{z^\alpha \left(1 + \frac{1}{z}\right)} \frac{dz}{z^2} = \int\limits_0^1 \frac{z^{-\alpha}}{1+z} dz.$$

Повторяя далее те же рассуждения, что и в в случае интеграла $I_1$, будем иметь

$$\frac{z^{-\alpha}}{1+z} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k z^{(k+1-\alpha)-1} = \sum_{\nu=1}^{\infty}(-1)^{\nu-1} z^{\nu-\alpha-1}$$

и

$$I_2 = \int_0^1 \frac{z^{-\alpha}}{1+z}dz = \sum_{\nu=1}^{\infty}(-1)^{\nu-1}\int_0^1 z^{\nu-\alpha-1}dz = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{\alpha-k}.$$

Таким образом,

$$I(\alpha) = \frac{1}{\alpha} + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{1}{\alpha+k}+\frac{1}{\alpha-k}\right).$$

В теории рядов Фурье выводится представление

$$\frac{1}{\sin t} = \frac{1}{t} + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{1}{t+k\pi}+\frac{1}{t-k\pi}\right).$$

Полагая в нем $t = \pi\alpha$, имеем

$$\frac{1}{\sin\pi\alpha} = \frac{1}{\pi\alpha} + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\alpha+k}+\frac{1}{\alpha-k}\right).$$

Следовательно,

$$I(\alpha) = \frac{\pi}{\sin\pi\alpha}, \quad 0 < \alpha < 1. \tag{2.5.19}$$

**Упражнения.**

1. Пользуясь формулой $\int\limits_0^1 x^{n-1}dx = \frac{1}{n}$ $\quad (n > 0)$, вычислить интеграл $\int\limits_0^1 x^{n-1}\ln^m x\,dx$, где $m$ — натуральное число.

2. Пользуясь формулой $\int\limits_0^{+\infty}\frac{dx}{x^2+a} = \frac{\pi}{2\sqrt{a}}$ $\quad (a > 0)$, вычислить интеграл $I = \int\limits_0^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+a)^{n+1}}$, где $n$ — натуральное число.

## § 3. Гамма и бета функции

### 3.1. Определение и простейшие свойства гамма функции

Как уже отмечалось ранее, функция

$$\Gamma(p) = \int_0^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}\,dx \tag{3.1.1}$$

называется гамма функцией Эйлера или просто гамма функцией.

В пункте 2.2 показано, что функция $\Gamma(p)$ определена и непрерывна на интервале $(0, +\infty)$. При $p = 1$ из определения (3.1.1) непосредственно следует, что

$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-x}\, dx = 1. \tag{3.1.2}$$

Рассмотрим еще значение

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} x^{-\frac{1}{2}} e^{-x}\, dx.$$

После подстановки $x^{\frac{1}{2}} = t$ имеем

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} t^{-1} e^{-t^2} \cdot 2t\, dt = 2 \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt.$$

Последний интеграл вычислен уже в пункте 2.5. Это интеграл Пуассона и он равен $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Значит

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

Интегрируя по частям, полагая $u = x^p$, интеграл $\Gamma(p+1)$, получим

$$\Gamma(p+1) = \int_0^{+\infty} x^p e^{-x}\, dx = p\Gamma(p).. \tag{3.1.3}$$

Повторно применяя формулу (3.1.3) к ее правой части, выводим, что при $p > 1$

$$\Gamma(p+1) = p\Gamma(p) = p(p-1)\Gamma(p-1),$$

при $p > 2$

$$\Gamma(p+1) = p(p-1)\Gamma(p-2),$$

и т.д. В итоге при $p > n-1$ будет

$$\Gamma(p+1) = p(p-1)\ldots(p-n+1)\Gamma(p-n+1). \tag{3.1.4}$$

Если в (3.1.4) положить $p = n$, то придем к равенству

$$\Gamma(n+1) = n!, \tag{3.1.5}$$

что позволяет рассматривать гамма функции как непрерывное продолжение факториала на положительную полуось $p > 0$.

Покажем теперь, что функция $\Gamma(p)$ бесконечно дифференцируема. Прежде всего, что она имеет первую производную. Формальное применение правила Лейбница дает

$$\Gamma'(p) = \int\limits_0^{+\infty} x^{p-1} \ln x \cdot e^{-x}\, dx. \tag{3.1.6}$$

Чтобы обосновать справедливость данной формулы, достаточно доказать равномерную сходимость интеграла (3.1.6) на всяком отрезке $[a, b] \subset (0, +\infty)$. Разобьем для этого рассматриваемый интеграл на два интеграла

$$\int\limits_0^{+\infty} x^{p-1} \ln x \cdot e^{-x}\, dx = \left( \int\limits_0^1 + \int\limits_1^{+\infty} \right) x^{p-1} \ln x \cdot e^{-x}\, dx = I_1 + I_2$$

и оценим подинтегральную функцию в первом из них на множестве $(0, 1] \times [a, b]$:

$$|x^{p-1} \ln x \cdot e^{-x}| \leqslant x^{a-1} |\ln x| e^{-x} = x^{a-1-\varepsilon} \cdot x^{\varepsilon} |\ln x| e^{-x} = O(x^{a-1-\varepsilon}).$$

Так как $a - 1 > -1$, то существует $\varepsilon > 0$, при котором $a - 1 - \varepsilon > -1$. Тогда по признаку Вейерштрасса интеграл $I_1$ равномерно сходится на множестве значений $p \in [a, b]$.

На множестве $[1, +\infty) \times [a, b]$ (учитывая неравенство $\ln x < x$) справедлива следующая оценка

$$x^{p-1} \ln x \cdot e^{-x} < x^p e^{-x} \leqslant x^b e^{-x},$$

которая в силу того же признака Вейерштрасса дает равномерную сходимость интеграла $I_2$ на том же отрезке $[a, b]$.

Заметив, что для $\forall p > 0$, существует $[a, b] \subset (0, +\infty)$: $p \in [a, b]$ получаем, что формула (3.1.6) имеет место для всех $p > 0$.

Повторив приведенное выше рассуждение, можем доказать равенство

$$\Gamma''(p) = \int\limits_0^{+\infty} x^{p-1} \ln^2 x \cdot e^{-x}\, dx. \tag{3.1.7}$$

Данное рассуждение можно продолжить до производной любого порядка.

### 3.2. Поведение и график гамма функции

Из формулы (3.1.7) следует, что $\Gamma''(p) > 0$ при любом $p > 0$. Поэтому функция $\Gamma(p)$ строго выпуклая вниз и, кроме того, функция $\Gamma'(p)$ строго возрастающая на интервале $(0, +\infty)$.

Из соотношений (3.1.2) и (3.1.3) вытекает равенство $\Gamma(2) = \Gamma(1)$. Тогда по теореме Ролля существует $\xi \in (1; 2)$: $\Gamma'(\xi) = 0$. В силу строгой монотонности производной $\Gamma'(p)$ точка $\xi$ единственная и, заодно, при $p < \xi$: $\Gamma'(p) < 0$, а при $p > \xi$: $\Gamma'(p) > 0$, Это значит, что на промежутке $(0; \xi)$ функция$\Gamma(p) > 0$ строго убывает, а на промежутке $(\xi, +\infty)$ — строго возрастает. Так что $\Gamma(\xi)$ наименьшее значение гамма функции.

Так как согласно формуле (3.1.3)

$$\Gamma(p) = \frac{\Gamma(p+1)}{p},$$

то $\Gamma(p) \to +\infty$ при $p \to +0$.

Пусть $n = [p]$ — целая часть числа $p$. Тогда на основании возрастания функции $\Gamma(p)$ и соотношения (3.1.5) будем иметь

$$\Gamma(p) \geqslant \Gamma(n) = (n-1)! \to +\infty \quad \text{при} \quad p \to +\infty.$$

Проведенное исследование позволяет построить эскиз графика гамма функции (см. рис. 2).

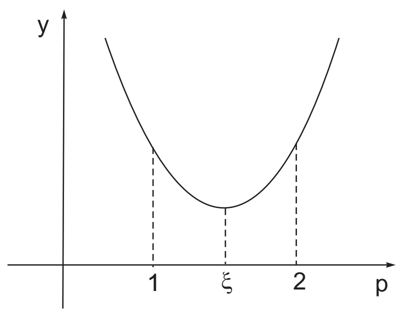



Рис. 2

### 3.3. Определение и простейшие свойства бета функции

Бета функцией называется функция двух переменных, заданных интегралом

$$B(p,q) = \int\limits_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx. \tag{3.3.8}$$

Найдем область сходимости данного интеграла. У него возможны две особые точки $x=0$ и $x=1$. Поэтому разобьем интеграл на два интеграла

$$B(p,q) = \left(\int\limits_0^{1/2} + \int\limits_{1/2}^1\right) x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx = I_1 + I_2.$$

Поскольку при $x \in \left(0; \frac{1}{2}\right]$ имеем оценку

$$x^{p-1}(1-x)^{q-1} = O\left(\frac{1}{x^{1-p}}\right) \quad \text{при} \quad x \to 0,$$

то интеграл $I_1$ сходится при любом $p > 0$. А при $x \in \left[\frac{1}{2}; 1\right)$ справедлива оценка

$$x^{p-1}(1-x)^{q-1} = O\left(\frac{1}{(1-x)^{1-q}}\right) \quad \text{при} \quad x \to 1.$$

Из нее вытекает сходимость интеграла $I_2$ для $q > 0$.

Итак, функция $B(p,q)$ определена на множестве $P = (0,+\infty)\times(0,+\infty)$. Исследуем теперь ее на непрерывность. Так как для $p \geqslant r > 0$, $q \geqslant r > 0$ и $x \in (0;1)$ выполнено неравенство

$$x^{p-1}(1-x)^{q-1} \leqslant x^{r-1}(1-x)^{r-1}$$

и интеграл $B(r,r)$ сходящийся, то согласно признака Вейерштрасса интеграл (3.3.8) равномерно сходится на указанном множестве. Следовательно, функция $B(p,q)$ непрерывна на множестве $P$.

Отметим еще два свойства бета функции.

I свойство (симметричность). Совершив в интеграле (3.3.8) подстановку $1-x=t$, получаем

$$B(p,q) = \int\limits_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx = \int\limits_0^1 (1-t)^{p-1}t^{q-1}dt = B(q,p).$$

В итоге имеем

$$B(p,q) = B(q,p), \tag{3.3.9}$$

т.е. в бета функции можно менять местами аргументы $p$ и $q$.

II свойство (формулы понижения аргументов). Если проинтегрировать интеграл $B(p,q+1) = \int\limits_0^1 x^{p-1}(1-x)^q\,dx$ по частям, полагая $u = (1-x)^q\,dx$, $dv = x^{p-1}\,dx$, то будем иметь

$$B(p,q+1) = \frac{x^p}{p}(1-x)^q\Big|_0^1 + \frac{q}{p}\int\limits_0^1 x^p(1-x)^{q-1}\,dx =$$

$$= \frac{q}{p}\int\limits_0^1 x^{p-1}(1-1+x)(1-x)^{q-1}dx = \frac{q}{p}B(p,q) - \frac{q}{p}B(p,q+1).$$

Отсюда

$$B(p,q+1) = \frac{q}{p+q}B(p,q) \tag{3.3.10}$$

и в силу (3.3.9)

$$B(p+1,q) = B(q,p+1) = \frac{p}{p+q}B(p,q). \tag{3.3.11}$$

Применяя последовательно полученные формулы (3.3.10) и (3.3.11), будем иметь формулу понижения сразу для обоих аргументов

$$B(p+1,q+1) = \frac{p}{p+q+1}B(p,q+1) = \frac{p}{p+q+1}\cdot\frac{q}{p+q}B(p,q).$$

Зафиксируем окончательный результат

$$B(p+1,q+1) = \frac{pq}{(p+q+1)(p+q)}B(p,q). \tag{3.3.12}$$

### 3.4. Связь между гамма и бета функциями

В этом пункте будет выведена замечательная формула, выражающая бета функцию $B(p,q)$ через гамма функцию $\Gamma(p)$.

Произведем в интеграле $B(p,q)$ подстановку

$$x = \frac{1}{1+t}, \quad 1-x = \frac{t}{1+t}, \quad dx = -\frac{dt}{(1+t)^2}.$$

Тогда

$$B(p,q) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{t^{q-1}}{(1+t)^{p+q}}dt = B(q,p) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{t^{p-1}}{(1+t)^{p+q}}dt. \tag{3.4.13}$$

В интеграле $\Gamma(p)$ сделаем замену переменной $x = ty$ $(t > 0)$, что дает нам

$$\Gamma(p) = \int_0^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}dx = \int_0^{+\infty} t^{p-1}y^{p-1}e^{-ty} = t^p \int_0^{+\infty} y^{p-1}e^{-ty}dy \tag{3.4.14}$$

и

$$\frac{\Gamma(p)}{t^p} = \int_0^{+\infty} y^{p-1}e^{-ty}dy. \tag{3.4.15}$$

Заменим далее в (3.4.15) $t$ на $1+t$ и $p$ на $p+q$:

$$\frac{\Gamma(p+q)}{(1+t)^p} = \int_0^{+\infty} y^{p+q-1}e^{-(1+t)y}dy \tag{3.4.16}$$

и умножим обе части равенства (3.4.16) на $t^{p-1}$, а затем проинтегрируем его по $t$ от 0 до $+\infty$:

$$\Gamma(p+q)\int_0^{+\infty} \frac{t^{p-1}}{(1+t)^{p+q}}dt = \int_0^{+\infty} t^{p-1}dt \int_0^{+\infty} y^{p+q-1}e^{-(1+t)y}dy. \tag{3.4.17}$$

Меняя далее в правой части порядок интегрирования и ссылаясь на (3.4.15) получаем соотношение

$$\Gamma(p+q)\cdot B(p,q) = \int_0^{+\infty} y^{p+q-1}e^{-y}\cdot\frac{\Gamma(p)}{y^p}dy = \Gamma(p)\int_0^{+\infty} y^{q-1}e^{-y}dy = \Gamma(p)\cdot\Gamma(y).$$

Значит

$$\Gamma(p+q)\cdot B(p,q) = \Gamma(p)\cdot\Gamma(q)$$

и

$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\cdot\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}. \tag{3.4.18}$$

Таким образом, замечательная формула, о которой говорилось выше, найдена. Это формула (3.4.18).

Остается обосновать законность перемены порядка интегрирования в (3.4.17). Воспользуемся для этого теоремой 2.8 о перестановке порядка интегрирования в повторном интеграле с бесконечными пределами интегрирования. Ограничимся на первых порах случаем $p > 1$, $q > 1$.

Займемся проверкой условий указанной теоремы. Подинтегральная функция $f(t,y) = t^{p-1}y^{p+q-1}e^{-(1+t)y}$ при $p > 1$ очевидным образом неотрицательна и непрерывна на множестве $[0,+\infty)\times[0,+\infty)$. В силу (3.4.16) функция

$$I(t)=\int\limits_0^{+\infty} t^{p-1}y^{p+q-1}e^{-(1+t)y}dy=\frac{\Gamma(p+q)}{(1+t)^{p+q}}t^{p-1}$$

непрерывна на множестве значений $t\in[0,+\infty)$ при $p>1$. На основании соотношения (3.4.15) функция $K(y)$ представима в виде

$$K(y)=\int\limits_0^{+\infty} t^{p-1}y^{p+q-1}e^{-(1+t)y}dt=y^{p+q-1}e^{-y}\int\limits_0^{+\infty} t^{p-1}e^{-ty}dt=$$

$$=y^{p+q-1}e^{-y}\cdot\frac{\Gamma(p)}{y^p}=\Gamma)p)y^{q-1}e^{-y}.$$

Так что функция $K(y)$ непрерывна при $q>1$ на множестве значений $y\in[0,+\infty)$. Таким образом справедливость теоремы 2.8 показана.

В общем случае $p>0$, $q>0$ применяем к $B(p+1,q+1)$ формулы (3.4.18) и (3.1.3) и получаем цепочку равенств

$$B(p+1,q+1)=\frac{\Gamma(p+1)\cdot\Gamma(q+1)}{\Gamma(p+q+2)}=\frac{p\Gamma(p)\cdot q\Gamma(q)}{(p+q+1)(p+q)\Gamma(p+q)}=$$

$$=\frac{pq\Gamma(p)\cdot\Gamma(q)}{(p+q+1)(p+q)\Gamma(p+q)}.$$

Сравнивая этот результат с соотношением (3.3.12), приходим к формуле (3.4.18)[4].

### 3.5. Формула дополнения

Рассмотрим $B(p,1-p)$ для значений $0<p<1$:

$$B(p,1-p)=\int\limits_0^1 x^{p-1}(1-x)^{-p}\,dx.$$

После подстановки $x=\dfrac{z}{1+z}$, $1-x=\dfrac{1}{1+z}$, $dx=\dfrac{dz}{(1+z)^2}$ данный интеграл приводится к виду

$$B(p,1-p)=\int\limits_0^{+\infty}\frac{z^{p-1}(1+z)^p}{(1+z)^{p-1}}\cdot\frac{dz}{(1+z)^2}=\int\limits_0^{+\infty}\frac{z^{p-1}}{1+z}dz.$$

Последний интеграл уже вычислен в пункте 2.5. Он равен $\dfrac{\pi}{\sin p\pi}$. Значит,

$$B(p,1-p)=\frac{\pi}{\sin p\pi}.$$

[4]Приведенное доказательство формулы (3.4.18) принадлежит Якоби.

Выразив теперь левую часть с помощью формулы (3.4.18) через гамму функцию, имеем

$$B(p, 1-p) = \Gamma(p, 1-p) = \frac{\pi}{\sin p\pi}.$$

Итак, мы пришли к формуле

$$\Gamma(p, 1-p) = \frac{\pi}{\sin p\pi}, \tag{3.5.19}$$

которая называется формулой дополнения[5].

Если положить в ней $p = \frac{1}{2}$, то снова получим уже известное значение $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

### 3.6. Применение гамма и бета функций к вычислению интегралов

Рассмотрим интегралы

$$I_{p,q} = \int\limits_0^{\pi/2} \sin^p x \cdot \cos^q x \, dx. \tag{3.6.20}$$

После подстановки $\sin^2 x = t$, $2 \sin x \cos x \, dx = dt$ данный интеграл приводится к виду

$$I_{p,q} = \frac{1}{2} \int\limits_0^1 t^{\frac{p-1}{2}} (1-t)^{\frac{q-1}{2}} = \frac{1}{2} B\left(\frac{p+1}{2}, \frac{q+1}{2}\right).$$

С помощью формулы (3.4.18) интеграл $I_{p,q}$ можно выразить через гамма функцию

$$I_{p,q} = \frac{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{q+1}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{p+q+2}{2}\right)}. \tag{3.6.21}$$

В частном случае, когда $p = m$, $q = 0$ имеем

$$I_m = \int\limits_0^{\pi/2} \sin^m x \, dx = \frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{m+2}{2}\right)}. \tag{3.6.22}$$

Если $m = 2n$, то отсюда следует

$$I_{2n} = \frac{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2\Gamma(n+1)} = \frac{\left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{3}{2}\right) \ldots \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2n!} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$$

или, после несложных упрощений,

$$I_{2n} = \frac{(2n-1)!!}{2^n \cdot n!} \cdot \frac{\pi}{2}. \tag{3.6.23}$$

[5] Формула дополнения установлена Эйлером.

В случае нечетного значения $m = 2n+1$ получаем, что

$$I_{2n+1} = \frac{\Gamma\left(n+1\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2\Gamma\left(\dfrac{n+3}{2}\right)} = \frac{n!\cdot\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2\left(n+\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{1}{2}\right)\ldots\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{2^n\cdot n!}{(2n+1)!!}.$$

В итоге имеем

$$I_{2n+1} = \frac{(2n)!!}{(2n+1)}. \tag{3.6.24}$$

## 3.7. Формула Валлиса

Если проинтегрировать по отрезку $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ очевидное неравенство

$$\sin^{2n+1} x \leqslant \sin^{2n} x \leqslant \sin^{2n-1} x,$$

то получим соотношение $I_{2n+1} < I_{2n} < I_{2n-1}$. Подставим в него найденные в предыдущем пункте значения этих интегралов:

$$\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} < \frac{(2n-)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{\pi}{2} < \frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!}.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{[(2n)!!]^2}{(2n+1)!!(2n-1)!!} < \frac{\pi}{2} < \frac{(2n-2)!!\cdot(2n)!!}{[(2n-1)!!]^2}$$

или, после несложной перегруппировки сомножителей

$$\left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2\frac{1}{2n+1} < \frac{\pi}{2} < \left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2\cdot\frac{1}{2n}.$$

Тогда, при $n\to\infty$, имеем:

$$0 < \left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2\frac{1}{2n} - \frac{\pi}{2} < \left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2\cdot\frac{1}{2n} - \left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2\cdot\frac{1}{2n+1} =$$
$$= \left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2\left(\frac{1}{2n}-\frac{1}{2n+1}\right) = \left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]\frac{1}{2n+1}\cdot\frac{1}{2n} < \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2n}\to 0.$$

Это означает, что

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2\cdot\frac{1}{2n}$$

или

$$\pi = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2\cdot\frac{1}{n} \tag{3.7.25}$$

или еще иначе

$$\sqrt{\pi} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}. \tag{3.7.26}$$

Формула (3.7.25) называется формулой Валлиса. Учитывая, что $(2n)!! = 2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots (2n) = 2^n \cdot n!$, ее можно представить еще и в форме

$$\sqrt{\pi} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{2n} \cdot (n!)^2}{(2n)! \cdot \sqrt{n}}. \tag{3.7.27}$$

Замечание. Формула Валлиса кроме приложений интересна и тем, что выражает число $\pi$ через натуральные числа.

### 3.8. Формула Стирлинга

Рассмотрим график функции $y = \ln x$ и обозначим через $S_n$ площадь, лежащую под этим графиком на отрезке от 1 до $n$. Она равна

$$S_n = \int\limits_1^n \ln x\, dx = x \ln x|_1^n - \int\limits_1^n dx = n \ln n - n + 1.$$

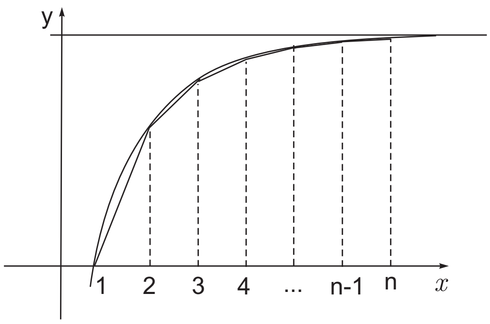



Рис. 3

Впишем в данную кривую ломаную с вершинами в точках $(k, \ln k)$, где $k = 1, 2, \ldots, n$ и вычислим площадь $T_n$ ступенчатой фигуры, ограниченной построенной ломаной, отрезком $[1; n]$ оси $Ox$ и ординатой $x = n$. Указанная ступенчатая фигура составлена из трапеций и поэтому

$$T_n = \frac{1}{2}\ln 2 + \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n-1}\bigl[\ln k + \ln(k+1)\bigr] = \sum_{k=2}^{n-1} \ln k + \frac{1}{2}\ln n = \sum_{k=2}^{n} \ln k - \frac{1}{2}\ln n = \ln(n)! - \frac{1}{2}\ln n.$$

Так как график логарифмической функции строго выпуклая вверх кривая, то $S_n > T_n$. Введем последовательность $a_n = S_n - T_n > 0$ и подставим в нее получен-

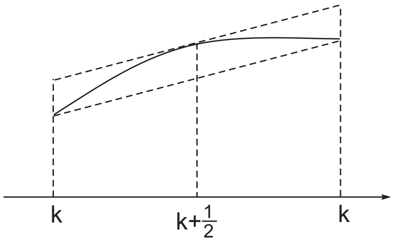



Рис. 4

ные выше значения $S_n$ и $T_n$. Тогда получим, что

$$a_n = n \ln n - n + 1 - \ln n! + \frac{1}{2} \ln n. \tag{3.8.28}$$

Выразим из этого равенства сначала $\ln n!$, а затем $n!$:

$$\ln n! = 1 - a_n + \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln n, \quad n! = \alpha_n n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}, \tag{3.8.29}$$

где $\alpha_n = e^{1-a_n}$. Покажем, что последовательность $a_n$ имеет конечный предел. В силу возрастания последовательности $a_n$ для этого достаточно доказать ее ограниченность. Очевидно, что $a_n$ выражает площадь фигуры. заключенной между ломаной и графиком функции $y = \ln x$. Заметим еще, что

$$a_n = \sum_{k=1}^{n-1} (a_{k+1} - a_k). \tag{3.8.30}$$

Для оценки слагаемого $a_{k+1} - a_k$ данной суммы проведем в точке $\left(k + \frac{1}{2}; \ln\left(k + \frac{1}{2}\right)\right)$ касательную к графику функции $y = \ln x$. В силу строгой выпуклости вверх данной кривой фигура, ограниченная хордой, касательной и ординатами $x = k$, $x = k + 1$, содержит в себе фигуру, ограниченную хордой и графиком (см. рис. 4). Поскольку площадь последней фигуры как раз и выражается величиной $a_{k+1} - a_k$, а ордината $x = k + \frac{1}{2}$ является средней линией трапеции, ограниченной сверху касательной, то имеем

$$a_{k+1} - a_k < \ln\left(k + \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}\left[\ln(k+1) + \ln k\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\ln\left(k + \frac{1}{2}\right) - \ln k\right] - \frac{1}{2}\left[\ln(k+1) - \ln\left(k + \frac{1}{2}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{2} \ln \frac{k + \frac{1}{2}}{k} - \frac{1}{2} \ln \frac{k+1}{k + \frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \ln\left(1 + \frac{1}{2k}\right) - \frac{1}{2} \ln\left(1 + \frac{1}{2k+1}\right) <$$

$$< \frac{1}{2} \ln\left(1 + \frac{1}{2k}\right) - \frac{1}{2} \ln\left(1 + \frac{1}{2(k+1)}\right).$$

Подводим итог:

$$a_{k+1} - a_k < \frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{1}{2k}\right) - \frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{1}{2(k+1)}\right).$$

Тогда на основании равенства (3.8.30) заключаем, что

$$a_n < \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}\left[\ln\left(1+\frac{1}{2k}\right) - \ln\left(1+\frac{1}{2(k+1)}\right)\right] = \frac{1}{2}\left[\ln\frac{3}{2} - \ln\left(1+\frac{1}{2n}\right)\right] < \frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}.$$

Отсюда следует. что у последовательности $a_n$ есть конечный предел $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a > 0$. Значит и последовательность $\alpha_n = e^{1-a_n}$ также имеет конечный предел $\alpha = \lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n = e^{1-a} > 0$. Равенство (3.8.29) может быть представлено теперь в виде

$$n! = \alpha_n n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}. \tag{3.8.31}$$

Из этого равенства вытекает соотношение

$$\alpha = \lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}}. \tag{3.8.32}$$

Чтобы найти $\alpha$, подставим значение (3.8.31) для $n!$ в формулу Валлиса в форме (3.7.27). Тогда имеем

$$\sqrt{\pi} = \lim_{n\to\infty}\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{2^{2n}\alpha_n^2 n^{2n+1}e^{-2n}}{\alpha_{2n}(2n)^{2n+\frac{1}{2}}e^{-2n}\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\alpha_n^2}{\alpha_{2n}\sqrt{2}} = \frac{\alpha^2}{\alpha\sqrt{2}} = \frac{\alpha}{\sqrt{2}}.$$

Отсюда заключаем: $\alpha = \sqrt{2\pi}$.

Подставляя, наконец, найденное значение $\alpha$ в (3.8.32), получаем соотношения

$$\sqrt{2\pi} = \lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}}$$

и

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{\sqrt{2\pi}n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}} = 1. \tag{3.8.33}$$

Формула (3.8.33) называется формулой Стирлинга. Она означает, что

$$n! \sim \sqrt{2\pi}n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}.$$

Кроме большого теоретического значения, формула Стирлинга очень полезна для приближенного вычисления $n!$ при больших значениях $n$. Так, при $n = 10$ формула Стирлинга дает $10! \approx 3\,598\,696$ с относительной погрешностью меньшей одного процента.

# Глава 2

## Двойные интегралы

В интегральном исчислении функций многих переменных переход от случая размерности $n = 1$ к размерности $n = 2$ более принципиален, чем переход к размерности $n > 2$. Выход с числовой прямой на координатную плоскость несоизмеримо увеличивает разнообразие множеств, а, следовательно, и объектов интегрирования. Появляются кривые, а затем и поверхности, что приводит к новым типам интегралов, в которых значительно возрастает роль понятия ориентации.

Изучение кратных интегралов сразу с общего $n$-мерного случая значительно технически усложняет изложение. Поэтому предпочтительнее выглядит вариант с отдельным рассмотрением двумерного случая, т.к. он позволяет сделать изложение наглядным, более кратким и понятным, сохраняя все принципиальные особенности кратных интегралов, и лишь затем перейти к общему случаю.

### § 1. Измеримые плоские множества

#### 1.1. Понятие площади и измеримого множества

В математическом анализе мы сталкиваемся с площадью в приложениях определенного интеграла. Там в основе построения теории лежит понятие площади криволинейной трапеции. Изучение двойных интегралов требует расширения класса измеримых множеств, а значит обобщения данного понятия.

Многоугольной областью[1] или, короче, многоугольником, мы будем называть конечную часть плоскости, ограниченную одной или несколькими замкнутыми ломаными.

[1]Термин «область» имеет двоякий смысл. Во-первых, область — это открытое связное множество; во-вторых, область — синоним термина «множество» (область определения функции, область интегрирования и др.).

Допускаются «дыры», «разрезы», «проколы» и даже несвязность. Так что одна или несколько ломаных могут находиться как внутри, так и вне другой ломаной (см. рис. 1).

Считается, что понятие площади многоугольной области хорошо известно и изучено в средней школе.

Возьмем теперь произвольное ограниченное множество точек $G$ на плоскости. Его границу $\partial G$ можно считать составленной из одной или нескольких замкнутых кривых. Множество $G$ не обязано быть связным. Многоугольник, содержащийся в $G$, мы будем называть *вписанным в* $G$, а многоугольник, содержащий $G$, *описанным.* Если у множества имеются внутренние точки (в частности, если $G$ открытое множество), то вписанные в $G$ многоугольники обязаны существовать.

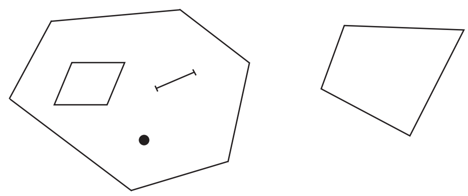


Рис. 1

Пусть $A$ — произвольный вписанный, а $B$ — произвольный описанный многоугольник и числа $mA$, $mB$ — соответственно их площади. Тогда

$$A \subset B \quad \text{и} \quad mA \leqslant mB.$$

Следовательно, множество чисел $\{mA\}$ ограничено сверху любым числом $mB$. Отсюда вытекает, что существует конечный $\sup\limits_{A\subset G}\{mA\} = m_*G$ и при любом $mB$ справедливо неравенство

$$m_*G \leqslant mB.$$

Значит, множество площадей $\{mB\}$ ограничено сизу числом $m_*G$, существует конечный $\inf\limits_{B\supset G}\{mB\} = m^*G$ и выполнено неравенство

$$0 \leqslant m_*G \leqslant m^*G. \tag{1.1.1}$$

Числовые величины $m_*G$ и $m^*G$ соответственно называются внутренней площадью или нижней мерой Жордана, и внешней площадью или верхней мерой Жордана множества $G$. В случае, когда множество $\{mA\}$ оказывается пустым, то внутренняя площадь считается равной нулю.

**Определение.** Если

$$m_*G = m^*G = mG, \tag{1.1.2}$$

то множество $G$ называется измеримым по Жордану, а число $mG$ называется площадью, или мерой Жордана множества $G$.

Конечно, неравенство (1.1.1) не всегда обязано превращаться в равенство (1.1.2), т.е. не всякое ограниченное множество измеримо по Жордану.

**Теорема 1.1.** *Для того чтобы ограниченное множество $G$ было измеримым, необходимо и достаточно, чтобы для каждого $\varepsilon > 0$ нашлись такие многоугольники $A$ и $B$, что*

$$mB - mA < \varepsilon.$$

*Необходимость.* Если множество $G$ измеримо, то имеем

$$\sup_{A\subset G}\{mA\} = \inf_{B\supset G}\{mB\} = mG.$$

Поэтому для

$$\forall\varepsilon > 0, \exists A \text{ и } B : mA > mG - \frac{\varepsilon}{2} \text{ и } mB < mG + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Значит,

$$mB - mA < mG + \frac{\varepsilon}{2} - \left(mG - \frac{\varepsilon}{2}\right) = \varepsilon.$$

*Достаточность.* Пусть для

$$\forall\varepsilon > 0, \exists A \text{ и } B : mB - mA < \varepsilon.$$

Так как

$$mA \leqslant m_*G \leqslant m^*G \leqslant mB,$$

то

$$0 \leqslant m^*G - m_*G \leqslant mB - mA < \varepsilon$$

для любого $\varepsilon > 0$. Отсюда следует, что $m^*G - m_*G = 0$ и $m^*G = m_*G$. Теорема доказана.

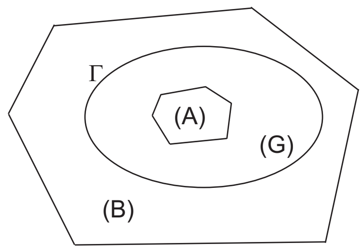



Рис. 2

Множество $B \setminus A = C$ образует многоугольную область, содержащую границу $\Gamma$ множества $G$ (см. рис. 2). Следовательно, теорема может быть записана в такой форме.

**Теорема 1.1′.** *Для того чтобы ограниченное множество $G$ было измеримым по Жордану, необходимо и достаточно, чтобы для каждого $\varepsilon > 0$ существовала многоугольная область $C$, содержащая границу $\Gamma$ множества $G$, с площадью $mC < \varepsilon$.*

Заметим, что утверждение $0 \leqslant m_*G \leqslant m^*G = mG = 0$ равносильно утверждению $m^*G = 0$.

Отсюда немедленно следует, что всякое подмножество $G_1$ множества $G$ с нулевой мерой само есть множество меры нуль, т.к. $m^*G_1 \leqslant m^*G = 0$.

Кроме того, теорема может быть представлена еще и в следующем виде.

**Теорема 1.1″.** *Для того чтобы ограниченное множество $G$ было измеримым, необходимо и достаточно, чтобы граница $\Gamma$ множества $G$ имела нулевую площадь.*

Доказательство. Утверждение теоремы вытекает из того, что равенство $m^*\Gamma = 0$ равносильно высказыванию для $\forall\varepsilon > 0, \exists B \supset \Gamma : mB < \varepsilon$.

Можно дать и другое доказательство. Легко видеть, что

$$\inf_{B\supset G}\{mB\} - \sup_{A\subset G}\{mA\} = \inf\{mB - mA\} = \inf\{m(B - A)\}$$

или иначе $m^*G - m_*G = m^*\Gamma$.

Измеримость множества $G$ означает, что $m^*G - m_*G = m^*\Gamma = 0$.

### 1.2. Простейшие измеримые множества

**Теорема 1.2.** *Если кривая $\Gamma$ задана уравнением $y = f(x)$, где $f(x)$ функция непрерывная на отрезке $a \leqslant x \leqslant b$, или уравнением $x = g(y)$, где $g(y)$ функция непрерывная на отрезке $c \leqslant y \leqslant d$, то $m\Gamma = 0$.*

Доказательство. Для определенности ограничимся сначала случаем, когда кривая задана уравнением $y = f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$. Разобьем отрезок $[a, b]$ точками

$$(T) : a = x_0 < x_1 < \ldots < x_i < x_{i+1} < \ldots < x_n = b$$

на элементарные отрезки $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$. Обозначим через $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ — длину отрезка $[x_i, x_{i+1}]$. Пусть $m_i = \inf\limits_{[x_i, x_{i+1}]} f(x)$, $M_i = \sup\limits_{[x_i, x_{i+1}]} f(x)$ и $\omega_i = M_i - m_i$. Величина $\omega_i$ есть колебание функции $f(x)$ на $[x_i, x_{i+1}]$. В силу непрерывности функции $f(x)$ все величины $m_i, M_i, \omega_i$ существуют и конечны. Прямоугольники $[x_i, x_{i+1}] \times [m_i, M_i]$ составляют ступенчатую многоугольную область $C$, содержащую кривую $\Gamma$ (см. рис. 3). Площадь данной ступенчатой фигуры равна

$$mC = \sum_{i=0}^{n-1} (M_i - m_i)(x_{i+1} - x_i) = \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_i.$$

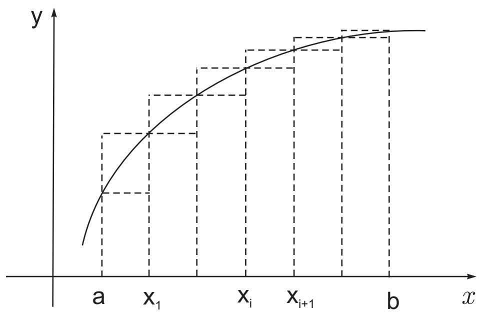



Рис. 3

По теореме Кантора о равномерной непрерывности функции на компакте для

$$\forall \varepsilon > 0, \exists T, \forall i : \omega_i < \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Тогда

$$mC = \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_i < \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{i=0}^{n-1} \Delta x_i = \varepsilon$$

и кривая $\Gamma$ согласно теореме $1.1'$ имеет нулевую площадь.

Случай кривой $x = g(y)$, $c \leqslant y \leqslant d$ рассматривается аналогично. Теорема доказана.

Кривая $\Gamma$, о которой идет речь в данной теореме, будет называться простой дугой. Кривую, составленную из конечного числа непересекающихся простых дуг будем называть простой кривой.

Простая кривая очевидным образом, так же как и простая дуга, имеет нулевую площадь. Следовательно, ограниченное множество, граница которого есть простая кривая, измеримо.

**Теорема 1.3.** *Всякая спрямляемая кривая имеет нулевую площадь.*

Доказательство. Пусть $AB$ — некоторая спрямляемая кривая и $\mathfrak{L}$ ее длина. Разобьем кривую $AB$ точками

$$A = P_0, P_1, \dots, P_i, P_{i+1}, \dots, P_n = B$$

на $n$ равных по длине элементарных дуг $P_iP_{i+1}$ $(i = 0, 1, \dots, n-1)$. Построим с центром $P_i$ квадрат $K_i$ со стороной $\frac{2L}{n}$. Нетрудно показать, что квадрат $K_i$ содержит дугу $P_iP_{i+1}$. В самом деле, если бы некая точка $M$ дуги $P_iP_{i+1}$ оказалась бы вне квадрата $K_i$, то длина хорды $P_iM$ (расстояние от точки $M$ до точки $P_i$) было бы больше $\frac{L}{n}$. Тогда бы и длина дуги $P_iP_{i+1}$ была бы больше $\frac{L}{n}$, что противоречит ее построению. Таким образом, многоугольник $C$, являющийся объединением всех квадратов $K_i$, содержит кривую $AB$. Оценим площадь указанного многоугольника:

$$mC = m\left(\bigcup_{i=0}^{n-1} K_i\right) \leqslant \sum_{i=0}^{n-1} mK_i = n\left(\frac{2L}{n}\right)^2 = \frac{4L^2}{n} \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Следовательно, площадь многоугольника $C$ может быть сделана меньше любого наперед заданного числа $\varepsilon > 0$. Значит, кривая $AB$ имеет нулевую площадь и теорема доказана.

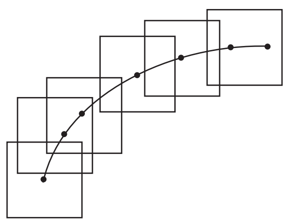


Рис. 4

**Следствие.** *Если граница ограниченного множества $C$ может быть представлена как объединение конечного числа попарно непересекающихся спрямляемых дуг, то множество $G$ измеримо.*

Доказательство. Так как спрямляемые дуги, составляющие границу, имеют нулевую площадь, то и вся граница есть множество нулевой площади. На основании теоремы 1.1″ делаем вывод, что множество $G$ измеримо.

### 1.3. Свойства измеримых множеств

**Лемма.** *Граничная точка любого из множеств $G_1 \cup G_2$, $G_1 \cap G_2$ и $G_1 \setminus G_2$ будет граничной хотя бы для одного из множеств $G_1$ или $G_2$*[2].

Доказательство. Рассуждаем от противного. Если точка $M$ не является граничной ни для одного из множеств $G_1$ или $G_2$, то возможны лишь следующие варианты:

а) $M$ — внутренняя точка для обоих множеств $G_1$ и $G_2$;

б) $M$ — внешняя точка как для так $G_1$, так и для $G_2$;

в) $M$ — внутренняя точка для $G_1$ и внешняя для $G_2$;

г) $M$ — внешняя точка для $G_1$ и внутренняя для $G_2$.

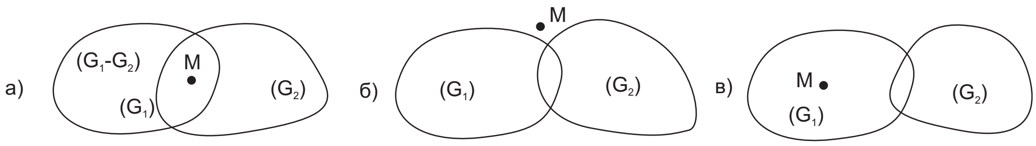



Рис. 5

В случае а) существует общая окрестность точки $M$, принадлежащая обоим множествам $G_1$ и $G_2$. Поэтому точка $M$ внутренняя для множеств $G_1 \cup G_2$ и $G_1 \cap G_2$ и внешняя для множества $G_1 \setminus G_2$.

В случае б) существует общая окрестность точки $M$, не содержащая ни одной точки как множества $G_1$, так и множества $G_2$. Так что точка $M$ внешняя для всех трех множеств $G_1 \cup G_2$, $G_1 \cap G_2$ и $G_1 \setminus G_2$.

В случае в) существует общая окрестность точки $M$, содержащаяся в $G_1$, но не содержащая ни одной точки множества $G_2$. В итоге точка $M$ оказывается внутренней для множеств $G_1 \cup G_2$ и $G_1 \setminus G_2$ и внешней для множества $G_1 \cap G_2$.

Случай г) симметричен случаю в).

Во всех вариантах мы приходим к противоречию с условием леммы, что и доказывает ее.

[2]Определения граничной, внутренней и внешней точки множества даны в первой части.

**Следствие.** *Пусть $G$ одно из множеств $G_1 \cup G_2$, $G_1 \cap G_2$ или $G_1 \setminus G_2$. Тогда*

$$\partial G \subset \partial G_1 \cup \partial G_2.$$

**Теорема 1.4.** *Если множества $G_1$ и $G_2$ измеримы, то измеримо и каждое из множеств $G_1 \cup G_2$, $G_1 \cap G_2$ и $G_1 \setminus G_2$.*

Доказательство. Из измеримости множеств $G_1$ и $G_2$ следует, что границы этих множеств имеют нулевую площадь. Тогда в силу следствия леммы границы всех трех множеств $G_1 \cup G_2$, $G_1 \cap G_2$, $G_1 \setminus G_2$ тоже имеют нулевую площадь.

Теорема доказана.

Терему 1.4 можно существенно дополнить.

**Теорема 1.5.** *Пусть $G_1$ и $G_2$ какие-то измеримые множества. Тогда:* 1) *если множества $G_1$ и $G_2$ не имеют общих внутренних точек, то*

$$m\,(G_1 \cup G_2) = mG_1 + mG_2; \tag{1.3.3}$$

2) *При условии, что $G_2 \subset G_1$*

$$m\,(G_1 \setminus G_2) = mG_1 - mG_2. \tag{1.3.4}$$

Доказательство. Измеримость всех рассматриваемых множеств уже известна. Докажем сначала равенство (1.3.3). На основании теоремы 1.1 для

$$\forall \varepsilon > 0, \exists A_1, A_2, B_1, B_2 : mB_1 - mA_1 < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{и} \quad mB_2 - mA_2 < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Пусть $G = G_1 \cup G_2$. Так как $A_1$ и $A_2$ — многоугольники, вписанные соответственно в $G_1$ и $G_2$, а $B_1$ и $B_2$ — многоугольники, описанные соответственно около множеств $G_1$ и $G_2$, то многоугольник $A = A_1 \cup A_2$ вписанный в $G$, причем $A_1$ и $A_2$ не имеют общих внутренних точек, а многоугольник $B = B_1 \cup B_2$ описанный около $G$, причем многоугольники $B_1$ и $B_2$ могут налегать друг на друга. Это значит, что

$$mA = m(A_1 \cup A_2) = mA_1 + mA_2 \quad \text{и} \quad mB = m(B_1 \cup B_2) \leqslant mB_1 + mB_2.$$

Кроме того, имеем

$$mA_1 + mA_2 = mA \leqslant mG \leqslant mB \leqslant mB_1 + mB_2,$$

$$mA_1 + mA_2 \leqslant mG_1 + mG_2 \leqslant mB_1 + mB_2.$$

Значит,

$$|mG - (mG_1 + mG_2)| \leqslant mB_1 + mB_2 - (mA_1 + mA_2) =$$

$$= mB_1 - mA_1 + mB_2 - mA_2 < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

В силу произвольности $\varepsilon > 0$ отсюда вытекает, что $mG - (mG_1 + mG_2) = 0$ и равенство (1.3.3) доказано.

Для доказательства соотношения (1.3.4) используем представление

$$G_1 = G_2 \cup (G_1 \setminus G_2),$$

в котором множества $G_2$ и $G_1 \setminus G_2$ не имеют общих точек. Отсюда следует равенство

$$mG_1 = mG_2 + m(G_1 \setminus G_2), \tag{1.3.5}$$

равнозначное требуемому соотношению (1.3.4).

**Следствие.** *Если $G_2 \subset G_1$ и множества $G_1$ и $G_2$ измеримы, то*

$$mG_2 \leqslant mG_1.$$

Следствие показывает, что с расширением множества его площадь возрастает. Поэтому данное свойство называется свойством монотонности площади.

Отметим еще одно важное обстоятельство. Равенство (1.3.3) означает, что площадь является аддитивной функцией множества.

