

А. М. Попов, В. Н. Сотников

Высшая математика для экономистов

Под редакцией
профессора **А. М. Попова**

УЧЕБНИК ДЛЯ БАКАЛАВРОВ

*Рекомендовано Учебно-методическим центром
«Профессиональный учебник» в качестве учебника
для студентов высших учебных заведений,
обучающихся по специальностям экономики и управления*

МОСКВА • ЮРАЙТ • 2012

Содержание

УДК 51(075.8)

ББК 22.1

П58

Авторы:

Попов Александр Михайлович — доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой математики и математических методов в экономике Института экономики и предпринимательства (г. Москва);

Сотников Валерий Николаевич — кандидат технических наук, доцент, профессор кафедры математики и математических методов в экономике Института экономики и предпринимательства (г. Москва).

Рецензенты:

Гатаулин А. М. — профессор, доктор экономических наук, член-корреспондент РАСХН (кафедра экономической кибернетики РГАУ — МСХА им. К. А. Тимирязева);

Струнков С. П. — доктор физико-математических наук, профессор (НИИ системных исследований РАН).

Попов, А. М.

П58

Высшая математика для экономистов : учебник для бакалавров / А. М. Попов, В. Н. Сотников ; под ред. проф. А. М. Попова. — М. : Издательство Юрайт, 2012. — 564 с. — Серия : Бакалавр.

ISBN 978-5-9916-1383-5

Данный учебник является частью обучающего комплекса, в который также входят книги А. М. Попова и В. Н. Сотникова «Теория вероятностей и математическая статистика» и «Экономико-математические методы и модели». Учебник подготовлен в соответствии с Государственным образовательным стандартом высшего профессионального образования по дисциплине «Математика» для экономических специальностей. В нем изложены основные разделы линейной алгебры и математического анализа в соответствии с дидактическими блоками Госстандарта.

Для студентов и аспирантов экономических вузов.

УДК 51(075.8)

ББК 22.1

© Коллектив авторов, 2012

ISBN 978-5-9916-1383-5

© ООО «Издательство Юрайт», 2012

Оглавление

Предисловие	7
Введение.....	9

РАЗДЕЛ I. ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

Глава 1. Операции над матрицами. Определители и их свойства	14
1.1. Основные сведения о матрицах.....	14
1.2. Операции над матрицами.....	17
1.3. Определители квадратных матриц.....	23
1.4. Обратная матрица	32
1.5. Ранг матрицы	35
<i>Вопросы для самоконтроля</i>	<i>38</i>
<i>Задачи для самостоятельного решения</i>	<i>39</i>
Глава 2. Системы линейных алгебраических уравнений.....	41
2.1. Основные понятия и определения	41
2.2. Система n линейных уравнений с n неизвестными. Метод обратной матрицы и правило Крамера.....	43
2.3. Метод Гаусса	48
2.4. Система m линейных уравнений с n неизвестными.....	54
2.5. Системы линейных однородных уравнений.....	60
<i>Вопросы для самоконтроля</i>	<i>62</i>
<i>Задачи для самостоятельного решения.....</i>	<i>62</i>
Глава 3. Векторы на плоскости и в пространстве	64
3.1. Основные понятия	64
3.2. n -мерный вектор и пространство R^n	70
3.3. Линейное пространство.....	72
3.4. Линейная зависимость.....	75
3.5. Размерность и базис линейного пространства	79
3.6. Евклидово пространство	82
3.7. Декартова система координат	86
3.8. Векторное произведение векторов.....	88
3.9. Понятие линейного оператора. Матрица как линейный оператор	93
<i>Вопросы для самоконтроля</i>	<i>95</i>
<i>Задачи для самостоятельного решения.....</i>	<i>96</i>
Глава 4. Собственные значения квадратных матриц	98
4.1. Характеристическое уравнение.....	98
4.2. Собственные значения неотрицательных матриц	101

4.3. Квадратичные формы	103
<i>Вопросы для самоконтроля</i>	109
<i>Задачи для самостоятельного решения</i>	110
Глава 5. Комплексные числа	111
5.1. Понятие комплексного числа	111
5.2. Тригонометрическая форма записи комплексного числа	112
5.3. Действия над комплексными числами	113
5.4. Показательная форма комплексного числа	117
<i>Вопросы для самоконтроля</i>	118
<i>Задачи для самостоятельного решения</i>	118
Глава 6. Элементы аналитической геометрии	120
6.1. Уравнение линии на плоскости. Уравнение прямой	120
6.2. Условия параллельности и перпендикулярности прямых	124
6.3. Расстояние от точки до прямой	128
6.4. Окружность и эллипс	130
6.5. Гипербола и парабола	135
6.6. Понятие об уравнении плоскости и прямой в пространстве	139
6.7. Геометрия кривых и поверхностей в трехмерном пространстве	146
<i>Вопросы для самоконтроля</i>	152
<i>Задачи для самостоятельного решения</i>	152
Глава 7. Выпуклые множества и их свойства	154
7.1. Понятие выпуклого множества	154
7.2. Полупространство как выпуклое множество	155
7.3. Выпуклые множества в пространстве R^n	156
<i>Вопросы для самоконтроля</i>	158
РАЗДЕЛ II. МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ	
Глава 8. Элементы теории множеств	160
8.1. Понятие множества	160
8.2. Понятие подмножества	163
8.3. Операции над множествами	165
8.4. Числовые множества	171
8.5. Упорядоченное множество. Понятие кортежа	173
8.6. Прямое произведение множеств	175
8.7. Соответствия	177
8.8. Отображения и функции	180
8.9. Отношения	181
8.10. Мощность множеств	183
<i>Вопросы для самоконтроля</i>	184
<i>Задачи для самостоятельного решения</i>	184
Глава 9. Предел числовой последовательности и его свойства	185
9.1. Понятие числовой последовательности	185

9.2. Предел числовой последовательности	188
9.3. Свойства пределов числовой последовательности	190
<i>Вопросы и задания для самоконтроля</i>	192
<i>Задачи для самостоятельного решения</i>	192
Глава 10. Предел и непрерывность функции	194
10.1. Понятие функции одной переменной	194
10.2. Основные свойства функций	195
10.3. Элементарные функции и их графики	196
10.4. Предел функции в точке и в бесконечности	200
10.5. Бесконечно малые и бесконечно большие величины	204
10.6. Основные теоремы о пределах.....	205
10.7. Асимптоты графика функции	207
10.8. Непрерывность функции в точке и на отрезке	209
<i>Вопросы для самоконтроля</i>	219
<i>Задачи для самостоятельного решения</i>	219
Глава 11. Элементы дифференциального исчисления	221
11.1. Производная функции одной переменной.....	221
11.2. Правила вычисления производных простейших элементарных функций.....	223
11.3. Дифференциал	228
11.4. Производные и дифференциалы высших порядков..	233
11.5. Правило Лопитала раскрытия неопределенностей ...	235
11.6. Интервалы монотонности и экстремумы функции одной переменной.....	237
11.7. Выпуклость и вогнутость графика функции и точки перегиба	244
11.8. Исследование функции одной переменной и построение ее графика.....	246
<i>Вопросы для самоконтроля</i>	251
<i>Задачи для самостоятельного решения</i>	252
Глава 12. Функции нескольких переменных	255
12.1. Понятие функции нескольких переменных. График функции двух переменных. Линии уровня ..	255
12.2. Частные производные и полный дифференциал.....	257
12.3. Производная по направлению и градиент	259
12.4. Элементы теории экстремума функции двух переменных	263
12.5. Условный экстремум. Метод множителей Лагранжа ...	266
<i>Вопросы для самоконтроля</i>	268
<i>Задачи для самостоятельного решения</i>	269
Глава 13. Неопределенный и определенный интегралы	270
13.1. Первообразная функция и неопределенный интеграл...	270
13.2. Методы вычисления неопределенных интегралов....	274
13.3. Понятие определенного интеграла, его геометрический и экономический смысл	282