### 1.4. Площадь и предел

**Теорема 1.6.** *Для того, чтобы ограниченное множество $G$ было измеримым и имело площадь, равную $P$, необходимо и достаточно, чтобы существовали такие две последовательности многоугольников $\{A_n\}$ и $\{B_n\}$, соответственно, содержащихся в $G$ и содержащих $G$, площади которых имели бы общий предел*

$$\lim_{n\to\infty} mA_n = \lim_{n\to\infty} mB_n = P. \tag{1.4.6}$$

*Необходимость.* Измеримость множества $G$ означает, что

$$\sup\{mA\} = \inf\{mB\} = mG = P.$$

Тогда для

$$\begin{gathered}\forall\varepsilon = \frac{1}{n}, \exists n \in \mathbb{N} : mG - \frac{1}{n} < mA_n \leqslant mG \quad \text{и} \\ mG \leqslant mB_n < mG + \frac{1}{n}.\end{gathered} \tag{1.4.7}$$

Придавая значения $n = 1, 2, 3, \ldots$, получаем две последовательности многоугольников $A_n \subset G$ и $B_n \supset G$, площади которых в силу неравенств (1.4.7) имеют общий предел

$$\lim_{n\to\infty} mA_n = \lim_{n\to\infty} mB_n = mG = P.$$

*Достаточность.* Пусть существуют последовательности многоугольников $A_n \subset G$ и $B_n \supset G$, площади которых имеют общий предел

$$\lim_{n\to\infty} mA_n = \lim_{n\to\infty} mB_n = P.$$

Так как $m_*G = \sup\limits_{A\subset G}\{mA\}$ и $m^*G = \inf\limits_{B\supset G}\{mB\}$, то

$$mA_n \leqslant m_*G \leqslant m^*G \leqslant mB_n.$$

Переходя к пределу в этом неравенстве, получаем

$$m_*G = m^*G = P.$$

Теорема доказана.

Иногда удобнее вместо многоугольников использовать другие измеримые множества.

**Теорема 1.7.** *Если для ограниченного множества $G$ можно указать последовательности измеримых множеств $A_n \subset G$ и $B \supset G$, площади которых имеют общий предел*

$$\lim_{n\to\infty} mA_n = \lim_{n\to\infty} mB_n = P,$$

*то множество $G$ измеримо, причем общий предел $P$ и будет площадью множества $G$.*

Доказательство. Согласно определению площади для множества $A_n$ при любом $\varepsilon > 0$ найдется вписанный в $A_n$ многоугольник $A'$, при котором $mA_n - \varepsilon < mA' \leqslant mA_n$.

В частности, для $\varepsilon = \frac{1}{n}$ найдется многоугольник $A'_n \subset A_n$, для которого выполнено неравенство

$$mA_n - \frac{1}{n} < mA'_n \leqslant mA_n. \tag{1.4.8}$$

Аналогично можно построить последовательность многоугольников $B'_n \supset B_n$, для которых имеем неравенство

$$mB_n \leqslant mB'_n < mB_n + \frac{1}{n}. \tag{1.4.9}$$

Из (1.4.8) и (1.4.9) следует

$$\lim_{n\to\infty} mA'_n = \lim_{n\to\infty} mA_n = P \quad \text{и} \quad \lim_{n\to\infty} mB'_n = \lim_{n\to\infty} mB_n = P.$$

На основании теоремы 1.6 делаем вывод: множество $G$ измеримо и число $P$ есть его площадь. Теорема доказана.

### 1.5. Выражение площади определенным интегралом

В данном пункте будет установлено, что выражение площади определенным интегралом согласуется с выражение площади через предел, найденный в пункте 1.4. Другими словами, понятие площади криволинейной трапеции, используемое в приложениях определенного интеграла, согласуется с определением площади множества, рассмотренным в этом параграфе.

Пусть нам дана криволинейная трапеция, ограниченная линиями $y = f(x)$, где $f(x)$ непрерывная неотрицательная функция, $y = 0$, $x = a$ и $x = b$. Граница этого множества $G$ состоит из четырех простых дуг. Значит, множество $G$ измеримо. Остается установить, что площадь множества $G$ есть определенный интеграл от функции $f(x)$, т.е.

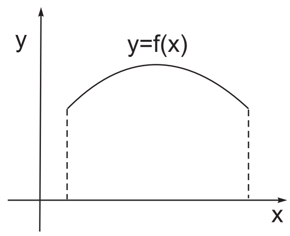



Рис. 6

$$mG = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Возьмем произвольное разбиение $(T)$ отрезка $[a, b]$ точками

$$(T) : a = x_0 < x_1 < \ldots < x_i < x_{i+1} < \ldots < x_n = b$$

на элементарные части $[x_i, x_{i+1}]$.

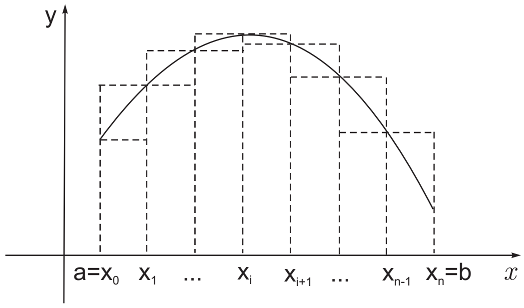



Рис. 7

Обозначим через $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ — длину $i$-ой элементарной части и через $\lambda = \max\{\Delta x_i\}$. Обозначим еще через $m_i = \inf\limits_{[x_i, x_{i+1}]} f(x)$ и $M_i = \sup\limits_{[x_i, x_{i+1}]} f(x)$. Строим ступенчатую фигуру, составленную из прямоугольников с основанием $[x_i, x_{i+1}]$ и высотой, равной $m_i$ (см. рис. 7). Указанная фигура будет вписанным в $G$ многоугольником с площадью $s = \sum\limits_{i=0}^{n-1} m_i \Delta x$, в которой мы легко узнаём нижнюю сумму Дарбу функции $f(x)$ для данного разбиения $(T)$.

Строим далее вторую ступенчатую фигуру, составленную из прямоугольников с теми же основаниями $[x_i, x_{i+1}]$, но с высотой $M_i$. Эта фигура представляет собой описанный многоугольник с площадью

$$S = \sum_{i=0}^{n-1} M_i \Delta x,$$

в которой легко узнается верхняя сумма Дарбу функции $f(x)$ на взятом разбиении $(T)$. В силу построения

$$s \leqslant mG \leqslant S.$$

Известно, что для непрерывной функции у сумм Дарбу существует общий предел

$$\lim_{\lambda \to 0} s = \lim_{\lambda \to 0} S = \int\limits_a^b f(x)\, dx.$$

Выбрав какую-то последовательность разбиений $\{T_n\}$ с $\lambda \to 0$, мы получаем две последовательности многоугольников $A_n \subset G$ и $B_n \supset G$, площади которых имеют общий предел, равный $\int\limits_a^b f(x)\, dx$ Тогда по теореме 1.6 этот предел будет площадью множества $G$, т.е.

$$mG = \int\limits_a^b f(x)\, dx.$$

## § 2. Понятие двойного интеграла

### 2.1. Задача об объеме цилиндрического бруса

При переходе к изучению какого-нибудь нового важного понятия мы стараемся показать, что оно в озникает не на пустом месте, а порождается какими-то практическими задачами. Так теория определенного интеграла предваряется обычно задачей о площади криволинейной трапеции. В двумерном случае, к которому мы переходим, естественным аналогом криволинейной трапеции является цилиндрический брус.

Рассмотрим в трехмерном пространстве тело, ограниченное сверху поверхностью $z = f(x, y)$, с боков некоторой цилиндрической поверхностью с образующей параллельной координатной оси $Oz$, а снизу плоской фигурой $G$, лежащей в координатной плоскости $xOy$, т.е. данное тело есть множество точек $(x, y, z)$, где $(x, y) \in G$ и $0 \leqslant z \leqslant f(x, y)$. Такое тело мы и называем цилиндрическим брусом. Потребуем, чтобы множество $G$ было измеримым, а функция $f(x, y)$ непрерывной на замкнутом множестве $G$. Ставится задача определить объем указанного тела.

Для ее решения прибегнем к стандартному приему интегрального исчисления. Разобьем область $G$ сетью кривых $(T)$ нулевой площади на элементарные ячейки $G_i$ $(i = 1, \ldots, n)$. Так как граница каждой ячейки имеет нулевую площадь, то все ячейки являются измеримыми множествами, т.е. обладают какой-то площадью $\Delta G_i$. Будем включать в ячейку ее границу. Введем числовые величины $d_i = \sup\limits_{A,B \in G_i} \rho(A, B)$, где $A$ и $B$ любые точки ячейки $G_i$ и $\lambda = \max\limits_i \{d_i\}$.

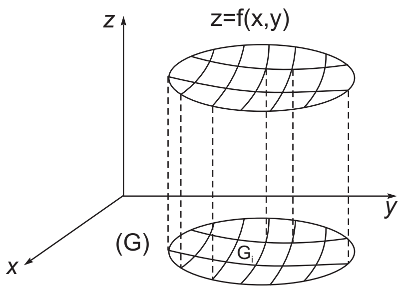



Рис. 8

Назовем их соответственно диаметром ячейки $G_i$ и мелкостью разбиения $(T)$.

Возьмем в каждой ячейке $G_i$ произвольную точку $(\xi_i, \eta_i)$ и составим цилиндрические столбики с образующей параллельной оси $Oz$, основанием $G_i$ и высотой $f(\xi_i, \eta_i)$. Указанные столбики (см. рис. 8) образуют ступенчатое цилиндрическое тело с объемом

$$\mathfrak{S} = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i) \Delta G_i. \tag{2.1.1}$$

Интуитивно ясно, что чем мельче будет разбиение множества $G$ на ячейки, тем точнее указанная сумма (2.1.1) будет выражать объем рассматриваемого тела. Поэтому естественно дать следующее определение объема цилиндрического бруса.

**Определение.** Конечный предел

$$V = \lim_{\lambda \to 0} \mathfrak{S}$$

называется объемом цилиндрического бруса.

Возможен еще один подход к понятию объема цилиндрического бруса. Брать вместо цилиндрических столбиков с выстой $f(\xi_i, \eta_i)$ цилиндрические столбики с теми же основаниями $G_i$ и высотами $m_i = \inf\limits_{G_i} f(x, y)$ или $M_i = \sup\limits_{G_i} f(x, y)$ соответственно. Тогда мы получим два ступенчатых тела. Одно вписанное в цилиндрический брус, а другое, описанное около него, с объемами, равными соответственно

$$s_T = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta G_i \quad \text{и} \quad S_T = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta G_i.$$

**Определение.** Общий предел

$$V = \lim_{\lambda \to 0} s_T = \lim_{\lambda \to 0} S_T$$

называется объемом цилиндрического бруса.

Так как в силу непрерывности функции $f(x, y)$ точные грани $m_i$ и $M_i$ достигаются ею, то объемы $s_T$ и $S_T$ являются частными случаями объемов $\mathfrak{S}$. Тогда из очевидного неравенства

$$s_T \leqslant \mathfrak{S} \leqslant S_T,$$

справедливого для данного разбиения $(T)$ следует, что оба определения цилиндрического бруса равносильны.

### 2.2. Определение двойного интеграла

Пусть на измеримом множестве $C$ задана функция двух переменных $f(x, y)$. Разобьем множество $G$ сетью кривых нулевой площади на $n$ частей $G_i$ $(= 1, 2, \ldots, n)$, которые будем называть элементарными частями.

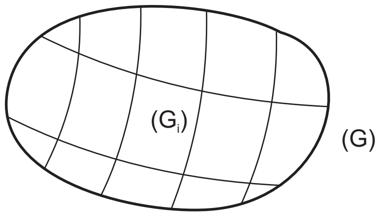



Рис. 9

На разбиение $(T)$, составленное из элементарных частей $G_i$, наложим следующие ограничения:

1°. Каждая точка множества $G$ принадлежит хотя бы одной части $G_i$, т.е.

$$G = \bigcup_{i=1}^{n} G_i;$$

2°. Границы частей $G_i$ состоят из конечного числа линий разбиения, что гарантирует измеримость всех частей $G_i$. Площадь элементарной части $G_i$ обозначается символом $\Delta G_i$[3];

3°. Предполагается наличие у всех частей $G_i$ внутренних точек. Значит, $\Delta G_i > 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$;

4°. Элементарные части $G_i$ попарно не имеют общих внутренних точек. Тогда по свойству аддитивности площади имеем

$$mG = \sum_{i=1}^{n} mG_i.$$

Примером подобного разбиения может служить разбиение области (открытого связного множества) сетью координатных линий, т.е. прямых, параллельных координатным осям $Ox$ и $Oy$ (см. рис. 3). При таком разбиении элементарные части, полностью лежащие внутри множества $G$, являются прямоугольниками.

[3]По аналогии с определением интеграла по отрезку в интегральных суммах для обозначения меры элементарной части будем употреблять символ $\Delta$.

Как и в предыдущем пункте, вводим числовые величины $d_i = \sup\limits_{A,B\in G_i} \rho(A,B)$ — диаметр $G_i$ и $\lambda(T) = \max\limits_i \{d_i\}$. Величина $\lambda$ характеризует мелкость разбиения $(T)$.

Возьмем в каждой элементарной части $G_i$ произвольную точку $(\xi_i, \eta_i)$ и составим сумму

$$\mathfrak{S} = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i) \Delta G_i,$$

которая зависит от взятого разбиения $(T)$ и выбранных точек $(\xi_i, \eta_i)$. Сумма $\mathfrak{S}$ называется двумерной интегральной суммой, или просто интегральной суммой. Разбиение $(T)$ вместе с выбранными точками $(\xi_i, \eta_i)$ называется отмеченным разбиением.

Обычное определение предела неприменимо к интегральным суммам. Поэтому дадим отдельное определение данному пределу.

**Определение.** Число $I$ называется пределом интегральной суммы $\mathfrak{S}$ при $\lambda \to 0$ (записывается $\lim\limits_{\lambda\to 0} \mathfrak{S} = I$), если для каждого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для всех отмеченных разбиений с $\lambda < \delta$ выполнено неравенство

$$|\mathfrak{S} - I| < \varepsilon.$$

В таком случае функция $f(x, y)$ называется интегрируемой по области $G$, а сам предел $I$ называется двойным интегралом Римана функции $f(x, y)$ по области $G$. Обозначение

$$I = \iint\limits_G f(x, y)\, dx\, dy$$

(читается двойной интеграл по области $G$ от $f(x, y)\, dx\, dy$).

Замечание. Определение предела интегральных сумм можно рассматривать как определение предела по некоторой базе.

Отметим теперь, что решение задачи об объеме цилиндрического бруса можно записать в виде

$$V = \iint\limits_G f(x, y)\, dx\, dy, \tag{2.2.2}$$

где $z = f(x, y)$ — аппликата точки поверхности, ограничивающей сверху цилиндрический брус. Таким образом, геометрический двойной интеграл есть объем.

Сделаем ряд замечаний.

1. Все указанные выше требования к разбиению области будут всегда предполагаться и далее, даже если они не оговариваются.

2. Из данного определения двойного интеграла видно, что в нем рассматривается лишь случай, когда $mG > 0$, т.к. у множества $G$ предполагается наличие внутренних точек. Случай, когда $mG = 0$ практически тривиален, ибо тогда мера всех $G_i$ равна нулю и все интегральные суммы $\mathfrak{S} = 0$, а значит и их предел $\iint\limits_G f(x, y)\,dx\,dy = 0$.

3. Наряду с обозначением $\iint\limits_G f(x, y)\,dx\,dy$ в математической литературе для двойного интеграла часто употребляется обозначение $\iint\limits_G f(x, y)\,dG$, где под $dG$ подразумевается элемент площади области $G$.

### 2.3. Необходимое условие интегрируемости функции

**Теорема 2.1.** *Если функция $f(x, y)$ интегрируема в области $G$, то она ограничена в этой области.*

Доказательство. Предположим противное: функция $f(x, y)$ интегрируема в области $G$ и не ограничена на $G$. Тогда при любом разбиении $(T)$ найдутся элементарные части, в которых функция $f(x, y)$ не ограничена и за счет выбора точек $(\xi_i, \eta_i)$ интегральная сумма $\mathfrak{S}$ может быть сделана сколь угодно большой. В таком случае интегральная сумма не может иметь конечный предел, что противоречит условию. Теорема доказана.

Отсюда вывод: интегрируемость функции невозможна без ее ограниченности. Поэтому имеет смысл рассматривать далее только ограниченные функции.

## § 3. Суммы Дарбу и их свойства

Пусть на измеримом множестве $G$ задана ограниченная функция $f(x, y)$. Разобьем множество $G$ сетью кривых $(T)$ нулевой площади на элементарные части $G_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, которые попарно не имеют общих внутренних точек. Составим для данного разбиения суммы

$$s_T = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta G_i \quad \text{и} \quad S_T = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta G_i,$$

где $m_i = \inf\limits_{G_i} f(x,y)$, $M_i = \sup\limits_{G_i} f(x,y)$ и $\Delta G_i$ — площадь элементарной части $Gi$. Суммы $s_T$ и $S_T$ называются соответственно нижней и верхней суммами Дарбу. Эти суммы оказываются более удобными при исследовании условий интегрируемости функции чем интегральные суммы, т.к. они зависят только от разбиения. Данному разбиению отвечает только одна нижняя и только одна верхняя суммы Дарбу, в то время как имеется бесконечное множество интегральных сумм.

Рассмотрим свойства сумм Дарбу.

I свойство. Для данного способа разбиения

$$s_T = \inf\{\mathfrak{S}\}, \quad S_T = \sup\{\mathfrak{S}\}. \tag{3.0.1}$$

Доказательство.

Во-первых, ввиду неравенства $m_i \leqslant f(\xi_i, \eta_i) \leqslant M_i$ (i=1,2,...,n) имеем

$$s_T \leqslant \mathfrak{S} \leqslant S_T.$$

Во-вторых, для каждого $\varepsilon > 0$ найдется точка $(\xi_i^*, \eta_i^*) \in G_i$ такая, что $f(\xi_i^*, \eta_i^*) > M_i - \frac{\varepsilon}{mG}$. Тогда

$$\mathfrak{S}^* = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i^*, \eta_i^*)\Delta G_i > \sum_{i=1}^{n} \left(M_i - \frac{\varepsilon}{mG}\right)\Delta G_i = $$
$$= \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta G_i - \frac{\varepsilon}{mG}\sum_{i=1}^{n} \Delta G_i = S_T - \varepsilon.$$

Таким образом, выполнены оба свойства точной верхней грани и требуемое для суммы $S_T$ утверждение доказано. Для суммы $s_T$ рассуждение аналогично.

II свойство. При добавлении новых линий деления верхняя сумма Дарбу не увеличивается, а нижняя сумма Дарбу не уменьшается.

Доказательство. Пусть нам дано некоторое разбиение $(T)$. Добавление новых линий деления дает новое разбиение $(T')$ которое будет называться продолжением разбиения $(T)$. Требуется показать, что

$$S_{T'} \leqslant S_T \quad \text{и} \quad s_{T'} \leqslant s_T.$$

Для доказательства достаточно ограничиться случаем, когда какая-то одна элементарная часть $G_p$ разбиения $(T)$ разделена на две части $G_p'$ и $G_p''$ без общих внутренних точек. Так что $\Delta G_p = \Delta G'_p + \Delta G''_p$. Обозначим через $M'_p = \sup\limits_{G'_p} f(x, y)$ и $M''_p = \sup\limits_{G''_p} f(x, y)$. В верхней сумме Дарбу вместо одного слагаемого $M_p \Delta G_p$ появляются два слагаемых $M'_p \Delta G'_p$ и $M''_p \Delta G''_p$. Остальные слагаемые суммы $S_T$ без изменения переходят в сумму $S_{T'}$. Так как $M'_p \leqslant M_p$ и $M''_p \leqslant M_p$, то имеем

$$M'_p \Delta G'_p + M''_p \Delta G''_p \leqslant M_p \Delta G'_p + M_p \Delta G''_p = M_p \Delta G_p.$$

Следовательно,

$$S_T - S_{T'} = M_p \Delta G_p - (M'_p \Delta G'_p + M''_p \Delta G''_p) \geqslant 0$$

и для верхних сумм Дарбу свойство доказано. Случай нижних сумм Дарбу разбирается аналогично.

III свойство. Ни одна нижняя сумма Дарбу не превышает ни одной верхней суммы Дарбу, даже если они отвечают разным способам разбиения.

Доказательство. Для одного и того же разбиения $(T)$ данное свойство уже фигурировало ранее. Если же $(T')$ и $(T'')$ два разных разбиения, то объединяем их сети кривых деления в единую сеть. Полученное таким образом новое разбиение может рассматриваться и как продолжение разбиения $(T')$ и как продолжение разбиения $(T'')$. Тогда на основании II свойства заключаем, что

$$s_{T'} \leqslant s_T \leqslant S_T \leqslant S_{T''},$$

и все доказано.

Из III свойства сумм Дарбу следуют важные выводы. Оно означает, что каждая верхняя сумма Дарбу является верхней гранью множества $\{s_T\}$ — нижних сумм Дарбу. Тогда у множества$\{s_T\}$ существует конечная точная верхняя грань — $\sup\limits_T \{s_T\} = \underline{I}$, причем $\underline{I} \leqslant S_T$ для любой верхней суммы Дарбу. Таким образом, множество $\{S_T\}$ оказывается ограниченным снизу числом $\underline{I}$ и у него существует конечная точная нижняя грань: $\inf\limits_T \{S_T\} = \overline{I}$, причем точные грани связаны неравенством $\underline{I} \leqslant \overline{I}$. Отсюда получается более широкое неравенство

$$s_T \leqslant \underline{I} \leqslant \overline{I} \leqslant S_T, \tag{3.0.2}$$

где $s_T$ — любая нижняя сумма Дарбу, а $S_T$ — любая верхняя сумма Дарбу.

Числа $\underline{I}$ и $\overline{I}$ определены для каждой ограниченной в области функции $f(x,y)$. Они называются соответственно нижним и верхним интегралами функции $f(x,y)$ по области $G$.

**Теорема Дарбу.** *Для всякой ограниченной в области $G$ функции $f(x,y)$ справедливы утверждения*

$$\lim_{\lambda\to 0} s_T = \underline{I}, \quad \lim_{\lambda\to 0} S_T = \overline{I}. \tag{3.0.3}$$

Доказательство. Рассмотрим сначала верхние суммы Дарбу для случая $f(x,y) \geqslant 0$. Так как $\overline{I} = \inf\limits_T \{S_T\}$, то по свойству точной нижней грани для каждого $\varepsilon > 0$ найдется разбиение $(T')$ области $G$ на элементарны части: $G = \bigcup\limits_{k=1}^{p} G'_k$, для которого

$$S_{T'} < \overline{I} + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Берем далее произвольное разбиение $(T)$. Элементарные части $G_i$ этого разбиения распределяем на две группы. В первую группу включим $G_i$, содержащиеся целиком внутри какого-то $G'_k$. Во вторую группу определим все остальные элементарные части, т.е. $G_i$, содержащие точки сети разбиения $(T)$. Сумма $S_T$ также соответственным образом распадается на две составляющие суммы

$$S_T = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta G_1 = \sum\nolimits_1 + \sum\nolimits_2.$$

Слагаемые $M_i \Delta G_i$ из первой суммы, отвечающие элементарным частям $G_i$, входящим в какое-то одно $G'_k$, дают следующий взнос в сумму $\sum_1$:

$$\sum_{G_i \subset G'_k} M_i \Delta G_i \leqslant M'_k \sum_{G_i \subset G'_k} \Delta G_i \leqslant M'_k \Delta G'_k.$$

Поэтому для всей суммы $\sum_1$ имеем оценку

$$\sum_1 M_i \Delta G_i \leqslant \sum_{k=1}^{p} M'_k \Delta G'_k = S_{T'} < \overline{I} + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Так как сеть разбиения $(T)$ имеет нулевую площадь, то для $\forall \varepsilon > 0$ найдется открытый многоугольник $C$, содержащий сеть $(T)$, с площадью $mC < \frac{\varepsilon}{2M}$, где $M = \sup\limits_G f(x,y) > 0$. Пусть $\delta_1 > 0$ — расстояние между границей многоугольника $C$ и множеством точек сети $(T)$ и пусть $\delta = \min\left\{\delta_1, \frac{\varepsilon}{2M}\right\}$. Потребуем от разбиения $(T)$ условия $\lambda < \delta$. Тогда элементарные части $G_i$ ,входящие во вторую группу, будут целиком находиться в многоугольнике $C$. Значит, сумма их площадей $\sum_2 \Delta G_i \leqslant mC < \frac{\varepsilon}{2M}$. Вследствие этого получаем оценку

$$\sum\nolimits_2 M_i \Delta G_i \leqslant M \sum\nolimits_2 \Delta G_i < M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

В итоге имеем

$$S_T = \sum\nolimits_1 + \sum\nolimits_2 < \overline{I} + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \overline{I} + \varepsilon.$$

Итак, при $\lambda < \delta$ справедливо неравенство

$$\overline{I} \leqslant S'_T < \overline{I} + \varepsilon,$$

что равносильно предельному равенству

$$\lim_{\lambda \to 0} \mathfrak{S} = \overline{I}.$$

Пусть теперь $f(x, y)$ произвольная ограниченная функция и $M = \sup\limits_G |f(x, y)|$. Строим вспомогательную функцию $\varphi(x, y) = f(x, y) + M \geqslant 0$. Для нее теорема уже доказана. Следовательно,

$$\lim_{\lambda \to 0} S_T(\varphi) = \overline{I}(\varphi) = \inf_T \{S_T(\varphi)\}. \tag{3.0.4}$$

Поскольку

$$S_T(\varphi) = \sum_{i=1}^{n} M_i(\varphi) \Delta G_i = \sum_{i=1}^{n} [M_i(f) + M] \Delta G_i = S_T(f) + M \cdot mG,$$

то равенство (3.0.4) примет вид

$$\lim_{\lambda \to 0} \left[S_T(f) + M \cdot mG\right] = \inf_T \{S_T(f) + M \cdot mG\}.$$

Откуда получаем, что

$$\lim_{\lambda \to 0} S_T(f) = \inf_T \{S_T(f)\}$$

или, что то же самое,

$$\lim_{\lambda \to 0} S_T(f) = \overline{I}(f).$$

Чтобы получить утверждение теоремы относительно нижних сумм Дарбу, применим уже доказанную ее часть к функции $(-f)$. Это дает нам соотношение

$$\lim_{\lambda\to 0} S_T(-f) = \overline{I}(-f) = \inf_T\{S_T(-f)\}. \tag{3.0.5}$$

Известно, что $M_i(-f) = -m_i(f)$. Тогда

$$S_T(-f) = \sum_{i=1}^{n} M_i(-f)\Delta G_i = -\sum_{i=1}^{n} m_i\Delta G_i = -s_T(f)$$

и равенство (3.0.5) примет вид

$$\lim_{\lambda\to 0}\big[-s_T(f)\big] = \inf_T\{-s_T(f)\} = -\sup_T\{s_T(f)\}$$

или окончательно

$$\lim_{\lambda\to 0} s_T(f) = \sup_T\{s_T(f)\} = \underline{I}(f).$$

Теорема полностью доказана.

## § 4. Критерий интегрируемости функции

Установим критерий интегрируемости функции, т.е. укажем условие, необходимое и достаточное для интегрируемости функции.

**Теорема 4.1.** *Для того, чтобы ограниченная функция $f(x,y)$ была интегрируемой на множестве $G$ и чтобы $\iint\limits_G f\,dx\,dy = I$, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\underline{I} = \overline{I} = I. \tag{4.0.1}$$

*Необходимость.* Пусть функция $f(x,y)$ интегрируема на множестве $G$ и $\iint\limits_G f dxdy{=}I$. Тогда на основании определения двойного интеграла для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое число $\delta > 0$, что для каждого отмеченного разбиения с $\lambda < \delta$ выполняется двойное неравенство

$$I - \frac{\varepsilon}{2} < \mathfrak{S} < I + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Взяв конкретное отмеченное разбиение $(T)$ с $\lambda < \delta$, имеем: суммы Дарбу $s_T$ и $S_T$ являются точными гранями множества $\{\mathfrak{S}\}$, а числа $I - \frac{\varepsilon}{2}$ и $I + \frac{\varepsilon}{2}$ просто грани данного множества. Поэтому справедливо неравенство

$$I - \frac{\varepsilon}{2} \leqslant s_T \leqslant S_T \leqslant I + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Если учесть еще и неравенство (3.0.2), то получаем

$$I - \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \underline{I} \leqslant \overline{I} \leqslant I + \frac{\varepsilon}{2}.$$

А это возможно лишь тогда, когда

$$\underline{I} = \overline{I} = I.$$

*Достаточность.* Если $\underline{I} = \overline{I} = I$, то согласно теореме Дарбу $\lim\limits_{\lambda\to 0} s_T = \lim\limits_{\lambda\to 0} S_T = I$. Следовательно, для

$$\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0, \forall T : \lambda < \delta \Rightarrow I - \varepsilon < s_T \leqslant S_T < I + \varepsilon.$$

Помимо этого для конкретного разбиения имеем неравенство

$$s_T \leqslant \mathfrak{S} \leqslant S_T.$$

Тогда для каждого отмеченного разбиения $(T)$ с $\lambda < \delta$ выполняется утверждение

$$I - \varepsilon < \mathfrak{S} < I + \varepsilon.$$

Значит, $\lim\limits_{\lambda\to 0} \mathfrak{S} = I$. Теорема доказана.

Полученный критерий можно представить в разных формах. На основании теоремы Дарбу равенство $\underline{I} = \overline{I}$ можно записать в виде

$$\lim_{\lambda\to 0}(S_T - s_T) = 0. \tag{4.0.2}$$

Учитывая определение сумм Дарбу, имеем

$$S_T - s_T = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta G_i - \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta G_i = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)\Delta G_i = \sum_{i=1}^{n} \omega_i \Delta G_i, \tag{4.0.3}$$

где $\omega_i = M_i - m_i$ есть колебание функции $f(x, y)$ на элементарной части $G_i$. Поэтому равенство (4.0.2) представляется следующим образом:

$$\lim_{\lambda\to 0} \sum_{i=1}^{n} \omega_i \Delta G_i = 0. \tag{4.0.4}$$

Расшифруем теперь утверждения (4.0.2) и (4.0.4) согласно определения предела на языке $\varepsilon, \delta$:

$$\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0, \forall T : \lambda < \delta \Rightarrow S_T - s_T = \sum_{i=1}^{n} \omega_i \Delta G_i < \varepsilon. \tag{4.0.5}$$

Наконец, вспомнив что числа $\underline{I}$ и $\overline{I}$ являются точными гранями, получаем еще одно видоизменение критерия (4.0.1):

$$\overline{I} - \underline{I} = \inf_T \{S_T\} - \sup_T \{s_T\} = \inf_T \{S_T - s_T\} = 0. \tag{4.0.6}$$

Учитывая, что при любом разбиении $S_T - s_T \geqslant 0$, равенство нулю точной нижней грани в соотношении (4.0.6) характеризуется условием

$$\forall \varepsilon > 0, \exists T : S_T - s_T < \varepsilon. \tag{4.0.7}$$

Форма критерия (4.0.7) является, очевидно, более гибкой и удобной для использования, чем форма (4.0.5).

## § 5. Классы интегрируемых функций

Критерий интегрируемости позволяет установить интегрируемость ряда важных классов функций.

**Теорема 5.1.** *Всякая функция $f(x, y)$ непрерывная в замкнутой области $\overline{G}$ интегрируема на этом множестве.*

Доказательство. В силу компактности множества $\overline{G}$ функция $f(x, y)$ равномерно непрерывна на данном множестве. Значит, каково бы ни было число $\varepsilon > 0$, для него найдется такое $\delta > 0$, что для каждого разбиения $(T)$ с $\lambda < \delta$ во всех элементарных частях $G_i$ колебание $\omega_i$ функции $f(x, y)$ будет меньше $\frac{\varepsilon}{mG}$. Тогда

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i \Delta G_i < \frac{\varepsilon}{mG} \sum_{i=1}^{n} \Delta G_i = \varepsilon$$

и выполнен критерий интегрируемости в форме (4.0.5). Теорема доказана.

Следующее предложение охватывает более широкий класс функций.

**Теорема 5.2.** *Пусть функция $f(x, y)$ определена в замкнутой области $\overline{G}$. Если множество точек разрыва функции $f(x, y)$ имеет нулевую площадь, то данная функция интегрируема на множестве $\overline{G}$.*

Доказательство. Обозначим множество точек разрыва функции через $Q$. Так как множество $Q$ нулевой площади, то для любого $\varepsilon > 0$ можно указать открытый многоугольник $C$, содержащий $Q$, с площадью $mC < \frac{\varepsilon}{2\omega}$, где $\omega = \sup\limits_G f(x,y) - \inf\limits_G f(x,y) > 0$[4] есть колебание функции $f(x,y)$ на множестве $\overline{G}$. Так что на замкнутом множестве $G' = G - C$ функция $f(x,y)$ непрерывна и, как уже показано ранее, интегрируема. Тогда в силу критерия интегрируемости в форме (4.0.7) найдется разбиение $(T')$ множества $G'$, при котором $S_{T'} - s_{T'} < \frac{\varepsilon}{2}$. Возьмем также какое-то разбиение $(T'')$ множества $C$. Объединение разбиений $(T')$ и $(T'')$ дает некоторое разбиение $(T)$ множества $\overline{G}$. Рассмотрим для указанного разбиения $(T)$ разность $S_T - s_T$. Она состоит из двух частей

$$S_T - s_T = (S_{T'} - s_{T'}) + (S_{T''} - s_{T''}).$$

Первое слагаемое по построению меньше $\frac{\varepsilon}{2}$, а второе слагаемое оценим следующим образом:

$$S_{T''} - s_{T''} = \sum\nolimits'' \omega_i \Delta G_i \leqslant \omega \sum\nolimits'' \Delta G_i = \omega \cdot mC < \omega \cdot \frac{\varepsilon}{2\omega} = \frac{\varepsilon}{2}$$

(двойной штрих над знаком $\sum$ показывает, что данная сумма распространяется только на $G_i$, входящие в разбиение $(T'')$). Таким образом, нашлось разбиение $(T)$ множества $\overline{G}$, для которого $S_T - s_T < \varepsilon$ и согласно критерия интегрируемости в форме (4.0.7) функция $f(x,y)$ интегрируема на множестве $\overline{G}$.

Теорема доказана.

## § 6. Свойства двойного интеграла

В одномерном случае областью интегрирования служит отрезок, иметь дело с которым намного проще, нежели с гораздо большим разнообразием областей интегрирования в многомерном случае. Тем не менее свойства двойного интеграла и их доказательства аналогичны свойствам и доказательствам для определенного интеграла. Поэтому нередко мы будем ограничиваться лишь формулировкой свойства, предоставляя читателю его доказательство. Отметим, что значение двойного интеграла зависит как от подинтегральной функции, так и от взятой области интегрирования. Таким образом, двойной интеграл является отображением, зависящим от двух аргументов: $\iint\limits_G f\,dG = I(f,G)$. Так что и свойства двойного интеграла распределяются на две

[4] Очевидно, что $\omega = 0$ только тогда, когда $f(x,y) = \text{const}$.

группы: свойства относительно подинтегральной функции и свойства относительно области интегрирования. Поэтому неудивительно, что у нас представлены два свойства аддитивности: одно — аддитивность по аргументу $f$, другое — аддитивность по области интегрирования $G$.

1°. Если $G$ — измеримое множество, то $\iint\limits_G dG = mG$.

2°. Пусть функции $f(x,y)$ и $g(x,y)$ интегрируемы на множестве $G$. Тогда функция $f+g$ также интегрируема на $G$ и справедливо равенство

$$\iint\limits_G (f+g)\,dG = \iint\limits_G f\,dG + \iint\limits_G g\,dG.$$

Данное свойство означает, что двойной интеграл аддитивен относительно подинтегральной функции.

3°. Если функция $f(x,y)$ интегрируема на множестве $G$ и $\lambda$ — некоторое число, то функция $\lambda f$ также интегрируема на $G$ и выполняется равенство

$$\iint\limits_G (\lambda f)\,dG = \lambda \iint\limits_G f\,dG. \tag{6.0.1}$$

Коротко: постоянный множитель можно вынести из под знака интеграла.

Из (6.0.1), в частности, вытекает

$$\iint\limits_G (-f)\,dG = -\iint\limits_G f\,dG.$$

Отсюда

$$\iint\limits_G (f-g)\,dG = \iint\limits_G f\,dG - \iint\limits_G g\,dG.$$

Свойства $1°, 2°, 3°$ доказываются рассмотрением интегральных сумм.

Свойства 2° и 3° объединяются в одно свойство — свойство линейности.

Если функции $f(x,y)$ и $g(x,y)$ интегрируемы на множестве $G$, а $\alpha$ и $\beta$ — какие-то числа, то линейная комбинация $\alpha f + \beta g$ интегрируема на $G$ и верно соотношение

$$\iint\limits_G (\alpha f + \beta g)\,dG = \alpha \iint\limits_G f\,dG + \beta \iint\limits_G g\,dG. \tag{6.0.2}$$

Короче: интеграл от линейной комбинации функций равен линейной комбинации интегралов от этих функций.

При $\alpha = \beta = 1$ имеем свойство 2°, а при $\alpha = \lambda$, $\beta = 0$ свойство 3°.

Методом математической индукции соотношение (6.0.2) легко обобщается на любую конечную линейную комбинацию:

$$\iint\limits_G \left(\sum_i \alpha_i f_i\right) dG = \sum_i \alpha_i \iint\limits_G f_i\, dG.$$

4°. Если функция $f(x, y)$ интегрируема на множестве $G$, то она интегрируема и на любом измеримом подмножестве множества $G$.

5°. Пусть измеримое множество $G$ разбито на два непустых непересекающихся измеримых множества $G'$ и $G''$: $G = G' \cup G''$. Если функция $f(x, y)$ интегрируема на $G$ ,то она интегрируема и на обоих множествах $G'$ и $G''$. Обратно, если функция $f(x, y)$ интегрируема на множествах $G'$ и $G''$, то она интегрируема и на множестве $G$. Кроме того, в обоих случаях имеет место равенство

$$\iint\limits_G f\, dG = \iint\limits_{G'} f\, dG' + \iint\limits_{G''} f\, dG''. \tag{6.0.3}$$

Доказательство. Если функция $f$ интегрируема на $G$, то ее интегрируемость на множествах $G'$ и $G''$ вытекает из свойства 4°. Пусть теперь функция $f$ интегрируема на множествах $G'$ и $G''$. На основании критерия интегрируемости в форме (4.0.7) для любого $\varepsilon > 0$ существует разбиение $(T')$ множества $G'$ и разбиение $(T'')$ множества $(T'')$ такое, что

$$\sum_{T'} \omega_i \Delta G_i < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{и} \quad \sum_{T''} \omega_i \Delta G_i < \frac{\varepsilon}{2}$$

Объединение разбиений $T'$ и $T''$ дает некоторое разбиение $(T)$ множества $G$. Так как множества $G'$ и $G''$ не пересекаются, то элементарные части разбиений $T'$ и $T''$ без изменения переходят в элементарные части разбиения $(T)$. Тогда

$$\sum_{T} \omega_i \Delta G_i = \sum_{T'} \omega_i \Delta G_i + \sum_{T''} \omega_i \Delta G_i < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

В силу того же критерия (4.0.7) делаем вывод, что функция $f$ интегрируема на множестве $G$ и первая часть свойства доказана.

Равенство (6.0.3) следует из представления

$$\mathfrak{S}(T) = \mathfrak{S}(T') + \mathfrak{S}(T''),$$

в котором все суммы являются интегральными для соответствующих областей $G, G', G''$ и имеют конечный предел при $\lambda \to 0$.

Полученное свойство выражает аддитивность двойного интеграла относительно области интегрирования. Если положить в нем $f(x,y) \equiv 1$, то придем к равенству

$$\iint\limits_{G} dG = \iint\limits_{G'} dG' + \iint\limits_{G''} dG''$$

или

$$mG = mG' + mG'',$$

которое выражает уже известную нам аддитивность площади.

Формула (6.0.3) легко распространяется методом математической индукции на случай, когда область $G$ является объединением любого конечного числа попарно непересекающихся подмножеств

Ряд последующих свойств дает возможность оценки двойных интегралов.

6°. Если функции $f(x,y)$ и $g(x,y)$ интегрируемы на множестве $G$ и на этом множестве $f(x,y) \leqslant g(x,y)$, то

$$\iint\limits_{G} f\,dG \leqslant \iint\limits_{G} g\,dG.$$

Данное свойство означает: можно интегрировать неравенство, если только существуют интегралы от обеих его частей.

**Следствие.** *Если функция $f(x,y)$ интегрируема на множестве $G$ и $f(x,y) \geqslant 0$ ($\leqslant 0$), то $\iint\limits_{G} f\,dG \geqslant 0$ ($\leqslant 0$).*

7°. Пусть функция $f(x,y)$ интегрируема на множестве $G$. Если на этом множестве выполнено неравенство $A \leqslant f(x,y) \leqslant B$, то справедлива оценка

$$AmG \leqslant \iint\limits_{G} f\,dG \leqslant BmG.$$

Для доказательства надо проинтегрировать неравенство $A \leqslant f(x,y) \leqslant B$ и применить свойство $1^\circ$.

$8^\circ$. Если функция $f(x,y)$ интегрируема на множестве $G$, то функция $|f(x,y)|$ также интегрируема на $G$ и выполняется неравенство

$$\left|\iint\limits_G f\,dG\right| \leqslant \iint\limits_G |f|\,dG.$$

**Следствие.** *Если функция $f(x,y)$ интегрируема на множестве $G$ и $|f(x,y)| \leqslant K$, то имеет место оценка*

$$\left|\iint\limits_G f\,dG\right| \leqslant K \cdot mG.$$

$9^\circ$. Пусть функция $f(x,y)$ интегрируема на множестве $G$ и $f(x,y) \geqslant 0$. Если $G'$ измеримое подмножество множества $G$, то

$$\iint\limits_{G'} f\,dG' \leqslant \iint\limits_G f\,dG.$$

Доказательство. Введем множество $G'' = G \setminus G'$. Как показано в теореме 1.4, множество $G''$ измеримо по Жордану. Кроме того, множества $G''$ и $G'$ непересекающиеся части множества $G$ и в силу свойства $4^\circ$ функция $f(x,y)$ интегрируема на этих частях. Тогда, ссылаясь на свойство $5^\circ$ и следствие свойства $8^\circ$, имеем

$$\iint\limits_G f\,dG = \iint\limits_{G'} f\,dG' + \iint\limits_{G''} f\,dG \geqslant \iint\limits_{G'} f\,dG'$$

и все доказано.

Данное свойство означает, что в случае неотрицательной подинтегральной функции сужение области интегрирования приводит к уменьшению значения двойного интеграла. Это в некотором роде монотонность по области интегрирования.

$10^\circ$. Рассмотрим на измеримом множестве $G$ ограниченную функцию $f(x,y)$ и возьмем произвольное отмеченное разбиение $(T)$ множества $G$ на элементарные части $G_i$. Распределим эти части на две группы: внутренние части, которые целиком находятся внутри $G$ и которые, следовательно, не содержат граничных точек множества $G$, и граничные части, которые содержат точки границы $\partial G$. Соответственно интегральная сумма $\mathfrak{S}$ разобьется на две суммы $\sum_1$ и $\sum_2$, составленные отдельно по внутренним частям и отдельно по граничным частям

$$\mathfrak{S} = \sum_i f(\xi_i, \eta_i)\Delta G_i = \left(\sum\nolimits_1 + \sum\nolimits_2\right) f(\xi_i, \eta_i)\Delta G_i.$$

Пусть $|f(x, y)| \leqslant K$. Так как граница $\partial G$ в силу измеримости множества $G$ имеет нулевую площадь, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется открытый многоугольник $C$, содержащий границу $\partial G$, с площадью $mC < \frac{\varepsilon}{K}$. Обозначим через $\delta_1 = \rho(\partial G, \partial C)$ расстояние между границами множеств $G$ и $C$ и через $\delta = \min\left\{\delta_1, \frac{\varepsilon}{K}\right\} > 0$. Потребуем теперь, чтобы взятое отмеченное разбиение $(T)$ удовлетворяло условию $\lambda < \delta$. Тогда все граничные элементарные части $G_i$ будут содержаться в многоугольнике $C$ и сумма их площадей $\sum_2 \Delta G_i \leqslant mC < \frac{\varepsilon}{K}$. В таком случае имеем оценку

$$\left|\sum\nolimits_2 f(\xi_i, \eta_i)\Delta G_i\right| \leqslant K \cdot \sum\nolimits_2 \Delta G_i < K \cdot \frac{\varepsilon}{K} = \varepsilon.$$

Другими словами, получаем, что

$$\lim_{\lambda\to 0} \sum\nolimits_2 f(\xi_i, \eta_i)\Delta G_i = 0.$$

Значит

$$\lim_{\lambda\to 0} \sum_i f(\xi_i, \eta_i)\Delta G_i = \lim_{\lambda\to 0} \sum\nolimits_1 f(\xi_i, \eta_i)\Delta G_i$$

и двойной интеграл может определяться двумя способами

$$\iint\limits_G f\,dG = \lim_{\lambda\to 0} \sum_i f(\xi_i, \eta_i)\Delta G_i = \lim_{\lambda\to 0} \sum\nolimits_1 f(\xi_i, \eta_i)\Delta G_i,$$

где сумма $\sum_1$ распространяется только на внутренние элементарные части.

Аналогичным рассуждением можно показать, что, изменив значения подинтегральной функции на каком-то измеримом подмножестве нулевой площади, сохраняя при этом ограниченность функции, мы не нарушим значение двойного интеграла. Иначе говоря, значения ограниченной функции на любом подмножестве нулевой меры не влияют на значение двойного интеграла.

Вышесказанное позволяет в теореме об интегрируемости непрерывной функции при условии ее ограниченности не требовать замкнутость области $G$.

11°. **Теорема о среднем значении.** *Пусть $\overline{G}$ — замкнутая измеримая область. Если функция $f(x,y)$ непрерывна на множестве $\overline{G}$, то существует такая точка $(\xi,\eta)\in\overline{G}$, что*

$$\iint\limits_{G} f(x,y)\,dG = f(\xi,\eta)mG.$$

Доказательство аналогично одномерному случаю.

## § 7. Вычисление двойных интегралов

Вычисление двойного интеграла осуществляется путем его представления в виде повторного интеграла, т.е. путем двух последовательных однократных интегрирований. Сначала рассматривается простейший случай, когда область интегрирования есть прямоугольник со сторонами, параллельными координатным осям. Лишь затем будет сделан переход к произвольной области интегрирования. Отметим еще, что понятие повторного интеграла уже введено в предыдущей главе.