13.4. Формула Ньютона — Лейбница.....	285
13.5. Вычисление площадей плоских фигур и объемов тел вращения.....	288
13.6. Методы вычисления определенного интеграла.....	295
13.7. Несобственные интегралы.....	297
13.8. Вычисление двойных интегралов.....	299
<i>Вопросы для самоконтроля</i>	304
<i>Задачи для самостоятельного решения</i>	305
Глава 14. Числовые и степенные ряды	309
14.1. Понятие числового ряда. Сходимость ряда.....	309
14.2. Признаки сходимости рядов с положительными членами.....	314
14.3. Знакопеременные и знакочередующиеся ряды.....	321
14.4. Степенные ряды и их область сходимости.....	323
14.5. Разложение элементарных функций в степенные ряды.....	326
<i>Вопросы для самоконтроля</i>	329
<i>Задачи для самостоятельного решения</i>	330
Глава 15. Дифференциальные уравнения.....	332
15.1. Понятие дифференциального уравнения.....	332
15.2. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными.....	334
15.3. Однородные дифференциальные уравнения первого порядка.....	338
15.4. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка.....	340
15.5. Дифференциальные уравнения второго порядка, допускающие понижение порядка.....	345
15.6. Линейные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.....	349
<i>Вопросы для самоконтроля</i>	359
<i>Задачи для самостоятельного решения</i>	360
Глава 16. Векторный анализ и элементы теории поля	362
16.1. Векторная функция скалярного аргумента.....	362
16.2. Параметрическое задание функции.....	366
16.3. Кривизна плоской кривой.....	370
16.4. Элементы теории поля.....	374
<i>Вопросы для самоконтроля</i>	378
<i>Ответы к задачам</i>	380
 РАЗДЕЛ III. ТЕСТЫ	
Сборник тестовых заданий.....	390
Ответы на вопросы тестов.....	542
<i>Приложения</i>	544
<i>Предметный указатель</i>	558
<i>Список литературы</i>	563

Предисловие

Учебник предназначен для студентов факультетов экономики и управления. Он входит в цикл учебников по математике и является частью книги «Высшая математика для экономистов». В нем достаточно полно и систематически изложены разделы «Линейная алгебра» и «Математический анализ», которые в соответствии с требованиями Государственного образовательного стандарта предусмотрены при изучении дисциплины «Математика» для студентов экономических вузов.

Кроме того, авторы стремились написать материал так, чтобы учебник был пригоден для изучения математики бакалаврами по направлениям «Экономика» и «Менеджмент».

Изучение дисциплины «Математика» базируется на знании основ математики в объеме средней школы.

Дисциплина «Математика» обеспечивает изучение общепрофессиональных и специальных дисциплин, установленных Государственным образовательным стандартом по экономическим специальностям.

Книга написана на основе многолетнего опыта чтения лекций на факультетах экономики и управления института экономики и предпринимательства (г. Москва). В книгу вошли разделы «Линейная алгебра» и «Математический анализ».

Часть материала книги (параграфы 3.8, 6.7, 13.8, гл. 16) в соответствии с учебными программами Государственного образовательного стандарта читается для студентов по специальности «Прикладная информатика (в экономике)».

Учебник содержит большое количество примеров, поясняющих существо рассматриваемых тем. В конце каждой главы приводятся вопросы для самоконтроля, а также задачи для самостоятельного решения с ответами.

Завершающим разделом учебника являются тесты для самоконтроля, которые составлены на основе рекомендаций Национального аккредитационного агентства в сфере образования.

Нумерация примеров, рисунков и таблиц произведена отдельно по главам учебника: первая цифра означает номер главы, вторая — номер примера, рисунка или таблицы в главе. Для удобства работы примеры и пояснения выделены шрифтом.

Авторы учебника стремились в минимальном объеме на доступном уровне изложить все разделы дидактических блоков Госстандарта без использования сложных формул и трактовок.

В конце книги приводится список литературы для углубленного изучения отдельных тем. Там же оформлен в виде приложений справочный материал по элементарной математике.