### 7.1. Случай координатного прямоугольника

Пусть $P=[a,b]\times[c,d]=\{(x,y)\in\mathbb{R}: a\leqslant x\leqslant b,\ c\leqslant y\leqslant d\}$ — некоторый прямоугольник со сторонами, параллельными координатным осям. В отличие от произвольно расположенного прямоугольника будем называть его координатным прямоугольником. Иногда для краткости характеристика «координатный» будет просто опускаться.

**Теорема 7.1.** *Пусть на координатном прямоугольнике $P$ задана ограниченная функция $f(x,y)$ интегрируемая на множестве $P$ и для каждого $x\in[a,b]$ существует $\int\limits_c^d f(x,y)\,dy$, то существует повторный интеграл $\int\limits_a^b dx\int\limits_c^d f(x,y)\,dy$ и он равен двойному интегралу от функции $f(x,y)$ на прямоугольнике $P$:*

$$\iint\limits_{P} f(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_a^b dx\int\limits_c^d f(x,y)\,dy.$$

Доказательство. Разделим отрезки $[a,b]$ и $[c,d]$ точками $a=x_0<x_1<\ldots<x_i<x_{i+1}<\ldots<x_n=b$ и $c=y_0<y_1<\ldots<y_k<y_{k+1}<\ldots<y_l=d$ на частичные отрезки $[x_i,x_{i+1}]$ $(i=0,1,\ldots,n-1)$ и $[y_k,y_{k+1}]$ $(k=0,1,\ldots,l-1)$. Сеть

прямых $x = x_i$ $(i = 0, 1, \dots, n-1)$ и $y = y_k$ $(k = 0, 1, \dots, l-1)$ разобьет прямоугольник $P$ на элементарные части $P_{ik}$ $(i = 0, 1, \dots, n-1,\ k = 0, 1, \dots, l-1)$. Эти элементарные прямоугольники образуют какое-то разбиение $(T)$ множества $P$. Обозначим через $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$, $\Delta y_k = y_{k+1} - y_k$, $m_{ik} = \inf\limits_{P_{ik}} f(x, y)$, $M_{ik} = \sup\limits_{P_{ik}} f(x, y)$ и $I(x) = \int\limits_c^d f\,dy$.

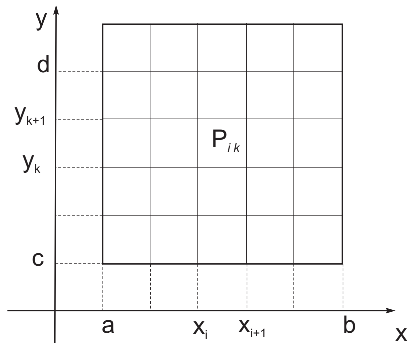



Рис. 10

Зафиксируем некоторое значение $i = 0, 1, \dots, n-1$ и возьмем какое-то $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$. Тогда для всех $y \in [c, d]$ и всех $k = 0, 1, \dots, l-1$ выполнено неравенство

$$m_{ik} \leqslant f(\xi_i, \eta_i) \leqslant M_{ik}.$$

Проинтегрировав его по отрезку $[y_k, y_{k+1}]$, имеем

$$m_{ik}\Delta y_k \leqslant \int\limits_{y_k}^{y_{k+1}} f(\xi_i, y)\,dy \leqslant M_{ik}\Delta y_k, \quad k = 0, 1, \dots, l-1.$$

Теперь, суммируя все эти неравенства по $k$ и умножая результат на $\Delta x_i$, получаем

$$\sum_{k=0}^{l-1} m_{ik}\Delta y_k \cdot \Delta x_i \leqslant \int\limits_c^d f(\xi_i, y)\,dy \cdot \Delta x_i \leqslant \sum_{k=0}^{l-1} M_{ik}\Delta y_k \cdot \Delta x_i$$

или, несколько иначе,

$$\sum_{k=0}^{l-1} m_{ik}\Delta y_k \cdot \Delta x_i \leqslant I(\xi_i)\Delta x_i \leqslant \sum_{k=0}^{l-1} M_{ik}\Delta y_k \cdot \Delta x_i.$$

Поскольку $i$ взято произвольно, то последнее неравенство можно просуммировать по всем значениям $i = 0, 1, \dots, n-1$, что дает соотношение

$$\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{l-1} m_{ik}\Delta x_i\Delta y_k \leqslant \sum_{i=0}^{n-1} I(\xi_i)\Delta x_i \leqslant \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{l-1} M_{ik}\Delta x_i\Delta y_k. \qquad (*)$$

Учитывая, что $\Delta x_i\Delta y_k$ есть площадь элементарной части $P_{ik}$ видим, что двойные суммы в соотношении $(*)$ являются суммами Дарбу функции $f(x, y)$, а $\sum\limits_{i=0}^{n-1} I(\xi_i)\Delta x_i$ есть интегральная сумма функции $I(x)$. Следовательно неравенство $(*)$ можно записать в виде

$$s_T \leqslant \mathfrak{S}(I) \leqslant S_T. \qquad (**)$$

В силу интегрируемости функции $f(x,y)$ на основании теоремы Дарбу имеем

$$\lim_{\lambda\to 0} s_T = \lim_{\lambda\to 0} S_T = \iint\limits_P f\,dx\,dy.$$

Тогда из неравенства $(**)$ можно сделать вывод

$$\int\limits_a^b I(x)\,dx = \lim_{\lambda\to 0}\mathfrak{S}(I) = \iint\limits_P f\,dx\,dy,$$

что и доказывает теорему.

Сразу же заметим, что в силу равноправия переменных $x$ и $y$ их можно поменять ролями. Тогда получаем следующее предложение.

**Теорема 7.2.** *Если функция $f(x,y)$ интегрируема в прямоугольнике $P$ и для каждого $y \in [c,d]$ существует $\int\limits_a^b f(x,y)\,dx$, то существует повторный интеграл $\int\limits_c^d dy\int\limits_a^b f(x,y)\,dx$ и он равен двойному интегралу от функции $f(x,y)$ на прямоугольнике $P$:*

$$\iint\limits_P f(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_c^d dy\int\limits_a^b f(x,y)\,dx.$$

Так как у функции $f(x,y)$ непрерывной на прямоугольнике $P$ существуют оба интеграла $\int\limits_a^b f\,dx$ и $\int\limits_c^d f\,dy$, то для нее справедливы обе теоремы.

**Теорема 7.3.** *Если функция $f(x,y)$ непрерывна на координатном прямоугольнике $P$, то для нее существуют оба повторных интеграла*

$$\int\limits_a^b dx\int\limits_c^d f\,dy \quad \text{и} \quad \int\limits_c^d dy\int\limits_a^b f\,dx$$

*и они равны двойному интегралу функции $f(x,y)$ по множеству $P$:*

$$\iint\limits_P f\,dx\,dy = \int\limits_a^b dx\int\limits_c^d f\,dy = \int\limits_c^d dy\int\limits_a^b f\,dx.$$

Равенство повторных интегралов другим методом было доказано во втором параграфе предыдущей главы (теорема 2.7).

### 7.2. Случай произвольного множества

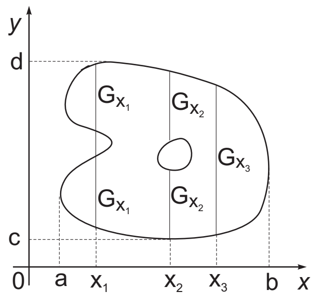



Рис. 11

Пусть функция $f(x, y)$ задана на некоторой произвольной замкнутой области $\overline{G}$ и пусть $[a, b]$ проекция множества $\overline{G}$ на ось $Ox$, а $[c, d]$ — проекция множества $\overline{G}$ на ось $Oy$. Возьмем какое-то фиксированное значение $x_0 \in [a, b]$. Часть прямой $x = x_0$, принадлежащая области $\overline{G}$, называется сечением области $\overline{G}$ этой прямой и обозначается $G_{x_0}$. Будем требовать, чтобы сечение $G_{x_0}$ состояло из конечного числа отрезков $[\alpha_i, \beta_i]$ (см. рис. 11). Аналогично определяем сечение $G_{y_0}$ множества $\overline{G}$ прямой $y = y_0$, где $y_0 \in [c, d]$.

**Теорема 7.4.** *Если функция $f(x, y)$ интегрируема в замкнутой области $\overline{G}$ и для каждого $x \in [a, b]$ существует интеграл $\int\limits_{G_x} f\,dy$, то существует повторный интеграл $\int\limits_a^b dx \int\limits_{G_x} f\,dy$ и он равен двойному интегралу от функции $f(x, y)$ по области $\overline{G}$:*

$$\iint\limits_{\overline{G}} f\,d\overline{G} = \int\limits_a^b dx \int\limits_{G_x} f\,dy.$$

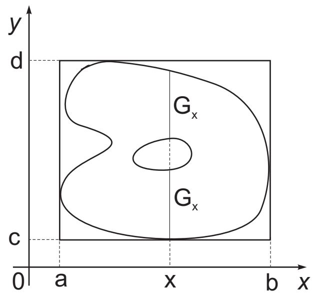



Рис. 12

Доказательство. Сведем данную теорему к теореме 7.1. Для этого введем координатный прямоугольник $P = [a, b] \times [c, d]$, содержащий множество $\overline{G}$, и определим на нем вспомогательную функцию $\overline{f}(x, y)$, равную

$$\overline{f}(x, y) = \begin{cases} f(x, y), & \text{если} \quad (x, y) \in \overline{G}, \\ 0, & \text{если} \quad (x, y) \in G_1, \end{cases}$$

где $G_1 = P \setminus \overline{G}$.

Функция $\overline{f}(x, y)$ интегрируема по условию на множестве $\overline{G}$ и интегрируема на множестве $G_1$, т.к. равна на нем нулю. Поскольку множества $\overline{G}$ и $G_1$ не имеют общих точек, то согласно свойству аддитивности по области интегрирования

$$\iint\limits_P \overline{f}(x, y)\,dx\,dy = \iint\limits_{\overline{G}} \overline{f}(x, y)\,dx\,dy + \iint\limits_{G_1} \overline{f}(x, y)\,dx\,dy = \iint\limits_{\overline{G}} f(x, y)\,dx\,dy.$$

При любом фиксированном $x \in [a,b]$ имеем (см. рис. 12)

$$\int_c^d \overline{f}\,dy = \int_{G_x} \overline{f}\,dy + \int_{[c,d]\setminus G_x} \overline{f}\,dy = \int_{G_x} f\,dy.$$

Тогда по теореме 7.1 существует повторный интеграл

$$\int\limits_a^b dx \int\limits_c^d \overline{f}\,dy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{G_x} f\,dy$$

и он равен

$$\iint\limits_P \overline{f}\,dx\,dy = \iint\limits_{\overline{G}} f\,dx\,dy.$$

Теорема доказана.

Совершенно аналогично доказывается двойственное предложение.

**Теорема 7.5.** *Пусть функция $f(x,y)$ интегрируема в замкнутой области $\overline{G}$ и при каждом $y \in [c,d]$ существует $\int\limits_{G_y} f\,dx$. Тогда существует повторный интеграл $\int\limits_c^d dy \int\limits_{G_y} f\,dx$, и он равен двойному интегралу от функции $f(x,y)$ по множеству $\overline{G}$.*

В случае, когда функция $f(x,y)$ непрерывна в замкнутой области $\overline{G}$, справедливы обе теоремы. Следовательно, имеет место следующее утверждение.

**Теорема 7.6.** *Если функция $f(x,y)$ непрерывна в замкнутой области $\overline{G}$, то существуют оба повторных интеграла $\int\limits_a^b dx \int\limits_{G_x} f\,dy$ и $\int\limits_c^d dy \int\limits_{G_y} f\,dx$ и они равны двойному интегралу от функции $f(x,y)$ по множеству $\overline{G}$, т.е.*

$$\iint\limits_G f\,dx\,dy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{G_x} f\,dy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{G_y} f\,dx.$$

В случае координатного прямоугольника теоремы 7.4, 7.5 и 7.6 превращаются в теоремы 7.1, 7.2, 7.3 соответственно.

Как работают полученные теоремы на практике, выясним на важном частном случае, когда область $\overline{G}$ есть множество точек плоскости, ограниченное линиями $y = \varphi(x)$, $y = \psi(x)$, $x = a$ и $x = b$ (см. рис. 13), где функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ непрерывны на отрезке $[a,b]$ и $\varphi(x) \leqslant \psi(x)$. При этом боковые отрезки $AB$ и $CD$ могут вырождаться в точки.

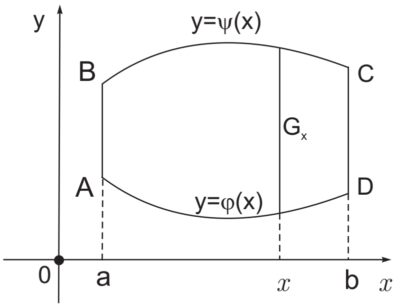



Рис. 13

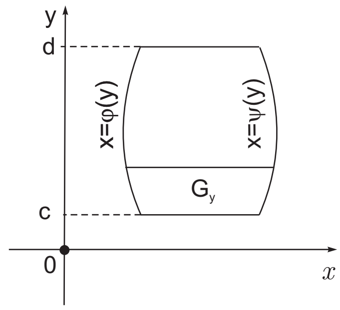



Рис. 14

Такую область $\overline{G}$ будем называть цилиндрической вдоль оси $Oy$. Каждое сечение $P_x$ есть отрезок $[\varphi(x), \psi(x)]$. Так что области $\overline{G}$ данного типа отвечает повторный интеграл

$$\int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f\,dy.$$

Аналогично, область $\overline{G}$, ограниченная линиями $x = \varphi(y)$, $x = \psi(y)$, $y = c$ и $y = d$ (см. рис. 14), где функции $\varphi(y)$ и $\psi(y)$ непрерывны на отрезке $[c, d]$, причем $\varphi(y) \leqslant \psi(y)$, называется цилиндрической вдоль оси $Ox$. Каждое сечение $P_y$ есть отрезок $[\varphi(y), \psi(y)]$. Значит, соответствующий данной области повторный интеграл имеет вид

$$\int\limits_c^d dy \int\limits_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f\,dx.$$

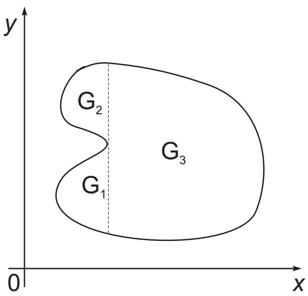



Рис. 15

В общем случае для сведения двойного интеграла к повторному интегралу область $\overline{G}$ разбивается отрезками, параллельными координатным осям, на цилиндрические области указанных выше типов. Для иллюстрации на рисункее 15 область интегрирования разделена отрезком, параллельным оси $Oy$, на три области, цилиндрические вдоль той же оси $Oy$. Тогда двойной интеграл по области $\overline{G}$ представится в виде суммы трех интегралов, каждый из которых сводится к повторному интегралу, где внутренний интеграл берется по переменной $y$, а внешний — по переменной $x$.

Если нужен обратный порядок интегрирования, следует область интегрирования разбивать на области, цилиндрические вдоль оси $Ox$.

### 7.3. Примеры и дополнения

1°. Вычислить интеграл $I = \iint\limits_{\overline{G}} (x^2+y^2)\,dx\,dy$ по области $\overline{G}$, ограниченной линиями $y=0$, $y=1+x$ и $y=1-x$.

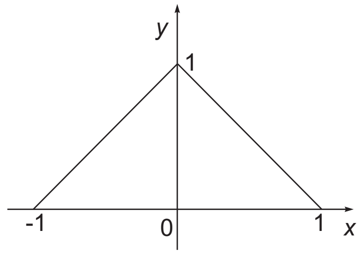



Рис. 16

*Решение.* Область $\overline{G}$ есть треугольник, изображенный на рисунке 16. Ее можно рассматривать как цилиндрическую вдоль оси $Oy$, ограниченную снизу прямой $y=0$ и сверху ломаной $y=1-|x|$. Проекция множества $\overline{G}$ на ось $Ox$ есть отрезок $[-1;1]$. Одновременно она является и цилиндрической вдоль оси $Ox$, ограниченной слева прямой $x=y-1$ и справа прямой $x=1-y$. Проекция области $\overline{G}$ на ось $Oy$ есть отрезок $[0;1]$.

На этом основании в первом случае двойной интеграл представим в виде

$$\iint\limits_{G} (x^2+y^2)\,dx\,dy = \int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{0}^{1-|x|} (x^2+y^2)\,dy.$$

Вычисляем отдельно внутренний интеграл:

$$\int\limits_{0}^{1-|x|} (x^2+y^2)\,dy = \left(x^2y+\frac{1}{3}y^3\right)\Bigg|_{0}^{1-|x|} = x^2(1-|x|)+\frac{1}{3}(1-|x|)^3.$$

Откуда, учитывая четность подинтегральной функции, получаем

$$I = \int\limits_{-1}^{1} \left[x^2(1-|x|)+\frac{1}{3}(1-|x|)^3\right] dx = 2\int\limits_{0}^{1} \left[x^2(1-x)+\frac{1}{3}(1-x)^3\right] dx =$$

$$= 2\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{12}(1-x)^4\right]\Bigg|_{0}^{1} = \frac{1}{3}.$$

Во втором случае имеем

$$I = \iint\limits_{\overline{G}} (x^2+y^2)dxdy = \int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{y-1}^{1-y} (x^2+y^2)dx = \int\limits_{0}^{1} \left(\frac{1}{3}x^3+xy^2\right)\Bigg|_{y-1}^{1-y} dy =$$

$$= \int\limits_{0}^{1} \left[\frac{2}{3}(1-y)^3+2y^2(1-y)\right] dy = \left[-\frac{1}{6}(1-y)^4+\frac{2}{3}y^3-\frac{1}{2}y^4\right]\Bigg|_{0}^{1} = \frac{1}{3}.$$

$2^\circ$. Найти оценку для интеграла $\iint\limits_{\overline{G}}(x^2-y^2)dxdy$ по области $\overline{G}$, заданной неравенством $x^2+y^2-2x\leqslant 0$.

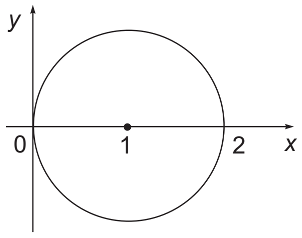



Рис. 17

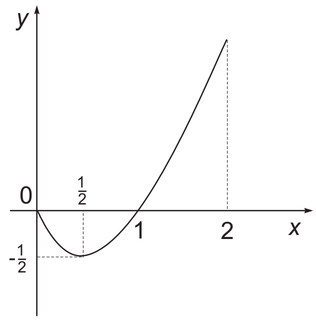



Рис. 18

*Решение.* Область $\overline{G}$ есть круг, ограниченный окружностью $(x-1)^2+y^2=1$. Его площадь равна $\pi$. Поэтому на основании свойства $8^\circ$ имеем оценку

$$m\pi\leqslant\iint\limits_{\overline{G}}(x^2-y^2)dxdy\leqslant M\pi,$$

где $m$ — наименьшее, а $M$ — наибольшее значения в заданной области подинтегральной функции $z=x^2-y^2$. Для нахождения стационарных точек составляем систему уравнений $z'_x=2x=0$, $z'_y=-2y=0$. Она дает нам единственную стационарную точку $(0;0)$, лежащую, причем, на границе области. Следовательно, наименьшее и наибольшее значения $z$ достигаются на окружности $x^2+y^2-2x=0$. Чтобы решить указанную задачу на условный экстремум, сведем ее к задаче на абсолютный экстремум. Это можно сделать, выразив $y^2$ из уравнения связи (уравнения окружности): $y^2=2x-x^2$ и подставив найденное значение в выражение $z=x^2-y^2$. В итоге приходим к задаче: найти наименьшее и наибольшее значения квадратичной функции $z=2x^2-2x$ на множестве $|x-1|\leqslant 1$, т.е. на отрезке $[0;2]$ (см. рис. 18). График данной функции есть парабола с вершиной $\left(\dfrac{1}{2};-\dfrac{1}{2}\right)$ и осью $x=\dfrac{1}{2}$. Как известно, в таком случае наименьшее значение достигается функцией $z$ в вершине параболы, а наибольшее — на концах отрезка $[0;2]$ (см. рис. 18). Значит, $m=z\left(\dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{1}{2}$, а $M=z(2)=4$. В итоге приходим к оценке

$$-\frac{\pi}{2}\leqslant I\leqslant 4\pi.$$

3°. Поменять порядок интегрирования в повторном интеграле

$$I = \int\limits_0^{2r} dx \int\limits_{\sqrt{2rx-x^2}}^{\sqrt{2rx}} f(x,y)\,dy.$$

*Решение.* Чтобы поменять порядок интегрирования, прежде всего надо восстановить область интегрирования. Как следует из пределов интегрирования в повторном интеграле, она определяется условиями:

$$0 \leqslant x \leqslant 2r, \quad \sqrt{2rx-x^2} \leqslant y \leqslant \sqrt{2rx}.$$

Эти условия задают замкнутую область $\overline{G}$ ограниченную снизу верхней половиной окружности $(x-r)^2+y^2 = r^2$, сверху — полупараболой $y^2 = 2rx$ и справа прямой $x = 2a$. Для обратного порядка интегрирования области должны быть цилиндрическими вдоль оси $Ox$. Поэтому разделим область $\overline{G}$ прямой $y = r$ на три части $G_1, G_2, G_4$ (см. рис. 19), которые характеризуются неравенствами

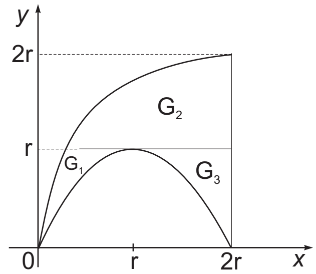



Рис. 19

$$G_1\colon \frac{y^2}{2a} \leqslant x \leqslant r - \sqrt{r^2-y^2}, \quad 0 \leqslant y \leqslant r;$$
$$G_2\colon \frac{y^2}{2r} \leqslant x \leqslant 2r, \quad r \leqslant y \leqslant 2r;$$
$$G_3\colon r + \sqrt{r^2-y^2} \leqslant x \leqslant 2r, \quad 0 \leqslant y \leqslant r.$$

Тогда двойной интеграл по области $\overline{G}$ представится в виде суммы трех интегралов, каждый из которых сводится к повторному интегралу, где внутренний интеграл берется по переменной $x$, а внешний — по переменной $y$.

В итоге имеем

$$I = \int\limits_0^r dy \int\limits_{\frac{y^2}{2r}}^{r-\sqrt{r^2-y^2}} f(x,y)dx + \int\limits_r^{2r} dy \int\limits_{\frac{y^2}{2r}}^{2r} f(x,y)dx + \int\limits_0^r dy \int\limits_{r+\sqrt{r^2-y^2}}^{2r} f(x,y)dx.$$

4°. Найти объем шара, заданного неравенством $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant r^2$.

*Решение.* У нас нет пока общей формулы для вычисления объема тела в трехмерном пространстве. Она появится лишь следующей главе. Однако имеется формула, выражающая объем цилиндрического бруса через двойной интеграл.

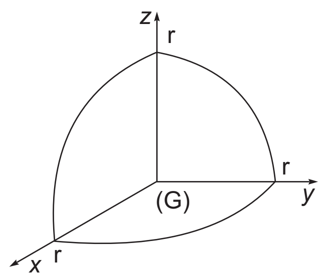



Рис. 20

Воспользуемся тем, что координатные плоскости делят шар на восемь симметричных частей. Рассмотрим ту из них, которая расположена в первом октанте. Она описывается условиями $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant r^2$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$. Иначе говоря, взятая восьмушка ограничена сверху поверхностью $z = \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$ и координатными плоскостями $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$. Проекция данного тела на координатную плоскость $xOy$ есть область $\overline{G}$, ограниченная дугой окружности $y = \sqrt{r^2 - x^2}$, расположенной в первой четверти, и прямыми $x = 0$, $y = 0$. Поэтому имеем

$$\frac{1}{8}V = \iint\limits_{\overline{G}} z dxdy = \iint\limits_{\overline{G}} \sqrt{r^2 - x^2 - y^2} dxdy =$$
$$= \int\limits_0^r dx = \int\limits_0^{\sqrt{r^2-x^2}} \sqrt{r^2 - x^2 - y^2} dy.$$

Для вычисления внутреннего интеграла используем формулу

$$\int \sqrt{a^2 - t^2} dt = \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{t}{a} + \frac{t\sqrt{a^2 - t^2}}{2} + C$$

и получаем, что

$$\int\limits_0^{\sqrt{r^2-x^2}} \sqrt{r^2 - x^2 - y^2} dy =$$
$$= \left[ \frac{r^2 - x^2}{2} \arcsin \frac{y}{\sqrt{r^2 - x^2}} + \frac{y\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}}{2} \right] \Bigg|_0^{\sqrt{r^2-x^2}} dy = \frac{1}{4}\pi(r^2 - x^2).$$

Окончательно имеем

$$V = 2\pi \int\limits_0^r (r^2 - x^2)\, dx = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

К этому примеру мы еще вернемся.

Хотя в двойном интеграле переменные $x$ и $y$ равноправны, в силу чего теоретически все равно какой будет взят порядок интегрирования, на практике это не совсем так. Чем это вызвано, мы сейчас выясним на следующих двух примерах.

5°. Вычислить $\iint\limits_{\overline{G}} e^{-y^2}\,dx\,dy$ по области $\overline{G}$, ограниченной линиями $y = x$, $y = 1$ и $x = 0$.

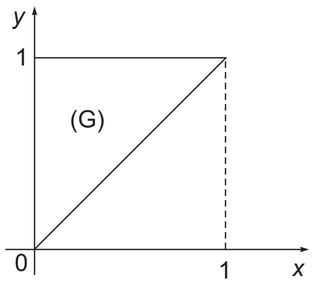



Рис. 21

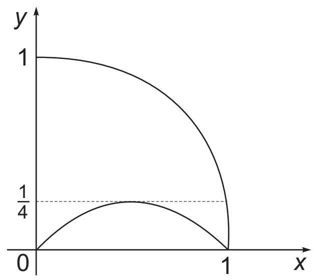



Рис. 22

*Решение.* Область интегрирования $\overline{G}$ изображена на рисунке 22. Как видим, она цилиндрическая и вдоль оси $Ox$, и вдоль оси $Oy$. В первом случае получается, что

$$\iint\limits_{\overline{G}} e^{-y^2}dxdy = \int\limits_0^1 dy \int\limits_0^y e^{-y^2}dx = \int\limits_0^1 ye^{-y^2}dx = \int\limits_0^1 ye^{-y^2}dy = -\frac{1}{2}e^{-y^2}\Big|_0^1 = \frac{e-1}{2e}.$$

Во втором случае

$$\iint\limits_{\overline{G}} e^{-y^2}dxdy = \int\limits_0^1 dx \int\limits_x^1 e^{-y^2}dy.$$

Известно, что $\int e^{-y^2}dy$ не выражается в элементарных функциях. Таким образом, внутренний интеграл не может быть нами вычислен, хотя он и существует. Комментарии излишни.

6°. Найти значение $I = \iint\limits_{\overline{G}} (x+y)\,dx\,dy$ по области $\overline{G}$, ограниченной окружностью $x^2 + y^2 = 1$, прямой $x = 0$ и параболой $y = x - x^2$. Кроме того, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$ (см. рис. 22).

*Решение.* Если взять внутренний интеграл по переменной $y$, то сразу получаем

$$I = \int\limits_0^1 dx \int\limits_{x-x^2}^{\sqrt{1-x^2}} (x+y)dxdy = \int\limits_0^1 \left(xy + \frac{1}{2}y^2\right)\Bigg|_{1-x^2}^{\sqrt{1-x^2}} dx =$$

$$= \int\limits_0^1 \left[x\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}(1-x^2) - x(x-x^2) - \frac{1}{2}(x-x^2)^2\right] dx = \frac{7}{30}.$$

В то время как при обратном порядке интегрирования область $\overline{G}$ придется разбивать прямой $y=\dfrac{1}{4}$ на три части. Тогда двойной интеграл представится в виде

$$I=\int\limits_0^{\frac14}dy\int\limits_0^{\frac12-\sqrt{\frac14-y}}(x+y)dx+\int\limits_{\frac14}^{1}dy\int\limits_0^{\sqrt{1-y^2}}(x+y)dx+\int\limits_0^{\frac14}dy\int\limits_{\frac12+\sqrt{\frac14-y}}^{\sqrt{1-y^2}}(x+y)dx.$$

Ясно, что в этом случае будет значительно больше вычислительной работы.

7°. Если применить формулу

$$mG=\iint\limits_G dx\,dy$$

к случаю криволинейной трапеции (см. рис. 23) и свести двойной интеграл к повторному интегралу, то получаем

$$mG=\int\limits_a^b dx\int\limits_0^{f(x)}dy=\int\limits_a^b f(x)\,dx.$$

Имеем еще одно подтверждение того факта, что введенное в первом параграфе понятие площади плоского множества охватывает случай криволинейной трапеции.

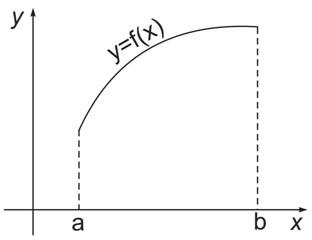



Рис. 23

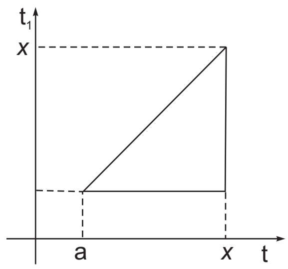



Рис. 24

8°. Переменить порядок интегрирования в повторном интеграле

$$\int\limits_a^x dt_1\int\limits_a^{t_1}(t_1-t)^{n-2}f(t)\,dt.$$

*Решение.* Данный повторный интеграл соответствует области интегрирования $\overline{G}$, определяемой условиями

$$a\leqslant t_1\leqslant x,\quad a\leqslant t\leqslant t_1.$$

Следовательно, область $\overline{G}$ есть треугольник, ограниченный линиями $t_1 = t$, $t_1 = a$ и $t_1 = x$ (см. рис. 24). Теперь меняем порядок интегрирования и получаем

$$\int\limits_a^x dt_1 \int\limits_a^{t_1} (t_1 - t)^{n-2} f(t)\, dt = \int\limits_a^x dt \int\limits_t^x (t_1 - t)^{n-2} f(t)\, dt_1 =$$
$$= \int\limits_a^x \frac{(t_1 - t)^{n-1}}{n-1} f(t) \Big|_t^x dt = \frac{1}{n-1} \int\limits_a^x (x-t)^{n-1} f(t)\, dt.$$

Итак, имеем

$$\int\limits_a^x dt_1 \int\limits_a^{t_1} (t_1 - t)^{n-2} f(t)\, dt = \frac{1}{n-1} \int\limits_a^x (x-t)^{n-1} f(t)\, dt.$$

При $n = 2$ данная формула превращается в равенство

$$\int\limits_a^x dt \int\limits_a^{t_1} f(t)\, dt = \int\limits_a^x (x-t) f(t)\, dt. \tag{7.3.1}$$

Используя формулу (7.3.1), методом математической индукции легко доказать следующее более общее соотношение

$$\int\limits_a^x dt_{n-1} \int\limits_a^{t_{n-1}} dt_{n-2} \ldots \int\limits_a^{t_1} f(t) dt = \frac{1}{(n-1)!} \int\limits_a^x (x-t)^{n-1} f(t)\, dt, \tag{7.3.2}$$

левая часть которого есть $n$-кратный повторный интеграл.

Легко видеть, что интеграл

$$F_n(x) = \int\limits_a^x dt_{n-1} \int\limits_a^{t_{n-1}} dt_{n-2} \ldots \int\limits_a^{t_1} f(t) dt$$

является решением дифференциального уравнения $y^{(n)} = f(x)$, удовлетворяющим начальным условиям $y(a) = y'(a) = \ldots = y^{(n-1)}(a) = 0$.

Кроме того, формула (7.3.2) используется при определении интеграла и производной дробного порядка. Пусть $\lambda$ — некоторое положительное число (не обязательно целое). Тогда, обобщая формулу (7.3.2), назовем выражение

$$F_\lambda(x) = \frac{1}{\Gamma(\lambda)} \int\limits_a^x (x-t)^{\lambda-1} f(t)\, dt$$

интегралом порядка $\lambda$ функции $f(x)$.

Чтобы определить производную дробного порядка, приведем такое наводящее соображение. Если $n$ и $m$ — натуральные числа, то $f^{(n)}(x) = F_m\left(f^{(n+m)}(x)\right)$. Пусть теперь $\mu > 0$ — дробное число. Представим его в виде $\mu = m - \lambda$, где $m$ — натуральное число и $0 \leqslant \lambda < 1$. Тогда по определению

$$f^{(\mu)}(x) = F_\lambda\left[f^{(m)}(x)\right] = \frac{1}{\Gamma(\lambda)}\int\limits_a^x (x-t)^{\lambda-1} f^{(m)}(x).$$

9°. Вычислить интеграл

$$\iint\limits_{\overline{G}} x^{p-1}\, y^{q-1}\, dx\, dy, \quad p \geqslant 1, \quad q \geqslant 1,$$

если область $\overline{G}$ задана неравенствами $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $x + y \leqslant 1$.

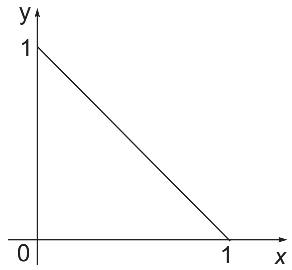



Рис. 25

*Решение.* Область $\overline{G}$ есть треугольник, изображенный на рисунке 25. Выразив $I$ через повторный интеграл, сводим его к бета и гамма функциям:

$$I = \int\limits_0^1 x^{p-1} dx \int\limits_0^{1-x} y^{q-1} dy = \int\limits_0^1 x^{p-1} \frac{y^q}{q}\Bigg|_0^{1-x} dx =$$

$$= \frac{1}{q}\int\limits_0^1 x^{p-1}(1-x)^q dx = \frac{1}{q}B(p, q+1) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q+1)}{q\Gamma(p+q+1)} = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q+1)}.$$

## § 8. Замена переменных в двойном интеграле

Как и в случае определенного интеграла, при вычислении двойного интеграла одним из самых действенных является метод замены переменных.

### 8.1. Отображение областей. Криволинейные координаты

Пусть в двух плоскостях с прямоугольными декартовыми координатами $x, y$ и $u, v$ даны замкнутые области $\overline{G}$ и $\overline{G}'$ и пусть $\Phi : \overline{G}' \to \overline{G}$ — некоторое взаимно однозначное отображение множества $\overline{G}'$ на множество $\overline{G}$. Отображение $\Phi$ может быть еще задано в координатной форме системой функций

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v). \tag{8.1.1}$$

Функции $\varphi(u, v)$ и $\psi(u, v)$ являются координатными функциями отображения $\Phi$ (см. параграф 2.1 первой части). В силу взаимной однозначности отображения $\Phi$ существует обратное отображение $\Phi^{-1}$ множества $\overline{G}$ на множество $\overline{G}'$.

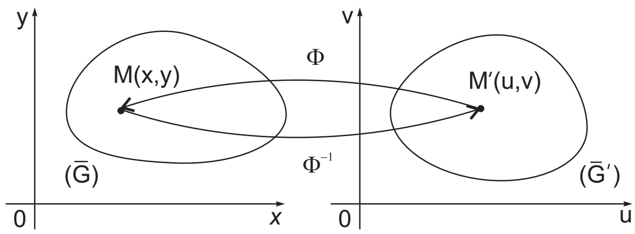



Рис. 26

Это означает, что, если отображение (8.1.1) каждую точку $M'(u, v)$ множества $\overline{G}'$ переводит в некоторую точку $M(x, y)$ множества $\overline{G}$, то отображение $\Phi^{-1}$ указанную точку $M \in \overline{G}$ переводит в точку $M'(u, v)$ множества $\overline{G}'$. Иначе говоря, это означает, что система (8.1.1) однозначно разрешима на множестве $\overline{G}$ относительно переменных $u$ и $v$:

$$u = u(x, y), \quad v = v(x, y), \tag{8.1.2}$$

где $u(x, y)$ и $v(x, y)$ координатные функции отображения $\Phi^{-1}$.

Если отображение $\Phi$ непрерывно дифференцируемо на $\overline{G}'$ (т.е. координатные функции $\varphi$ и $\psi$ имеют непрерывные частные производные первого порядка по обеим переменным) и якобиан $J = \dfrac{D(x, y)}{D(u, v)}$ отображения $\Phi$ отличен от нуля в области $\overline{G}$ (отсюда вытекает, что он как непрерывная функция знакопостоянен), то, как показывается в теории неявных функций, отображение $\Phi$ преобразует внутренние точки во внутренние же точки, а граничные точки в граничные же точки. Это есть так называемый принцип области, из которого следует, что для нахождения $\Phi(\overline{G}')$ — образа множества $\overline{G}'$ достаточно найти образ границы множества $\overline{G}'$.

Проиллюстрируем данный факт на конкретном примере.

Положим

$$\begin{cases} x = u\cos v, \\ y = u\sin v \end{cases} \tag{8.1.3}$$

при условиях $r \leqslant u \leqslant R$ и $0 \leqslant v \leqslant \frac{\pi}{2}$.

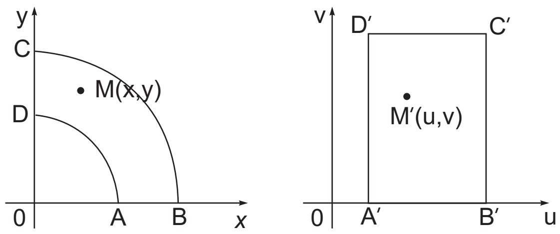



Рис. 27

Условия $r \leqslant u \leqslant R$ и $0 \leqslant v \leqslant \frac{\pi}{2}$ задают в плоскости $u, v$ прямоугольник $A'B'C'D'$ (см. рис. 27), ограниченный прямыми $v = 0$, $v = \frac{\pi}{2}$, $u = r$, $u = R$. Тогда отображение (8.1.3) преобразует отрезок $A'B'$, определяемый уравнением $v = 0$ и условием $r \leqslant u \leqslant R$, в отрезок $AB$: $y = 0$, $r \leqslant x \leqslant R$ плоскости $x, y$; отрезок $B'C'$: $u = R$, $0 \leqslant v \leqslant \frac{\pi}{2}$ — в дугу окружности $BC$: $x^2 + y^2 = R^2$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$; отрезок $C'D'$: $v = \frac{\pi}{2}$, $r \leqslant u \leqslant R$ — в отрезок $CD$: $x = 0$, $r \leqslant y \leqslant R$ и отрезок $A'D'$: $u = r$, $0 \leqslant v \leqslant \frac{\pi}{2}$ — в дугу окружности $AD$: $x^2 + y^2 = r^2$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$. Значит, контур $ABCD$ есть образ границы прямоугольника $A'B'C'D'$ При этом внутренность прямоугольника $A'B'C'D'$ переходит во внутренность контура $ABCD$, т.к. каждая внутренняя точка $M'(u, v)$ прямоугольника ($r < u < R$, $0 < v < \frac{\pi}{2}$) преобразуется в точку $M(x, y)$, удовлетворяющую неравенствам $r < \sqrt{x^2 + y^2} < R$, $x > 0$, $y > 0$, т.е. в точку внутри контура $ABCD$.

Отметим, что якобиан отображения (8.1.3)

$$J = \frac{D(x, y)}{D(u, v)} = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos v & -u\sin v \\ \sin v & u\cos v \end{vmatrix} = u$$

оказывается положительным в области $\overline{G}'$, ограниченной контуром прямоугольника $A'B'C'D'$.

При наложенных на отображение (8.1.1) условиях существует обратное отображение (8.1.2), так же непрерывно дифференцируемое, причем, поскольку $\Phi\Phi^{-1}$ есть тождественное отображение, то по правилу дифференцирования сложной функции якобианы этих отображений связаны соотношением

$$\frac{D(x,y)}{D(u,v)} \cdot \frac{D(u,v)}{D(x,y)} = 1.$$

Таким образом, якобианы обоих отображений принимают значения одного и того же знака.

Так как при взаимно однозначном отображении $\Phi$ области $\overline{G}'$ на область $\overline{G}$ пара чисел $(u,v)$ однозначно определяет точку $M \in \overline{G}$, то эту пару чисел $(u,v)$ можно принять за некие новые координаты точки $M$. Тогда на формулы (8.1.1), (8.1.2) можно смотреть как на формулы перехода одних координат в другие.

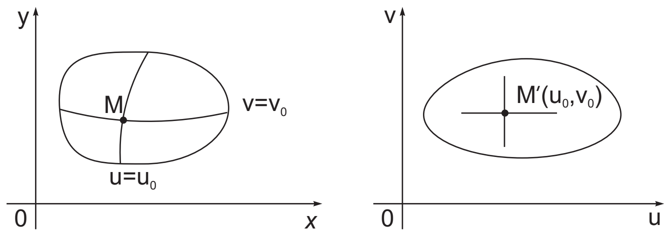



Рис. 28

Зафиксируем некоторое значение $u = u_0$. При этом координатная линия $u = u_0$ преобразуется отображением $\Phi$ в линию

$$x = \varphi(u_0, v), \quad y = \psi(u_0, v), \tag{8.1.4}$$

которая принадлежит области $\overline{G}$ и вдоль которой изменяется только одна координата $v$. Поэтому линия (8.1.4) называется координатной линией $(v)$. Аналогично при фиксированном значении $v = v_0$ координатная в декартовых координатах прямая $v = v_0$ преобразуется в координатную линию $(u)$:

$$x = \varphi(u, v_0), \quad y = \psi(u, v_0).$$

В отличие от декартовых координат, координатные линии $(u)$ и $(v)$ какие-то кривые. Вследствие этого координаты $(u,v)$ принято называть криволинейными координатами.

Перебрав все возможные значения $u$ и $v$, мы получаем два семейства координатных линий, которые обладают следующими свойствами:

1. Координатные линии одного и того же семейства попарно не пересекаются.

2. Через каждую точку множества проходит одна и только одна координатная линия каждого из семейств.

3. Координатные линии $(u)$ и $(v)$ пересекаются в единственной точке с координатами $(u, v)$.

Важнейшим примером криволинейной системы координат на плоскости является полярная система координат $(\rho, \varphi)$. Мы не приводим ее определение, так как оно хорошо известно. Отметим лишь формулы перехода от полярных координат к декартовым координатам

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi \quad (0 \leqslant \varphi < 2\pi) \tag{8.1.5}$$

и якобиан данного преобразования

$$J = \frac{D(x, y)}{D(\rho, \varphi)} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -\rho \sin \varphi \\ \sin \varphi & \rho \cos \varphi \end{vmatrix} = \rho. \tag{8.1.6}$$

### 8.2. О замене переменной в однократном интеграле

Напомним, что формула замены переменной в определенном интеграле

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_\alpha^\beta f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)\,dt \tag{8.2.7}$$

справедлива при следующих условиях:

1. функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$;

2. функция $x = \varphi(t)$ непрерывно дифференцируема на отрезке $[\alpha, \beta]$, причем производная $\varphi'(t)$ знакопостоянна;

3. $a = \varphi(\alpha)$, $b = \varphi(\beta)$.

Нам указанная формула будет нужна в иной форме. Пусть $a < b$. Если $\varphi'(t) < 0$, то функция $\varphi(t)$ строго убывающая и из условия $a < b$ заключаем, что $\alpha > \beta$. Тогда имеем

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_\alpha^\beta f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)\,dt = -\int\limits_\alpha^\beta f\big(\varphi(t)\big)|\varphi'(t)|\,dt = \int\limits_\beta^\alpha f\big(\varphi(t)\big)|\varphi'(t)|\,dt.$$

Если же $\varphi'(t) > 0$, то $\alpha < \beta$ и

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_\alpha^\beta f\bigl(\varphi(t)\bigr)\varphi'(t)\,dt = \int\limits_\alpha^\beta f\bigl(\varphi(t)\bigr)|\varphi'(t)|\,dt.$$

Оба случая объединяются единой формулой

$$\int\limits_\Delta f(x)\,dx = \int\limits_{\Delta'} f\bigl(\varphi(t)\bigr)|\varphi'(t)|\,dt, \tag{8.2.8}$$

где $\Delta = [a,b]$ и $\Delta' = [\alpha,\beta]$ в отличие от формулы (8.2.7) неориентированные промежутки. Использованные обозначения области интегрирования оправданы тем, что здесь нет нужды указывать порядок следования пределов интегрирования, так как нижний предел всегда меньше верхнего предела.

Замечание. Второе условие из указанных выше трех условий, при которых справедлива формула замены переменной, можно несколько ослабить. На самом деле от функции $x = \varphi(t)$ требуется строгая монотонность, а она допускает обращение в нуль производной $\varphi'(t)$, например, на конечном множестве значений переменной $t$.

## 8.3. Вывод формулы замены переменных в двойном интеграле

**Теорема 8.1.** *Пусть $x = \varphi(u,v)$, $y = \psi(u,v)$ взаимно однозначное отображение замкнутой области $\overline{G}'$ на замкнутую область $\overline{G}$. Если функция $f(x,y)$ непрерывна на множестве $\overline{G}$, функции $x = \varphi(u,v)$, $y = \psi(u,v)$ непрерывно дифференцируемы на множестве $\overline{G}'$ причем якобиан $\dfrac{D(\varphi,\psi)}{D(u,v)} \neq 0$, то справедлива формула*

$$\iint\limits_{\overline{G}} f(x,y)dx\,dy = \iint\limits_{\overline{G}'} f\bigl[\varphi(u,v),\psi(u,v)\bigr]\left|\frac{D(\varphi,\psi)}{D(u,v)}\right| du\,dv. \tag{8.3.9}$$

Доказательство. Поскольку подинтегральные функции непрерывны, то оба двойных интеграла в равенстве (8.3.9) существуют. Нужно лишь доказать их равенство. Доказательство основывается на формуле (8.2.8).

Так как отображение $\Phi(\varphi,\psi)$ взаимно однозначно, то из уравнения $x = \varphi(u,v)$ можно выразить переменную $u$ через переменные $x$ и $v$: $u = g(x,v)$. Функция $u = g(x,v)$, являясь решением уравнения $x = \varphi(u,v)$, обращает его в тождество

$$\varphi\bigl[g(x,v),v\bigr] \equiv x. \tag{8.3.10}$$

Подставив $g(x,v)$ в функцию $y=\psi(u,v)$, получаем, что $y=\psi(u,v)=\psi\big[g(x,v),v\big]=$ $=F(x,v)$. Из того, что функции $\varphi(u,v)$ и $\psi(u,v)$ непрерывно дифференцируемы и якобиан $J(u,v)\neq 0$ следует, что функция $g(x,v)$, а значит и функция $F(x,v)$ непрерывно дифференцируемые.

Переход от точки $M'(u,v)$ области $\overline{G}'$ к точке $M(x,y)$ области $\overline{G}$ совершаем в два шага (см. рис. 29).

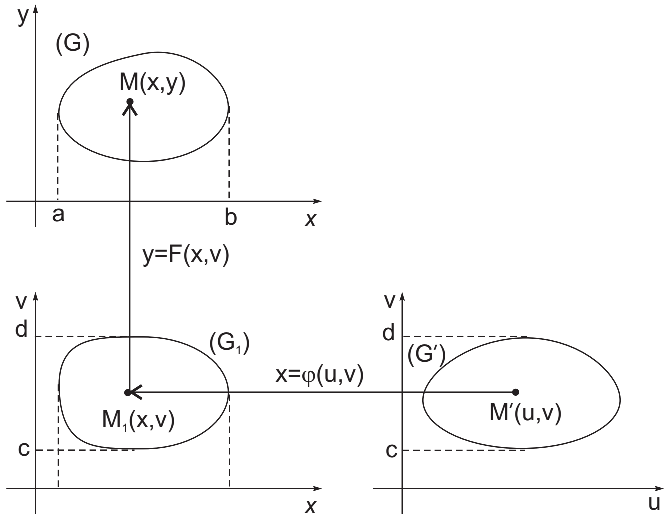



Рис. 29

<u>Шаг первый.</u> С помощью преобразования $x=\varphi(u,v)$, $v=v$ точка $M'(u,v)$ переводится в точку $M_1(x,v)$ некоторой промежуточной области $\overline{G}_1$, являющейся образом множества $\overline{G}'$.

<u>Шаг второй.</u> Система $x=x$, $y=F(x,v)$ преобразует точку $M_1(x,v)$ в точку $M(x,y)$.

Соответственно в два шага преобразовываем двойной интеграл $I=\iint\limits_{\overline{G}} f(x,y)\,dx\,dy$ в интеграл $\iint\limits_{\overline{G}'} f\big[\varphi(u,v),\psi(u,v)\big]\,|J(u,v)|\,du\,dv$. Представляем сначала интеграл $I$ в виде повторного интеграла $I=\iint\limits_{\overline{G}} f(x,y)\,dx\,dy=\int\limits_a^b dx\int\limits_{\overline{G}_x} f(x,y)\,dy$, где $[a,b]$ — проекция области $\overline{G}$ на координатную ось $Ox$, а $\overline{G}_x$ — сечение этого множества координатной линией $x=x$, и производим во внутреннем интеграле подстановку $y=F(x,v)$ и согласно формуле (8.2.8) получаем

$$I=\int\limits_a^b dx\int\limits_{\overline{G}_{1x}} f\big[x,F(u,v)\big]\left|\frac{\partial F}{\partial v}\right|dv=\iint\limits_{\overline{G}_1} H(x,v)\left|\frac{\partial F}{\partial v}\right|dx\,dv,$$

где сечение множества $\overline{G}_1$ производится тем же $x$, что и сечение $\overline{G}_x$, и $H(x,v) = f\bigl[x, F(u,v)\bigr]$.

Последний интеграл сводим к повторному интегралу, в котором внутреннее интегрирование производится уже по переменной $x$:

$$I = \iint\limits_{\overline{G}_1} H(x,v)\left|\frac{\partial F}{\partial v}\right| dx\,dv = \int\limits_c^d dv \int\limits_{\overline{G}_{1v}} H(x,v)\left|\frac{\partial F}{\partial v}\right| dx,$$

где $[c,d]$ — проекция множества $\overline{G}_1$ на координатную ось $v$, а $\overline{G}_{1v}$ — сечение множества $\overline{G}_1$ координатной прямой $x = x$. Совершаем теперь во внутреннем интеграле подстановку $x = \varphi(u,v)$ при фиксированном $v$ и на основании формулы (8.2.8) имеем

$$I = \int\limits_c^d dv \int\limits_{\overline{G}_{1v}} H(x,v)\left|\frac{\partial F}{\partial v}\right| dx = \int\limits_c^d dv \int\limits_{\overline{G}'_v} H\bigl[\varphi(u,v), v\bigr]\left|\frac{\partial F}{\partial v}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right| du =$$

$$= \iint\limits_{\overline{G}'_v} H\bigl[\varphi(u,v), v\bigr]\left|\frac{\partial F}{\partial v}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right| du\,dv = \iint\limits_{\overline{G}'} f\bigl[\varphi(u,v), \psi(u,v)\bigr]\left|\frac{\partial F}{\partial v}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right| du\,dv.$$

Остается показать, что $\dfrac{\partial F}{\partial v}\cdot\dfrac{\partial \varphi}{\partial u} = \dfrac{D(\varphi,\psi)}{D(u,v)}$. Из определения функции $F(x,v)$ по правилу дифференцирования сложной функции выводим, что

$$\frac{\partial F}{\partial v} = \frac{\partial \psi}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial v} + \frac{\partial \psi}{\partial v}.$$

Дифференцируя далее по $v$ при фиксированном $x$ тождество (8.3.10), получаем

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial v} + \frac{\partial \varphi}{\partial v} = 0.$$

Откуда

$$\frac{\partial u}{\partial v} = -\frac{\dfrac{\partial \varphi}{\partial v}}{\dfrac{\partial \varphi}{\partial u}}.$$

Значит,

$$\frac{\partial F}{\partial v} = -\frac{\partial \psi}{\partial u}\cdot\frac{\dfrac{\partial \varphi}{\partial v}}{\dfrac{\partial \varphi}{\partial u}} + \frac{\partial \psi}{\partial v} = \frac{\dfrac{\partial \varphi}{\partial u}\cdot\dfrac{\partial \psi}{\partial v} - \dfrac{\partial \varphi}{\partial v}\cdot\dfrac{\partial \psi}{\partial u}}{\dfrac{\partial \varphi}{\partial u}}$$

и

$$\frac{\partial F}{\partial v}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial u} = \frac{D(\varphi,\psi)}{D(u,v)}.$$

Теорема полностью доказана.

## 8.4. Геометрический вывод формулы замены переменных в двойном интеграле

Мы приведем в этом пункте более простой и наглядный вывод формулы (8.3.9). Чтобы избежать технических трудностей, будем придерживаться уровня строгости, часто используемого в физике, при котором пренебрегают бесконечно малыми высших порядков.

Пусть диффеоморфизм, заданный системой уравнений

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v), \tag{8.4.11}$$

взаимно однозначно отображает квадрат $G' = [a, a + h] \times [b, b + h]$ в координатной плоскости $u, v$ на криволинейный четырехугольник $G$ в координатной плоскости $x, y$, ограниченный образами при данном отображении сторон квадрата (см. рис. 30). В силу того, что образы сторон являются координатными линиями в криволинейной системе координат $u, v$, множество $G$ будет измеримым и имеет какую-то площадь $mG$. Поставим задачу выразить ее.

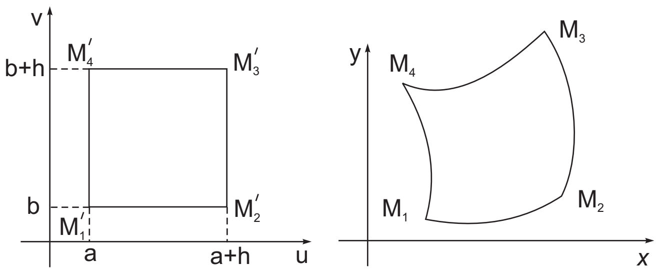



Рис. 30

Вершинами квадрата служат точки $M_1'(a, b)$ , $M_2'(a+h, b)$, $M_3'(a+h, b+h)$, $M_4'(a, b+$ $+h)$. Система функций (8.4.11) соответственно переводит их в вершины криволинейного четырехугольника $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$, $M_3(x_3, y_3)$, $M_4(x_4, y_4)$, где

$$\begin{aligned}
x_1 &= \varphi(a, b), & y_1 &= \psi(a, b),\\
x_2 &= \varphi(a + h, b), & y_1 &= \psi(a + h, b),\\
x_3 &= \varphi(a + h, b + h), & y_1 &= \psi(a + h, b + h),\\
x_4 &= \varphi(a, b + h), & y_4 &= \psi(a, b + h).
\end{aligned}$$

Разложив эти координаты по формуле Тейлора, ограничиваясь лишь бесконечно малыми первого порядка относительно $h$, будем иметь

$$\begin{cases} x_1 = \varphi(a,b), & y_1 = \psi(a,b), \\ x_2 = \varphi(a,b) + \varphi'_u(a,b)h, & y_2 = \psi(a,b) + \psi'_u(a,b)h, \\ x_3 = \varphi(a,b) + \varphi'_u(a,b)h + \varphi'_v(a,b)h, & y_3 = \psi(a,b) + \psi'_u(a,b)h + \psi'_v(a,b)h, \\ x_4 = \varphi(a,b) + \varphi'_v(a,b)h, & y_4 = \psi(a,b) + \psi'_v(a,b)h. \end{cases} \tag{8.4.12}$$

Видим, что

$$x_3 - x_4 = x_2 - x_1, \quad y_3 - y_4 = y_2 - y_1,$$

т.е. точки, декартовы координаты которых выражаются равенствами (8.4.12), являются вершинами параллелограмма. Иначе говоря, отбрасывание в координатах точек $M_1, M_2, M_3, M_4$ бесконечно малых высших порядков означает замену криволинейного четырехугольника параллелограммом, площадь которого равно удвоенной площади треугольника $M_1M_2M_3$. По известной формуле аналитической геометрии площадь треугольника равна

$$\pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_2 & y_3 - y_2 \end{vmatrix},$$

где знак перед определителем выбирается в зависимости от знака самого определителя. Другими словами, надо данное выражение брать по модулю. Поскольку в нашем случае

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_2 & y_3 - y_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \varphi'_u(a,b) & \psi'_u(a,b) \\ \varphi'_v(a,b) & \psi'_v(a,b) \end{vmatrix} \cdot h^2,$$

то

$$mG = |J(a,b)| \cdot h^2 = |J(a,b)| \cdot mG'. \tag{8.4.13}$$

Переходим к непосредственному выводу формулы (8.3.9). Пусть выполнены все условия теоремы 8.1 из предыдущего пункта. Так как двойные интегралы в формуле (8.3.9) существуют, то можно выбрать отмеченные разбиения так, как удобнее для доказательства.

Разобьем область $\overline{G}'$ с помощью квадратной сети $u = u_i$, $v = v_k$ на элементарные части $G'_{ik}$. Отображение $F = (\varphi, \psi)$ переводит взятую сеть из координатных линий $(u), (v)$, разбивающую область $\overline{G}$ на элементарные части $G_{ik}$, при этом элементарная часть $G'_{ik}$ переходит в элементарную часть $G_{ik}$ с теми же индексами. Граничными элементарными частями, как известно, можно пренебречь, т.к. они не влияют на значение интеграла. Так что рассматриваемые далее части $G'_{ik}$ являются полными квадратами. Следовательно, на основании (8.4.13)

$$G_{ik} = |J(u_i, v_k)|\, \Delta G'_{ik}.$$

Берем теперь интегральную сумму для функции $f(x, y)$ с отмеченными точками $\xi_{ik} = \varphi(u_i, v_k)$, $\eta_{ik} = \psi(u_i, v_k)$. Тогда имеем

$$\sum\nolimits_1 f(\xi_{ik}, \eta_{ik})\Delta G_{ik} = \sum\nolimits_1 f\big[\varphi(u_i, v_k), \psi(u_i, v_k)\big] \cdot |J(u_i, v_k)|\Delta G'_{ik}$$

и, переходя в последнем равенстве к пределу при $\lambda \to 0$, получаем требуемую формулу (8.3.9).

Если при условии, что отображение $x = \varphi(u, v)$, $y = \psi(u, v)$ взаимно однозначно, функции $\varphi(u, v), \psi(u, v)$ непрерывно дифференцируемы и что якобиан $J(u, v) \neq 0$, положить в формуле (8.3.9) функцию $f(x, y) = 1$, то будем иметь

$$mG = \iint\limits_{G} dx\, dy = \iint\limits_{G'} |J(u, v)| du\, dv.$$

В итоге приходим к соотношению

$$mG = \iint\limits_{G'} |J(u, v)| du\, dv, \tag{8.4.14}$$

выражающему площадь плоской фигуры в криволинейных координатах.

Применим к интегралу (8.4.14) теорему о среднем значении, согласно которой во множестве $\overline{G}'$ существует такая точка $(\xi, \eta)$, что

$$\iint\limits_{G'} |J(u, v)| du\, dv = |J(\xi, \eta)| \cdot mG'.$$

Отсюда

$$mG = |J(\xi, \eta)| \cdot mG'$$

или

$$\frac{mG}{mG'} = |J(\xi, \eta)|.$$

Возьмем теперь произвольную точку $(a, b) \in G'$ и будем стягивать множество $\overline{G}$ к этой точке. Тогда точка $(\xi, \eta) \to (a, b)$ и в силу непрерывности якобиана $J(u, v)$ имеем

$$\lim \frac{mG}{mG'} = |J(a, b)|.$$

Таким образом, абсолютная величина якобиана $J(u, v)$ преобразования $x = \varphi(u, v)$, $y = \psi(u, v)$ может геометрически рассматриваться как коэффициент растяжения (или сжатия) площади, вызванного данным преобразованием, в точке $(a, b)$.

### 8.5. Вычисление двойного интеграла в полярных координатах

Рассмотрим преобразование двойного интеграла $\iint\limits_G f(x, y)\, dx\, dy$ при отображении области $\overline{G}'$ на область $\overline{G}$ системой уравнений

$$x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi, \tag{8.5.15}$$

где $(\rho, \varphi)$ — полярные координаты точки $(x, y)$. Якобиан преобразования (8.5.15) вычислен в пункте 8.1 и равен $\rho$.

Пусть функция $f(x, y)$ непрерывна в области $\overline{G}$ и пусть начало координат не принадлежит множеству $\overline{G}$.

Тогда выполнены условия теоремы 8.1 и справедливо равенство

$$\iint\limits_G f(x, y)\, dx\, dy = \iint\limits_{G'} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho d\rho\, d\varphi. \tag{8.5.16}$$

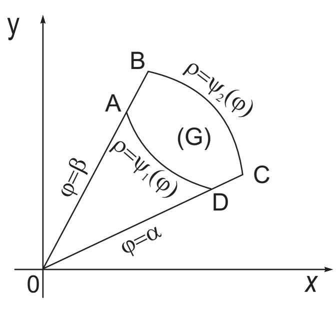



Рис. 31

Если рассматривать переменные $\rho$ и $\varphi$ как декартовы координаты в некоторой другой плоскости, то придется искать множество $\overline{G}'$ прообраз множества $\overline{G}$, что зачастую непросто. Поэтому удобнее определять границы интегрирования как границы изменения полярных координат точек множества $\overline{G}$. Проиллюстрируем указанную ситуацию на случае, изображенном на рис. 31.

Непосредственно в данном случае теорема 8.1 неприменима, т.к. якобиан в начале координат обращается в нуль. Поэтому поступим таким образом.

Пусть $\alpha$ и $\beta$ соответственно наименьшее и наибольшее значения полярного угла для точек множества $\overline{G}$ и пусть каждый луч $\varphi = \varphi_0$ при $\alpha < \varphi_0 < \beta$ пересекает границу множества $\overline{G}$ в двух точках, а крайние лучи $\varphi = \alpha$ и $\varphi = \beta$ пересекает границу области $\overline{G}$ по отрезкам $AB$ и $CD$, которые могут вырождаться в точку. Таким образом, граница множества $G$ состоит из двух отрезков (или двух точек или из отрезка и точки) и двух дуг. Эти дуги соответственно определяются какими-то уравнениями $\rho = \psi_1(\varphi)$, $\rho = \psi_2(\varphi)$ $(\alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta)$. Тогда пределы изменения для $\varphi$ будут $\alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta$, а для $\rho$ при фиксированном $\varphi$: $\psi_1(\varphi) \leqslant \rho \leqslant \psi_2(\varphi)$. Следовательно, будем иметь

$$\iint\limits_G f(x,y)dxdy = \iint\limits_G \rho f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho d\rho d\varphi = \int\limits_\alpha^\beta d\varphi \int\limits_{\psi_1(\varphi)}^{\psi_2(\varphi)} \rho f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)d\rho. \quad (8.5.17)$$

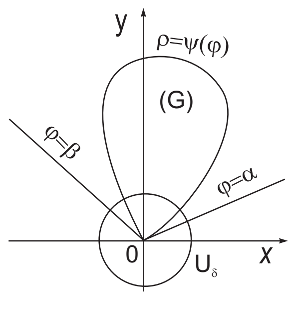



Рис. 32

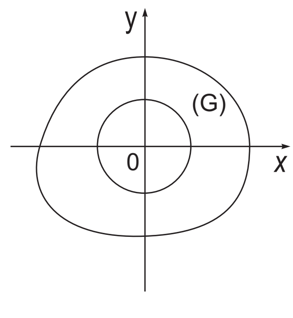



Рис. 33

Если же область $\overline{G}$ содержит начало координат, как показано на рис. 32, то окружаем точку $O$ (начало координат) окрестностью $U_\delta$ достаточно малого радиуса $\delta$ и рассматриваем область $G_\delta = G \setminus U_\delta$. Применяя к области $G_\delta$ формулу (8.5.17), будем иметь

$$\iint\limits_{G_\delta} f(x,y)dx\,dy = \int\limits_{\alpha_1}^{\beta_1} d\varphi \int\limits_{\delta}^{\psi(\varphi)} \rho f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)d\rho,$$

где $\alpha_1$ и $\beta_1$ — крайние значения $\varphi$ для области $\overline{G}_\delta$, а $\rho = \psi(\varphi)$ — уравнение границы области $\overline{G}$. Замечая, что $\lim\limits_{\delta\to 0}\alpha_1 = \alpha$ и $\lim\limits_{\delta\to 0}\beta_1 = \beta$, переходим в последнем равенстве к пределу при $\delta \to 0$ и получаем

$$\begin{aligned}\iint\limits_{\overline{G}} f(x,y)dx\,dy = \lim_{\delta\to 0}\int\limits_{\alpha_1}^{\beta_1} d\varphi \int\limits_{\delta}^{\psi(\varphi)} \rho f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)d\rho = \\ = \int\limits_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int\limits_{0}^{\psi(\varphi)} \rho f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)d\rho.\end{aligned} \tag{8.5.18}$$

Сделанный переход к пределу законен, т.к. в силу ограниченности функции $f(x,y)$

$$\lim_{\delta\to 0}\int\limits_{\alpha_1}^{\beta_1} d\varphi \int\limits_{0}^{\delta} \rho f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)d\rho = 0.$$

Если же начало координат оказывается строго внутри области $\overline{G}$, то, рассуждая аналогично предыдущему случаю, будем иметь

$$\iint\limits_{G} f(x,y)dx\,dy = \int\limits_{0}^{2\pi} d\varphi \int\limits_{0}^{\psi(\varphi)} \rho f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)d\rho, \tag{8.5.19}$$

где $\rho = \psi(\varphi)$ — уравнение границы области $\overline{G}$.

## 8.6. Примеры

1°. Перейти к полярным координатам и расставить пределы интегрирования в том и другом порядке в интеграле $I = \int\limits_0^1 dx \int\limits_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,dy$.

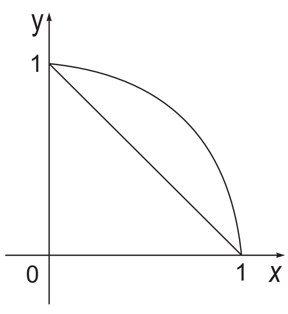



Рис. 34

*Решение.* Прежде всего, надо восстановить область интегрирования. Она определяется условиями $0 \leqslant x \leqslant 1$, $1 - x \leqslant y \leqslant \sqrt{1-x^2}$, из которых следует, что область интегрирования ограничена верхней полуокружностью $y = \sqrt{1-x^2}$ и прямой $y = 1 - x$

(см. рис. 34). После перехода к полярным координатам интеграл $I$ примет вид

$$I = \iint\limits_G \rho f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi) d\rho\, d\varphi,$$

а уравнения окружности и прямой: $\rho = 1$ и $\rho = \dfrac{1}{\sin\varphi + \cos\varphi}$. Точки $(1;0)$ и $(0;1)$ имеют соответственно полярные координаты $\rho = 1$, $\varphi = 0$ и $\rho = 1$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Так что полярные координаты точек области $G$ изменяются в пределах: $0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$, $\dfrac{1}{\sin\varphi + \cos\varphi} \leqslant \rho \leqslant 1$.

Значит, имеем

$$I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_{\frac{1}{\sin\varphi + \cos\varphi}}^{1} \rho f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi) d\rho.$$

Чтобы изменить порядок интегрирования, находим наименьшее и наибольшее значения $\rho$ для точек множества $G$. Представим уравнение прямой в виде $\rho = \dfrac{1}{\sqrt{2}\cos\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right)}$. Следовательно, наименьшее значение $\rho$ равно $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Для нахождения пределов интегрирования по $\varphi$ ищем точки пересечения окружности с прямой, что приводит к уравнению

$$\rho = \frac{1}{\sqrt{2}\cos\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right)}.$$

Решая его относительно $\varphi$, получаем два корня

$$\varphi_1 = \frac{\pi}{4} - \arccos\frac{1}{\rho\sqrt{2}} \quad \text{и} \quad \varphi_2 = \frac{\pi}{4} + \arccos\frac{1}{\rho\sqrt{2}}.$$

В итоге имеем

$$I = \int\limits_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1} \rho\, d\rho \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi) d\varphi.$$

$2^\circ$. Вычислить интеграл $\iint\limits_G e^{-x^2-y^2}\, dx\, dy$ по кругу $x^2 + y^2 \leqslant r^2$.

*Решение.* Переходим к полярным координатам, т.е. производим в интеграле замену переменных $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, используя формулу (8.5.19). Область изменения полярных координат для круга: $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, $0 \leqslant \rho \leqslant r$. Поэтому имеем

$$\iint\limits_G e^{-x^2-y^2}\, dx\, dy = \iint\limits_G e^{-\rho^2} \rho\, d\rho\, d\varphi = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{r} e^{-\rho^2} \rho\, d\rho = \pi(1 - e^{-r^2}).$$

Итак,

$$\iint\limits_G e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy = \pi(1-e^{-r^2}). \tag{8.6.20}$$

3°. Найти площадь фигуры, определяемой уравнениями

$$(x^2+y^2)^2 = 2a^2(x^2-y^2), \quad x^2+y^2 \geqslant a^2 \quad (a>0). \tag{8.6.21}$$

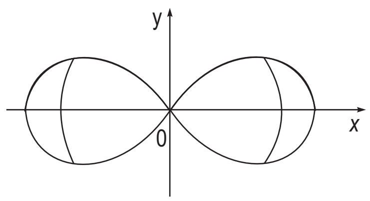



Рис. 35

*Решение.* Заданная фигура симметрична относительно координатных осей, т.к. при замене $x$ на $-x$ и $y$ на $-y$ оба условия удовлетворяются. В полярных координатах соотношения (8.6.21) примут вид

$$\rho = a\sqrt{2\cos 2\varphi}, \quad \rho \geqslant a.$$

Кривая, определяемая указанными выше уравнениями, называется лемнискатой Бернулли. В силу симметрии фигуры достаточно ограничиться площадью ее части, расположенной в первом координатном углу (рис. 35), и учетверить ее. Эта часть, которую мы обозначим через $G$, ограничена лемнискатой, окружностью $\rho = a$ и отрезком полярной оси (оси $x$). Чтобы определить область изменения полярного угла, находим точку пересечения лемнискаты и окружности. Для этого решаем уравнение $a\sqrt{2\cos 2\varphi} = a$. В результате получаем $\cos 2\varphi = \frac{1}{2}$ и $\varphi = \frac{\pi}{6}$. Значит, область изменения полярного угла будет $0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{6}$, а полярный радиус при фиксированном $\varphi$ изменяется от $\rho = a$ до $\rho = a\sqrt{2\cos 2\varphi}$. Следовательно, согласно формуле (8.5.18) имеем

$$mG = \iint\limits_G \rho\,d\rho\,d\varphi = \int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} d\varphi \int\limits_a^{a\sqrt{\cos 2\varphi}} \rho\,d\rho = \frac{1}{2}a^2 \int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} (2\cos 2\varphi - 1) = \frac{1}{12}a^2(3\sqrt{3}-\pi),$$

а вся искомая площадь равна $\frac{1}{3}a^2(3\sqrt{3}-\pi)$.

4°. Выразить площадь криволинейного сектора $G$, ограниченного линиями $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$ $(\alpha < \beta)$ и $\rho = f(\varphi)$.

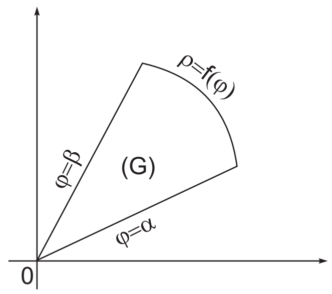



Рис. 36

*Решение.* Данная фигура изображена на рис. 36. Каждый луч $\varphi = \varphi_0$, где $\alpha \leqslant \varphi_0 \leqslant \beta$ пересекает границу множества $G$ в двух точках. Область изменения полярных координат для данного множества $G$ будет $\alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta$, $0 \leqslant \rho \leqslant f(\varphi)$. В силу формулы (8.5.18) получаем, что

$$mG = \int\limits_{al}^{\beta} d\varphi \int\limits_{0}^{f(\varphi)} \rho\, d\rho = \frac{1}{2} \int\limits_{\alpha}^{\beta} f^2(\varphi)\, d\varphi.$$

Эта формула выводится другим методом в интегральном исчислении функций одной переменной.

5°. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $x + y = a$, $x + y = b$, $y = \alpha x$, $y = \beta x$ $(0 < a < b;\ 0 < \alpha < \beta)$.

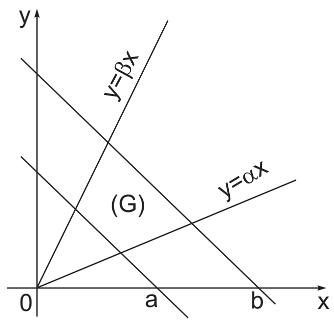



Рис. 37

*Решение.* Заданное множество изображено на рис. 37. На нем хорошо видно, что в декартовых координатах для вычисления площади множество $G$ придется разбивать его на части и при том учитывать расположение точек пересечения друг относительно друга. Вычисления будут гораздо короче, если произвести замену переменных $x + y = u$, $\dfrac{y}{x} = v$, т.к. область изменения новых переменных $a \leqslant u \leqslant b$, $\alpha \leqslant v \leqslant \beta$ — есть прямоугольник.

Легко видеть, что обратное отображение задается уравнениями

$$x = \frac{u}{v+1}, \quad y = \frac{uv}{v+1}.$$

Его якобиан равен

$$\frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{v+1} & -\dfrac{u}{(v+1)^2} \\ \dfrac{v}{v+1} & \dfrac{u}{(v+1)^2} \end{vmatrix} = \frac{u}{(v+1)^2}$$

и отличен от нуля. Тогда на основании формулы (8.4.14) имеем

$$mG = \iint\limits_{G'} \left| \frac{D(x,y)}{D(u,v)} \right| du\, dv = \int\limits_a^b u\, du \int\limits_\alpha^\beta \frac{u}{(v+1)^2} = \frac{(b^2-a^2)(\beta-\alpha)}{2(\alpha+1)(\beta+1)}.$$

6°. Вычислить площадь области $G$, ограниченной гиперболами $xy = a$, $xy = b$ и параболами $y^2 = mx$ и $y^2 = nx$, где $0 < a < b$ и $0 < m < n$ (рис. 38).

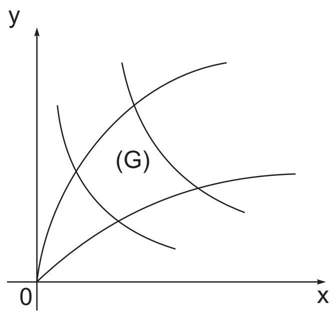



Рис. 38

*Решение.* Положим

$$xy = u, \quad \frac{y^2}{x} = v \quad (u > 0, v > 0).$$

Очевидно, что область изменения переменных $u$ и $v$ есть прямоугольник $G' = [a,b] \times [\alpha, \beta]$. Для нахождения якобиана $\dfrac{D(x,y)}{D(u,v)}$ в данном примере удобнее сначала найти якобиан $\dfrac{D(u,v)}{D(x,y)}$:

$$\frac{D(u,v)}{D(x,y)} = \begin{vmatrix} u'_x & u'_y \\ v'_x & v'_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y & x \\ -\dfrac{y^2}{x^2} & \dfrac{2y}{x} \end{vmatrix} = \frac{3y^2}{x} = 3v.$$

Тогда имеем

$$\frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \frac{1}{3v},$$

а потому

$$mG = \iint\limits_{G'} \left| \frac{D(x,y)}{D(u,v)} \right| du\, dv = \frac{1}{3} \int\limits_a^b du \int\limits_m^n \frac{dv}{v} = \frac{1}{3}(b-a) \ln \frac{n}{m}.$$

7°. Найти объем эллипсоида

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leqslant 1 \quad (a > 0, b > 0, c > 0).$$

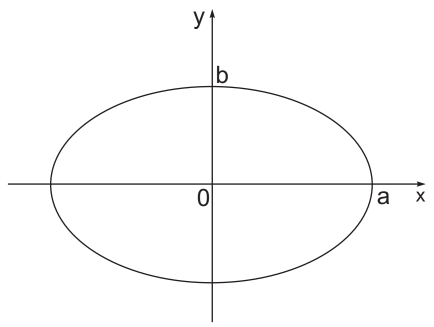



Рис. 39

*Решение.* Из соображений симметрии следует, что объем эллипсоида $V$ равен

$$V = 2 \iint\limits_G z\, dx\, dy = 2c \iint\limits_G \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}\, dx\, dy,$$

где $G$ — проекция эллипсоида на плоскость $xOy$ есть эллипс $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \leqslant 1$ (см. рис. 39). Делаем замену переменных

$$x = a\rho \cos\varphi, \quad y = a\rho \sin\varphi. \tag{8.6.22}$$

Криволинейные координаты $\rho, \varphi$, определяемые этим отображением, называются обобщенными полярными координатами. Найдем якобиан преобразования (8.6.22). Согласно определения

$$\frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} a\cos\varphi & -a\rho\sin\varphi \\ b\sin\varphi & a\rho\cos\varphi \end{vmatrix} = ab\rho.$$

Область изменения координат $\rho, \varphi$ определяется из эллипса $G$. Она характеризуется неравенствами $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$ и $0 \leqslant \rho \leqslant 1$. Применяя формулу (8.5.19), имеем

$$V = 2abc \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 \sqrt{1-\rho^2}\rho\, d\rho = 2abc \cdot 2\pi \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{2}{3}(1-\rho^2)^{3/2} \Bigg|_0^1 = \frac{4}{3}\pi abc.$$

Если $a = b = c = r$, получаем известную формулу объема шара.

# Глава 3

## Кратные интегралы

Мы переходим к обобщению материла второй главы, в которой на примере двойного интеграла были показаны основные задачи, возникающие в теории многомерного интегрирования.

Если в одномерном случае рамки числовой прямой вынуждают нас ограничиваться интегрированием по промежуткам (включая и бесконечные промежутки), то в многомерном случае (особенно при $n > 2$) увеличение размерности пространства приводит к появлению таких областей интегрирования, как кривые и поверхности. Так что наряду с определенным интегралом появляются еще криволинейные и поверхностные интегралы, у которых размерность области интегрирования меньше размерности пространства $\mathbb{R}^n$.

Чтобы избежать некоторых трудностей, для многомерного определенного интеграла будет применена иная схема построения теории, нежели та, которая использовалась для двойного интеграла.

### § 1. Понятие интеграла по $n$-мерному координатному параллелепипеду

Сначала будет рассмотрен простейший случай, когда область интегрирования есть координатный параллелепипед. Случай, на который легко переносится большая часть содержания предыдущей главы.

**Определение.** Множество $Q = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \ldots \times [a_n, b_n]$ называется $n$-мерным координатным параллелепипедом, а числовая величина

$$v(Q) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \ldots (b_n - a_n)$$

называется объемом координатного параллелепипеда $Q$.

Одномерный параллелепипед является отрезком. Двумерный параллелепипед есть координатный прямоугольник, т.е. прямоугольник со сторонами, параллельными координатным осям. Одномерный объем есть длина, двумерный объем — площадь.

**Определение.** Пусть $A \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченное множество. Числовая величина

$$d(A) = \sup_{x,y \in A} \|x - y\|$$

называется диаметром множества $A$.

Для круга $d(A)$ равно диаметру круга. В случае $n$-мерного параллелепипеда $Q$ имеем

$$d(Q) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i)^2}.$$

Отсюда следует, что при $n = 2$ и $n = 3$ величина $d(Q)$ есть диагональ. Сохраним этот термин и в общем случае. Очевидно, что утверждение $d(Q) \to 0$ равносильно утверждению $\forall i = 1, 2, \ldots, n$: $b_i - a_i \to 0$.

**Определение.** Семейство $T = \{Q_j\}_{j=1}^{N}$ $n$-мерных параллелепипедов, попарно не имеющих внутренних точек, называется разбиением параллелепипеда $Q$, если

$$Q = \bigcup_{j=1}^{N} Q_j.$$

Укажем один из возможных способов разбиения. Пусть $a_i = t_0^{(1)} < \ldots < t_i^{(i)} = b_i$ и $Q_{j_1 j_2 \ldots j_n} = \left[t_{j_1}^{(1)}, t_{j_1+1}^{(1)}\right] \times \left[t_{j_2}^{(2)}, t_{j_2+1}^{(2)}\right] \times \ldots \times \left[t_{j_n}^{(n)}, t_{j_n+1}^{(n)}\right]$. Тогда параллелепипеды $Q_j$ $(j = 1, 2, \ldots, N)$, где $N = k_1 k_2 \ldots k_n$, образуют разбиение параллелепипеда $Q$.

Если в каждой элементарной части $Q_j$ выбрать точку $\xi_j$ и обозначить через $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_N)$, то пара $(T, \xi)$ называется отмеченным разбиением параллелепипеда $Q$. Обозначим через $\lambda(T) = \max_j d(Q_j)$ и через $B_\delta$ — множество всех отмеченных разбиений $(T, \xi)$ с $\lambda(T) < \delta$, где $\delta > 0$. Как легко видеть, семейство множеств $\{B_\delta\}$ образует базу в $\mathbb{R}^m$. Эту базу обозначаем $\lambda(T) \to 0$.

Отмеченному разбиению $(T, \xi)$ и числовой функции $f(x) = f(x_1, \ldots, x_n)$, заданной на параллелепипеде $Q$, отвечает интегральная сумма

$$\mathfrak{S} = \sum_{j=1}^{N} f(\xi_j) v(Q_j).$$

**Определение.** Если существует конечный $\lim\limits_{\lambda \to 0} \mathfrak{S} = I$, то функция $f(x)$ называется интегрируемой на параллелепипеде $Q$, а сам предел $I$ называется $n$-кратным ($n$-мерным) интегралом функции $f(x)$ по параллелепипеду $Q$.

Вводим для него обозначение

$$\int\limits_Q f(x)\, dx = \underbrace{\int\int \dots \int}_{Q} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n.$$

Утверждение $\lim\limits_{\lambda \to 0} \mathfrak{S} = I$ расшифровывается следующим образом:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall (T, \xi) : \lambda(T) < \delta \Rightarrow |\mathfrak{S} - I| < \varepsilon.$$

Двукратный интеграл — это двойной интеграл, достаточно изученный во второй главе. Трехкратный интеграл принято называть тройным интегралом и обозначать

$$\iiint\limits_Q f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz.$$

Данные случаи наиболее интересны для приложений.

Как и для двойного интеграла, справедливо утверждение.

**Теорема 1.1.** *Если функция $f(x)$ интегрируема на параллелепипеде $Q$, то она и ограничена на $Q$.*

Доказательство теоремы точно такое же, как и в двумерном случае.

### § 2. $n$-мерные суммы Дарбу. Верхний и нижний интегралы

Пусть $f(x)$ функция, ограниченная на параллелепипеде $Q$, $T = \{Q_j\}_{j=1}^N$ — разбиение $Q$, $m_j = \inf\limits_{Q_j} f(x)$ и $M_j = \sup\limits_{Q_j} f(x)$. Суммы

$$s_T = \sum_{j=1}^N m_j v(Q_j), \quad S_T = \sum_{j=1}^N M_j v(Q_j)$$

называются соответственно нижней и верхней $n$-мерными суммами Дарбу.

$n$-мерные суммы Дарбу на параллелепипеде $Q$ обладают теми же свойствами, что и двумерные суммы. Сохраняются и их доказательства. Напомним формулировки этих свойств.

1. Для данного разбиения $T$, $S_T = \sup\{\mathfrak{S}\}, \quad s_T = \inf\{\mathfrak{S}\}$.

**Определение.** Разбиение $T'$ называется продолжением разбиения $T$, если каждая элементарная часть разбиения $T'$ содержится в какой-то элементарной части разбиения $T$.

2. При продолжении разбиения верхняя сумма Дарбу не увеличивается, а нижняя сумма Дарбу не уменьшается.

3. Ни одна нижняя сумма Дарбу не превышает ни одной верхней суммы Дарбу, даже если они отвечают разным разбиениям.

По определению $\sup\limits_{T}\{s_T\} = \underline{I}, \quad \inf\limits_{T}\{S_T\} = \overline{I}$,

Числовые величины $\underline{I}$ и $\overline{I}$ соответственно называются нижним и верхним интегралами Римана. По аналогии с двумерным случаем, получаем из третьего свойства сумм Дарбу неравенство $s_T \leqslant \underline{I} \leqslant \overline{I} \leqslant S_T$, справедливое для любого разбиения $T$.

## § 3. Существование $n$-кратного интеграла по координатному параллелепипеду

**Теорема 3.1.** *Пусть на параллелепипеде $Q$ определена ограниченная функция $f(x)$. Тогда эквивалентны следующие утверждения:*

$$\begin{aligned} &1^\circ. \quad \underline{I} = \overline{I}; \\ &2^\circ. \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \exists\, T : S_T - s_T < \varepsilon; \\ &3^\circ. \quad \lim_{\lambda \to 0}(S_T - s_T) = 0; \\ &4^\circ. \quad \lim_{\lambda \to 0} \mathfrak{S} = I. \end{aligned} \tag{3.0.1}$$

*При этом $I = \underline{I} = \overline{I}$.*

Доказательство теоремы проведем по схеме: $1 \Longrightarrow 2 \Longrightarrow 3 \Longrightarrow 4 \Longrightarrow 1$, согласно которой каждое из высказанных условий вытекает из любого другого условия. Таким образом, доказательство теоремы представится в виде четырех самостоятельных предложений.

**Лемма 1.** *Из $1^\circ$ следует $2^\circ$.*

Доказательство. Так как $\underline{I} = \sup\limits_{T}\{s_T\}$ и $\overline{I} = \inf\limits_{T}\{S_T\}$, то согласно второго свойства точных граней имеем

$$\forall \varepsilon > 0, \exists T_1, T_2 : s_{T_1} > \underline{I} - \frac{\varepsilon}{2} \text{ и } \; S_{T_2} < \overline{I} + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Пусть $T_1 = \{Q'_i\}$, $T_2 = \{Q''_j\}$ и $Q_{ij} = Q'_i \cap Q''_j$. Тогда $T = \{Q_{ij}\}$ будет разбиением параллелепипеда $Q$, являющимся продолжением каждого из разбиений $T_1$ и $T_2$. Поэтому

$$S_T - s_T \leqslant S_{T_2} - s_{T_1} < I + \frac{\varepsilon}{2} - \left(I - \frac{\varepsilon}{2}\right) = \varepsilon.$$

Лемма доказана.

**Лемма 2.** *Из* $2^\circ$ *следует* $3^\circ$.

Доказательство. Пусть $|f(x)| \leqslant K$. По условию

$$\forall \varepsilon > 0, \exists T^* = \{Q^*_j\}_{j=1}^N : S_{T^*} - s_{T^*} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

В каждое $Q^*_j$ впишем $G'_j$ такое, что оно строго лежит внутри $Q^*_j$ и что

$$v(Q^*_j) - v(Q'_j) < \frac{\varepsilon}{4KN}. \qquad (*)$$

Обозначим $\bigcup\limits_{j=1}^N Q'_j = Q'$, $\Gamma' = \partial Q'$ и $\Gamma^* = \bigcup\limits_{j=1}^N \partial Q'_j$. Ввиду того, что $\Gamma'$ и $\Gamma^*$ не пересекаются, имеем

$$\rho(\Gamma', \Gamma^*) = \delta > 0.$$

Возьмем теперь произвольное разбиение $T = \{Q_i\}$ с $\lambda(T) < \delta$. Элементарные части $Q_i$ распределяются на 2 группы. В первую группу включаем все параллелепипеды $Q_i$, содержащие хотя бы одну точку множества $\Gamma^*$. Во вторую группу отправим все остальные элементарные части, т.е. такие $Q_i$, для каждого из которых $\exists Q^*_j$: $Q_i \subset Q^*_j$. Следовательно,

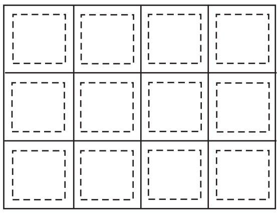


Рис. 1

$$S_T - s_T = \sum_i (M_i - m_i) v(Q_i) = \sum_{i \in \mathrm{I}} + \sum_{i \in \mathrm{II}}.$$

Поскольку расстояние от точек множества $\Gamma'$ до множества $\Gamma^*$ меньше $\delta$, то $\bigcup\limits_{i \in \mathrm{I}} \subset \bigcup\limits_{j=1}^N (Q^*_j \setminus Q'_j)$. Поэтому на основании неравенства $(*)$ получаем

$$\sum_{i \in \mathrm{I}} v(Q_i) \leqslant \sum_{j=1}^N \left[v(Q^*_j) - v(Q'_j)\right] < \frac{\varepsilon}{4K}$$

и

$$\sum_{i\in \mathrm{I}}(M_i-m_i)v(Q_i)\leqslant 2K\sum_{i\in \mathrm{I}}v(Q_i)<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Для оценки второй суммы заметим, что параллелепипеды $Q_i$ из второй группы распределяются по всевозможным параллелепипедам $Q_j^*$. Раз $Q_i$ содержится в некотором $Q_j^*$, то $M_i-m_i\leqslant M_j^*-m_j^*$. Следовательно,

$$\sum_{i\in \mathrm{I}}(M_i-m_i)v(Q_i)=\sum_{j}\sum_{i}^{j}(M_i-m_i)v(Q_i)\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{j}(M_j^*-m_j^*)\sum_{i}^{j}v(Q_i)\leqslant\sum_{j}(M_j^*-m_j^*)v(Q_j^*)\leqslant S_{T^*}-s_{T^*}<\frac{\varepsilon}{2}.$$

В итоге $S_T-s_T<\varepsilon$ для каждого разбиения $T$ с $\lambda(T)<\varepsilon$, что равносильно утверждению $3^*$.

**Лемма 3.** *Из* $3^\circ$ *следует* $4^\circ$*.*

Доказательство. В расшифрованном виде условие $\lim\limits_{\lambda\to 0}(S_T-s_T)=0$ выглядит так: для любого

$$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\forall T:\lambda(T)<\delta\Rightarrow|S_T-s_T|<\varepsilon.$$

В силу неравенства

$$s_T\leqslant\underline{I}\leqslant\overline{I}\leqslant S_T \tag{3.0.2}$$

имеем для каждого разбиения $T$ с $\lambda(T)<\delta$

$$0\leqslant\overline{I}-\underline{I}\leqslant S_T-s_T<\varepsilon.$$

Отсюда следует, что $\underline{I}=\overline{I}=I$ и неравенство (3.0.2) принимает вид

$$s_T\leqslant I\leqslant S_T.$$

Значит для разбиения $T$ с $\lambda(T)<\delta$ получаем соотношения

$$I-s_T\leqslant S_T-s_T<\varepsilon\quad\text{и}\quad S_T-I\leqslant S_T-s_T<\varepsilon,$$

что в итоге дает

$$I-\varepsilon<s_T\leqslant S_T<I+\varepsilon. \tag{3.0.3}$$

Так как для каждого конкретного разбиения выполнено неравенство

$$s_T \leqslant \mathfrak{S} \leqslant S_T,$$

то для любого разбиения $T$ с $\lambda(T) < \delta$ получаем

$$I - \varepsilon < \mathfrak{S} < I + \varepsilon,$$

чем лемма и доказана.

Замечание. Отметим попутно, что из неравенства (3.0.3) вытекают предельные равенства

$$\lim_{\lambda \to 0} s_T = \lim_{\lambda \to 0} S_T = I. \tag{3.0.4}$$

**Лемма 4.** *Из* $4^\circ$ *следует* $1^\circ$.

Доказательство. Дано $\lim\limits_{\lambda \to 0} \mathfrak{S} = I$. Это значит, что для

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall T : \lambda(T) < \delta \Rightarrow I - \frac{\varepsilon}{2} < \mathfrak{S} < I + \frac{\varepsilon}{2}. \tag{3.0.5}$$

Согласно первому свойству сумм Дарбу при фиксированном разбиении $T$ имеют место утверждения

$$s_T = \inf\{\mathfrak{S}\}, \quad S_T = \sup\{\mathfrak{S}\}.$$

Отсюда в силу (3.0.5) и (3.0.2) вытекают неравенства

$$I - \frac{\varepsilon}{2} \leqslant s_T \leqslant S_T \leqslant I + \frac{\varepsilon}{2}, \quad I - \varepsilon < \underline{I} \leqslant \overline{I} < +\varepsilon.$$

Так как $\varepsilon > 0$ произвольно, то это возможно лишь в случае, когда

$$\underline{I} = \overline{I} = I$$

Лемма доказана.

На этом закончено и доказательство теоремы 3.1.

Таким образом, показано, что есть два равносильных подхода к определению кратного интеграла. Один из них исходит из интегральных сумм: $I = \lim\limits_{\lambda \to 0} \mathfrak{S}$, а другой — из сумм Дарбу:

$$I = \sup_T \{s_T\} = \inf_T \{S_T\} \quad \text{или} \quad I = \lim_{\lambda \to 0} s_T = \lim_{\lambda \to 0} S_T.$$

## § 4. Множества лебеговой меры нуль и объема нуль

**Определение 1.** Пусть $A \in \mathbb{R}^n$. Будем говорить, что множество $A$ имеет меру Лебега, равную нулю, или короче лебегову меру нуль и писать $\mu A = 0$, если для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такую последовательность замкнутых координатных параллелепипедов $Q_1, Q_2, \ldots, Q_m, \ldots$, что

$$A \subset \bigcup_{m=1}^{\infty} Q_m \quad \text{и} \quad \sum_{m=1}^{\infty} v(Q_m) < \varepsilon.$$

**Лемма 1.** *Если $B \subset A$ и $\mu A = 0$, то $\mu B = 0$.*

Доказательство тривиально.

**Примеры.** 1. Пусть $A = \{x_1, x_2, \ldots, x_m, \ldots\}$ — некоторое счетное множество. Для каждого $m$ берем замкнутый параллелепипед $Q_m$, содержащий точку $x_m$ с объемом $v(Q_m) < \frac{\varepsilon}{2^m}$. Очевидно, что $A \subset \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} Q_m$. Кроме того, имеем

$$\sum_{m=1}^{\infty} v(Q_m) < \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^m} = \varepsilon.$$

Этим доказано: всякое счетное множество $A \subset \mathbb{R}^n$ имеет лебегову меру нуль.

2. Пусть $A \subset \mathbb{R}^n$ — произвольное конечное множество. Присоединим его к некоторому счетному множеству $B$. Множество $A$ есть подмножество счетного множества $C = A \cup B$. Так как $\mu C = 0$, то и $\mu A = 0$.

В итоге: всякое конечное множество $A \subset \mathbb{R}^n$ имеет лебегову меру нуль.

**Лемма 2.** *Если $A = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$ и при $\forall k$: $\mu A_k = 0$, то $\mu A = 0$.*

Доказательство. Для каждого натурального $k$ при $\forall \varepsilon > 0$ существует такая последовательность замкнутых параллелепипедов $Q_1^{(k)}, Q_2^{(k)}, \ldots, Q_m^{(k)}, \ldots$, что

$$A_k \subset \bigcup_{m=1}^{\infty} Q_m^{(k)} \quad \text{и} \quad \sum_{m=1}^{\infty} v\left(Q_m^{(k)}\right) < \frac{\varepsilon}{2^k}.$$

Тогда имеем

$$A \subset \bigcup_{m,k=1}^{\infty} Q_m^{(k)} \quad \text{и} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} v\left(Q_m^{(k)}\right) < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^k} = \varepsilon.$$

Лемма доказана.

Множество $\mathring{Q} = (a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times \ldots \times (a_n, b_n)$ называется открытым координатным параллелепипедом, а числовая величина $v(\mathring{Q}) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \ldots (b_n - a_n)$ называется его объемом.

Открытый параллелепипед есть, очевидно, внутренность замкнутого параллелепипеда $Q = [a_1, b_1], [a_2, b_2], \ldots, [a_n, b_n]$. Их объемы по определению совпадают.

Нетрудно показать, что в определении 1 замкнутые параллелепипеды можно заменить на открытые параллелепипеды.

**Определение 2.** Пусть $A \subset \mathbb{R}^n$. Говорят, что множество $A$ имеет лебегову меру нуль, если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется счетная система открытых параллелепипедов $\mathring{Q}_1, \mathring{Q}_2, \ldots, \mathring{Q}_m, \ldots$ такая, что

$$A \subset \bigcup_{m=1}^{\infty} \mathring{Q}_m \quad \text{и} \quad \sum_{m=1}^{\infty} v(\mathring{Q}_m) < \varepsilon.$$

**Лемма 3.** *Определения* 1 *и* 2 *множества лебеговой меры нуль эквивалентны.*

Доказательство. Из (2) следует (1). Добавив к открытым параллелепипедам $\mathring{Q}_m$ их границу, получим счетную систему $\{Q_m\}_{m=1}^{\infty}$ замкнутых параллелепипедов, покрывающую множество $A$ с суммой объемов $\sum\limits_{m=1}^{\infty} v\left(Q_m\right) < \varepsilon$.

Из (1) следует (2). По условию найдется такая счетная система замкнутых параллелепипедов $\{Q_m\}_{m=1}^{\infty}$, что

$$A \subset \bigcup_{m=1}^{\infty} Q_m \quad \text{и} \quad \sum_{m=1}^{\infty} v\left(Q_m\right) < \frac{\varepsilon}{2^n}.$$

Удвоим стороны $[a_i, b_i]$ каждого параллелепипеда $Q_m$ с тем, чтобы новый параллелепипед $Q'_m$ содержал $Q_m$. Их внутренности $\mathring{Q}'_1, \mathring{Q}'_2, \ldots, \mathring{Q}'_m, \ldots$ составят счетную систему открытых параллелепипедов, покрывающую множество $A$, с суммой объемов

$$\sum_{m=1}^{\infty} v(\mathring{Q}'_m) = \sum_{m=1}^{\infty} 2^n v\left(Q_m\right) < \varepsilon.$$

Лемма доказана.

**Определение 3.** Пусть $A \subset \mathbb{R}^n$. Будем говорить, что множество $A$ имеет объем нуль и писать $v(A) = 0$, если для любого $\varepsilon > 0$ можно указать конечную систему замкнутых параллелепипедов $Q_1, Q_2, \ldots, Q_m$, покрывающую множество $A$ с суммой объемов $\sum\limits_{j=1}^{m} v\left(Q_j\right) < \varepsilon$.

Простейшим примером множества объема нуль может служить любое конечное множество.

В определении 3 точно также как и определении 1 замкнутые параллелепипеды $Q_j$ можно заменить на открытые параллелепипеды $\overset{\circ}{Q}_j$.

**Теорема 4.1.** *Для того чтобы $v(A) = 0$ необходимо, а в случае компактности множества $A$ и достаточно, чтобы $\mu A = 0$.*

*Необходимость.* Если $v(A) = 0$, то согласно определению 3 для любого $\varepsilon > 0$ найдется конечная система замкнутых параллелепипедов $Q_1, Q_2, \ldots, Q_m$ такая, что

$$A \subset \bigcup_{j=1}^{m} Q_j \quad \text{и} \quad \sum_{j=1}^{m} v\left(Q_j\right) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Дополним эту систему какими-то замкнутыми параллелепипедами $Q_{m+1}, Q_{m+2}, \ldots$ с суммой объемов $\sum\limits_{j=m+1}^{\infty} v\left(Q_j\right) < \frac{\varepsilon}{2}$. В итоге имеем

$$A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j \quad \text{и} \quad \sum_{j=1}^{\infty} v\left(Q_j\right) < \varepsilon.$$

Значит, $\mu A = 0$.

*Достаточность.* Пусть $A$ — компактное множество и $\mu A = 0$. На основании определения 2 для каждого $\varepsilon > 0$ существует счетное покрытие множества $A$ открытыми параллелепипедами $\overset{\circ}{Q}_j$ с суммой объемов $\sum\limits_{j=1}^{\infty} v\left(\overset{\circ}{Q}_j\right) < \varepsilon$. В силу компактности множества $A$ из указанного покрытия можно выделить конечное подпокрытие $\{\overset{\circ}{Q}_{j_k}\}_{k=1}^{m}$ с суммой объемов

$$\sum_{k=1}^{m} v\left(\overset{\circ}{Q}_{j_k}\right) \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} v\left(\overset{\circ}{Q}_j\right) < \varepsilon.$$

Теорема доказана.

Теорема 4.1 означает, что класс $V$ множеств объема нуль содержится в классе $L$ множеств лебеговой меры нуль. Покажем, что класс $L$ существенно шире класса $V$. Для этого надо построить пример множества $A$, имеющего лебегову меру нуль и не являющегося множеством объема нуль. Заодно будет доказано, что в достаточности теоремы 3.1 нельзя снять условие компактности множества $A$. Начнем со вспомогательного предложения.

**Лемма 4.** *Для любого конечного покрытия*
$[\alpha_1, \beta_1], [\alpha_2, \beta_2], \ldots, [\alpha_m, \beta_m]$ *сегмента* $[a, b] \subset \mathbb{R}^1$ *имеем*

$$\sum_{j=1}^{m} (\beta_j - \alpha_j) \geqslant b - a.$$

Доказательство. Проведем индукцией по $m$. При $m = 1$ лемма очевидна. Пусть

$$[\alpha_1, \beta_1], [\alpha_2, \beta_2], \ldots, [\alpha_{m+1}, \beta_{m+1}]$$

— некоторое покрытие отрезка $[a, b]$. Точка $a$ покрывается одним из сегментов $[\alpha_j, \beta_j]$. Допустим, что $a \in [a_1, b_1]$. Тогда сегменты $[\alpha_2, \beta_2], \ldots, [\alpha_{m+1}, \beta_{m+1}]$ покрывают отрезок $[\beta_1, b]$. Для покрытия из $m$ сегментов лемма предполагается верной. Поэтому имеем

$$\sum_{j=2}^{m+1} (\beta_j - \alpha_j) \geqslant b - \beta_1.$$

Но тогда получаем, что

$$\sum_{j=1}^{m+1} (\beta_j - \alpha_j) \geqslant (b - \beta_1) + (\beta_1 - \alpha_1) \geqslant b - a.$$

Лемма доказана.

Переходим, наконец, к построению контрпримера. Пусть $\mathbb{Q}$ — множество рациональных чисел на числовой прямой. Рассмотрим множество $A = \mathbb{Q} \cap [0; 1]$ — часть множества $\mathbb{Q}$, расположенную на отрезке $[0; 1]$. Поскольку множество $A$ всюду плотно на сегменте $[0; 1]$, то его замыкание $\overline{A} = [0; 1]$. По той же причине множество $A$ счетно и значит имеет лебегову меру нуль.

Предположим, что объем $v(A) = 0$. Тогда, с одной стороны, согласно определения 3 для $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$ найдется такая конечная система сегментов $\{[\alpha_i, \beta_i]\}_{j=1}^{m}$, что

$$A \subset \bigcup_{j=1}^{m} [\alpha_i, \beta_i] \quad \text{и} \quad \sum_{j=1}^{m} (\beta_j - \alpha_j) < \frac{1}{2}.$$

С другой стороны, т.к. замкнутое множество $F = \bigcup\limits_{j=1}^{m} [\alpha_i, \beta_i]$ содержит множество $A$, то $F$ содержит и замыкание $\overline{A} = [0; 1]$. Следовательно, на основании леммы 4 имеем отсюда, что

$$\sum_{j=1}^{m} (\beta_j - \alpha_j) \geqslant 1.$$

Полученное противоречие доказывает, что множество $A$, будучи множеством лебеговой меры нуль, не является множеством объема нуль.

Замечание. Так как $A$ не есть замкнутое множество, то оно не является и компактным множеством.

## § 5. Колебание функции в точке

Пусть $A \in \mathbb{R}^n$ и $f : A \to \mathbb{R}^1$ — ограниченная функция. Числовая величина

$$\omega(f; A) = M_A - m_A, \quad \text{где} \quad M_A = \sup_A f(x) \quad \text{и} \quad m_A = \inf_A f(x)$$

называется колебанием функции $f(x)$ на множестве $A$.

Если $x_0 \in A$, $U_\delta(x_0)$ — $\delta$-окрестность точки $x_0$, $E_\delta = A \cap U_\delta(x_0)$, то величину

$$\omega_\delta = \omega(f; E_\delta)$$

естественно называть колебанием функции $f(x)$ в $\delta$-окрестности точки $x_0$.

Легко видеть, что $\omega_\delta$ возрастающая функция по переменной $\delta$.

**Определение.** Числовая величина

$$\omega(f; x_0) = \lim_{\delta \to 0} \omega_\delta \tag{5.0.1}$$

называется колебанием функции $f(x)$ в точке $x_0$.

Отметим следующие очевидные свойства величины $\omega(f; x_0)$:

1. Колебание $\omega(f; x_0)$ определено и конечно в каждой точке $x_0 \in A$.

2. В любой точке $x_0$ множества $A$ $\omega(f; x_0) \geqslant 0$.

3. Так как $E_\delta \subset A$, то в каждой точке $x_0 \in A$ при любом $\delta > 0$

$$\omega(f; x_0) \leqslant \omega_\delta \leqslant \omega(f; A). \tag{5.0.2}$$

**Теорема Бэра.** *Пусть $A \subset \mathbb{R}^n$, $f : A \to \mathbb{R}^1$ и $x_0 \in A$. Для того чтобы функция $f(x)$ была непрерывна в точке $x_0$, необходимо и достаточно, чтобы колебание функции в этой точке*

$$\omega(f; x_0) = 0.$$

*Необходимость.* Если функция $f(x)$ непрерывна в точке $x_0$, то для

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in E_\eta : f(x_0) - \frac{\varepsilon}{2} < f(x) < f(x_0) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Поэтому имеем

$$f(x_0) - \frac{\varepsilon}{2} \leqslant m_\eta \leqslant M_\eta \leqslant f(x_0) + \frac{\varepsilon}{2}$$

и $\omega_\eta = M_\eta - m_\eta < \varepsilon$. Тогда при $\delta < \eta$ получаем $\omega_\delta \leqslant \omega_\eta < \varepsilon$, т.е. $\omega(f; x_0) = \lim\limits_{\delta \to 0} \omega_\delta = 0$.

*Достаточность.* Пусть $\omega(f; x_0) = \lim\limits_{\delta \to 0} \omega_\delta = 0$. Тогда имеем

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \omega_\delta < \varepsilon.$$

Если взять произвольное $x \in E_\delta$, т.е. если $x \in A$ и $|x - x_0| < \delta$, то получаем

$$|f(x) - f(x_0)| \leqslant M_\delta - m_\delta = \omega_\delta < \varepsilon.$$

Теорема доказана.

Из теоремы Бэра вытекает еще одна характеристика непрерывности функции в точке.

**Определение.** Пусть $f : A \to \mathbb{R}^1$ и $x_0 \in A$. Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке $x_0$, если в этой точке $\omega(f; x_0) = 0$.

Из теоремы Бэра также следует, что условие $\omega(f; x_0) > 0$ есть характеристика точки разрыва функции $f(x)$.

Рассмотрим далее два вспомогательных утверждения, которые потребуются в следующем параграфе.

Введем для $\varepsilon > 0$ множество $B_\varepsilon = \{x \in A : \omega(f; x) \geqslant \varepsilon\}$. В силу вышесказанного все точки множества $B_\varepsilon$ являются точками разрыва функции $f(x)$.

**Лемма 1.** *Если $A$ — замкнутое множество и $f : A \to \mathbb{R}^1$ — ограниченная функция, то для каждого $\varepsilon > 0$ множество $B_\varepsilon$ замкнутое.*

Доказательство. Пусть $\xi$ произвольная предельная точка множества $B_\varepsilon$. Так как множество $A$ замкнуто, то точка $\xi \in A$ и в ней определена величина $\omega(f; \xi)$. В каждой окрестности $U_\delta(\xi)$ содержатся точки множества $B_\varepsilon$. Тогда в силу неравенства (5.0.2) колебание $\omega_\delta \geqslant \varepsilon$, а значит и

$$\omega(f;\xi) = \lim_{\lambda\to 0} \omega_\delta \geqslant \varepsilon.$$

Следовательно, имеем: $\xi \in A$ и множество $B_\varepsilon$ замкнутое. Лемма доказана.

**Лемма 2.** *Если $Q$ — замкнутый параллелепипед, $f : Q \to \mathbb{R}^1$ — ограниченная функция и если в каждой точке $x \in Q$ выполнено неравенство $\omega(f;x) < \varepsilon$, то найдется такое разбиение $T$ параллелепипеда $Q$, что*

$$S_T - s_T < \varepsilon \cdot v(Q).$$

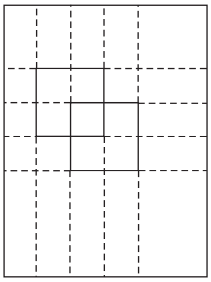


Рис. 2

Доказательство. Так как по условию $\omega(f;x) = \lim_{\delta\to 0} \omega_\delta < \varepsilon$, то имеется окрестность $U_\delta(x)$ точки $x$ с $\omega_\delta < \varepsilon$. Рассмотрим замкнутый параллелепипед $W_x \subset U_\delta(x)$, внутри которого содержится точка $x$. Для каждого $W_x$ выполнено неравенство $\omega(f;W_x) < \delta$, ибо $\omega(f;W_x) \leqslant \omega_\delta$. Параллелепипеды $\overset{\circ}{W}_x$ образуют открытое покрытие замкнутого параллелепипеда $Q$. В силу компактности существует конечное подпокрытие $\overset{\circ}{W}_{x_1}, \overset{\circ}{W}_{x_2}, \ldots, \overset{\circ}{W}_{x_m}$ множества $Q$. Можно считать, что все $W_{x_i} \subset Q$ (в противном случае берем $W_{x_i} \cap Q$). Продолжив грани параллелепипедов $W_{x_i}$ (рис. 2) до границы множества $Q$, получаем некоторое разбиение $T = \{Q_j\}_{j=1}^N$ параллелепипеда $Q$. Так как $Q_j$ входит в какое-то $W_{x_i}$, то

$$\omega_j = \omega(f;Q_j) \leqslant \omega(f;W_{x_i}) < \varepsilon.$$

Тогда

$$S_T - s_T = \sum_{j=1}^{T} \omega_j v(Q_j) < \varepsilon \sum_{j=1}^{T} v(Q_j) = \varepsilon \cdot v(Q).$$

Лемма доказана.

## § 6. Критерий Лебега интегрируемости функции на координатном параллелепипеде

Пусть $Q$ — замкнутый параллелепипед, $f : Q \to \mathbb{R}^1$ — ограниченная функция, $B$ — множество точек разрыва этой функции.

**Теорема Лебега.** *Для того чтобы ограниченная функция $f(x)$ была интегрируемой на множестве $Q$, необходимо и достаточно, чтобы $\mu B = 0$.*

*Достаточность.* Пусть $\mu B = 0$. Зададим какое-то $\varepsilon > 0$ и рассмотрим множество $B_\varepsilon$. Поскольку $B_\varepsilon \subset B$, то $\mu B_\varepsilon = 0$. Согласно лемме 1 из предыдущего параграфа множество $B_\varepsilon$ замкнуто, а потому компактно. Тогда по теореме 4.1 и $v(B_\varepsilon) = 0$. Следовательно, найдется конечное покрытие множества $B_\varepsilon$ параллелепипедами $W_1, W_2, \ldots, W_m$ с суммой объемов $\sum\limits_{i=1}^{m} v(W_i) < \varepsilon$. Продолжив грани параллелепипедов $W_i$ до пересечения с границей $\partial Q$, получим некоторое разбиение $T = \{Q_j\}_{j=1}^{N}$ параллелепипеда $Q$.

Элементарные части разбиения $T$ распределим на две группы. Первую группу составят $Q_j \subset W_i$ при некотором $i$. Во вторую группу включим все остальные элементарные части $Q_j$. Соответственно и сумма $S_T - s_T$ разобьется на две суммы:

$$S_T - s_T = \sum_{j \in \mathrm{I}} \omega_j v(Q_j) + \sum_{j \in \mathrm{II}} \omega_j v(Q_j).$$

Пусть $|f(x)| \leqslant K$. Тогда первая сумма оценивается так: $M_j - m_j \leqslant 2K$ и

$$\sum_{j \in \mathrm{I}} \omega_j v(Q_j) \leqslant 2K \sum_{j \in \mathrm{I}} v(Q_j) \leqslant 2K \sum_{i=1}^{m} v(Q_j) < 2K\varepsilon.$$

Если же $j \in \mathrm{II}$, то параллелепипед $Q_j$ не содержит точек множества $B_\varepsilon$ и в каждой точке $x \in Q_j$ имеем $\omega(f; x) < \varepsilon$. Применив теперь к $Q_j$ лемму 2 из четвертого параграфа, можно утверждать: существует разбиение $Q_j = \bigcup\limits_k Q_{jk}$ такое, что

$$S_{Q_j} - s_{Q_j} < \varepsilon \cdot v(Q_j).$$

Получаем новое разбиение $T' : Q = \left( \bigcup\limits_{j \in \mathrm{I}} Q_j \right) \bigcup \left( \bigcup\limits_{j \in \mathrm{II}} \bigcup\limits_{k} Q_{jk} \right)$, для которого имеем

$$\sum_{j \in \mathrm{II}} \sum_{k} \omega_{jk} v(Q_{jk}) = \sum_{j \in \mathrm{II}} (S_{Q_j} - s_{Q_j}) < \varepsilon \sum_{j \in \mathrm{II}} v(Q_j) \leqslant \varepsilon \cdot v(Q).$$

В итоге для последнего разбиения $T'$ выводим

$$S_{T'} - s_{T'} = \sum_{j \in \mathrm{I}} \omega_j v(Q_j) + \sum_{j \in \mathrm{II}} \sum_{k} \omega_{jk} v(Q_{jk}) < \varepsilon[2K + v(Q)].$$

В силу произвольности $\varepsilon$ разность $S_{T'} - s_{T'}$ может быть сделана сколь угодно малой, а это на основании теоремы 3.1 означает, что функция $f(x)$ интегрируема на параллелепипеде $Q$.

*Необходимость.* Дано, что функция $f(x)$ интегрируема на параллелепипеде $Q$. Легко доказать равенство $B = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_{1/n}$, где $B_{1/n} = \left\{x \in Q : \omega(f;x) \geqslant \frac{1}{n}\right\}$. В самом деле, каждое $B_{1/n} \subset B$. Отсюда имеем $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_{1/n} \subset B$. Обратно, если точка $x \in B$, то $\omega(f;x) > 0$ и обязательно существует натуральное число $n$, при котором $\omega(f,x) \geqslant \frac{1}{n}$, а значит при этом $n$ точка $x \in B_{1/n}$.

Теперь достаточно показать, что при любом $n$ объем $v(B_{1/n}) = 0$ или, что то же самое, $\mu B_{1/n} = 0$, ибо множество $B_{1/n}$ замкнуто. Зафиксируем какое-то значение $n$. Согласно теореме 3.1 в силу интегрируемости функции $f(x)$ для любого $\varepsilon > 0$ найдется разбиение $T = \{Q_j\}_{j=1}^{N}$ параллелепипеда $Q$, для которого разность $S_T - s_T < \frac{\varepsilon}{n}$.

Образуем группу I из тех $Q_j$, которые содержат хотя бы одну точку множества $B_{1/n}$. Тогда для $i \in \mathrm{I}$ имеем: $\omega_j \geqslant \frac{1}{n}$ и, следовательно,

$$\frac{\varepsilon}{n} > S_T - s_T = \sum_{j=1}^{N} \omega_j v(Q_j) \geqslant \sum_{i \in \mathrm{I}} \omega_j v(Q_j) \geqslant \frac{1}{n} \sum_{i \in \mathrm{I}} v(Q_j).$$

Так что получено:

$$B_{1/n} \subset \bigcup_{j \in \mathrm{I}} Q_j \quad \text{и} \sum_{j \in \mathrm{I}} v(Q_j) < \varepsilon.$$

Таким образом, имеем, что $v(B_{1/n}) = 0$, а значит и $\mu B_{1/n} = 0$. Отсюда заключаем: $\mu B = 0$. Теорема полностью доказана.

**Следствие 1.** *Если функция $f(x)$ непрерывна на замкнутом параллелепипеде $Q \subset \mathbb{R}^n$, то она интегрируема на этом множестве.*

## § 7. Свойства кратного интеграла по параллелепипеду

Свойства кратного интеграла на координатном параллелепипеде и их доказательства аналогичны свойствам двойного интеграла. Поэтому мы ограничимся формулировкой некоторых свойств, которые потребуются для введения $n$-кратного интеграла по произвольному множеству. Лишь в двух случаях приведены доказательства, в которых использование критерия Лебега заметно их упрощает. Полный перечень свойств кратного интеграла будет рассмотрен для произвольной области интегрирования.

Переходим к непосредственному изложению свойств кратного интеграла по координатному параллелепипеду.

1°. Если $f(x) = c = \text{const}$, то функция $f(x)$ интегрируема на $Q$ и

$$\int\limits_Q c \cdot dx = c \cdot v(Q).$$

В частности, при $c = 1$ и $c = 0$ имеем

$$\int\limits_Q 1 \cdot dx = v(Q) \quad \text{и} \quad \int\limits_Q 0 \cdot dx = 0. \tag{7.0.1}$$

2°. Если функции $f$ и $g$ интегрируемы на $Q$, то функция $f + g$ также интегрируема на $Q$, причем

$$\int\limits_Q (f + g)\, dx = \int\limits_Q f\, dx + \int\limits_Q g\, dx. \tag{7.0.2}$$

Данное свойство означает аддитивность кратного интеграла относительно подинтегральной функции.

3°. Если функция $f$ интегрируема на $Q$ и $\lambda$ — какое-то число, то функция $\lambda f$ также интегрируема на $Q$, причем

$$\int\limits_Q (\lambda f)\, dx = \lambda \int\limits_Q f\, dx. \tag{7.0.3}$$

Это свойство выражает однородность кратного интеграла относительно подинтегральной функции.

Равенства (7.0.2) и (7.0.3) объединяются одним соотношением

$$\int\limits_Q (\alpha f + \beta g)\, dx = \alpha \int\limits_Q f\, dx + \beta \int\limits_Q g\, dx, \tag{7.0.4}$$

где $f$ и $g$ — функции, интегрируемые на $Q$, а $\alpha$ и $\beta$ — некоторые числа. Соотношение (7.0.4) означает линейность кратного интеграла на $Q$.

Методом математической индукции оно легко обобщается на любую комбинацию интегрируемых функций, а именно

$$\int\limits_Q \left( \sum_{i=1}^{m} \alpha_i f_i \right) dx = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \int\limits_Q f_i\, dx.$$

4°. Если функции $f$ и $g$ интегрируемы на $Q$, то и функция $fg$ интегрируема на $Q$.

Доказательство. Пусть $B_1, B_2$ и $B$ соответственно множества точек разрыва функций $f, g$ и $fg$. Известно, что произведение непрерывных функций есть непрерывная функция. Отсюда следует, что

$$B \subset (B_1 \cup B_2).$$

В силу критерия Лебега $\mu B_1 = 0$ и $\mu B_2 = 0$. Тогда и $\mu B = 0$, что на основании того же критерия Лебега равносильно интегрируемости функции $fg$.

5°. Если функции $f$ и $g$ интегрируемы на $Q$ и на этом множестве выполнено неравенство $f(x) \leqslant g(x)$, то

$$\int\limits_Q f\,dx \leqslant \int\limits_Q g\,dx.$$

Данное свойство показывает возможность интегрировать неравенство, лишь бы обе его части были интегрируемы.

**Следствие.** *Если функция $f$ интегрируема на $Q$ и $f(x) \geqslant 0$, то и*

$$\int\limits_Q f\,dx \geqslant 0.$$

6°. Если функция $f(x)$ интегрируема на $Q$, то и функция $|f(x)|$ интегрируема на $Q$, причем справедливо неравенство

$$\left|\int\limits_Q f\,dx\right| \leqslant \int\limits_Q |f|\,dx. \qquad (7.0.5)$$

Доказательство. Пусть $B$ и $B_1$ — множества точек разрыва соответственно функций $f(x)$ и $|f(x)|$. Известно, что непрерывность функции $f(x)$ влечет непрерывность функции $|f(x)|$. Поэтому имеем

$$B_1 \subset B.$$

В силу интегрируемости функции $f$ множество $B$ лебеговой меры нуль. Тогда и $\mu B_1 = 0$, что равносильно интегрируемости функции $|f(x)|$.

Утверждение (7.0.5) доказывается, как обычно, интегрированием двойного неравенства $-|f(x)| \leqslant f(x) \leqslant |f(x)|$.

## § 8. n-кратные интегралы по произвольному множеству

### 8.1. Понятие $n$-кратного интеграла в общем случае. Измеримые множества

Пусть $Q \subset \mathbb{R}^n$ — замкнутый параллелепипед, $A \subset Q$ и $f : Q \to \mathbb{R}^1$ — ограниченная функция.

Функция

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad x \in A, \\ 0, & \text{если} \quad x \notin A \end{cases} \tag{8.1.1}$$

называется характеристической функцией или индикатором множества $A$.

Полагаем по определению

$$\int\limits_A f(x)\,dx = \int\limits_Q (f\chi_A)(x)\,dx. \tag{8.1.2}$$

Такое определение оправдано тем, что

$$(f\chi_A)(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если} \quad x \in A, \\ 0, & \text{если} \quad x \notin A \end{cases}$$

Свойство 5° показывает, что интегрируемость на $Q$ функций $f$ и $\chi_A$ гарантирует интегрируемость на $Q$ произведения $f\chi_A$, а, следовательно, и интегрируемость функции $f$ на множестве $A$.

Чтобы данное определение интеграла по произвольному множеству $A$ стало корректным, надо убедиться, что значение интеграла не зависит от выбора объемлющего параллелепипеда $Q$. Это будет сделано несколько позже.

**Теорема 8.1.** *Для того, чтобы функция $\chi_A$ была интегрируемой на $Q$, необходимо и достаточно, чтобы*

$$v(\partial A) = 0.$$

Доказательство. Пусть $x_0$ — произвольная точка множества $A$.

Относительно нее возможны три варианта. Рассмотрим их поочередно. Если $x_0$ — внутренняя точка множества, то найдется окрестность $U_\delta(x_0) \subset A$, на которой $\chi_A(x) = 1$. Следовательно, характеристическая функция непрерывна в такой точке.

Вторая возможность: $x_0$ — внешняя точка множества. Тогда существует окрестность $U_\delta(x_0)$, целиком находящаяся во внешности множества $A$. В этой окрестности $\chi_A(x) = 0$ и $x_0$ — опять-таки точка непрерывности характеристической функции. Наконец, если $x_0$ — граничная точка множества $A$, то в каждой окрестности $U_\delta(x_0)$ найдутся точка $x_1 \in A$ и точка $x_2 \notin A$. Так как $\chi_A(x_1) = 1$, а $\chi_A(x_2) = 0$, то $x_0$ — точка разрыва функции $\chi_A$. Тем самым установлено, что множество $B$ точек разрыва характеристической функции $\chi_A$ совпадает с границей $\partial A$ множества $A$. Учитывая, что граница $\partial A$ замкнутое множество, условие $v(\partial A) = 0$ равносильно утверждению $\mu(\partial A) = 0$, т.е. утверждению $\mu B = 0$. Остается сослаться на критерий Лебега, и теорема доказана.

В случае координатного параллелепипеда $Q$ мы имеем: $\int\limits_Q 1 \cdot dx = v(Q)$. Поэтому оправдано следующее понятие.

**Определение.** Если граница $\partial A$ ограниченного множества $A$ имеет нулевой объем, то множество $A$ называется измеримым по Жордану, а числовая величина

$$v(A) = \int\limits_A 1 \cdot dx \tag{8.1.3}$$

называется объемом множества $A$.

Из теоремы 8.1 вытекает, что в дальнейшем следует рассматривать только измеримые множества.

Сразу же отметим, что свойства измеримых множеств на плоскости сохраняются и в $n$-мерном случае. А именно, если множества $A_1$ и $A_2$ измеримы, то измеримы их объединение, пересечение и разность $A_1 \cup A_2$, $A_1 \cap A_2$ и $A_1 \setminus A_2$. Легко убедиться, что доказательства леммы и теоремы 1.4 из пункта 1.3 второй главы, где рассматриваются эти свойства, совершенно не зависят от размерности пространства.

Если функция $f(x)$ определена только на множестве $A$, то тогда на параллелепипеде $Q$, содержащем множество $A$, вводим функцию

$$\overline{f}(x) = \begin{cases} f(x), \quad \text{если} \quad x \in A, \\ 0, \quad \text{если} \quad x \notin A \end{cases}$$

и полагаем по определению

$$\int\limits_A f\,dx = \int\limits_A \overline{f}\,dx = \int\limits_Q \overline{f}\chi_{_A}\,dx. \tag{8.1.4}$$

Так как и ранее при определении интеграла значения функции $f$ за пределами множества $A$ не играли никакой роли, то соотношение (8.1.4) позволяет нам продолженную нулем функцию по-прежнему обозначать $f(x)$.

## 8.2. Критерий интегрируемости Лебега на произвольном множестве

**Теорема 8.2.** *Пусть $A \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченное измеримое множество, $f{:}A{\to}\mathbb{R}^1$ — ограниченная функция, $B$ — множество точек разрыва функции $f(x)$. Для того, чтобы функция $f(x)$ была интегрируемой на множестве $A$, необходимо и достаточно, чтобы $\mu B = 0$.*

Доказательство. Введем координатный параллелепипед $Q$, содержащий множество $A$. Пусть $B_1$ — множество точек разрыва функции $f\chi_{_A}$. Во внутренности и внешности множества $A$ функции $f$ и $f\chi_{_A}$ совпадают. Поэтому совпадают там и точки разрыва указанных функций. На множестве $\partial A$ точки разрыва этих функций могут не совпадать. Следовательно, множества $B$ и $B_1$ отличаются друг от друга на множество $C$, содержащемся в $\partial A$, т.е. на множестве лебеговой меры нуль ($A$ измеримо и $\mu(\partial A) = 0$).

Поэтому, если функция $f$ интегрируема на $A$, то функция $f\chi_{_A}$ интегрируема на $Q$ и $\mu B_1 = 0$. Тогда и $\mu B = 0$.

Если же $\mu B = 0$, то и $\mu B_1 = 0$, а значит функция $f(x)$ интегрируема на множестве $A$.

Теорема доказана.

**Следствие 1.** *Если функция $f(x)$ непрерывна на измеримом множестве $A$, то она интегрируема на этом множестве.*

**Следствие 2.** *Пусть $f : A \to \mathbb{R}^1$ ограниченная функция на измеримом множестве $A$. Если множество точек разрыва функции $f(x)$ конечно либо счетно, то функция $f(x)$ интегрируема на $A$.*

**Следствие 3.** *Пусть $f: A \to \mathbb{R}^1$ ограниченная функция на измеримом множестве $A \subset \mathbb{R}^2$. Если множество точек разрыва функции $f(x,y)$ состоит из конечного либо счетного числа спрямляемых кривых, то функция $f(x,y)$ интегрируема на $A$.*

Доказательство. Следствия 1 и 2 очевидны. Что касается следствия 3, то вспомним, что множество точек спрямляемой кривой $L$ имеет нулевую площадь. Так как это множество замкнутое, то в силу теоремы 4.1 оно лебеговой меры нуль. Тогда на основании леммы 2 из четвертого параграфа объединение множеств $L$ в конечном или счетном числе есть множество лебеговой меры нуль.

### 8.3. Определение кратного интеграла через интегральные суммы

Согласно определению интеграла по параллелепипеду

$$\int\limits_Q f\chi_{_A}\,dx = \lim_{\lambda\to 0} \mathfrak{S}, \qquad (8.3.5)$$

где $\mathfrak{S} = \sum\limits_{j=1}^{N} f(\xi_j')v(Q_j')$, $Q = \bigcup\limits_{j=1}^{N} Q_j'$ и $Q_j'$ попарно не имеют общих внутренних точек. Очевидно, что слагаемые, отвечающие $Q_j'$, не имеющим общих точек с множеством $A$, отпадают, так как равны нулю. Ввиду того, что предел (8.3.5) не зависит от выбора точек $\xi_j'$, будем брать эти точки $\xi_j' \in (Q_j' \cap A)$. Тогда интегральная сумма примет вид

$$\mathfrak{S}^* = \sum_{j=1}^{m} f(\xi_j')v(Q_j').$$

Теперь определение интеграла обретает привычную форму, но разбиение на элементарные части производится с помощью прямоугольной сетки.

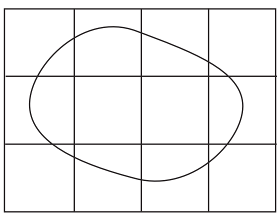


Рис. 3

Пусть $|f(x)| \leqslant K$ для всех $x \in Q$. Пусть еще множество $A \subset Q$ измеримо, а значит $v(\partial A) = 0$. В таком случае для $\forall \varepsilon > 0$ найдется конечная система замкнутых параллелепипедов $W_1, W_2, \ldots, W_p$, внутренности которых покрывают границу $\partial A$ с суммой объемов

$$\sum_{i=1}^{p} v(W_i) < \frac{\varepsilon}{K}.$$

Так как $\partial A \subset \overset{\circ}{C}$, где $C = \bigcup\limits_{i=1}^{p} W_p$, то замкнутые множества $\partial A$ и $\partial C$ не пересекаются и расстояние между ними $\delta = \rho(\partial A, \partial C) > 0$.

Рассмотрим теперь произвольное разбиение $Q = \bigcup\limits_{j=1}^{m} Q_j$ с $\lambda < \delta$. Элементарные части данного разбиения распределим на две группы. Обозначим через I множество тех значений $j$, для которых соответствующие $Q_j$ содержат хотя бы одну точку границы $\partial A$, а через II множество остальных значений $j$. Тогда интегральная сумма $\mathfrak{S}$ соответственно разобьется на две суммы

$$\mathfrak{S} = \sum_{j=1}^{m} f(\xi_j) v(Q_j) = \sum_{j\in \mathrm{I}} + \sum_{j\in \mathrm{II}}.$$

Элементарные части $Q_j$ из первой группы целиком содержатся во множестве $C$ и потому

$$\sum_{j\in \mathrm{I}} v(Q_j) \leqslant v(C) \leqslant \sum_{i=1}^{p} v(W_i) < \frac{\varepsilon}{K}.$$

Отсюда имеем при $\lambda < \delta$

$$\left| \sum_{j\in \mathrm{I}} f(\xi_j) v(Q_j) \right| \leqslant K \sum_{j\in \mathrm{I}} v(Q_j) < \varepsilon.$$

Тем самым доказано, что

$$\sum_{j\in \mathrm{I}} f(\xi_j) v(Q_j) \to 0 \quad \text{при} \quad \lambda \to 0.$$

Таким образом, можно дать следующее определение интеграла по множеству $A$

$$\int\limits_A f(x)\,dx = \lim_{\lambda\to 0} \overline{\mathfrak{S}},$$

где $\overline{\mathfrak{S}} = \sum\limits_{j\in \mathrm{II}} f(\xi_j) v(Q_j)$.

Так как сумма $\sum\limits_{j\in \mathrm{I}}$ не влияет ни на интегрируемость функции $f(x)$, ни на значение интеграла от нее, вместо $Q_j$ будем брать только ее часть $Q_j \cap A$, содержащуюся во множестве $A$, и сохраним для нее обозначение $Q_j$. Все это равнозначно рассмотрению сетки разбиения, изображенной на рис. 4. Интегральную сумму, отвечающую такому разбиению, по-прежнему будем обозначать через $\mathfrak{S}$. Попутно приходим к выводу, что значение интеграла по произвольному множеству $A$ не зависит от выбора координатного параллелепипеда $Q$, объемлющего множество $A$ . Таким образом, примененная схема построения интеграла становится логически корректной.

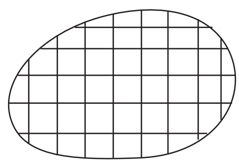


Рис. 4

## § 9. Свойства кратного интеграла по произвольному множеству

### 9.1.

При рассмотрении всех свойств заранее предполагается, что множество $A$ измеримо и что $Q$ — координатный параллелепипед, содержащий множество $A$.

1°. Если функции $f$ и $g$ интегрируемы на множестве $A$, то функция $f + g$ также интегрируема на $A$ и выполнено равенство

$$\int\limits_A (f+g)\,dx = \int\limits_A f\,dx + \int\limits_A g\,dx. \tag{9.1.1}$$

Доказательство. Пусть $B_1, B_2$ и $B$ множества точек разрыва соответственно функций $f, g$ и $f+g$ на множестве $A$. В силу интегрируемости функций $f$ и $g$ меры $\mu B_1 = 0$ и $\mu B_2 = 0$. Известно, что сумма непрерывных функций есть функция непрерывная. Следовательно, справедливо включение

$$B \subset (B_1 \cup B_2).$$

Отсюда $\mu B = 0$ и значит функции $f + g$ интегрируема на $A$. Кроме того, имеем

$$\int\limits_A (f+g)\,dx = \int\limits_Q (f+g)\chi_{A}\,dx = \int\limits_Q f\chi_{A}\,dx + \int\limits_Q g\chi_{A}\,dx = \int\limits_A f\,dx + \int\limits_A g\,dx.$$

2°. Если функция $f$ интегрируема на множестве $A$ и $\lambda$ — некоторое число, то функция $\lambda f$ также интегрируема на $A$ и справедливо равенство

$$\int\limits_A (\lambda f)\,dx = \lambda \int\limits_A f\,dx. \tag{9.1.2}$$

Доказательство. Так как при $\lambda \neq 0$ множество точек разрыва функции $\lambda f$ совпадает со множеством точек разрыва функции $f$, а при $\lambda = 0$ функция $\lambda f$ непрерывна, то функция $\lambda f$ на основании критерия Лебега интегрируема на множестве $A$. Имеем далее

$$\int\limits_A (\lambda f)\,dx = \int\limits_Q (\lambda f)\chi_{A}\,dx = \lambda \int\limits_Q f\chi_{A}\,dx = \lambda \int\limits_A f\,dx.$$

Выделим частные случаи данного свойства, когда $\lambda = 0$, $\lambda = -1$ и $\lambda = c$, $f(x) = 1$:

$$\int\limits_A 0\cdot dx = 0, \quad \int\limits_A (-f)\,dx = -\int\limits_A f\,dx = 0 \quad \text{и} \quad \int\limits_A c\cdot dx = c\cdot v(A).$$

Утверждения (9.1.1) и (9.1.2) равносильны утверждению

$$\int\limits_A (\alpha f + \beta g)\, dx = \alpha \int\limits_A f\, dx + \beta \int\limits_A g\, dx. \qquad (9.1.3)$$

где $f$ и $g$ — функции, интегрируемые на множестве $A$, а $\alpha$ и $\beta$ — какие-то числа. Соотношение (9.1.3) показывает, что операция кратного интегрирования линейна.

Методом математической индукции равенство (9.1.3) легко распространить на любую конечную линейную комбинацию интегрируемых функций:

$$\int\limits_A \left( \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i \right) dx = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \int\limits_A f_i\, dx.$$

Свойства 1° и 2° означают еще, что множество всех интегрируемых на множестве $A$ функций образует линейное пространство относительно операций сложения и умножения на число.

3°. Если функции $f$ и $g$ интегрируемы на множестве $A$, то и функция $fg$ интегрируема на $A$.

Данное свойство доказывается точно так же, как и в случае координатного параллелепипеда.

4°. Пусть $A = A_1 \cup A_2$, $A_1 \cap A_2 = \varnothing$ и $C = \partial A_1 \cap \partial A_2$. Если множество $A$ измеримо, $\mu C = 0$ и функция $f$ интегрируема на $A$, то множества $A_1$ и $A_2$ измеримы и функция $f$ интегрируема на этих множествах. Обратно, если $A_1$ и $A_2$ измеримы и функция $f$ интегрируема на множествах $A_1$ и $A_2$, то множество $A$ измеримо, и функция $f$ интегрируема на $A$. Причем в обоих случаях имеет место равенство

$$\int\limits_A f\, dx = \int\limits_{A_1} f\, dx + \int\limits_{A_2} f\, dx. \qquad (9.1.4)$$

Доказательство. Отметим, что множества $\partial A_1$, $\partial A_2$, $\partial A$ и $C$ замкнутые. Так как справедливо включение

$$\partial A_1 \subset (\partial A \cup C)\,,$$

то измеримость множества $A$ и условие $\mu C = 0$ дают $\mu A_1 = 0$, а значит множество $A_1$ измеримо. Аналогичного устанавливается измеримость $A_2$.

Пусть $B_1, B_2$ и $B$ множества точек разрыва функции $f$ соответственно на множествах $A_1, A_2$ и $A$. Если функция $f$ интегрируема на $A$, то из включений

$$B_1 \subset (B \cup C) \quad \text{и} \quad B_2 \subset (B \cup C)$$

и критерия Лебега вытекает, что $\mu B_1 = 0$ и $\mu B_2 = 0$. Следовательно, функция $f$ интегрируема на множествах $A_1$ и $A_2$.

Обратно. Легко видеть, что $\partial A \subset (\partial A_1 \cup \partial A_2)$. Поэтому на основании условий $\mu A_1 = 0$ и $\mu A_2 = 0$, т.е. из измеримости множеств $A_1$ и $A_2$, делаем вывод, что $\mu A = 0$ и множество $A$ измеримо.

Ввиду включения $B \subset (B_1 \cup B_2 \cup C)$ интегрируемость функции $f$ на множествах $A_1$ и $A_2$ влечет утверждение $\mu B = 0$ и согласно критерию Лебега функция $f$ интегрируема на $A$.

В обоих случаях в силу того, что у множеств $A_1$ и $A_2$ нет общих точек имеем

$$\chi_{_A} = \chi_{_{A_1}} + \chi_{_{A_2}}.$$

Тогда получаем

$$\int\limits_A f dx = \int\limits_Q f \chi_{_A} dx = \int\limits_f (\chi_{_{A_1}} + \chi_{_{A_2}}) dx = \int\limits_Q f \chi_{_{A_1}} dx + \int\limits_Q f \chi_{_{A_2}} dx = \int\limits_{A_1} f\,dx + \int\limits_{A_2} f\,dx.$$

Подводя итог свойству 4°, можно теперь утверждать, что кратный интеграл есть аддитивная функция множества.

Легко проверить, что свойство 4° можно распространить методом математической индукции на любое конечное число попарно не пересекающихся измеримых множеств, т.е., если $A = \bigcup\limits_{i=1}^{N} A_i$, $A_i \cap A_j = \varnothing$ при $i \neq j$, $A_i$ измеримы и функция $f(x)$ интегрируема на множестве $A$, то

$$\int\limits_A f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{N} \int\limits_{A_i} f(x)\,dx.$$

5°. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на множестве $A$ и выполнено неравенство $f(x) \leqslant g(x)$, то

$$\int\limits_A f\,dx \leqslant \int\limits_A g\,dx$$

Доказательство. Поскольку функции $f$ и $g$ интегрируемы на множестве $A$, то функции $f\chi_A$ и $g\chi_A$ интегрируемы на объемлющем параллелепипеде $Q$. Кроме того, на $Q$ выполнено неравенство $f\chi_A \leqslant g\chi_A$. Тогда на том основании, что свойство 5° верно на $Q$, получаем

$$\int\limits_A f\,dx = \int\limits_Q f\chi_A\,dx \leqslant \int\limits_Q g\chi_A\,dx = \int\limits_A g\,dx.$$

**Следствие.** *Если функция $f(x)$ интегрируема на множестве $A$ и на этом множестве $f(x) \geqslant 0$, ($\leqslant 0$), то имеет место неравенство*

$$\int\limits_A f\,dx \geqslant 0 \quad (\leqslant 0).$$

6°. Если функция $f(x)$ интегрируема на множестве $A$ и на этом множестве выполнено неравенство $m \leqslant f(x) \leqslant M$, то справедлива оценка

$$m \cdot v(A) \leqslant \int\limits_A f\,dx \leqslant M \cdot v(A). \tag{9.1.5}$$

Доказательство. Чтобы получить соотношение (9.1.5), достаточно проинтегрировать неравенство

$$m \leqslant f(x) \leqslant M.$$

7°. Если $f(x)$ функция интегрируема на множестве $A$, то функция $|f(x)|$ так же интегрируема на $A$ и выполнено неравенство

$$\left|\int\limits_A f\,dx\right| \leqslant \int\limits_A |f|\,dx. \tag{9.1.6}$$

Доказательство. Обозначим через $B$ и $B_1$ множества точек разрыва функций $f$ и $|f|$ соответственно. Из непрерывности функции $f$ следует непрерывность функции $|f|$. Поэтому имеем включение $B_1 \subset B$ и, следовательно. в силу критерия Лебега $\mu B = 0$. Тогда и $\mu B_1 = 0$. Значит функция $|f|$ интегрируема на множестве $A$.

**Следствие.** *Если функция $f(x)$ интегрируема на множестве $A$ и на этом множестве $|f(x)| \leqslant K$, то справедливо неравенство*

$$\left|\int\limits_A f\,dx\right| \leqslant K \cdot v(A). \tag{9.1.7}$$

Доказательство. Утверждение (9.1.7) вытекает из оценок (9.1.6) и (9.1.5).

8°. Если функция $f(x)$ интегрируема на множестве $A$ и на этом множестве $f(x) \geqslant 0$, то для всякого измеримого подмножества $B \subset A$ справедливо неравенство

$$\int\limits_B f(x)\,dx \leqslant \int\limits_A f(x)\,dx.$$

Доказательство. Пусть $B \subset A$ — произвольное измеримое подмножество множества $A$. Из критерия Лебега очевидным образом вытекает интегрируемость функции $f(x)$ на подмножестве $B$.

Так как имеет место представление $A = (A \setminus B) \cup B$, то на основании свойства аддитивности кратного интеграла по области интегрирования получаем:

$$\int\limits_A f(x)\,dx = \int\limits_{A\setminus B} f(x)\,dx + \int\limits_B f(x)\,dx. \qquad (*)$$

Но функция $f(x) \geqslant 0$ на множестве $A \setminus B$. Поэтому в силу следствия свойства 5° заключаем, что

$$\int\limits_{A\setminus B} f(x)\,dx \geqslant 0.$$

Тогда из равенства $(*)$ следует требуемое неравенство.

Доказанное свойство можно выразить словами так: если интегрируемая функция $f(x) \geqslant 0$, то расширение области интегрирования приводит к увеличению значения интеграла, что позволяет интерпретировать данное свойство как свойство монотонности кратного интеграла по области интегрирования.

9°. Если функция $f(x)$ ограничена на множестве $A$ нулевого объема, то она интегрируема на $A$ и $\int\limits_A f(x)\,dx = 0$.

Доказательство. Пусть $B$ — множество точек разрыва функции $f(x)$ на множестве $A$. Поскольку $B \subset A$, то $v(B) = 0$ и согласно критерия Лебега функция $f(x)$ интегрируема на $A$. В силу ограниченности функции $f(x)$ существует такое $K > 0$, что $|f(x)| \leqslant K$ для всех $x \in A$. Тогда на основании (9.1.7) получаем

$$\left|\int\limits_A f\,dx\right| \leqslant K \cdot v(A) = 0.$$

$10^\circ$. Если изменить значения ограниченной функции $f(x)$ на множестве нулевого объема таким образом, чтобы она осталась ограниченной, то это не повлияет ни на интегрируемость функции $f(x)$, ни на значение ее интеграла.

Доказательство. Пусть множество $C \subset A$ и $v(C) = 0$. Рассмотрим ограниченную на множестве $A$ функцию $\overline{f}(x)$, совпадающую с функцией $f(x)$ на измеримом множестве $A \setminus C$. Функция $f(x)$ интегрируема на множествах $A$ и $C$. Поэтому она интегрируема на множестве $A \setminus C$. Тогда и функция $\overline{f}(x)$ интегрируема на $A \setminus C$, т.к. на этом множестве она совпадает с функцией $f(x)$. Значит, функция $\overline{f}(x)$ интегрируема на $A$. Кроме того, имеем

$$\int\limits_A \overline{f}\,dx = \int\limits_{A\setminus C} \overline{f}\,dx + \int\limits_C \overline{f}\,dx = \int\limits_{A\setminus C} f\,dx + \int\limits_C f\,dx = \int\limits_A f\,dx.$$

Используя аддитивность кратного интеграла по области интегрирования, можно сделать два существенных дополнения к свойствам измеримых множеств.

1. Если измеримые множества $A_1$ и $A_2$ не пересекаются, то

$$v\left(A_1 \cup A_2\right) = v(A_1) + v(A_2).$$

2. Если множества $A_1$ и $A_2$ измеримы и $A_2 \subset A_1$, то

$$v(A_1 \setminus A_2) = v(A_1) - v(A_2).$$

Доказательство. Первое утверждение доказывается следующей выкладкой

$$v\left(A_1 \cup A_2\right) = \int\limits_{A_1\cup A_2} dx = \int\limits_{A_1} dx + \int\limits_{A_2} dx = v(A_1) + v(A_2).$$

Так как справедливо представление $A_1 = (A_1 \setminus A_2) \cup A_2$, где множества $A_1 \setminus A_2$ и $A_2$ не пересекаются, то имеем

$$v(A_1) = v(A_1 \setminus A_2) + v(A_2).$$

Отсюда получаем

$$v(A_1 \setminus A_2) = v(A_1) - v(A_2).$$

## 9.2. Теорема о среднем значении

Пусть $f(x)$ ограниченная интегрируемая на множестве $A$ функция, $m = \inf\limits_A f(x)$ и $M = \sup\limits_A f(x)$. Тогда на основании 6° выполнено неравенство

$$m \cdot v(A) \leqslant \int\limits_A f\,dx \leqslant M \cdot v(A).$$

Если $v(A) \neq 0$, то имеем

$$m \leqslant \frac{1}{v(A)} \int\limits_A f\,dx \leqslant M. \qquad (*)$$

Число $\mu = \dfrac{1}{v(A)}$ называется средним значением функции $f(x)$ на множестве $A$. Неравенство $(*)$ показывает, что среднее значение заключено между точными гранями функции $f(x)$ на множестве $A$: $m \leqslant \mu \leqslant M$. Из определения среднего значения следует, что

$$\int\limits_A f\,dx = \mu \cdot v(A). \qquad (9.2.8)$$

Очевидно, что утверждение (9.2.8) выполняется и в случае $v(A) = 0$.

**Теорема 9.1.** *Если функция $f(x)$ непрерывна на компактном и линейно связном множестве $A$, то существует такая точка $\xi \in A$, что*

$$\int\limits_A f\,dx = f(\xi) \cdot v(A). \qquad (9.2.9)$$

Доказательство. В силу компактности множества $A$ точные грани $m$ и $M$ являются значениями непрерывной функции $f(x)$. Тогда согласно теореме о промежуточном значении непрерывной функции, рассмотренной в первой части, найдется такая точка $\xi \in A$, что $f(\xi) = \mu$ и равенство (9.2.8) принимает вид (9.2.9).

Теорема доказана.

## 9.3. Интегральные суммы для произвольного разбиения области интегрирования

Вернемся к вопросу о выражении кратного интеграла через интегральные суммы. До сих пор при составлении интегральных сумм использовалась только прямоугольная сеть разбиения области интегрирования.

Пусть $A$ — измеримое множество и $A = \bigcup\limits_{i=1}^{N} A_i$ — разбиение множества $A$ на произвольные измеримые попарно непересекающиеся множества $A_i$. Обозначим через $d_i$ диаметр множества $A_i$ и через $\lambda = \max\limits_i \{d_i\}$.

Выберем в каждой элементарной части $A_i$ какую-либо точку $\xi_i$ и составим сумму

$$\mathfrak{S} = \sum_{i=1}^{N} f(\xi_i) v(A_i),$$

где $f(x)$ — функция, заданная на множестве $A$. Будем как и ранее называть ее интегральной суммой.

**Теорема 9.2.** *Если функция $f(x)$ непрерывна на замкнутом измеримом множестве $A$, то существует предел*

$$\lim_{\lambda \to 0} \mathfrak{S} = \int\limits_A f(x)\, dx.$$

Доказательство. Прежде всего, отметим, что в силу непрерывности функции $f(x)$ интеграл $\int\limits_A f(x)\, dx$ существует.

Если $v(A) = 0$, то утверждение теоремы тривиально, т.к. $\int\limits_A f(x)\, dx = 0$ и и любая сумма $\mathfrak{S} = 0$.

Если же $v(A) > 0$, то на основании равномерной непрерывности функции $f(x)$ на компактном множестве $A$ можно утверждать, что для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое другое число $\delta > 0$, что для $\forall x', x'' \in A$, которые удовлетворяют неравенству $\|x' - x''\| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x') - f(x'')| < \dfrac{\varepsilon}{v(A)}$. Рассмотрим теперь произвольное разбиение $A = \bigcup\limits_{i=1}^{N} A_i$ с $\lambda < \delta$. Тогда для $\forall x', x'' \in A_i$ будет справедливо неравенство

$$|f(x') - f(x'')| < \frac{\delta}{v(A)}.$$

Так как множества $A_i$ попарно не пересекаются, то согласно свойству аддитивности интеграла по области интегрирования

$$\int\limits_A f\, dx = \sum_{i=1}^{N} \int\limits_{A_i} f\, dx.$$

Ввиду того, что для каждого $A_i$ его объем $v(A_i) = \int\limits_{A_i} f\,dx$, имеем

$$\Big|\mathfrak{S} - \int\limits_A f\,dx\Big| = \Big|\sum_{i=1}^N f(\xi_i)v(A_i) - \int\limits_A f\,dx\Big| =$$

$$= \Big|\sum_{i=1}^N f(\xi_i)\int\limits_{A_i} dx - \sum_{i=1}^N \int\limits_{A_i} f\,dx\Big| = \Big|\sum_{i=1}^N \int\limits_{A_i} [f(\xi_i) - f(x)]\,dx\Big|.$$

Поскольку $\xi_i \in A_i$ и $x \in A_i$, то на основании следствия из свойства 7° получаем оценки

$$\Big|\mathfrak{S} - \int\limits_A f\,dx\Big| = \Big|\sum_{i=1}^N \int\limits_{A_i} [f(\xi_i) - f(x)]\,dx\Big| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^N \Big|\int\limits_{A_i} [f(\xi_i) - f(x)]\,dx\Big| < \frac{\varepsilon}{v(A)} \sum_{i=1}^N v(A_i) = \varepsilon.$$

Подводим итог: для $\forall\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для всякого отмеченного разбиения множества $A$ с $\lambda < \delta$ справедливо неравенство

$$\Big|\mathfrak{S} - \int\limits_A f\,dx\Big| < \varepsilon.$$

Теорема доказана.

## § 10. Вычисление кратных интегралов

Как и в двумерном случае, вычисление $n$-кратного интеграла производится сведением его к повторному интегралу, т.е. к последовательному вычислению $n$ однократных интегралов. Ввиду приложений особо будет выделен случай тройного интеграла.

### 10.1. Случай координатного параллелепипеда

Введем множества: $Q = [a_1, b_1] \times \ldots [a_n, b_n]$, $n \geqslant 2$ — замкнутый координатный параллелепипед, и при $k < n$ — $Q' = [a_1, b_1] \times \ldots [a_k, b_k]$, $Q'' = [a_{k+1}, b_{k+1}] \times \ldots [a_n, b_n]$. Введем еще в рассмотрение точки $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $s = (x_1, \ldots, x_k)$ и $t = (x_{k+1}, \ldots, x_n)$. Так что $Q = Q' \times Q''$ и $x = (s, t)$, где $s \in Q'$ и $t \in Q''$.

Пусть для функции $f(x) = f(s, t)$, заданной на параллелепипеде $Q$, существуют интегралы $I(s) = \int\limits_{Q''} f(s, t)\,dt$ при $\forall s \in Q'$ и

$$\int\limits_{Q'} I(s)\,ds = \int\limits_{Q'} \Big\{\int\limits_{Q''} f(s, t)\,dt\Big\} ds = \int\limits_{Q'} ds \int\limits_{Q''} f(s, t)\,dt. \tag{10.1.1}$$

Интеграл (10.1.1) называется повторным интегралом функции $f(x) = f(s,t)$. Аналогично определяется и повторный интеграл с противоположным порядком интегрирования $\int\limits_{Q''} dt \int\limits_{Q'} f(s,t)\,dt$.

**Теорема 10.1.** *Если функция $f(s,t)$ интегрируема на параллелепипеде $Q$ и при каждом $s \in Q'$ существует $\int\limits_{Q''} f(s,t)\,dt$, то существует повторный интеграл $\int\limits_{Q'} ds \int\limits_{Q''} f(s,t)\,dt$ и он равен $I = \int\limits_{Q} f(x)\,dx = \iint\limits_{Q} f(s,t)\,ds\,dt$.*

Доказательство. Действуя по аналогии с соответствующей теоремой 8.1 для двойного интеграла, разбиваем отрезки $[a_1,b_1] \times \ldots [a_k,b_k]$ и $[a_{k+1},b_{k+1}] \times \ldots [a_n,b_n]$ на элементарные части и получаем разбиения параллелепипедов $Q' = \bigcup\limits_{i=1}^{m} Q'_i$ и $Q'' = \bigcup\limits_{j=1}^{l} Q''_j$. Тогда параллелепипеды $Q_{ij} = Q'_i \times Q''_j$ образуют некоторое разбиение $T$ параллелепипеда $Q$. Следуя далее доказательству уже упомянутой теоремы 8.1 для двойного интеграла, придем к неравенству

$$s)T \leqslant \sum_{i=1}^{m} I(\xi_i)v(Q'_i) \leqslant S_T, \tag{10.1.2}$$

где $s_T$ и $S_T$ суммы Дарбу функции $f(s,t)$, отвечающие разбиению $T$, а сумма $\mathfrak{S} = \sum\limits_{i=1}^{m} I(\xi_i)v(Q'_i)$ — интегральная для функции $I(s)$. Поскольку функция $f(s,t)$ интегрируема на $Q$, то существуют

$$\lim_{\lambda\to 0} s_T = \lim_{\lambda\to 0} S_T = I.$$

Перейдя к пределу при $\lambda \to 0$ в неравенстве (10.1.2), получаем требуемое утверждение теоремы.

Очевидно, что справедливо и двойственное предложение.

**Теорема 10.2.** *Если функция $f(s,t)$ интегрируема на параллелепипеде $Q$ и для любого $t \in Q''$ существует интеграл $K(t) = \int\limits_{Q'} f(s,t)\,ds$, то существует повторный интеграл $\int\limits_{Q''} K(t)\,dt = \int\limits_{Q''} dt \int\limits_{Q'} f(s,t)\,ds$ и он равен интегралу $I = \int\limits_{Q} f(x)\,dx = \iint\limits_{Q} f(s,t)\,ds\,dt$.*

Если функция $f(s,t)$ непрерывна на параллелепипеде $Q = Q' \times Q''$, то обычным образом, так, как это делается в первой главе для функций двух вещественных переменных, доказывается непрерывность функции $I(s) = \int\limits_{Q''} f(s,t)\,dt$ на множестве $Q'$ и функции $K(t) = \int\limits_{Q'} f(s,t)\,ds$ на $Q''$. В таком случае для функции $f(s,t)$ непрерывной на $Q$ выполнены обе доказанные выше теоремы, и, значит существуют оба повторных интеграла $\int\limits_{Q'} ds \int\limits_{Q''} f(s,t)\,dt$ и $\int\limits_{Q''} dt \int\limits_{Q'} f(s,t)\,ds$, они равны между собой и равны кратному интегралу $\int\limits_{Q} f(x)\,dx$.

Обозначим для $k = 1, \ldots, n-1$ через $Q^{(k)} = [a_{k+1}, b_{k+1}] \times \ldots [a_n, b_n]$ проекцию параллелепипеда $Q$ на подпространство $\mathbb{R}^{n-k}$. Тогда имеет место следующее предложение.

**Теорема 10.3.** *Если функция $f(x) = f(x_1, \ldots, x_n)$ интегрируема на параллелепипеде $Q$ и для любого $k = 1, 2, \ldots, n-1$ существует интеграл*

$$\underbrace{\int\int \ldots \int}_{Q^{(k)}} f(x_1, \ldots, x_n)\,dx_{k+1} \ldots dx_n,$$

*то*

$$\int\limits_{Q} f(x)\,dx = \underbrace{\int \ldots \int}_{Q} f(x_1, \ldots, x_n)\,dx_1 \ldots dx_n = \int\limits_{a_1}^{b_1} dx_1 \int\limits_{a_2}^{b_2} dx_2 \ldots \int\limits_{a_n}^{b_n} f(x_1, \ldots, x_n)\,dx_n.$$

Доказательство. Используя представления $Q = [a_1, b_1] \times Q^{(1)}, Q^{(1)} = [a_2, b_2] \times Q^{(2)}, \ldots$ и последовательно применяя теорему 9.1 получаем,

$$\int\limits_{Q} f(x)\,dx = \int\limits_{a_1}^{b_1} dx_1 \underbrace{\int \ldots \int}_{Q^{(1)}} f(x_1, \ldots, x_n)\,dx_2 \ldots dx_n =$$

$$= \int\limits_{a_1}^{b_1} dx_1 \int\limits_{a_2}^{b_2} dx_2 \underbrace{\int \ldots \int}_{Q^{(2)}} f(x_1, \ldots, x_n)\,dx_3 \ldots dx_n =$$

$$= \ldots = \int\limits_{a_1}^{b_1} dx_1 \int\limits_{a_2}^{b_2} dx_2 \ldots \int\limits_{a_n}^{b_n} f(x_1, \ldots, x_n)\,dx_n.$$

### 10.2. Случай произвольного множества

Рассмотрим некоторое произвольное измеримое множество $A \in \mathbb{R}^n$. Пусть $L$ — подпространство, натянутое на координатные оси $x_1, \ldots, x_{n-1}$, т.е. множество точек $x = (x_1, \ldots, x_{n-1}, 0)$. При $n = 2$ — это координатная ось $x_1$, а при $n = 3$ — координатная плоскость $x_1, x_2$. В $n$-мерном случае — это гиперплоскость $x_n = 0$. Если $x =$

$= (x_1, \ldots, x_n) \in A$, то точка $(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0) \in L$ есть проекция точки $x$ на подпространство $L$. Обозначим через $P(A)$ проекцию множества $A$ на подпространство $L$. Зафиксируем какую-то точку $x_0 = (x_1^0, \ldots, x_{n-1}^0, 0) \in P(A)$. Множество точек $(x_1^0, \ldots, x_{n-1}^0, x_n) \in A$ называется сечением множества $A$ и обозначается $A_{x_n}$. Уже отмечалось при $n = 2$, что множество $A_{x_n}$ не обязано быть связным.

**Теорема 10.4.** *Если функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ интегрируема на множестве $A$ и для каждой фиксированной точки $(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0) \in P(A)$ существует $\int\limits_{A_{x_n}} f(x_1, \ldots, x_n)\, dx_n$, то существует повторный интеграл*

$$\underbrace{\int \ldots \int}_{P(A)} dx_1 \ldots dx_{n-1} \int\limits_{A_{x_n}} f(x_1, \ldots, x_n)\, dx_n = \underbrace{\int \ldots \int}_{A} f(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_n.$$

Доказательство. Погрузим множество $A$ в какой-то параллелепипед $Q = [a_1, b_1] \times \ldots [a_n, b_n]$. По определению

$$\int\limits_A f(x)\, dx = \int\limits_Q \overline{f}(x)\, dx,$$

где

$$\overline{f}(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если} \quad x \in A, \\ 0, & \text{если} \quad x \in Q \setminus A. \end{cases}$$

Представим параллелепипед $Q$ в виде $Q = Q' \times Q''$, где $Q' = [a_1, b_1] \times \ldots [a_{n-1}, b_{n-1}]$ и $Q'' = [a_n, b_n]$. Для любой точки $(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0) \in P(A)$ имеем

$$\int\limits_{a_n}^{b_n} \overline{f}\, dx_n = \int\limits_{A_{x_n}} \overline{f}\, dx_n + \int\limits_{Q'' \setminus A_{x_n}} \overline{f}\, dx_n = \int\limits_{A_{x_n}} f\, dx_n + \int\limits_{Q'' \setminus A_{x_n}} 0 \cdot\, dx_n = \int\limits_{A_{x_n}} f\, dx_n.$$

Обозначим через $C = Q' \setminus P(A)$. Тогда согласно теореме 10.1 получаем

$$\int\limits_Q \overline{f}\, dx = \underbrace{\int \ldots \int}_{Q'} dx_1 \ldots dx_{n-1} \int\limits_{a_n}^{b_n} \overline{f}\, dx_n =$$

$$= \underbrace{\int \ldots \int}_{P(A)} dx_1 \ldots dx_{n-1} \int\limits_{a_n}^{b_n} \overline{f}\, dx_n + \underbrace{\int \ldots \int}_{C} dx_1 \ldots dx_{n-1} \int\limits_{a_n}^{b_n} \overline{f}\, dx_n =$$

$$= \underbrace{\int \ldots \int}_{P(A)} dx_1 \ldots dx_{n-1} \int\limits_{A_{x_n}} f(x_1, \ldots, x_n)\, dx_n.$$

Рассмотрим еще одно полезное для практики предложение. Пусть $A \subset \mathbb{R}^n$, $[a_1, b_1]$ — проекция множества $A$ на координатную ось $x_1$, $A_{x_2 \ldots x_n}$ — сечение множества $A$ плоскостью $x_1 = x_1^0$, где $x_1^0 \in [a_1, b_1]$, т.е. $A_{x_2 \ldots x_n}$ — множество точек $(x_1^0, x_2 \ldots, x_n) \in A$.

**Теорема 10.5.** *Если функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ интегрируема на множестве $A$ и для любого $x_1 \in [a_1, b_1]$ существует $\underbrace{\int \ldots \int}_{A_{x_2 \ldots x_n}} f(x_1, \ldots, x_n)\, dx_2 \ldots dx_n$, то существует повторный интеграл*

$$\int\limits_{a_1}^{b_1} dx_1 \underbrace{\int \ldots \int}_{A_{x_2 \ldots x_n}} f(x_1, \ldots, x_n)\, dx_2 \ldots dx_n = \int\limits_A f(x)\, dx.$$

Доказательство данной теоремы аналогично доказательству теоремы 10.4.

### 10.3. Тройные интегралы

В применении к тройному интегралу полученные результаты выглядят следующим образом. Когда область интегрирования есть координатный параллелепипед $Q = [a, b] \times [c, d] \times [e, f]$, то тройной интеграл на основании теоремы 10.3 приводится к виду

$$\iiint\limits_Q f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d dy \int\limits_e^f f(x, y, z)\, dz,$$

и в случае непрерывности функции $f(x, y, z)$ в повторном интеграле можно избирать любой порядок интегрирования.

Если область интегрирования $A$ — произвольное множество, то согласно теореме 10.4 тройной интеграл сводится к одному из повторных интегралов

$$\iint\limits_{P_{xy}} dx\, dy \int\limits_{A_z} f(x, y, z)\, dz, \iint\limits_{P_{yz}} dy\, dz \int\limits_{A_x} f(x, y, z)\, dx, \iint\limits_{P_{xz}} dx\, dz \int\limits_{A_y} f(x, y, z)\, dy, \tag{10.3.3}$$

где $P_{xy}, P_{yz}, P_{xz}$ — проекции множества $A$ соответственно на координатные плоскости $xOy$, $yOz$, $xOz$, а $A_z$ — сечение множества $A$ при фиксированной точке $(x_0, y_0) \in P_{xy}$ прямой $x = x_0$, $y = y_0$, $A_y$ — сечение множества $A$ при фиксированной точке $(y_0, z_0) \in P_{yz}$ прямой $y = y_0$, $z = z_0$ и $A_x$ — сечение множества $A$ при фиксированной точке $(x_0, z_0) \in P_x$ прямой $x = x_0$, $z = z_0$.

Согласно теореме 10.5 тройной интеграл можно представить одним из повторных интегралов вида

$$\int\limits_{P_x} dx \iint\limits_{A_{yz}} f\,dy\,dz, \quad \int\limits_{P_y} dy \iint\limits_{A_{xz}} f\,dx\,dz, \quad \int\limits_{P_z} dz \iint\limits_{A_{xy}} f\,dx\,dy, \tag{10.3.4}$$

где $P_x, P_y, P_z$ — проекции множества $A$ на координатные оси $x, y, z$ соответственно, а $A_{yz}$ — сечение множества $A$ плоскостью $x = x_0$ при фиксированной точке $x_0 \in P_x$, $A_{xz}$ — сечение множества $A$ плоскостью $y = y_0$ при фиксированной точке $y_0 \in P_y$ и $A_{xy}$ — сечение множества $A$ плоскостью $z = z_0$ при фиксированной точке $z_0 \in P_z$.

Опять-таки, в случае непрерывности функции $f(x, y, z)$, тройной интеграл можно выразить любым из указанных повторных интегралов (10.3.4).

Фигурирующие в повторных интегралах (10.3.3) и (10.3.4) двойные интегралы, в свою очередь, могут быть приведены к повторным интегралам из двух однократных интегралов, т.е., в конечном итоге, вычисление тройного интеграла сводится к трем последовательным однократным интегрированиям.

На практике удобно пользоваться областями интегрирования цилиндрическими относительно координатных осей. Множество $G$, ограниченное поверхностями $z = \varphi(x, y)$ и $z = \psi(x, y)$, где функции $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$ определены и непрерывны в области $P_{xy}$ и $\varphi(x, y) \leqslant \psi(x, y)$, цилиндрической поверхностью, направляющей которой является граница области $P_{xy}$, а образующая параллельна координатной оси $Oz$, называется областью цилиндрической относительно оси $Oz$ (рис. 5).

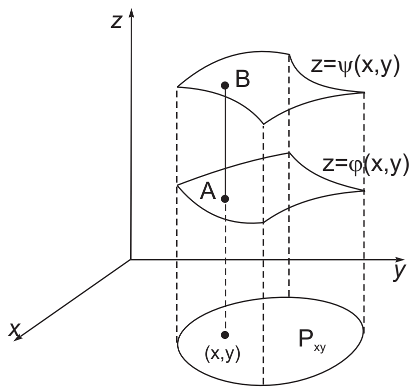



Рис. 5

Проекцией множества $G$ на координатную плоскость $xOy$ является $P_{xy}$, а сечение $G_z$ — есть отрезок $AB$, вдоль которого $\varphi(x,y) \leqslant z \leqslant \psi(x,y)$. Поэтому в данном случае имеем

$$\iiint\limits_G f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iint\limits_{P_{xy}} dx\,dy \int\limits_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} f(x,y,z)\,dz.$$

Область цилиндрическая относительно оси $Ox$ есть множество точек $G$, ограниченное поверхностями $x = \varphi(y,z)$ и $x = \psi(y,z)$, где функции $\varphi(y,z)$ и $\psi(y,z)$ определены и непрерывны в области $P_{yz}$ и $\varphi(y,z) \leqslant \psi(y,z)$, и цилиндрической поверхностью, направляющей которой служит граница области $P_{yz}$, а образующая параллельна оси $Ox$. Область $P_{yz}$ есть проекция множества $G$ на координатную плоскость $yOz$, а сечение $G_x$ — отрезок, параллельный оси $Ox$, вдоль которого $\varphi(y,z) \leqslant x \leqslant \psi(y,z)$. Следовательно, такой области отвечает представление

$$\iiint\limits_G f\,dx\,dy\,dz = \iint\limits_{P_{yz}} dy\,dz \int\limits_{\varphi(y,z)}^{\psi(y,z)} f\,dx.$$

Аналогично, область цилиндрическая относительно координатной оси $Oy$ есть множество $G$, ограниченное поверхностями $y = \varphi(x,z)$ и $y = \psi(x,z)$, где функции $\varphi(x,z)$ и $\psi(x,z)$ определены и непрерывны в области $P_{xz}$ и $\varphi(x,z) \leqslant \psi(x,z)$, и цилиндрической поверхностью, направляющей которой является граница множества $P_{xz}$, а образующая параллельна оси $Oy$. Область $P_{xz}$ есть проекция множества $G$ на координатную плоскость $xOz$. Сечением $G_y$ является отрезок, параллельный оси $Oy$ и вдоль которого $\varphi(x,z) \leqslant y \leqslant \psi(x,z)$. Такой области соответствует повторный интеграл

$$\iint\limits_{P_{xz}} dx\,dz \int\limits_{\varphi(x,z)}^{\psi(x,z)} f\,dy.$$

Таким образом, повторный интеграл, который избирается для вычисления тройного интеграла, должен соответствовать типу цилиндрической области. Если область интегрирования не соответствует необходимому типу, то ее разбивают на области требуемого типа.

## 10.4. Примеры

1°. Вычислить интеграл $I = \iiint\limits_G \dfrac{dx\,xy\,dz}{(1+x+y+z)^3}$, если область $G$ ограничена плоскостями $x+y+z=1$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

*Решение.* Множество $G$ есть цилиндрическая область относительно оси $Oz$, ограниченная снизу и сверху поверхностями $z = 0$ и $z = 1 - x - y$ соответственно, и цилиндрической поверхностью, составленной из треугольников $AOC$ и $BOC$ (рис. 6). Проекцией $P_{xy}$ области $G$ на координатную плоскость $xOy$ является треугольник $AOB$ (рис. 7), ограниченный линиями $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 1$. Сечение $G_z$ есть отрезок $x = \text{const}$, $y = \text{const}$, $0 \leqslant z \leqslant 1 - x - y$, где $(x, y) \in P_{xy}$. Тогда в силу теоремы 10.4 имеем

$$I = \iint\limits_{P_{xy}} dx\,dy \int\limits_0^{1-x-y} \frac{dz}{(1 + x + y + z)^3} =$$

$$= -\frac{1}{2} \iint\limits_{P_{xy}} \frac{1}{(1+x+y+z)^2}\Bigg|_0^{1-x-y} dxdy = \frac{1}{2} \iint\limits_{P_{xy}} \left[\frac{1}{(1+x+y)^2} - \frac{1}{4}\right] dx\,dy.$$

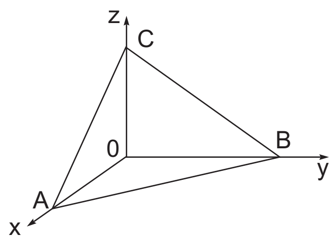



Рис. 6

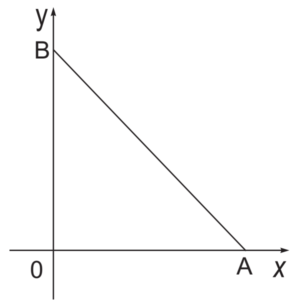



Рис. 7

Проекцией множества $P_{xy}$ на координатную ось $Ox$ будет отрезок $[0; 1]$, а сечением — отрезок $x = \text{const}$, $0 \leqslant y \leqslant 1 - x$, где $x \in [0; 1]$. Следовательно, на основании той же теоремы 10.4 интеграл $I$ сводится к повторному интегралу

$$I = \frac{1}{2} \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} \left[\frac{1}{(1 + x + y)^2} - \frac{1}{4}\right] dy = \frac{1}{2} \int\limits_0^1 \left(-\frac{1}{1 + x + y} - \frac{1}{4}\right)\Bigg|_0^{1-x} dx =$$

$$= \frac{1}{2} \int\limits_0^1 \left[\frac{1}{1 + x} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}(1 - x)\right] dx = \frac{1}{2} \int\limits_0^1 \left(\frac{1}{1 + x} + \frac{1}{4}x - \frac{3}{4}\right) dx = \frac{1}{2}\left(\ln 2 - \frac{5}{8}\right).$$

2°. Предполагая функцию $f(x, y, z)$ непрерывной, расставить различными способами пределы интегрирования в тройном интеграле, заданном повторным интегралом

$$\int\limits_{-1}^1 dx \int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \int\limits_{\sqrt{x^2+y^2}}^1 f(x, y, z)dz.$$

*Решение.* Прежде всего, восстановим область интегрирования $G$ тройного интеграла. Внутренний интеграл показывает, что она цилиндрическая относительно оси $Oz$ и ограничена снизу конической поверхностью $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, а сверху кругом $x^2 + y^2 \leqslant 1$, $z = 1$ (рис. 8). Тело $G$ является областью цилиндрической относительно всех трех ко-

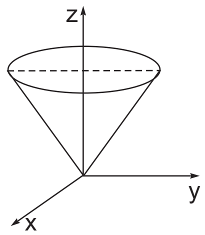



Рис. 8

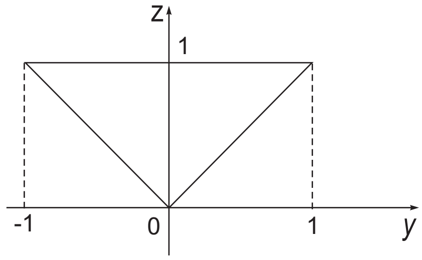



Рис. 9

ординатных осей. Рассмотрим случай, когда $G$ цилиндрическая относительно оси $Ox$, ограниченная поверхностями $x = -\sqrt{z^2 - y^2}$ и $x = \sqrt{z^2 - y^2}$. Тогда, согласно теореме 10.4, получаем

$$I = \iint\limits_{P_{yz}} dy\,dz \int\limits_{-\sqrt{z^2-y^2}}^{\sqrt{z^2-y^2}} f(x, y, z)\,dx,$$

где $P_{yz}$ — проекция тела $G$ на координатную плоскость $yOz$, изображенная на рис. 9.

Приводим далее к повторному интегралу двойной интеграл по области $P_{yz}$. Проекция множества $Pyz$ на ось $Oy$ есть отрезок $[-1; 1]$, а сечением является отрезок $y = \text{const}$, $|y| \leqslant z \leqslant 1$, где $y \in [-1; 1]$. Следовательно, повторный интеграл примет вид

$$I = \int\limits_{-1}^{1} dy \int\limits_{|y|}^{1} dz \int\limits_{-\sqrt{z^2-y^2}}^{\sqrt{z^2-y^2}} f(x, y, z)dx.$$

Поменяв порядок интегрирования по переменным $y$ и $z$, будем еще иметь

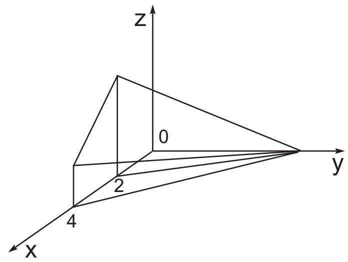
$$I = \int\limits_{0}^{1} dz \int\limits_{-z}^{z} dy \int\limits_{-\sqrt{z^2-y^2}}^{\sqrt{z^2-y^2}} f(x, y, z)dx.$$

Точно также, лишь поменяв ролями переменные $x$ и $y$, получим

$$I = \int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{|x|}^{1} dz \int\limits_{-\sqrt{z^2-x^2}}^{\sqrt{z^2-x^2}} f(x, y, z)dy = \int\limits_{0}^{1} dz \int\limits_{-z}^{z} dx \int\limits_{-\sqrt{z^2-x^2}}^{\sqrt{z^2-x^2}} f(x, y, z)dy.$$

3°. Найти объем тела, ограниченного плоскостями $y = 0$, $z = 0$, $3x + y = 6$, $3x + 2y = 12$ и $x + y + z = 6$.

*Решение.* Данное тело $G$ можно рассматривать как цилиндрическую область относительно оси $Oz$, ограниченную поверхностями $z = 0$ и $z = 6 - x - y$. Ее проекция $P_{xy}$ на координатную плоскость $xOy$ есть треугольник со сторонами $y = 0$, $3x + y = 6$ и $3x + 2y = 12$. Поэтому объем тела $G$, выражаемый формулой $V = \iiint\limits_G dx\,dy\,dz$, сводится с помощью повторного интеграла к двойному интегралу




$$V = \iint\limits_{P_{xy}} dx\,dy \int\limits_0^{6-x-y} dz = \iint\limits_{P_{xy}} (6 - x - y)dx\,dy.$$

Рис. 10

Проекция треугольника $P_{xy}$ на координатную ось $Oy$ есть отрезок $[0; 6]$, а сечение — $y = \text{const}$, $\frac{1}{3}(6 - y) \leqslant x \leqslant \frac{2}{3}(6 - y)$, где $y \in [0; 6]$ — отрезок, параллельный оси $Ox$. Следовательно, в силу теоремы 10.4 имеем

$$V = \int\limits_0^6 dy \int\limits_{\frac{1}{3}(6-y)}^{\frac{2}{3}(6-y)} (6 - x - y)\, dx = 12.$$

### 10.5. Объем $n$-мерного шара

Как мы уже знаем, $n$-мерный шар есть множество точек $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, которое задается неравенством

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 \leqslant r^2, \quad r > 0$$

и которое обозначается $S_n(r)$. Шар единичного радиуса $r$ обозначается просто $S_n$. В качестве одного из приложений теоремы 10.5 данного параграфа решим задачу об объеме $n$-мерного шара $S_n(r)$.

Пусть $\lambda > 0$ — какое-то число и $A$ — некоторое множество. Определим множество

$$\lambda A = \{\lambda x, \quad x \in A\}.$$

Преобразование множества $A$ во множество $\lambda A$ называется гомотетией с центром $x = 0$ и коэффициентом гомотетии $\lambda$.

**Лемма.** *Если $A \subset \mathbb{R}^n$ — измеримое множество, то множество $\lambda A$ также измеримо и*

$$v(\lambda A) = \lambda^n v(A).$$

Доказательство. Начнем с простейшего случая — параллелепипеда $Q = [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n]$. Имеем

$$\lambda Q = [\lambda a_1, \lambda b_1] \times \ldots \times [\lambda a_n, \lambda b_n],$$

$$v(\lambda Q) = (\lambda a_1 - \lambda b_1) \ldots (\lambda b_n - \lambda a_n) = \lambda^n v(Q).$$

Если $A$ — произвольное множество, то рассматриваем произвольное разбиение множества $A$ прямоугольной сеткой. Полученные при этом элементарные параллелепипеды $Q_j$ распределяются на две группы. Первая состоит из частей, содержащих точки границы множества $A$, а вторая включает части, целиком лежащие внутри $A$. Тогда интегральная сумма $\mathfrak{S}^*(A) = \sum\limits_j v(Q_j)$ соответственно представится в виде

$$\mathfrak{S}^*(A) = \sum_{j \in \mathrm{I}} v(Q_j) + \sum_{j \in \mathrm{II}} v(Q_j).$$

Если $d = \max\limits_j \{d_j\}$ — наибольший из диаметров параллелепипедов $Q_j$, то условие

$$\lim_{d \to 0} \sum_{j \in \mathrm{I}} v(Q_j) = 0$$

будет характеризовать измеримость множества $A$, а предел

$$\lim_{d \to 0} \sum_{j \in \mathrm{II}} v(Q_j) = v(A)$$

дает значение объема множества $A$.

Аналогично будем иметь

$$\mathfrak{S}^*(\lambda A) = \sum_{j \in \mathrm{I}} v(\lambda Q_j) + \sum_{j \in \mathrm{II}} v(\lambda Q_j),$$

и из измеримости множества $A$ вытекает, что

$$\lim_{d \to 0} \sum_{j \in \mathrm{I}} v(\lambda Q_j) = \lambda^n \lim_{d \to 0} \sum_{j \in \mathrm{I}} v(Q_j) = 0.$$

Тем самым множество $\lambda A$ измеримо. Кроме того,

$$\lim_{d \to 0} \sum_{j \in \mathrm{II}} v(\lambda Q_j) = \lambda^n \lim_{d \to 0} \sum_{j \in \mathrm{I}} v(Q_j).$$

Значит,

$$v(\lambda A) = \lambda^n v(A).$$

Лемма доказана.

Согласно лемме

$$v\big(S_n(r)\big) = r^n v\big(S_n(1)\big) = r^n v(S_n), \tag{10.5.5}$$

где $S_n$ — множество точек $x = (x_1, \ldots, x_n)$, заданное неравенством

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 \leqslant 1.$$

Объем единичного шара $S_n$ по определению выражается интегралом

$$v(S_n) = \int\limits_{S_n} dx = \underbrace{\int \ldots \int}_{S_n} dx_1\, dx_2 \ldots dx_n.$$

Проекция множества $S_n$ на координатную ось $x_1$ определяется неравенством $x_1^2 \leqslant 1$ и является отрезком $[-1; 1]$. Сечение $(S_n)_{x_2 \ldots x_n}$ при $x_1 = x_1^0$ описывается неравенством

$$x_1^{02} + x_2^2 + \ldots + x_n^2 \leqslant 1 \quad \text{или} \quad x_2^2 + \ldots + x_n^2 \leqslant 1 - x_1^{02}$$

Следовательно, имеем

$$(S_n)_{x_2 \ldots x_n} = S_{n-1}\left(\sqrt{1 - x_1^2}\right).$$

Тогда на основании теоремы 10.5, учитывая (10.5.5) и четность подинтегральной функции, получаем

$$v(S_n) = \int\limits_{-1}^{1} dx_1 \underbrace{\int \ldots \int}_{S_{n-1}\left(\sqrt{1-x_1^2}\right)} dx_2 \ldots dx_n = \int\limits_{-1}^{1} v\left(S_{n-1}\left(\sqrt{1 - x_1^2}\right)\right) dx_1 =$$

$$= \int\limits_{-1}^{1} \left(\sqrt{1 - x_1^2}\right)^{n-1} v(S_{n-1}) dx_1 = 2v(S_{n-1}) \int\limits_{-1}^{1} (1 - x_1^2)^{\frac{n-1}{2}} dx_1.$$

Замена переменной $x_1^2 = t$ дает далее

$$v(S_n) = 2v(S_{n-1}) \int\limits_{0}^{1} (1 - t)^{\frac{n-1}{2}} \cdot \frac{1}{2} t^{-\frac{1}{2}} dt = v(S_{n-1}) \cdot B\left(\frac{1}{2}, \frac{n+1}{2}\right).$$

Выражая бета функцию через гамма функцию, переходим к рекуррентной формуле

$$v(S_n) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right)} v(S_{n-1}), \tag{10.5.6}$$

из которой следует цепочка равенств

$$v(S_n) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right)} v(S_{n-1}),$$

$$v(S_{n-1}) = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)} v(S_{n-2}),$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$v(S_2) = \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(2)} v(S_1).$$

Перемножив эти равенства, приходим к соотношению

$$v(S_n) = \frac{\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^{n-1} \cdot \Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right)} v(S_1).$$

Так как $\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$, $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ и $v(S_1) = 2$, то формула объема единичного шара принимает следующий окончательный вид

$$v(S_n) = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right)}.$$

Значит, объем $n$-мерного шара равен

$$v\big(S_n(r)\big) = \frac{\pi^{\frac{n}{2}} r^n}{\Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right)}. \tag{10.5.7}$$

Можно разделить случаи четного и нечетного $n$. Тогда получим

$$v\big(S_{2k}(r)\big) = \frac{\pi^k r^{2k}}{\Gamma(k+1)} = \frac{1}{k!}\pi^k r^{2k}$$

и

$$v\big(S_{2k+1}(r)\big) = \frac{\pi^{k+\frac{1}{2}} r^{2k+1}}{\Gamma\left(k+\frac{3}{2}\right)} = \frac{\pi^{k+\frac{1}{2}} r^{2k+1}}{\left(k+\frac{1}{2}\right)\left(k-\frac{1}{2}\right)\dots\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{2^{k+1}\pi^k r^{2k+1}}{(2k+1)!!}.$$

Для $n = 1, 2, 3$ находим из указанных формул хорошо известные значения $2r$, $\pi r^2$, $\frac{4}{3}\pi r^3$.

## § 11. Замена переменных в кратном интеграле

Все, что говорилось и утверждалось в пункте 8.1 второй главы об отображении областей и криволинейных координатах, без изменений переносится на $n$-мерный случай. В частности, отметим, что остается в силе играющий в дальнейшем важную роль принцип сохранения области.

### 11.1. Вывод формулы замены переменных в кратном интеграле

Пусть $\overline{G}$ и $\overline{G}'$ — две замкнутые области в пространстве $\mathbb{R}^n$ и $x = \varphi(u)$ — некоторое взаимно однозначное отображение области $\overline{G}'$ на область $\overline{G}$, где $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $u = (u_1, \ldots, u_n)$ и $\varphi_1(u_1, \ldots, u_n), \ldots, \varphi_n(u_1, \ldots, u_n)$ — координатные функции отображения $\varphi(u)$.

**Теорема 11.1.** *Пусть*

1) *отображение $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ взаимно однозначно отображает замкнутую область $\overline{G}'$ на замкнутую область $\overline{G}$;*

2) *координатные функции $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ непрерывно дифференцируемы в области $\overline{G}'$;*

3) *якобиан $J = J(u) = \dfrac{D(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)}{D(u_1, \ldots, u_n)} \neq 0$ в области $\overline{G}'$.*

*Если функция $f(x)$ непрерывна в области $\overline{G}$, то справедлива формула*

$$\int\limits_{\overline{G}} f(x)\,dx = \int\limits_{\overline{G}'} f\bigl(\varphi(u)\bigr)|J(u)|\,du, \tag{11.1.1}$$

*или, то же самое, в координатной форме*

$$\underbrace{\int \ldots \int}_{\overline{G}} f(x_1, \ldots, x_n)\,dx_1 \ldots dx_n = \underbrace{\int \ldots \int}_{\overline{G}'} f(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)|J(u)|\,du_1 \ldots du_n.$$

Доказательство. Так как подинтегральные функции непрерывны, то оба интеграла в равенстве (11.1.1) существуют, и надо доказать лишь их равенство. Ограничимся для простоты трехмерным случаем. Будем при этом пользоваться обычными для тройного интеграла обозначениями: координаты точки области $G$ — $(x, y, x)$, координаты точки области $G'$ — $(u, v, w)$. Отображение $\varphi$ зададим в координатной форме системой

$$\begin{cases} x = \varphi_1(u, v, w), \\ y = \varphi_2(u, v, w), \quad (u, v, w) \in \overline{G}'. \\ z = \varphi_3(u, v, w), \end{cases} \tag{11.1.2}$$

Поскольку отображение $\varphi$ взаимно однозначное, то первые два уравнения системы (11.1.2) можно разрешить относительно переменных $u$ и $v$. В результате получим две функции

$$u = g(x, y, w), \quad v = h(x, y, w), \tag{11.1.3}$$

обращающие в тождества эти уравнения

$$x = \varphi_1\big(g(x, y, w), h(x, y, w), w\big), \quad y = \varphi_2\big(g(x, y, w), h(x, y, w), w\big). \tag{11.1.4}$$

Функции $\varphi_1$ и $\varphi_2$, в свою очередь, удовлетворяют уравнениям (11.1.3), что дает еще два тождества

$$u \equiv g\big(\varphi_1(u, v, w), \varphi_2(u, v, w), w\big), \quad v \equiv h\big(\varphi_1(u, v, w), \varphi_2(u, v, w), w\big). \tag{11.1.5}$$

Подставив теперь в третье уравнение системы (11.1.2) значения $u$ и $v$ из (11.1.3), будем иметь функцию

$$z = \varphi_3\big(g(x, y, w), h(x, y, w), w\big) = F(x, y, w). \tag{11.1.6}$$

В силу непрерывной дифференцируемости отображения $\varphi$ и из того, что якобиан $J$ отличен от нуля, все выведенные функции также непрерывно дифференцируемы. После предварительно проведенной подготовки непосредственно приступаем к доказательству.

Переход от точки $M(x, y, z) \in \overline{G}$ к соответствующей точке $M'(u, v, w) \in \overline{G}'$ совершаем в два шага.

Шаг первый. Сохранив координаты $x, y$ точки $M$, заменяем координату $z$ на $w$, выражаемое из уравнения $z = F(x, y, w)$. В итоге получим точки $M_1(x, y, w)$, образующие некоторое промежуточное множество $\overline{G}_1$, которое, согласно принципу сохранения области, будет замкнутой областью.

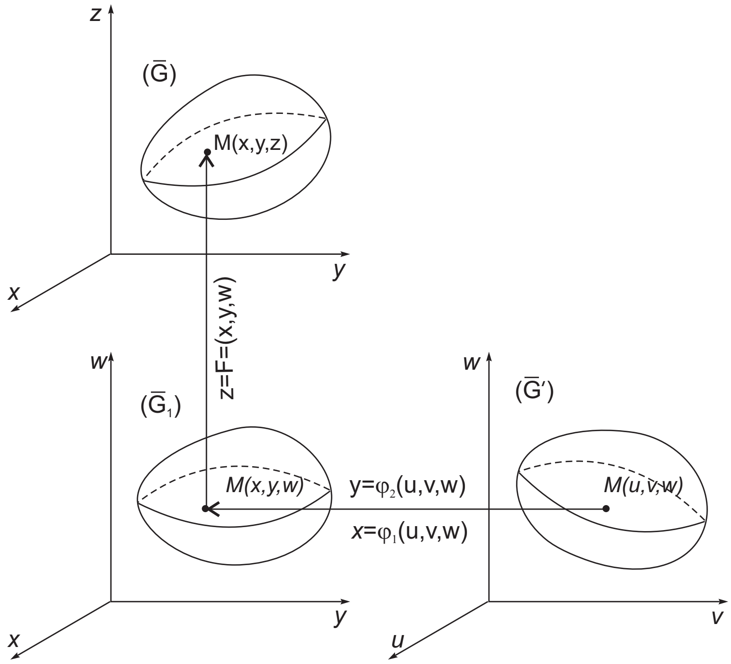



Рис. 11

<u>Шаг второй.</u> Координаты $x, y$ точки $M$ заменяем на $u, v$, которые определяются из уравнений $x = \varphi_1(u, v, w)$, $y = \varphi_2(u, v, w)$, а координата $w$ сохраняется.

Точно также в два шага совершается переход от интеграла $I = \iiint\limits_G f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$ к интегралу $\iiint\limits_{\overline{G}'} f(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)|J|\, du\, dv\, dw$. Сначала представляем интеграл $I$ в виде повторного интеграла

$$I = \iint\limits_{G_{xy}} dx\, dy \int\limits_{G_z} f(x, y, z)\, dz,$$

где $G_{xy}$ — проекция области $G$ на координатную плоскость $x, y$, а $G_z$ — сечение области $\overline{G}$ прямой $x = \text{const}$, $y = \text{const}$, и производим во внутреннем интеграле замену переменной $z = F(x, y, w)$. Согласно формуле (8.2.8) второй главы, получаем

$$I = \iint\limits_{G_{xy}} dx\, dy \int\limits_{(G_1)_w} f\big[x, y, F(x, y, w)\big] \left|\frac{\partial F}{\partial w}\right| dw = \iiint\limits_{G_1} H(x, y, w) \left|\frac{\partial F}{\partial w}\right| dx\, dy\, dw,$$

где $(G_1)_w$ — сечение области $\overline{G}_1$ той же прямой $x = \text{const}$, $y = \text{const}$ и $H(x, y, w) = f\big[x, y, F(x, y, w)\big]$. Применяем к интегралу по области $\overline{G}_1$ теорему 10.5, что дает

$$I = \int\limits_{G_{1w}} dw \iint\limits_{(\overline{G}_1)_{xy}} H(x, y, w) \left|\frac{\partial F}{\partial w}\right| dx\, dy,$$

где $G_{1w}$ — проекция $\overline{G}_1$ на координатную ось $w$, а $(G_1)_{xy}$ — сечение множества $\overline{G}_1$ плоскостью $w = \text{const}$, $w \in G_{1w}$. Совершаем теперь подстановку $x = \varphi_1(u, v, w)$, $y =$

$= \varphi_2(u,v,w)$ во внутреннем интеграле и в силу формулы (8.3.9) замены переменных главы второй, имеем

$$I = \int\limits_{G_{1w}} dw \iint\limits_{G'_{uv}} H(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3) \left|\frac{\partial F}{\partial w}\right| \cdot \left|\frac{D(\varphi_1,\varphi_2)}{D(u,v)}\right| du\,dv =$$

$$= \iiint\limits_{G'} f(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3) \left|\frac{\partial F}{\partial w} \cdot \frac{D(\varphi_1,\varphi_2)}{D(u,v)}\right| du\,dv\,dw,$$

так как из определения функций $F(x,y,w)$ и $H(x,y,w)$ и тождеств (11.1.5) следует, что $H(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3) = f(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3)$.

Остается подсчитать $\dfrac{\partial F}{\partial w}$ и $\dfrac{D(\varphi_1,\varphi_2)}{D(u,v)}$. Для этого снова обращаемся к определению (11.1.6) функции F(x,y,w), откуда выводим

$$\frac{\partial F}{\partial w} = \frac{\partial z}{\partial u}\,\frac{\partial u}{\partial w} + \frac{\partial z}{\partial v}\,\frac{\partial v}{\partial w} + \frac{\partial z}{\partial w}.$$

Чтобы найти производные $\dfrac{\partial u}{\partial w}$ и $\dfrac{\partial v}{\partial w}$, дифференцируем по $w$ тождества (11.1.4) и получаем систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial u}\,\dfrac{\partial u}{\partial w} + \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial v}\,\dfrac{\partial v}{\partial w} + \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial w} = 0, \\ \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial u}\,\dfrac{\partial u}{\partial w} + \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial v}\,\dfrac{\partial v}{\partial w} + \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial w} = 0. \end{cases} \tag{11.1.7}$$

Введя обозначения

$$J_{u,v} = \frac{D(\varphi_1,\varphi_2)}{D(u,v)}, \quad J_{w,u} = \frac{D(\varphi_1,\varphi_2)}{D(w,u)}, \quad J_{v,w} = \frac{D(\varphi_1,\varphi_2)}{D(v,w)},$$

имеем из системы (11.1.7)

$$\frac{\partial u}{\partial w} = \frac{J_{v,w}}{J_{u,v}}, \quad \frac{\partial v}{\partial w} = \frac{J_{w,u}}{J_{u,v}}.$$

Следовательно,

$$\frac{\partial F}{\partial w} \cdot \frac{D(\varphi_1,\varphi_2)}{D(u,v)} = \frac{\partial u}{\partial z} \cdot J_{v,w} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot J_{w,u} + \frac{\partial z}{\partial w} \cdot J_{u,v} = \frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)} = J.$$

В общем случае формулу замены переменных (11.1.1) можно доказать методом математической индукции, совершая шаг индукции от $n$ к $n+1$ по аналогии с приведенным выше переходом от двойного к тройному интегралу.

Если в соотношении (11.1.1) положить $f(x) = 1$, то получится выражение объема области в криволинейных координатах

$$v(G) = \int\limits_G |J(u)|\, du = \underbrace{\int \ldots \int}_{G} |J(u_1, \ldots, u_n)|\, du_1 \ldots du_n. \qquad (11.1.8)$$

Рассуждая по аналогии со случаем двойного интеграла, можно рассматривать значение якобиана отображения в точке как коэффициент искажения объема в этой точке при данном отображении.

## 11.2. Криволинейные координаты в трехмерном пространстве

Ограничимся опять-таки трехмерным случаем. Пусть отображение $\varphi$, заданное в координатной форме системой уравнений

$$\begin{cases} x = \varphi_1(u, v, w), \\ y = \varphi_2(u, v, w), \\ z = \varphi_3(u, v, w) \end{cases} \qquad (11.2.9)$$

взаимно однозначно преобразует замкнутую область $\overline{G}'$ на замкнутую область $\overline{G}$. Тогда каждая точка $M(x, y, z) \in \overline{G}$ однозначно определяется не только декартовыми координатами $x, y, z$, но и соответствующей ей тройкой чисел $u, v, w$, которые можно считать некими новыми координатами точки $M$, а систему равенств (11.2.9) — формулами перехода от одних координат к другим.

Рассмотрим в области $\overline{G}'$ некоторую плоскость $u = u_0$. Отображение $\varphi$ переведет ее в поверхность

$$x = \varphi_1(u_0, v, w), \quad y = \varphi_2(u_0, v, w), \quad z = \varphi_3(u_0, v, w),$$

которую будем называть координатной поверхностью $u = \text{const}$. Придавая $u_0$ все возможные значения, получим некоторое семейство координатных поверхностей, зависящее от параметра $u$. Аналогично, плоскости $v = \text{const}$ и $w = \text{const}$ преобразуются отображением $\varphi$ еще в два семейства координатных поверхностей. Поэтому $(u, v, w)$ называют криволинейными координатами.

В силу взаимной однозначности отображения $\varphi$ указанные три семейства обладают следующими свойствами:

1. Координатные поверхности одного и того же семейства попарно не пересекаются.

2. Через каждую точку множества $\overline{G}$ проходит одна и только одна координатная поверхность каждого из трех семейств.

3. Координатные поверхности $u = \text{const}$, $v = \text{const}$ и $w = \text{const}$ пересекаются в единственной точке с координатами $(u, v, w)$.

Приведем далее наиболее употребительные в трехмерном пространстве системы криволинейных координат.

Цилиндрическая система координат. Положение точки $M$ в этой системе координат (рис. 12) определяется декартовой координатой $z$ и полярными координатами $(\rho, \varphi)$ точки $M'$, являющейся проекцией точки $M$ на координатную плоскость $x, y$. Указанные координаты принято называть цилиндрическими.

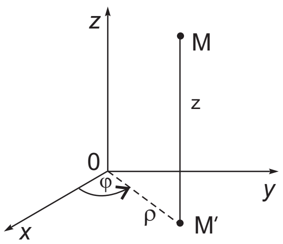


Рис. 12

Области изменения цилиндрических координат:

$$0 \leqslant \rho < +\infty, \quad 0 \leqslant \varphi < 2\pi \quad \text{или} \quad -\pi < \varphi \leqslant \pi, \quad -\infty < z < +\infty.$$

Координатные поверхности таковы:

$\rho = \text{const}$ — круговая цилиндрическая поверхность с образующей, параллельной оси $z$;

$\varphi = \text{const}$ — полуплоскость, исходящая из оси $z$;

$z = \text{const}$ — плоскость, перпендикулярная оси $z$.

Из рисунка 12 видно, что декартовы координаты точки $M$ связаны с ее цилиндрическими координатами соотношениями

$$x = \rho \cos\varphi, \quad y = \rho \sin\varphi, \quad z = z. \tag{11.2.10}$$

Якобиан полученного преобразования равен

$$J = \frac{D(x, y, z)}{D(\rho, \varphi, z)} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\rho\sin\varphi & \rho\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \rho.$$

Он положителен во всех точках пространства, кроме точки $O$.

В точках оси $z$ указанное отображение не является взаимно однозначным. В остальной части трехмерного пространства оно взаимно однозначно.

Сферическая система координат.

Положение точки $M$ в пространстве определяется тремя величинами (рис. 13): а) расстоянием $\rho$ от точки $M$ до точки $O$; б) углом $\varphi$, образованным проекцией $OM'$ вектора $\overrightarrow{OM}$ на плоскость $x, y$ с положительным направлением оси $x$; в) углом $\theta$, образованным вектором $\overrightarrow{OM}$ с положительным направлением оси $z$. Указанные координаты называются сферическими.

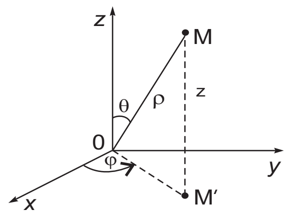


Рис. 13

Области изменения сферических координат:

$$0 \leqslant \rho < +\infty, \quad 0 \leqslant \varphi < 2\pi, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi.$$

Координатные поверхности данной системы координат:

$\rho = \mathrm{const}$ — сфера с центром в точке $O$;

$\varphi = \mathrm{const}$ — вертикальная полуплоскость, исходящая из оси $z$;

$\theta = \mathrm{const}$ — круговая коническая поверхность с вершиной в точке $O$.

Легко видеть (рис. 13), что декартовы координаты точки $M$ выражаются через ее сферические координаты соотношениями

$$x = \rho \cos\varphi \sin\theta, \quad y = \rho \sin\varphi \sin\theta, \quad z = \rho\cos\theta. \tag{11.2.11}$$

Якобиан этого преобразования равен

$$J = \frac{D(x,y,z)}{D(\rho,\varphi,\theta)} = \begin{vmatrix} \cos\varphi\sin\theta & -\rho\sin\varphi\sin\theta & \rho\cos\varphi\cos\theta \\ \sin\varphi\sin\theta & \rho\cos\varphi\sin\theta & \rho\sin\varphi\cos\theta \\ \cos\theta & 0 & -\rho\sin\theta \end{vmatrix} = \rho^2\sin\theta.$$

Как и в случае цилиндрической системы координат, в точках оси $z$ отображение (11.2.11) не является взаимно однозначным. В остальной части пространства оно взаимно однозначно.

## 11.3. Примеры и дополнения

1°. Перейти к сферическим координатам в интеграле

$$I = \iiint\limits_G f\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)\,dx\,dy\,dz,$$

где область $\overline{G}$ ограничена поверхностями $z = x^2 + y^2$, $y = x$, $x = 1$, $y = 0$, $z = 0$.

*Решение.* Перейти в тройном интеграле к сферическим координатам — это значит произвести в интеграле замену переменных $x = \rho\cos\varphi\cos\theta$, $y = \rho\sin\varphi\sin\theta$, $z = \rho\cos\theta$.

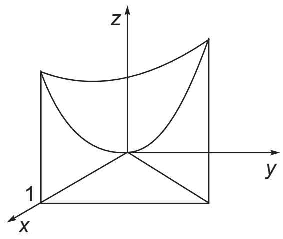



Рис. 14

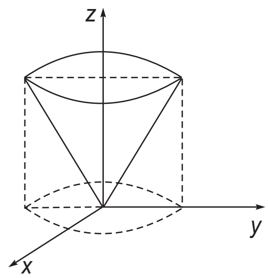



Рис. 15

Так как якобиан данного отображения $J = \rho^2\sin\theta$ и $x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2$, то согласно теореме (11.1.1) имеем

$$I = \iiint\limits_G f(\rho^2)\rho^2\sin\theta\,d\rho\,d\varphi\,d\theta.$$

Сведем теперь интеграл $I$ к повторному интегралу с порядком интегрирования $(\varphi, \theta, \rho)$. При фиксированных $\varphi$ и $\theta$, т.е. вдоль сечения $\varphi = \mathrm{const}$, $\theta = \mathrm{const}$, мы будем перемещаться от параболоида $z = x^2 + y^2$ до плоскости $x = 1$. Перейдя в уравнениях этих поверхностей к сферическим координатам, получим $\rho = \dfrac{\cos\theta}{\sin^2\theta}$ и $\rho = \dfrac{1}{\cos\varphi\sin\theta}$.

Определим значения $\theta$ вдоль линии пересечения указанных поверхностей, для чего приравниваем правые части их уравнений $\dfrac{\cos\theta}{\sin^2\theta} = \dfrac{1}{\cos\varphi\sin\theta}$, и получаем $\operatorname{ctg}\theta = \dfrac{1}{\cos\varphi}$. Значит, при фиксированном значении $\varphi$ область изменения координаты $\theta$ будет задаваться неравенством $\operatorname{arctg}(\cos\varphi) \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$. Что касается переменной $\varphi$, то она очевидным образом изменяется от 0 до $\frac{\pi}{4}$. В итоге имеем представление

$$I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int\limits_{\operatorname{arctg}(\cos\varphi)}^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\, d\theta \int\limits_{\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}}^{\frac{1}{\cos\varphi\sin\theta}} \rho^2 f(\rho^2)\, d\rho.$$

2°. Вычислить интеграл $I = \iiint\limits_G \sqrt{x^2+y^2}\, dx\, dy\, dz$ по области $G$, определяемой неравенством $\sqrt{x^2+y^2} \leqslant z \leqslant 1$.

*Решение.* Данная область $G$ ограничена снизу круговым конусом $z = \sqrt{x^2+y^2}$ и сверху плоскостью $z = 1$. Перейдем в интеграле $I$ к цилиндрическим координатам, т.е. произведем в нем замену переменных $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, $z = z$. В цилиндрических координатах уравнение конуса принимает вид $z = \rho$. Тогда на основании теоремы 10.4 имеем

$$I = \iiint\limits_G \rho^2\, d\rho\, d\varphi\, dz = \iint\limits_P d\rho\, d\varphi \int\limits_\rho^1 \rho^2\, dz,$$

где $P$ — проекция области $G$ на плоскость $x, y$, т.е. круг $\rho \leqslant 1$. Приводим и внешний интеграл к повторному интегралу и получаем

$$I = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 \rho^2\, d\rho \int\limits_\rho^1 dz = 2\pi \int\limits_0^1 \rho^2(1-\rho)\, d\rho = \frac{\pi}{6}.$$

3°. Найти значение интеграла $I = \iiint\limits_G \sqrt{x^2+y^2+z^2}\, dx\, dy\, dz$, где область $\overline{G}$ есть шар $x^2+y^2+z^2 \leqslant r^2$.

*Решение.* Перейдем в тройном интеграле к сферическим координатам, т.е. перейдем в нем к новым переменным $\rho, \varphi, \theta$ по формулам

$$x = \rho\cos\varphi\sin\theta, \quad y = \rho\sin\varphi\sin\theta, \quad z = \rho\cos\theta.$$

Учитывая, что якобиан данного преобразования равен $J = \rho^2\sin\theta$, будем иметь

$$I = \iiint\limits_G \rho^3 \sin\theta\, d\rho\, d\varphi\, d\theta.$$

Заменяем далее $I$ повторным интегралом с порядком интегрирования $(\theta, \varphi, \rho)$. Так как уравнение сферы в новых координатах принимает вид $\rho = r$, то получаем

$$I = \int\limits_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta \cdot \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \cdot \int\limits_0^r \rho^3\, d\rho = \pi r^4.$$

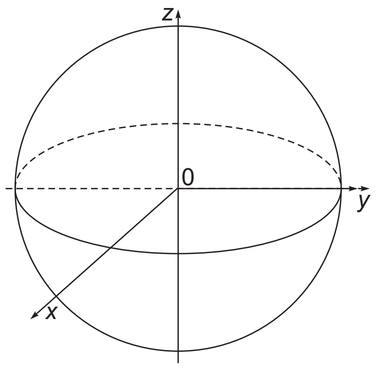



Рис. 16

4°. Вычислить интеграл

$$\iiint\limits_G x^2\,dx\,dy\,dz,$$

где область $\overline{G}$ ограничена поверхностями $z=ay^2$, $z=by^2$ $(0<a<b)$, $z=\alpha x$, $z=\beta x$ $(0<\alpha<\beta)$, $z=h$ $(h>0)$.

*Решение.* У всякой замены переменных есть две цели: упростить подинтегральную функцию или упростить область интегрирования. Идеальным будет случай, когда одновременно достигаются обе цели.

В данном примере напрашивается следующая замена переменных

$$x=\frac{z}{v},\quad y=\sqrt{\frac{z}{u}},\quad z=z. \tag{11.3.12}$$

Так как область изменения новых переменных

$$u=\frac{z}{y^2},\quad v=\frac{z}{x},\quad z=z$$

есть отрезки $a\leqslant u\leqslant b$, $\alpha\leqslant v\leqslant\beta$, $0\leqslant z\leqslant h$ и, следовательно, пределы интегрирования по новым переменным будут постоянными.

Якобиан преобразования (11.3.12) равен

$$J=\frac{D(x,y,z)}{D(u,v,z)}=\begin{vmatrix} 0 & -\frac{z}{v^2} & \frac{1}{v} \\ -\frac{1}{2}\frac{\sqrt{z}}{u\sqrt{u}} & 0 & \frac{1}{2\sqrt{uz}} \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=-\frac{1}{2}u^{-\frac{3}{2}}v^{-2}z^{\frac{3}{2}}.$$

Тогда согласно теореме 11.1 получим

$$\iiint\limits_{G} x^2\,dx\,dy\,dz = \iiint\limits_{G'} \frac{z^2}{v^2}\cdot\frac{z^{3/2}}{2u^{3/2}v^2}du\,dv\,dz =$$

$$= \frac{1}{2}\iiint\limits_{G'} u^{-3/2}v^{-4}z^{7/2}du\,dv\,dz = \frac{1}{2}\int\limits_{a}^{b} u^{-3/2}du\cdot\int\limits_{\alpha}^{\beta} v^{-4}dv\cdot\int\limits_{0}^{h} z^{7/2}dz =$$

$$= \frac{1}{2}\left(-2u^{-1/2}\right)\Big|_a^b\cdot\left(-\frac{1}{3}v^{-3}\right)\Big|_\alpha^\beta\cdot\frac{2}{9}z^{9/2}\Big|_0^h = \frac{2}{27}\left(\frac{1}{\sqrt{b}}-\frac{1}{\sqrt{a}}\right)\left(\frac{1}{\beta^3}-\frac{1}{\alpha^3}\right)h^4\sqrt{h}.$$

5°. Найти объем шара $G$, заданного неравенством $x^2+y^2+z^2\leqslant r^2$, $r>0$.

*Решение.* Чтобы выразить объем шара, перейдем к сферическим координатам, т.е. совершим преобразование $x=\rho\cos\varphi\theta$, $\quad y=\rho\sin\varphi\sin\theta$, $\quad z=\rho\cos\theta$, якобиан которого равен $J=\rho^2\sin\theta$.

Тогда на основании формулы (11.1.8) имеем

$$v(G) = \iiint\limits_{G}|J|\,d\rho\,d\varphi\,d\theta = \iiint\limits_{G}\rho^2\sin\theta\,d\rho\,d\varphi\,d\theta = \int\limits_0^\pi \sin\theta\,d\theta\cdot\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\cdot\int\limits_0^r\rho^2\,d\rho = \frac{4}{3}r^3.$$

Мы применили для вычисления объема шара три различных метода. Сравнивая их, можно судить о степени адекватности используемого аппарата рассматриваемой задаче. Простота и краткость приведенного вывода говорят о том, что сферические координаты, как и следовало ожидать, лучше других отражают природу шара.

6°. Найти объем эллипсоида

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leqslant 1. \tag{11.3.13}$$

*Решение.* Данный пример приводится для знакомства с так называемыми обобщенными сферическими координатами, которые определяются соотношениями

$$x=a\rho\cos\varphi\sin\theta,\quad y=b\rho\sin\varphi\sin\theta,\quad z=c\rho\cos\theta, \tag{11.3.14}$$

где $0\leqslant\rho<+\infty$, $0\leqslant\varphi<2\pi$, $0\leqslant\theta\leqslant\pi$.

Якобиан преобразования (11.3.14) равен

$$J = \frac{D(x,y,z)}{D(\rho,\varphi,\theta)} = \begin{vmatrix} a\cos\varphi\sin\theta & b\sin\varphi\sin\theta & c\cdot\cos\theta \\ -a\rho\sin\varphi\sin\theta & b\rho\cos\varphi\sin\theta & 0 \\ a\rho\cos\varphi\cos\theta & b\rho\sin\varphi\cos\theta & -c\rho\sin\theta \end{vmatrix} =$$

$$= abc \begin{vmatrix} \cos\varphi\sin\theta & \sin\varphi\sin\theta & \cos\theta \\ -\rho\sin\varphi\sin\theta & \rho\cos\varphi\sin\theta & 0 \\ \rho\cos\varphi\cos\theta & \rho\sin\varphi\cos\theta & -\rho\sin\theta \end{vmatrix} = abc\rho^2\sin\theta.$$

В новых координатах уравнение эллипсоида принимает вид $\rho = 1$. Тогда согласно формуле (11.1.8) имеем

$$v(G) = abc\iiint\limits_G \rho^2\sin\theta\,d\rho\,d\varphi\,d\theta = abc\int\limits_0^\pi \sin\theta\,d\theta\cdot\int\limits_0^{2\pi} d\varphi\cdot\int\limits_0^1 \rho^2\,d\rho = \frac{4}{3}\pi abc.$$

$7^\circ$. Сферические координаты в пространстве $\mathbb{R}^n$.

Пусть $x = (x_1,\ldots,x_n)$ — некоторая точка пространства $\mathbb{R}^n$, $\overline{r}_m = (x_1,\ldots,x_m)$ — проекция $x$ на подпространство $\mathbb{R}^m$, $r_m = \sqrt{x_1^2+\ldots+x_m^2}$ $(m = 1,2,\ldots,n)$. Положение точки $x$ будем определять $n$ числами $(\rho,\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_{n-1})$, где $\rho = r_n = \sqrt{x_1^2+\ldots+x_n^2}$, а $\theta_m$ (m=1,2,...,n-1) — угол, образованный радиус-вектором $\overline{r}_m$ с положительным направлением оси $x_m$.

Тогда имеем

$$\begin{array}{ll} \cos\theta_{n-1} = \dfrac{x_n}{r_n}, & \sin\theta_{n-1} = \dfrac{r_{n-1}}{r_n}, \\ \cos\theta_{n-2} = \dfrac{x_{n-1}}{r_{n-1}}, & \sin\theta_{n-2} = \dfrac{r_{n-2}}{r_{n-1}}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \cos\theta_2 = \dfrac{x_3}{r_3}, & \sin\theta_2 = \dfrac{r_2}{r_3}, \\ \cos\theta_1 = \dfrac{x_2}{r_2}, & \sin\theta_1 = \dfrac{r_1}{r_2}. \end{array} \tag{11.3.15}$$

Координаты $(\rho,\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_{n-1})$ называют $n$-мерными сферическими координатами.

Чтобы выразить $x_m$ $(m = 1,2,\ldots,n)$ через сферические координаты, поступаем следующим образом. Берем строку в левой колонке соотношений (11.3.15), где находится $x_m$, и умножаем эту строку на все строки правой колонки, стоящие выше нее. В итоге получаем формулы

$$x_1 = \rho \sin\theta_1 \ldots \sin\theta_{n-1}, \quad x_2 = \rho\cos\theta_1 \sin\theta_2 \ldots \sin\theta_{n-1}, \ldots,$$

$$x_{n-1} = \rho\cos\theta_{n-2}\sin\theta_{n-1}, \quad x_n = \rho\cos\theta_{n-1}.$$

Области изменения сферических координат:

$$0 \leqslant \rho < +\infty, \quad 0 \leqslant \theta_1 < 2\pi, \quad 0 \leqslant \theta_m \leqslant \pi \quad \text{для} \quad m \geqslant 2.$$

Якобиан данного преобразования $\dfrac{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{D(\rho, \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{n-1})}$ есть определитель, прямое вычисление которого очень кропотливо.

Пусть дана система $n$ уравнений с $2n$ переменными:

$$F_i(x_1, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_n) = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

с якобианом $\dfrac{D(F_1, \ldots, F_n)}{D(y_1, \ldots, y_n)}$, отличным от нуля. Рассмотрим $y_1, \ldots, y_n$ как функции от $x_1, \ldots, x_n$, определяемые этой системой уравнений. Тогда справедлива формула

$$\frac{D(y_1, \ldots, y_n)}{D(x_1, \ldots, x_n)} = (-1)^n \frac{\dfrac{D(F_1, \ldots, F_n)}{D(x_1, \ldots, x_n)}}{\dfrac{D(F_1, \ldots, F_n)}{D(y_1, \ldots, y_n)}}. \tag{11.3.16}$$

Возвращаясь к сферическим координатам, отметим, что из формул (11.3) вытекают соотношения

$$x_1^2 + x_2^2 = \rho^2 \sin^2\theta_2 \ldots \sin^2\theta_{n-1},$$

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = \rho^2 \sin^2\theta_3 \ldots \sin^2\theta_{n-1},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{n-1}^2 = \rho^2 \sin^2\theta_{n-1},$$

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = \rho^2,$$

которые приводят к системе уравнений

$$F_1=\rho^2-(x_1^2+\ldots x_n^2)=0,$$

$$F_2=\rho^2\sin^2\theta_{n-1}-\left(x_1^2+\ldots+x_{n-1}^2\right)=0,$$

$$F_3=\rho^2\sin^2\theta_{n-2}\sin^2\theta_{n-1}-(x_1^2+\ldots+x_{n-2}^2)=0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$F_{n-1}=\rho^2\sin^2\theta_2\ldots\sin^2\theta_{n-1}-(x_1^2+x_2^2)=0,$$

$$F_n=\rho^2\sin^2\theta_1\ldots\sin^2\theta_{n-1}-x_1^2=0.$$

По формуле (11.3.16) имеем теперь

$$\frac{D(x_1,\ldots,x_n)}{D(\rho,\theta_1,\ldots,\theta_{n-1})}=(-1)^n\frac{\dfrac{D(F_1,\ldots,F_n)}{D(\rho,\theta_1,\ldots,\theta_{n-1})}}{\dfrac{D(F_1,\ldots,F_n)}{D(x_1,\ldots,x_n)}}.$$

Легко заметить, что оба определителя правой части диагональные. Перемножив их диагональные элементы, получим

$$\frac{D(F_1,\ldots,F_n)}{D(\rho,\theta_1,\ldots,\theta_{n-1})}=$$

$$=2^n\rho^{2n-1}\sin^{2n-3}\theta_{n-1}\cos\theta_{n-1}\sin^{2n-5}\theta_{n-2}\cos\theta_{n-2}\ldots\sin^3\theta_2\cos\theta_2\sin\theta_1\cos\theta_1,$$

и на основании формул (11.3)

$$\frac{D(F_1,\ldots,F_n)}{D(x_1,\ldots,x_n)}=(-1)^n2^nx_1x_2\ldots x_n=$$

$$=(-1)^n2^n\rho^n\sin^{n-1}\theta_{n-1}\sin^2\theta_{n-2}\ldots\sin\theta_1\cos\theta_1\ldots\cos\theta_{n-1}.$$

Следовательно,

$$J=\rho^{n-1}\sin^{n-2}\theta_{n-1}\sin^{n-3}\theta_{n-2}\ldots\sin^2\theta_3\sin\theta_2.$$

8°. Вычислить с помощью сферических координат оъем $n$-мерного шара ($r>0$):

$$x_1^2+\ldots+x_n^2\leqslant r^2.$$

*Решение.* Объем тела в криволинейных координатах выражается формулой (11.1.8), которая в случае $n$-мерных координат принимает вид

$$v(G)=\underbrace{\int\ldots\int}_{G}\rho^{n-1}\sin\theta_2\sin\theta_1\ldots\sin^{n-2}\theta_{n-1}d\theta\,d\theta_1\ldots d\theta_{n-1}. \qquad (11.3.17)$$

Так как $n$-мерный шар в сферических координатах определяется неравенством $\rho \leqslant r$, то переменная $\rho$ в интеграле (11.3.17) будет изменяться на промежутке $0 \leqslant \rho \leqslant r$. Будут постоянными и пределы интегрирования по всем остальным переменным. Кроме того, подинтегральная функция есть произведение множителей, зависящих от одной переменной. Поэтому интеграл (11.3.17) представится в виде произведения однократных интегралов

$$v(G) = \int\limits_0^r \rho^{n-1} d\rho \cdot \int\limits_0^{2\pi} d\theta_1 \cdot \int\limits_0^{\pi} \sin\theta_2 d\theta_2 \ldots \int\limits_0^{\pi} \sin^{n-2}\theta_{n-1} d\theta_{n-1}. \tag{11.3.18}$$

В пункте 3.6 первой главы выведена формула

$$I_m = \int\limits_0^{\pi/2} \sin^m x\,dx = \frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{m+2}{2}\right)}.$$

Рассмотрим интеграл

$$\int\limits_0^{\pi} \sin^m x\,dx = \left(\int\limits_0^{\pi/2} + \int\limits_{\pi/2}^{\pi}\right) \sin^m x\,dx.$$

Подстановка $\pi - x = t$ во втором интеграле правой части приведет к равенству

$$\int\limits_{\pi/2}^{\pi} \sin^m x\,dx = \int\limits_0^{\pi/2} \sin^m x\,dx.$$

Следовательно, имеем

$$\int\limits_0^{\pi} \sin^m x\,dx = 2\int\limits_0^{\pi/2} \sin^m x\,dx = \frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m+2}{2}\right)}. \tag{11.3.19}$$

Применив в равенстве (11.3.18) соотношения (11.3.19) и учитывая, что $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$, получаем

$$v(G) = \frac{1}{n} r^n \cdot 2\pi \cdot \frac{\Gamma(1)\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(2)} \ldots \frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} =$$

$$= \frac{2\pi r^n}{n} \frac{\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^{n-2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} = \frac{\pi r^n \left(\sqrt{\pi}\right)^{n-2}}{\frac{n}{2}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} = \frac{\pi^{n/2} r^n}{\Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right)}.$$

В итоге приходим к тому же значению (10.5.7) для объема $n$-мерного шара.

## § 12. Механические приложения двойных и тройных интегралов

Кратные интегралы имеют многочисленные приложения в смежных науках, особенно в физике. Через них выражаются масса и центр масс тела, статические моменты и моменты инерции, заряд тела, поток жидкости и другие величины, представляющие собой функции множества. Мы ограничимся лишь приложениями в механике.

### 12.1. Масса тела

Пусть $G$ — измеримое множество в трехмерном пространстве, вдоль которого распределена некоторая масса. Будем называть такое множество материальным телом, а точку с сосредоточенной в ней какой-то массой — материальной точкой.

Отношение массы тела $M$ к ее объему $v(G)$ в физике называется средней плотностью распределения массы на множестве $G$. Пусть теперь $P(x, y, z)$ — произвольная точка множества $G$ и $U_\varepsilon(P)$ — $\varepsilon$-окрестность этой точки. Обозначим через $\rho_\varepsilon$ — среднюю плотность массы данной окрестности.

Предел $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \rho_\varepsilon = \rho(P) = \rho(x, y, z)$ называется плотностью массы в точке $P$. Как следует из определения, данный предел есть функции точки. В дальнейшем эта функция всегда предполагается непрерывной.

Если материальное тело однородное, т.е. любые его части с одним и тем же объемом имеют одинаковые массы, то плотность $\rho(x, y, z) = \rho = \text{const}$ является постоянной величиной, и масса тела $M$ равна произведению плотности на объем тела. При $\rho = 1$ масса $M$ тела численно равна его объему.

Если же тело $G$ неоднородное, с плотностью распределения массы $\rho(x, y, z)$, то для вычисления его массы употребляется обычный метод интегрального исчисления. Берем произвольное разбиение $G = \bigcup\limits_{i=1}^{n} G_i$ множества на измеримые элементарные части $G_i$ и выбираем в каждой из них по некоторой точке $(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$. Считаем $G_i$ однородным телом с плотностью $\rho = \rho(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$. Тогда ее масса приближенно представляется величиной $m_i = \rho(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)v(G_i)$, а общая масса тела — суммой $\mathfrak{S} = \sum\limits_{i=1}^{n} \rho(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)v(G_i)$. Обозначим через $d_i = \mathrm{diam} G_i$ и через $\lambda = \max\limits_i \{d_i\}$. Указанное выражение есть интегральная сумма для непрерывной функции $\rho(x, y, z)$, а потому существует конечный предел

$$\lim_{\lambda \to 0} \mathfrak{S} = \iiint\limits_G \rho(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = M,$$

который естественно принять за значение массы тела $G$.

Все вышесказанное можно повторить и в двумерном случае, сократив число координат до двух $x$ и $y$. Окончательная формула принимает вид

$$M = \iint\limits_G \rho(x, y)\, dx\, dy.$$

### 12.2. Статический момент

Пусть в трехмерном пространстве $\mathbb{R}^3$ задана какая-то точка $P(x, y, z)$, в которой сосредоточена масса $m$. Числовые величины

$$K_{yz} = m \cdot x, \quad K_{xz} = m \cdot y, \quad K_{xy} = m \cdot z$$

называются статическими моментами материальной точки $P$ относительно координатных плоскостей $yz, xz$ и $xy$ соответственно.

Статический момент системы материальных точек $P_i$ с массами $m_i$ определяется как сумма статических моментов всех точек системы

$$K_{yz} = \sum_{i=1}^{n} m_i x_i, \quad K_{xz} = \sum_{i=1}^{n} m_i y_i, \quad K_{xy} = \sum_{i=1}^{n} m_i z_i. \tag{12.2.1}$$

Пусть $G$ — некоторое неоднородное измеримое материальное тело с плотностью распределения массы $\rho(x, y, z)$. Возьмем произвольное разбиение $G = \bigcup\limits_{i=1}^{n} G_i$ на измеримые части $G_i$. Обозначим через $d_i = \operatorname{diam} G_i$ и через $\lambda = \max\limits_i \{d_i\}$. Выберем в каждой элементарной части $G_i$ какую-то точку $P_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$. Приняв $G_i$ за однородное тело с плотностью массы $\rho = \rho(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$, поместим всю массу $m_i = \rho(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) v(G_i)$ в выбранную точку $P_i$. Тем самым тело $G$ представится в виде конечной системы материальных точек $P_i$ с массой $m_i$. Статический момент $K_{xy}$ этой системы выражается суммой $\mathfrak{S} = \sum\limits_{i=1}^{n} \zeta_i \rho(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) v(G_i)$, которая является интегральной суммой для непрерывной функции $z\rho(x, y, z)$. В пределе при $\lambda \to 0$ все погрешности от сделанных допущений сгладятся. Поэтому естественно считать, что статический момент тела $G$ относительно координатной плоскости $x, y$ есть числовая величина

$$K_{xy} = \lim_{\lambda\to 0} \mathfrak{S} = \iiint\limits_G z\rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz.$$

Аналогично вводим статические моменты

$$K_{yz} = \iiint\limits_G x\rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz, \quad K_{xz} = \iiint\limits_G y\rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

относительно координатных плоскостей $y, z$ и $x, z$ соответственно.

В двумерном случае рассматриваются статические моменты относительно оси, в частности относительно координатных осей. Аналогично трехмерному случаю будем иметь формулы

$$K_x = \iint\limits_G y\rho(x,y)\,dx\,dy, \quad K_y = \iint\limits_G x\rho(x,y)\,dx\,dy.$$

### 12.3. Центр масс

Если задана конечная система материальных точек $P_1(x_1, y_1), \ldots, P_n(x_n, y_n)$, в которых сосредоточены соответственно массы $m_1, \ldots, m_n$, то точка $P(\overline{x}, \overline{y})$ с координатами

$$\overline{x} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} x_i m_i, \quad \overline{y} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} y_i m_i, \tag{12.3.2}$$

где $m = \sum\limits_{i=1}^{n} m_i$ — общая масса системы, называется в механике центром масс данной системы.

Представим равенство (12.3.2) в форме

$$m\overline{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i m_i, \quad m\overline{y} = \sum_{i=1}^{n} y_i m_i \tag{12.3.3}$$

и поместим в точке $P(\overline{x}, \overline{y})$ всю массу системы материальных точек $P_i$. Тогда центр масс данной системы можно рассматривать как материальную точку, статические моменты которой относительно координатных осей $x$ и $y$ равны сумме статических моментов всех точек системы относительной тех же осей.

Перенесем это определение центра масс на произвольную плоскую материальную фигуру $G$, где $G$ — измеримое множество, с плотностью распределения массы $\rho(x, y)$.

**Определение.** Центром масс материальной фигуры $G$ называется точка $P(\overline{x}, \overline{y})$ с координатами

$$\overline{x} = \frac{K_y}{m} = \frac{\iint\limits_G x\rho(x,y)dx\,dy}{\iint\limits_G \rho(x,y)dx\,dy}, \quad \overline{y} = \frac{K_x}{m} = \frac{\iint\limits_G y\rho(x,y)dx\,dy}{\iint\limits_G \rho(x,y)dx\,dy}. \tag{12.3.4}$$

Интеграл, стоящий в знаменателе этих равенств, есть масса $m$ данной фигуры $G$.

Если материальная фигура $G$ однородна, т.е. $\rho(x,y) = \mathrm{const}$, то постоянный множитель $\rho$ вынесется в формулах (12.3.4) из-под знака интегралов и сократится. В таком случае формулы для координат центра масс примут вид

$$\overline{x} = \frac{1}{v(G)} \iint\limits_G x\,dx\,dy, \quad \overline{y} = \frac{1}{v(G)} \iint\limits_G y\,dx\,dy, \tag{12.3.5}$$

где $v(G)$ — двумерный объем, т.е. площадь плоского множества $G$.

Отметим частный случай, когда множество $G$ есть цилиндрическая область вдоль координатной оси $y$. Переходя в формулах (12.3.5) к повторным интегралам, будем иметь

$$\iint\limits_G x\,dx\,dy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} x\,dy = \int\limits_a^b x(y_2 - y_1)\,dx \tag{12.3.6}$$

и

$$\iint\limits_G y\,dx\,dy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} y\,dy = \frac{1}{2}\int\limits_a^b (y_2^2 - y_1^2)\,dx, \tag{12.3.7}$$

где $y_1 = \varphi(x)$ и $y_2 = \psi(x)$.

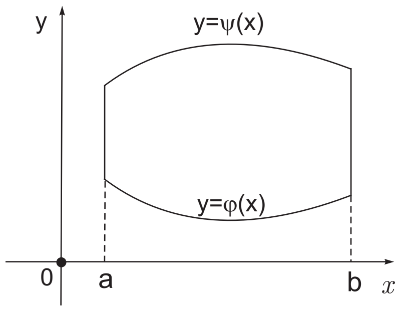



Рис. 17

Повторив все вышесказанное для трехмерного материального тела $G$, где $G$ — измеримое множество с плотностью распределения массы $\rho(x,y,z)$, придем к определению:

центр масс тела $G$ есть точка $P(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$ с координатами

$$\begin{aligned}
\overline{x} &= \frac{K_{yz}}{m} = \frac{\iiint\limits_G x\rho(x,y,z)dx\,dy\,dz}{\iiint\limits_G \rho(x,y,z)dx\,dy\,dz},\\
\overline{y} &= \frac{K_{xz}}{m} = \frac{\iiint\limits_G y\rho(x,y,z)dx\,dy\,dz}{\iiint\limits_G \rho(x,y,z)dx\,dy\,dz},\\
\overline{z} &= \frac{K_{xy}}{m} = \frac{\iiint\limits_G z\rho(x,y,z)dx\,dy\,dz}{\iiint\limits_G \rho(x,y,z)dx\,dy\,dz},
\end{aligned} \tag{12.3.8}$$

Для однородного тела $G$ формулы (12.3.8) переходят в соотношения

$$\begin{gathered}
\overline{x} = \frac{1}{v(G)} \iiint\limits_G x\,dx\,dy\,dz, \quad \overline{y} = \frac{1}{v(G)} \iiint\limits_G y\,dx\,dy\,dz,\\
\overline{z} = \frac{1}{v(G)} \iiint\limits_G z\,dx\,dy\,dz
\end{gathered} \tag{12.3.9}$$

Отметим еще одно свойство центра масс, с которым часто приходится сталкиваться на практике. Пусть $G$ однородная плоская фигура, которая симметрична относительно оси $y$ и которая является цилиндрической областью вдоль этой оси. Отсюда следует, что область изменения переменной $x$ есть симметричный промежуток $[-a, a]$ а функции $y_1 = \varphi(x)$ и $y_2 = \psi(x)$ — четные. Тогда согласно соотношению (12.3.6)

$$\iint\limits_G x\,dx\,dy = \int\limits_{-a}^{a} x(y_2 - y_1)\,dx = 0,$$

т.к. подинтегральная функция $x(y_2 - y_1)$ нечетная на отрезке $[-a, a]$. Таким образом, $\overline{x} = 0$ и центр масс расположен на оси симметрии.

Если к тому же область $G$ симметрична еще и относительно координатной оси $x$ и является цилиндрической вдоль нее, то центр масс должен располагаться на обеих осях симметрии, т.е. должен быть точкой их пересечения — началом системы координат $O$.

### 12.4. Момент инерции

Моментом инерции материальной точки $P$ относительно оси $l$ называется произведение массы, сосредоточенной в этой точке, на квадрат расстояния от точки до оси.

Момент инерции конечной системы материальных точек равен сумме моментов инерции всех точек системы.

Данное определение годится, очевидно, и для двумерного, и для трехмерного случая. Остановимся подробнее на трехмерном случае.

Пусть $G$ — материальное тело в пространстве $\mathbb{R}^3$ с плотностью распределения массы $\rho(x, y, z)$, $l$ — некоторая ось, $r(x, y, z)$ — расстояние от точки $(x, y, z)$ то оси $l$. Рассмотрим произвольное разбиение измеримого множества $G = \bigcup\limits_{i=1}^{n} G_i$. Обозначим через $d_i = \mathrm{diam} G_i$ и через $\lambda = \max\limits_{i}\{d_i\}$. Возьмем в каждой элементарной части $G_i$ какую-то точку $(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$. Будем считать тело $G$ однородным с плотностью массы $\rho = \rho(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$. Тогда масса, сосредоточенная на $G_i$, будет приближенно равна $m_i = \rho(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) v(G_i)$.

Таким образом, тело $G$ заменяется конечной системой материальных точек $P_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ с моментом инерции, равным сумме

$$\mathfrak{S} = \sum_{i=1}^{n} r^2(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \rho(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) v(G_i).$$

Чем мельче будет разбиение, тем точнее сумма $\mathfrak{S}$ выражает момент инерции тела $G$ относительно оси $l$. А в пределе при $\lambda \to 0$ все погрешности от сделанных допущений сгладятся. Поэтому естественно считать момент инерции $I_l$ тела $G$ относительно оси $l$ равным $I_l = \lim\limits_{\lambda \to 0} \mathfrak{S}$. Так как сумма $\mathfrak{S}$ интегральная для непрерывной функции $r^2(x, y, z)\rho(x, y, z)$, то этот предел существует и является тройным интегралом. В итоге имеем

$$I_l = \iiint\limits_{G} r^2(x, y, z) \rho(x, y, z)\, dx\, dy\, dz. \tag{12.4.10}$$

Если осью $l$ служит координатная ось $Oz$, то $r^2 = x^2 + y^2$. Следовательно, при $\rho = 1$ получаем формулу

$$I_z = \iiint\limits_{G} (x^2 + y^2)\, dx\, dy\, dz. \tag{12.4.11}$$

Аналогично, при $\rho = 1$ находим

$$I_x = \iiint\limits_{G} (y^2 + z^2)\, dx\, dy\, dz, \quad I_y = \iiint\limits_{G} (x^2 + z^2)\, dx\, dy\, dz.$$

Подобным же образом в двумерном случае при $\rho = 1$ будем иметь соотношения

$$I_x = \iint\limits_{G} y^2\, dx\, dy, \quad I_y = \iint\limits_{G} x^2\, dx\, dy. \tag{12.4.12}$$

### 12.5. Примеры

1°. Найти центр масс однородного полукруга $G$ радиуса $r$.

*Решение.* Введем систему координат $x, y$ так, как это показано на рисунке 18. Тогда область $G$ ограничена сверху полуокружностью $y = \sqrt{r^2 - x^2}$, а снизу прямой $y = 0$, т.е. область $G$ цилиндрическая вдоль оси $y$.

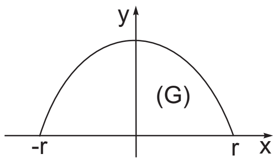



Рис. 18

Так как ось $y$ является осью симметрии полукруга, то координата центра масс $\overline{x} = 0$. Вторая координата $\overline{y}$ определяется формулой (12.3.7), согласно которой

$$\overline{y} = \frac{1}{v(G)} \int\limits_{-r}^{r} (y_2^1 - y_1^2)\, dx,$$

где $v(G) = \dfrac{\pi r^2}{2}$, $y_1 = 0$ и $y_2 = \sqrt{r^2 - x^2}$. Подставив указанные значения, получаем

$$\overline{y} = \frac{2}{\pi r^2} \int\limits_{-r}^{r} (r^2 - x^2)\, dx = \frac{4}{\pi r^2} \int\limits_{0}^{r} (r^2 - x^2)\, dx = \frac{4}{\pi r^2} \left( r^2 x - \frac{1}{3} x^3 \right) \Bigg|_0^r = \frac{8r}{9\pi}.$$

2°. Вычислить координаты центра масс однородного конуса с вершиной в начале координат и осью, совпадающей с осью $Oz$.

*Решение.* Вследствие симметрии конуса относительно оси $Oz$ имеем $\overline{x} = \overline{y} = 0$. Координата $\overline{z}$ находится по формуле (12.3.9)

$$\overline{z} = \frac{1}{v(G)} \iiint\limits_{G} z\, dx\, dy\, dz.$$

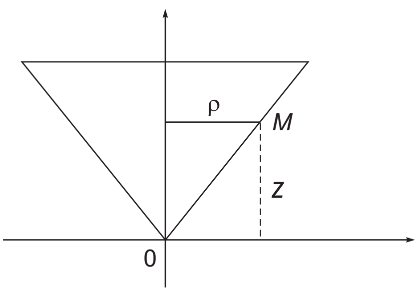



Рис. 19

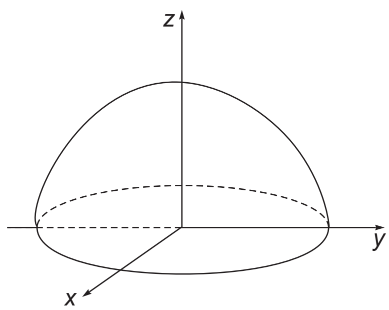



Рис. 20

Обозначим через $R$ — радиус основания конуса и через $H$ его высоту. Вычисление интеграла проведем в цилиндрических координатах, для чего потребуется уравнение конуса в этих координатах. Из подобия треугольников (рис. 19) имеем пропорцию $\frac{z}{H} = \frac{\rho}{R}$, откуда $z = \frac{H}{R}\rho$. Тогда после замены переменных получаем

$$\iiint\limits_G z\,dx\,dy\,dz = \iiint\limits_G \rho z\,d\rho\,d\varphi\,dz = \iint\limits_{G_{\rho\varphi}} d\rho\,d\varphi \int\limits_{\frac{H}{R}\rho}^{H} \rho z\,dz =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{R} \rho z^2 \Bigg|_{\frac{H}{R}\rho}^{H} d\rho = \frac{1}{2}\cdot 2\pi \int\limits_0^{R} \left( H^2\rho - \frac{H^2}{R^2}\rho^3 \right) d\rho =$$

$$= \frac{\pi H^2}{R^2}\int\limits_0^{R} \left(R^2\rho - \rho^3\right) d\rho = \frac{\pi H^2}{R^2}\left(\frac{1}{2}R^2\rho^2 - \frac{1}{4}\rho^4\right)\Bigg|_0^R = \frac{\pi R^2 H^2}{4}.$$

Следовательно,

$$\overline{z} = \frac{\pi R^2 H^2}{4} : \frac{1}{3}\pi R^2 H = \frac{3}{4}H.$$

3°. Вычислить момент инерции однородного полушара $G$ относительно оси $Oz$ (рис. 20).

*Решение.* Обозначим радиус полушара $R$ и введем декартову систему координат, как показано на рис. 20.

Согласно формуле (12.4.11), момент инерции однородного тела $G$ относительно оси $Oz$ выражается интегралом

$$I_z = \iiint\limits_G (x^2 + y^2)\,dx\,dy\,dz.$$

Его вычисление проведем в сферических координатах, что означает замену переменных

$$x = \rho\cos\varphi\sin\theta, \quad y = \rho\sin\varphi\sin\theta, \quad z = \rho\cos\theta.$$

В новых координатах уравнение сферы примет вид $\rho = R$. Тогда имеем

$$I_z = \iiint\limits_G \rho^4 \sin^2\theta\,d\rho\,d\varphi\,d\theta = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \cdot \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta\,d\theta \cdot \int\limits_0^{R} \rho^4\,d\rho = \frac{\pi^2 R^5}{10}.$$

4°. Определить момент инерции относительно оси $Oz$ однородного тела $G$, ограниченного поверхностями $z = x^2 + y^2$, $x + y = \pm 1$, $x - y = \pm 1$, $z = 0$.

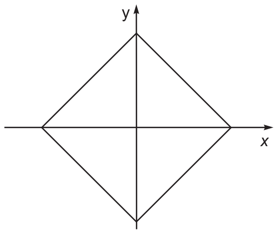



Рис. 21

*Решение.* Как и в предыдущем примере, момент инерции

$$I_z = \iiint\limits_G (x^2 + y^2)\, dx\, dy\, dz.$$

На основании теоремы 10.4 сводим тройной интеграл к повторному интегралу

$$\iiint\limits_{G_{xy}} dx\, dy \int\limits_0^{x^2+y^2} dz = \iint\limits_{G_{xy}} (x^2 + y^2)\, dx\, dy,$$

где $G_{xy}$ — проекция области $G$ на координатную плоскость $x, y$ (рис. 21).

Для вычисления двойного интеграла по указанной области вводим новые переменные $u$ и $v$ соотношениями

$$u = x + y, \quad v = x - y. \tag{12.5.13}$$

Области их изменения $-1 \leqslant u \leqslant 1$, $-1 \leqslant v \leqslant 1$. Произведем в двойном интеграле замену переменных с помощью преобразования, обратного к преобразованию (12.5.13):

$$x = \frac{u+v}{2}, \quad y = \frac{u-v}{2}.$$

Составим и вычислим его якобиан

$$J = \frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}.$$

Заметим еще, что $x^2 + y^2 = \dfrac{1}{2}(u^2 + v^2)$. Подставив теперь $x, y, J$ и используя четность подинтегральной функции, имеем

$$I_z = \iint\limits_{G_{xy}} \left(\frac{u^2+v^2}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} du\, dv = \frac{1}{8}\int\limits_{-1}^{1} du \int\limits_{-1}^{1} (u^4 + 2u^2v^2 + v^4) dv =$$

$$= \frac{1}{4}\int\limits_{-1}^{1} \left(u^4 v + \frac{2}{3}u^2v^3 + \frac{1}{5}v^5\right)\Bigg|_0^1 du = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \left(u^4 + \frac{2}{3}u^2 + \frac{1}{5}\right) du = \frac{14}{45}.$$

## § 13. Несобственные двойные интегралы

Для простоты будут рассматриваться лишь несобственные двойные интегралы. Хотя, как будет видно по ходу изложения, все понятия и теоремы можно без принципиальных изменений перенести на интегралы любой кратности.

Как и однократном случае, несобственные двойные интегралы порождаются двумя причинами: неограниченностью подинтегральной функции и неограниченностью области интегрирования.

### 13.1. Основные понятия

Пусть $G$ — открытое множество (ограниченное или неограниченное) в пространстве $\mathbb{R}^2$. Будем говорить, что последовательность открытых ограниченных и измеримых множеств $G_k$ монотонно исчерпывает множество $G$, если:

$$\begin{cases} 1.\ G_k \subset G \quad \text{при любом} \quad k; \\ 2.\ \overline{G}_k \subset G_{k+1} \quad \text{для каждого} \quad k = 1, 2, \ldots; \\ 3.\ \text{для любого ограниченного замкнутого подмножества } F \text{ множества } G \\ \text{существует член последовательности } G_N, \text{ содержащий множество } F. \end{cases} \tag{13.1.1}$$

Примерами таких последовательностей могут служить:

1. Последовательности $G_k = (-k; k) \times (-k; k)$ и $G_k$, ограниченные линиями $y = |x| - k$, $y = -|x| + k$ — монотонно исчерпывают координатную плоскость $x, y$.

2. Последовательность $G_k$, заданных неравенствами $x^2 + y^2 < 9 - \dfrac{1}{k}$, $k = 1, 2, \ldots$ — монотонно исчерпывает открытый круг $x^2 + y^2 < 9$.

Рассмотрим некоторую функцию $f(x, y)$ определенную на множестве $G$. Точка $(x_0, y_0)$ (не обязательно принадлежащая множеству $G$) называется особой точкой функции $f(x, y)$, если в любой окрестности данной точки функция $f(x, y)$ является неограниченной.

Очевидно, что точка $(x_0, y_0)$ будет особой для функции $f(x, y)$, если функция имеет в этой точке бесконечный предел.

Пусть на открытом множестве $G$ определена непрерывная, за исключением конечного числа особых точек, функция $f(x,y)$ и пусть $G_k$ — последовательность открытых ограниченных и измеримых множеств, не содержащих особых точек функции $f(x,y)$ и монотонно исчерпывающих множество $G$. Так как функция $f(x,y)$ интегрируема на каждом множестве $G_k$, то можно ввести следующее основное понятие.

**Определение.** Если для любой последовательности открытых, ограниченных и измеримых множеств $G_k$, не содержащих особых точек функции $f(x,y)$ и монотонно исчерпывающих множество $G$, существует предел

$$\lim_{k\to\infty} \iint\limits_{G_k} f(x,y)\,dx\,dy,$$

значение которого не зависит от выбора последовательности $G_k$, то он называется двойным интегралом функции $f(x,y)$ по множеству $G$ и обозначается $\iint\limits_{G} f(x,y)\,dx\,dy$.

Если он конечен, то несобственный интеграл называется сходящимся. В противном случае, т.е. если указанный предел бесконечен или вовсе не существует, интеграл называется расходящимся. В случае, когда область интегрирования разбита на конечное число частей, то несобственный интеграл считается сходящимся на множестве $G$ лишь при условии его сходимости на каждой из частей, составляющих множество $G$.

**Теорема 13.1.** *Для того, чтобы несобственный интеграл* $\iint\limits_{G} f\,dx\,dy$, *сходился, необходимо и достаточно, чтобы для любой последовательности открытых, ограниченных и измеримых множеств* $G_k$, *не содержащих особых точек функции* $f$ *и монотонно исчерпывающих множество* $G$, *и для любого* $\varepsilon > 0$ *существует такой номер* $N$, *что при* $\forall n \geqslant N$ *и любом натуральном* $p$ *выполнялось неравенство*

$$\left| \iint\limits_{G_{n+p}} f\,dx\,dy - \iint\limits_{G_n} f\,dx\,dy \right| = \left| \iint\limits_{G_{n+p}\setminus G_n} f\,dx\,dy \right| < \varepsilon. \qquad (13.1.2)$$

*Необходимость.* Пусть $G_k$ — произвольная последовательность открытых, ограниченных и измеримых множеств, не содержащих особых точек функции $f$, и монотонно исчерпывающих множество $G$. Тогда согласно условию существует конечный предел

$$\lim_{k\to\infty} \iint\limits_{G_k} f(x,y)\,dx\,dy = \iint\limits_{G} f(x,y)\,dx\,dy.$$

По определению предела последовательности это означает, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется номер $N$, начиная с которого справедливо неравенство

$$\left| \iint\limits_{G} f\,dx\,dy - \iint\limits_{G_k} f\,dx\,dy \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Поэтому для любого номера $n \geqslant N$ и любого натурального $p$ имеем

$$\left| \iint\limits_{G_{n+p}} f\,dx\,dy - \iint\limits_{G_n} f\,dx\,dy \right| \leqslant \left| \iint\limits_{G_{n+p}} f\,dx\,dy - \iint\limits_{G} f\,dx\,dy \right| +$$

$$+ \left| \iint\limits_{G} f\,dx\,dy - \iint\limits_{G_n} f\,dx\,dy \right| < \varepsilon.$$

*Достаточность.* Если выполнено условие (13.1.2), то на основании критерия сходимости Больцано–Коши, для каждой последовательности открытых множеств $G_k$, монотонно исчерпывающей множество $G$, существует конечный предел интегралов

$$\lim_{k\to\infty} \iint\limits_{G_k} f(x, y)\,dx\,dy = I.$$

Остается показать, что для всех указанных последовательностей $G_k$ этот предел один и тот же. Возьмем еще какую-то последовательность открытых множеств $G'_i$, монотонно исчерпывающую множество $G$. Для нее также существует конечный предел интегралов

$$\lim_{i\to\infty} \iint\limits_{G'_i} f(x, y)\,dx\,dy = I'.$$

Берем некоторое $G'_{i_1}$. Поскольку в силу определения (13.1.1) множество $\overline{G}'_{i_1} \subset G$, то согласно того же определения (13.1.1) найдется $G_{k_1} \supset \overline{G}'_{i_1}$. Но $\overline{G}'_{k_1}$ также содержится в $G$. Поэтому можно указать открытое множество $G'_{i_2} \supset \overline{G}_{k_1}$. В свою очередь, $\overline{G}'_{i_2} \subset G$, и, значит найдется $G_{k_2} \supset \overline{G}'_{i_2}$. Указанный процесс можно продолжать до бесконечности. В итоге получится монотонная последовательность открытых множеств

$$G'_{i_1}, G_{k_1}, G'_{i_2}, G_{k_2}, \ldots,$$

исчерпывающая множество $G$, которой отвечает сходящаяся последовательность интегралов

$$\iint\limits_{G'_{i_1}} f\,dx\,dy,\ \iint\limits_{G_{k_1}} f\,dx\,dy,\ \iint\limits_{G'_{i_2}} f\,dx\,dy,\ \iint\limits_{G_{k_2}} f\,dx\,dy, \ldots$$

Ее подпоследовательность

$$\iint\limits_{G_{k_1}} f\,dx\,dy,\ \iint\limits_{G_{k_2}} f\,dx\,dy, \ldots$$

сходится очевидным образом к $I$, а подпоследовательность

$$\iint\limits_{G'_{i_1}} f\,dx\,dy,\ \iint\limits_{G'_{i_2}} f\,dx\,dy, \ldots$$

сходится к $I'$. Но все подпоследовательности одной и той же сходящейся последовательности обязаны иметь тот же предел. Следовательно, $I = I'$.

Теорема доказана.

Замечание. Если условия, наложенные в определении несобственного двойного интеграла на множества $G_k$, не будут кое-где для краткости оговариваться, то мысленно они все равно предполагаются.

Как показывает теорема 13.1, аналогия между несобственными интегралами и рядами заключается не только в общности понятий сходимости и расходимости. Приведем еще один пример такой аналогии.

Пусть последовательность открытых множеств $G_k$ монотонно исчерпывает открытое множество $G$ и несобственный интеграл $\iint\limits_{G} f(x,y)\,dx\,dy$ сходится. Зафиксируем некоторое множество $G_n$. Легко видеть, что последовательность открытых, ограниченных и измеримых множеств $G_{n+p} \setminus \overline{G}_n$, $p = 1, 2, \ldots$ монотонно исчерпывает множество $G \setminus \overline{G}_n$. Критерий сходимости (13.1.2) несобственного интеграла $\iint\limits_{G} f\,dx\,dy$ является одновременно и критерием сходимости несобственного интеграла $\iint\limits_{G\setminus G_n} f\,dx\,dy$. Так что, с одной стороны,

$$\lim_{p\to\infty} \iint\limits_{G_{n+p}\setminus G_n} f\,dx\,dy = \iint\limits_{G\setminus G_n} f\,dx\,dy.$$

С другой стороны,

$$\lim_{p\to\infty} \iint\limits_{G_{n+p}\setminus G_n} f\,dx\,dy = \lim_{p\to\infty} \iint\limits_{G_{n+p}} f\,dx\,dy - \iint\limits_{G_n} f\,dx\,dy =$$

$$= \iint\limits_{G} f\,dx\,dy - \iint\limits_{G_n} f\,dx\,dy.$$

В итоге получаем

$$\iint\limits_{G\setminus G_n} f\,dx\,dy = \iint\limits_{G} f\,dx\,dy - \iint\limits_{G_n} f\,dx\,dy,$$

или

$$\iint\limits_{G} f\,dx\,dy = \iint\limits_{G_n} f\,dx\,dy + \iint\limits_{G\setminus G_n} f\,dx\,dy.$$

Так как $n$ здесь произвольно, то имеем отсюда

$$\lim_{n\to\infty} \iint\limits_{G\setminus G_n} f\,dx\,dy = 0. \qquad (13.1.3)$$

Соотношение (13.1.3) — явный аналог свойства остатка сходящегося числового ряда.

С помощью определения несобственного интеграла и критерия его сходимости на несобственные интегралы можно перенести ряд свойств собственных двойных интегралов: линейность, аддитивность по области интегрирования, интегрирование неравенств, сведение к повторному интегралу и др.

## 13.2. Несобственные интегралы от положительной функции

Когда функция $f(x,y) \geqslant 0$ непрерывна на открытом множестве $G$, за исключением конечного числа особых точек, то последовательность интегралов по открытым множествам $G_k$, монотонно исчерпывающим множество $G$, образует в силу свойства $8^\circ$ собственного двойного интеграла возрастающую последовательность:

$$\iint\limits_{G_k} f(x,y)\,dx\,dy \leqslant \iint\limits_{G_{k+1}} f(x,y)\,dx\,dy,$$

т.к. $G_k \subset G_{k+1}$. Известно, что возрастающая последовательность обязана иметь предел

$$\lim_{k\to\infty} \iint\limits_{G_k} f(x,y)\,dx\,dy$$

конечный или бесконечный, которым является точная верхняя грань этой последовательности интегралов. Данный факт значительно облегчает исследование на сходимость несобственных интегралов от положительных функций.

**Теорема 13.2.** *Если функция $f(x,y) \geqslant 0$ и для некоторой последовательности открытых ограниченных множеств $G_k$, монотонно исчерпывающей множество $G$,* *предел последовательности интегралов равен*

$$\lim_{k\to\infty}\iint\limits_{G_k} f(x,y)\,dx\,dy = I,$$

*то и для всякой последовательности открытых ограниченных множеств $G'_i$, монотонно исчерпывающей множество $G$, он тоже равен $I$.*

Доказательство. Рассмотрим две произвольные последовательности открытых ограниченных множеств $G_k$ и $G'_i$, монотонно исчерпывающие множество $G$, которым отвечают две возрастающие последовательности собственных интегралов $\iint\limits_{G_k} f\,dx\,dy$ и $\iint\limits_{G'_i} f\,dx\,dy$, причем предел первой из них равен $I$. Предел $I$ может быть как конечным, так и бесконечным.

Пусть сначала $I=+\infty$. Тогда для $\forall E\geqslant 0$ найдется номер $N$, при котором

$$\iint\limits_{G_N} f\,dx\,dy > E.$$

Так как множество $\overline{G}_N\subset G$, то, согласно определения (13.1.2), можно указать такой номер $N'$, что $G'_{N'}\supset G_N$.

Отсюда для $\forall i\geqslant N'$ справедливы неравенства

$$\iint\limits_{G'_i} f\,dx\,dy \geqslant \iint\limits_{G'_{N'}} f\,dx\,dy > E.$$

Следовательно, и предел последовательности интегралов

$$\lim_{i\to\infty}\iint\limits_{G_i} f(x,y)\,dx\,dy = I = +\infty.$$

Если же $I$ конечно, то доказываем, что число $I$ есть точная верхняя грань последовательности $\iint\limits_{G_i} f\,dx\,dy$.

Для каждого $G'_i$ существует множество $G_k\supset G'_i$. Поэтому для каждого $G'_i$ справедливы неравенства

$$\iint\limits_{G'_i} f(x,y)\,dx\,dy \leqslant \iint\limits_{G_k} f(x,y)\,dx\,dy \leqslant I,$$

и первое свойство точной верхней грани выполнено.

Для любого $\varepsilon > 0$ найдется множество $G_m$ такое, что

$$\iint\limits_{G_m} f\,dx\,dy > I - \varepsilon.$$

Опять-таки, в силу определения (13.1.2) существует множество $G'_n \supset G_m$. Тогда имеем

$$\iint\limits_{G'_n} f\,dx\,dy \geqslant \iint\limits_{G_m} f\,dx\,dy > I - \varepsilon.$$

Значит, выполнено и второе свойство точной верхней грани, и можно утверждать, что предел последовательности интегралов

$$\lim_{i\to\infty} \iint\limits_{G'_i} f\,dx\,dy = I.$$

Теорема доказана.

Из теоремы 13.2 следует вывод: при исследовании на сходимость несобственного интеграла от положительной функции достаточно рассмотреть одну специально подобранную последовательность открытых ограниченных множеств, монотонно исчерпывающую множество $G$. Насколько важен сделанный вывод, проиллюстрируем на ряде примеров.

**Примеры.**

1. Исследовать на сходимость интеграл

$$\iint\limits_{G} \frac{dx\,dy}{(x^2+y^2)^p},$$

где область $G$ определяется неравенством $x^2+y^2 \geqslant r^2$ $(r>0)$.

*Решение.* В качестве открытых множеств $G_k$, образующих последовательность, монотонно исчерпывающую множество $G$, возьмем множества, заданные неравенствами $r^2 < x^2+y^2 < k^2$, где $k$ — натуральное число. Перейдя в интеграле

$$\iint\limits_{G_k} \frac{dx\,dy}{(x^2+y^2)^p}$$

к полярным координатам, получаем

$$\iint\limits_{G_k} \frac{dx\,dy}{(x^2+y^2)^p} = \iint\limits_{G_k} \frac{d\rho\,d\varphi}{\rho^{2p-1}} = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_r^k \frac{d\rho}{\rho^{2p-1}} = 2\pi \int\limits_r^k \frac{d\rho}{\rho^{2p-1}}.$$

Тогда имеем

$$\iint\limits_G \frac{dx\,dy}{(x^2+y^2)^p} = \lim_{k\to\infty} \iint\limits_{G_k} \frac{dx\,dy}{(x^2+y^2)^p} = 2\pi \int\limits_r^{+\infty} \frac{d\rho}{\rho^{2p-1}}.$$

Приходим к известному однократному интегралу, который сходится при $2p-1>1$ и расходится при $2p-1 \leqslant 1$. Подводим итог: заданный несобственный двойной интеграл второго типа сходится при $p>1$ и расходится при всех $p \leqslant 1$.

2. Исследовать на сходимость интеграл

$$\iint\limits_G \frac{dx\,dy}{(x^2+y^2)^p},$$

где множество $G$ задано неравенством $x^2+y^2<r^2$.

*Решение.* Подинтегральная функция на указанном множестве имеет единственную особую точку $(0;0)$, в которой она имеет бесконечный предел. Так что рассматриваемый несобственный интеграл первого типа. Выберем в качестве последовательности открытых ограниченных множеств, монотонно исчерпывающей множество $G$, множества $G_k$, определяемые неравенствами $\dfrac{1}{k^2} < x^2+y^2 < r^2$. Рассуждая по аналогии с предыдущим примером, переходим в интегралах по множествам $G_k$ к полярным координатам и получаем

$$\iint\limits_{G_k} \frac{dx\,dy}{(x^2+y^2)^p} = \iint\limits_{G_k} \frac{d\rho\,d\varphi}{\rho^{2p-1}} = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_{\frac{1}{k}}^{r} \frac{d\rho}{\rho^{2p-1}} = 2\pi \int\limits_{\frac{1}{k}}^{r} \frac{d\rho}{\rho^{2p-1}}.$$

Отсюда имеем

$$\iint\limits_G \frac{dx\,dy}{(x^2+y^2)^p} = \lim_{k\to\infty} \iint\limits_{G_k} \frac{dx\,dy}{(x^2+y^2)^p} = 2\pi \int\limits_0^{r} \frac{d\rho}{\rho^{2p-1}}.$$

Как известно, полученный несобственный интеграл сходится при $2p-1<1$ и расходится при $2p-1 \geqslant 1$. Таким образом, требуемый несобственный двойной интеграл сходится при $p<1$ и расходится при $p \geqslant 1$.

3. Вычислить несобственный интеграл

$$\iint\limits_G e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy,$$

где $G$ есть вся плоскость.

Так как функция $e^{-x^2-y^2} > 0$, то применима теорема 13.2. В качестве последовательности множеств $G_k$, монотонно исчерпывающей всю плоскость, выберем открытые круги $x^2+y^2<k^2$, $k=1,2,\ldots$. В силу равенства (8.6.20) из второй главы

$$\iint\limits_{G_k} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy = \pi(1-e^{-k^2})$$

Тогда имеем

$$\lim_{k\to\infty}\iint\limits_{G_k} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy = \lim_{k\to\infty}\pi(1-e^{-k^2}) = \pi.$$

Следовательно, искомый интеграл равен

$$\iint\limits_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy = \pi. \tag{13.2.4}$$

Соотношение (13.2.4) позволяет более просто получить значение уже встречавшегося ранее интеграла Пуассона $\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$. Если в качестве последовательности множеств $G_k$, монотонно исчерпывающей всю плоскость, взять открытые квадраты $G_k=(-k;k)\times(-k;k)$ и заметить, что

$$\iint\limits_{G_k} e^{-x^2-y^2}dxdy=\int\limits_{-k}^{k}dx\int\limits_{-k}^{k}e^{-x^2-y^2}dy=\left(\int\limits_{-k}^{k}e^{-x^2}dx\right)^2=4\left(\int\limits_{0}^{k}e^{-x^2}dx\right)^2,$$

то будем иметь

$$\iint\limits_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2}dxdy = \lim_{k\to\infty}\iint\limits_{G_k} e^{-x^2-y^2}dxdy = 4\left(\int\limits_0^{+\infty}e^{-x^2}dx\right)^2 = \pi$$

и

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Из признаков сходимости однократных интегралов перенесем на несобственные двойные интегралы самый простой и эффективный признак сравнения.

**Теорема 13.3.** *Если на открытом множестве $G$ имеем $0 \leqslant f(x,y) \leqslant g(x,y)$, то из сходимости несобственного интеграла $\iint\limits_G g\,dx\,dy$ следует сходимость несобственного интеграла $\iint\limits_G f\,dx\,dy$, а из расходимости интеграла $\iint\limits_G f\,dx\,dy$ следует расходимость $\iint\limits_G g\,dx\,dy$.*

Доказательство. Пусть $\{G_k\}$ — некоторая последовательность открытых ограниченных множеств, монотонно исчерпывающих множество $G$. Так как $f(x,y) \leqslant g(x,y)$, то для любых натуральных $n$ и $p$ имеем

$$\iint\limits_{G_{n+p}\setminus G_n} f\,dx\,dy \leqslant \iint\limits_{G_{n+p}\setminus G_n} g\,dx\,dy.$$

Если интеграл $\iint\limits_{G} g\,dx\,dy$ сходится, то согласно критерия сходимости (13.1.2) для $\forall\varepsilon > 0$ найдется номер $N$ такой, что при $n \geqslant N$ и любом натуральном $p$

$$\iint\limits_{G_{n+p}\setminus G_n} g\,dx\,dy < \varepsilon.$$

Тогда для этих же $n$ и $p$

$$\iint\limits_{G_{n+p}\setminus G_n} f\,dx\,dy < \varepsilon,$$

и на основании того же критерия сходимости делаем вывод, что и $\iint\limits_{G} f\,dx\,dy$ сходится.

Вторая часть утверждения теоремы очевидна, т.к. равносильна первой ее части.

Теорема доказана.

Для использования данного признака для сравнения нужен некоторый запас эталонных сходящихся и расходящихся интегралов. Приведенные в примерах 1, 2, 3 интегралы можно включить в этот запас.

Замечание. Теорему 13.3 можно несколько усилить. Поскольку интегралы $\iint\limits_{G} g\,dx\,dy$ и $\iint\limits_{G} Cg\,dx\,dy$, где $C$ — некоторое число, либо оба сходятся, либо оба расходятся, то условие $0 \leqslant f(x,y) \leqslant g(x,y)$ можно заменить неравенством $0 \leqslant f(x,y) \leqslant Cg(x,y)$.

Заметим еще, что все результаты данного пункта справедливы и для интегралов от функций $f(x,y) \leqslant 0$.

## 13.3. Несобственные интегралы от знакопеременных функций

Пусть на открытом множестве $G$ задана некоторая знакопеременная функция (ограниченная или неограниченная) $f(x,y)$, и пусть последовательность открытых ограниченных множеств $G_k$ монотонно исчерпывает множество $G$. В этом случае $\lim\limits_{k\to\infty} \iint\limits_{G_k} f\,dx\,dy$ уже зависит от выбора последовательности множеств $G_k$, что подтверждается следующим примером.

4. Рассмотрим интеграл

$$\iint\limits_{\mathbb{R}^2} \sin(x^2+y^2)\,dx\,dy,$$

распространенный на всю плоскость $x, y$.

Вычислим сначала $\iint\limits_G \sin(x^2+y^2)\,dx\,dy$, где $G$ — открытый круг, определенный неравенством $x^2+y^2<r^2$. Переходя к полярным координатам, имеем

$$\iint\limits_G \sin(x^2+y^2)\,dx\,dy = \iint\limits_G \rho\sin\rho^2\,d\rho\,d\varphi = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^r \rho\sin\rho^2\,d\rho =$$

$$= 2\pi\int\limits_0^r \rho\sin\rho^2\,d\rho = -\pi\cos\rho^2\Big|_0^r = \pi(1-\cos r^2).$$

Возьмем теперь последовательность кругов $G_k$ с радиусами $r_k=\sqrt{2k\pi}$, $k=1,2,\ldots$. Эта последовательность, очевидно, исчерпывает всю плоскость. Предел последовательности интегралов по указанным множествам $G_k$ равен

$$\lim_{k\to\infty}\iint\limits_{G_k}\sin(x^2+y^2)\,dx\,dy = \lim_{k\to\infty}\pi(1-\cos 2k\pi)=0.$$

С другой стороны, если взять последовательность кругов $G_k$ с радиусами $r_k = \sqrt{(2k+1)\frac{\pi}{2}}$, которая тоже исчерпывает всю плоскость, то получим

$$\lim_{k\to\infty}\iint\limits_{G_k}\sin(x^2+y^2)\,dx\,dy = \lim_{k\to\infty}\pi\left(1-\cos(2k+1)\frac{\pi}{2}\right)=\pi.$$

В теории несобственных интегралов, как и в ее аналоге — теории рядов, большую роль играет понятие абсолютной сходимости.

**Определение.** Несобственный интеграл $\iint\limits_G f\,dx\,dy$ называется абсолютно сходящимся, если сходится интеграл $\iint\limits_G |f|\,dx\,dy$.

Для исследования данного понятия введем вспомогательные функции

$$\varphi=\frac{|f|+f}{2}=\begin{cases}|f|, & \text{если } f\geqslant 0,\\ 0, & \text{если } f<0,\end{cases}\qquad \psi=\frac{|f|-f}{2}=\begin{cases}0, & \text{если } f\geqslant 0,\\ |f|, & \text{если } f<0.\end{cases}\tag{13.3.5}$$

Легко видеть, что справедливы утверждения

$$0\leqslant\varphi\leqslant|f| \quad \text{и} \quad 0\leqslant\psi\leqslant|f|,\tag{13.3.6}$$

а также
$$|f| = \varphi + \psi \quad \text{и} \quad f = \varphi - \psi, \tag{13.3.7}$$

**Теорема 13.4.** *Для того, чтобы интеграл* $\iint\limits_G f\,d\,dy$ *абсолютно сходился, необходимо и достаточно, чтобы сходились интегралы* $\iint\limits_G \varphi\,dx\,dy$ *и* $\iint\limits_G \psi\,dx\,dy$.

*Необходимость.* Так как функции $\varphi$ и $\psi$ положительные, то по теореме 13.3 в силу неравенств (13.3.6) из сходимости интеграла $\iint\limits_G |f|\,d\,dy$ следует сходимость интегралов $\iint\limits_G \varphi\,dx\,dy$ и $\iint\limits_G \psi\,dx\,dy$.

*Достаточность.* Обратное утверждение вытекает из представления $|f| = \varphi + \psi$.

Переходим к центральной теореме теории несобственных двойных интегралов, рассматривающую соотношение между абсолютной сходимостью и просто сходимостью интегралов. В теории рядов и однократных несобственных интегралов из абсолютной сходимости следует простая сходимость — обратное неверно. В теории несобственных кратных интегралов ситуация иная.

Предпошлем теореме одно вспомогательное утверждение.

**Лемма.** *Если ограниченная непрерывная функция* $f(x,y)$ *интегрируема на ограниченном измеримом открытом множестве* $G$ *и* $H$ *— есть множество точек* $(x,y) \in G$*, в которых* $f(x,y) = 0$*, то для* $\forall\varepsilon > 0$ *найдется измеримое открытое множество* $G_\varepsilon$*, содержащее множество* $H$ *и само содержащееся в* $G$*, такое, что*
$$\iint\limits_{G_\varepsilon} |f|\,dx\,dy < \varepsilon.$$

Доказательство. Возьмем произвольное разбиение множества $G$ с $\lambda < \delta$ и рассмотрим сумму площадей элементарных частей, содержащих точки множества $H$. Точную нижнюю грань этих сумм по всем покрытиям обозначим через $H_0$ Очевидно, что $H_0 > 0$. Пусть $M = \sup\limits_G |f(x,y)|$.

Согласно свойствам точной нижней грани, для $\forall\varepsilon > 0$ найдется такое разбиение множества $G$, что для суммы площадей элементарных частей $S_1, S_2, \ldots, S_N$ этого разбиения, содержащих точки множества $H$, выполнено неравенство
$$H_0 \leqslant \sum_{i=1}^{N} mS_i < H_0 + \frac{\varepsilon}{2M}.$$

Обозначим через $G_\varepsilon$ множество

$$G_\varepsilon = \bigcup_{i=1}^{N} S_i.$$

Так что предыдущее неравенство запишется в виде

$$H_0 \leqslant mG_\varepsilon < H_0 + \frac{\varepsilon}{2M}.$$

Так как функция $|f(x,y)|$ интегрируема на измеримом множестве $G_\varepsilon$, то на основании определения двойного интеграла для $\forall\varepsilon > 0$ можно указать число $\delta > 0$ такое, что для любого отмеченного разбиения множества $G_\varepsilon$ с $\lambda < \delta$ будем иметь

$$\left| \iint\limits_{G_\varepsilon} |f(x,y)|\,dx\,dy - \sum_{i=1}^{n} |f(\xi_i,\eta_i)| mG_i \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Из чего заключаем, что

$$\iint\limits_{G_\varepsilon} |f(x,y)|\,dx\,dy < \sum_{i=1}^{n} |f(\xi_i,\eta_i)| mG_i + \frac{\varepsilon}{2}. \qquad (*)$$

Элементарные части $G_i$ можно распределить на две группы: в I группу включим все $G_i$, содержащие хотя бы одну точку множества $H$, а во II группу — все остальные $G_i$, т.е. элементарные части, в которых нет точек из $H$. Соответственно этим группам, интегральная сумма разобьется на две суммы $\sum_{\mathrm{I}}$ и $\sum_{\mathrm{II}}$. Имеем

$$\sum_{i=1}^{n} |f(\xi_i,\eta_i)| mG_i = \sum\nolimits_{\mathrm{I}} + \sum\nolimits_{\mathrm{II}}.$$

В элементарных частях I группы, пользуясь произволом выбора точек $(\xi_i,\eta_i)$, возьмем их так, чтобы $f(\xi_i,\eta_i) = 0$. Поэтому попросту $\sum_{\mathrm{I}} = 0$.

Так как $\sum_{\mathrm{I}} mG_i \geqslant H_0$, то $\sum_{\mathrm{II}} mG_i = mG_\varepsilon - H_0 < \frac{\varepsilon}{2M}$. Тогда получаем

$$\sum\nolimits_{\mathrm{II}} |f(\xi_i,\eta_i)| mG_i \leqslant M \sum\nolimits_{\mathrm{II}} mG_i < M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Отсюда находим

$$\sum_{i=1}^{n} |f(\xi_i,\eta_i)| mG_i = \sum\nolimits_{\mathrm{I}} + \sum\nolimits_{\mathrm{II}} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Значит, в силу неравенства $(*)$

$$\iint\limits_{G_\varepsilon} |f(x,y)|\,dx\,dy < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Лемма доказана.

**Теорема 13.5.** *Для сходимости интеграла* $\iint\limits_G f(x,y)\,dx\,dy$ *необходимо и достаточно, чтобы он сходился абсолютно.*

*Достаточность.* Пусть сходится интеграл $\iint\limits_G |f|\,dx\,dy$. Вводим функции $\varphi$ и $\psi$ соотношениями (13.3.5). Тогда в силу теоремы 13.4 сходятся интегралы $\iint\limits_G \varphi\,dx\,dy$ и $\iint\limits_G \psi\,dx\,dy$. Так как $f=\varphi-\psi$, то сходится и интеграл $\iint\limits_G f\,dx\,dy$.

*Необходимость.* Дано: сходится интеграл $\iint\limits_G f\,dx\,dy$. Требуется доказать, что сходится и интеграл $\iint\limits_G |f|\,dx\,dy$. Как утверждает теорема 13.4, для этого должны сходиться интегралы $\iint\limits_G \varphi\,dx\,dy$ и $\iint\limits_G \psi\,dx\,dy$. Проведем доказательство методом от противного. Предположим, что хотя бы один из указанных интегралов, например $\iint\limits_G \varphi\,dx\,dy$, расходится.

Рассмотрим произвольную последовательность открытых ограниченных множество $G_k$, монотонно исчерпывающую множество $G$. Так как $\varphi \geqslant 0$, то в силу расходимости интеграла $\iint\limits_G \varphi\,dx\,dy$ имеем

$$\lim_{k\to\infty}\iint\limits_{G_k} \varphi\,dx\,dy = +\infty. \qquad (*)$$

Отсюда следует, что для $\forall E>0$, $\exists k : \iint\limits_{G_k} \varphi\,dx\,dy > E$. Отметим, что на каждом множестве $G_k$ функции $\varphi$ и $\psi$ непрерывны. Обозначим $g_k = G_k \setminus G_{k-1}$ $(k=1,2,\ldots)$, где $G_0=\varnothing$. Множества $g_k$ попарно не пересекаются, и, поскольку, $G_k=\bigcup\limits_{i=1}^{k} g_i$, то они исчерпывают множество $G$.

Зададимся произвольным числом $\varepsilon>0$. Согласно лемме, каждое $g_k$ содержит измеримое подмножество $h_k$, которое включает в себя точки, в которых $f=0$, такое что

$$\iint\limits_{h_k} f|\,dx\,dy < \frac{\varepsilon}{2^k}.$$

Множество $g_k\setminus h_k$ распадается на два множества: $p_k$ — множество точек, в которых $f_k>0$, и $n_k$ — множество точек, в которых $f_k<0$. По построению на $p_k$ имеем $f=\varphi$ и $f=-\psi$ на $n_k$. Таким образом, каждое $g_k$ представляется в виде объединения трех попарно не пересекающихся множеств $g_k=p_k\cup h_k\cup n_k$. В силу непрерывности функции $f(x,y)$ на $g_k$, множества $p_k$ и $n_k$ открытые и измеримые.

Рассмотрим еще множества

$$P_k=\bigcup_{i=1}^{k}p_i,\quad H_k=\bigcup_{i=1}^{k}h_i,\quad N_k=\bigcup_{i=1}^{k}n_i.$$

Тогда получаем

$$G_k=P_k\bigcup H_k\bigcup N_k\quad (k=1,2,\ldots),$$

где все множества $P_k, H_k$ и $N_k$ открытые измеримые и попарно не пересекающиеся. В силу оценки

$$\Big|\iint\limits_{H_k}\varphi\,dx\,dy\Big|=\Big|\sum_{i=1}^{k}\iint\limits_{h_i}\varphi\,dx\,dy\Big|\leqslant\sum_{i=1}^{k}\iint\limits_{h_i}|f|\,dx\,dy<\sum_{i=1}^{k}\frac{\varepsilon}{2^i}<\varepsilon$$

и равенств

$$\iint\limits_{N_k}\varphi\,dx\,dy=0,\quad \lim_{k\to\infty}\iint\limits_{G_k}\varphi\,dx\,dy=+\infty$$

имеем

$$\lim_{k\to\infty}\iint\limits_{P_k}\varphi\,dx\,dy=+\infty. \tag{$**$}$$

Строим далее последовательность открытых множеств $G_1', G_2'\ldots, G_m', \ldots$ следующим образом: пусть

$$\iint\limits_{N_1}\psi\,dx\,dy=T_1.$$

На основании соотношения $(**)$ можно выбрать номер $m_1$ так, чтобы

$$\iint\limits_{P_{m_1}}\varphi\,dx\,dy=T_1+1$$

и положим

$$G_1'=P_{m_1}\bigcup H_1\bigcup N_1.$$

Пусть затем

$$\iint\limits_{N_2}\psi\,dx\,dy=T_2.$$

Согласно $(**)$ можно указать $m_2>m_1$ такое, что

$$\iint\limits_{P_{m_2}}\varphi\,dx\,dy>T_2+2$$

и полагаем

$$G_2' = P_{m_2} \bigcup H_2 \bigcup N_2.$$

Продолжим также рассуждать и далее. Если

$$\iint\limits_{N_k} \psi\, dx\, dy = T_k \quad (k = 1, 2, \ldots),$$

то найдется номер $m_k > m_{k-1}$ такой, что

$$\iint\limits_{P_{m_k}} \varphi\, dx\, dy > T_k + k$$

и берем

$$G_k' = P_{m_k} \bigcup H_k \bigcup N_k.$$

Каждое из множеств $G_k'$ как объединение трех открытых ограниченных и измеримых множеств есть множество открытое, ограниченное и измеримое. Легко видеть, что построенная последовательность множеств $G_k'$ монотонно исчерпывает множество $G$.

Так как множества $P_{m_k}, H_k$ и $N_k$ попарно не имеют общих точек, то получаем

$$\iint\limits_{G_k'} f\, dx\, dy = \iint\limits_{P_{m_k}} f\, dx\, dy + \iint\limits_{H_k} f\, dx\, dy + \iint\limits_{N_k} f\, dx\, dy =$$

$$\iint\limits_{P_{m_k}} \varphi\, dx\, dy + \iint\limits_{H_k} f\, dx\, dy - \iint\limits_{N_k} \psi\, dx\, dy > T_k + k - \varepsilon - T = k - \varepsilon.$$

Отсюда следует, что

$$\lim_{k\to\infty} \iint\limits_{G_k'} f\, dx\, dy = +\infty,$$

а это противоречит сходимости интеграла $\iint\limits_{G} f\, dx\, dy$.

Теорема доказана.

# Список литературы


[1] Архипов Г. И., Садовничий В. А., Чубариков В. Н. Лекции по математическому анализу. — М.: Высш. шк., 1999. — 695 с.

[2] Будак Б. М., Фомин С. В. Кратные интегралы и ряды. — М.: Физматлит, 2002. — 512 с.

[3] Кудрявцев Л. Д. Курс математического анализа. — М.: Дрофа, 2004., Т. 2. — 720 с.

[4] Курош А. Г. Курс высшей алгебры. — С-Пб: Лань, 2006. — 431 с.

[5] Никольский С. М. Курс математического анализа. — М.: Физматлит, 2000., Т. 2 — 640 с.

[6] Тучинский Л. И., Шнейберг И. Я. Основы многомерного математического анализа. — Ижевск: Изд-во «Удмуртский университет», 2010. — 544 с.

[7] Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. — М.: Физматлит, 2003., Т. 2. — 864 с.

[8] Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. — М.: Физматлит, 2003., Т. 3. — 728 с.

Учебное издание

Тучинский Лев Исаакович

# Кратные интегралы

Учебное пособие

Напечатано в авторской редакции с оригинал-макета заказчика.
Компьютерный набор и верстка М.В. Чибирева

Подписано в печать Формат
Печать офсетная. Усл. печ. л. Уч.-изд. л.
Тираж экз. Заказ №

Издательство «Удмуртский университет»
426034, Ижевск, ул. Университетская, 1, корп. 4