Авторы считают приятным долгом поблагодарить рецензентов: доктора экономических наук, профессора, члена-корреспондента РАСХН А. М. Гатаулина (кафедра экономической кибернетики РГАУ — МСХА им. К. А. Тимирязева), доктора физико-математических наук, профессора С. П. Стрункова (НИИ системных исследований РАН), взявших на себя нелегкий труд рецензирования рукописи книги.

Введение

Математика (в переводе с греческого $\mu\alpha\theta\eta\mu\alpha$ — учение, наука, учусь через размышление) — это наука о количественных отношениях и пространственных формах действительного мира. Более просто математику можно охарактеризовать как науку о числах и фигурах.

С глубокой древности, по мере развития человеческого общества, накапливалось все больше сведений о числах, размерах и формах различных предметов. Появилась необходимость приводить эти сведения в порядок, чтобы их легче было передавать от одного поколения к другому. Так постепенно зарождалась математика.

Зачатки математических знаний обнаруживаются уже примерно за 4 тыс. лет до нашего времени. Об этом свидетельствуют дошедшие до нас египетские папирусы, клинописные вавилонские таблички, в которых встречаются решения различных арифметических, алгебраических и геометрических задач.

Большого расцвета достигла математика в Древней Греции. Более чем за 300 лет до н.э. там появились «Начала» Евклида — сочинение, в котором систематически излагалась геометрия примерно в том объеме, в котором она ныне изучается в средней школе, а также давались сведения о делимости чисел и о решении квадратных уравнений.

В III в. до н.э. Архимед нашел способ определения площадей, объемов и центров тяжести различных простых фигур. В конце III в. до н.э. Аполлоний написал книгу о свойствах некоторых замечательных кривых — эллипса, гиперболы и параболы. Если к этому добавить, что во II в. до н.э. Птолемей изложил основы тригонометрии и дал таблицы синусов, то станет ясным, какой вклад в развитие математических знаний внесли древние греки.

Далее математика развивалась трудами китайских, индийских, арабских ученых. Особенно большой вклад был внесен ими в развитие алгебры. В Западной Европе во времена Средневековья наступил длительный застой в развитии

науки, из-за чего европейским ученым пришлось потратить немало усилий, чтобы усвоить труды их предшественников. Лишь после этого они смогли двигаться вперед самостоятельно. Расцвет математики в Европе начался с XVII в. В это время зародились новые отрасли математики, которые теперь принято относить к высшей математике.

Основу высшей математики составляют аналитическая геометрия, дифференциальное и интегральное исчисление. Их создание связано с именами великих ученых XVII в. Р. Декарта, И. Ньютона, Г. Лейбница, Л. Эйлера, Ж. Лагранжа, К. Гаусса, О. Коши и многих других. Это позволило теоретически изучать движение, процессы изменения величин и геометрических фигур. Вместе с этим в математику вошли координаты, переменные величины и понятие функции.

Изучение функции приводит к основным понятиям математического анализа: пределу, производной, дифференциалу, интегралу. Возникновение аналитической геометрии позволило существенно расширить предмет изучения геометрии благодаря переводу ее на язык алгебры и анализа. С другой стороны, открылась возможность геометрической интерпретации алгебраических и аналитических фактов.

С XVII в. начинается развитие очень важного раздела математики — теории вероятностей. В ее основе лежали труды таких выдающихся математиков, как Б. Паскаль, П. Ферма, Х. Гюйгенс. При этом первые вклады в теорию вероятностей были сделаны в связи с изучением азартных игр. Однако уже в конце XVII в. начали пользоваться теорией вероятностей при страховании кораблей от случайностей.

В XVIII в. для развития теории вероятностей много сделали швейцарец Я. Бернулли, французы С. Лаплас и С. Пуассон, «король математиков» немецкий ученый К. Гаусс. В середине XIX в. большой сдвиг произвели труды знаменитого русского математика П. Чебышева. Он нашел новые методы решения ранее поставленных задач и сумел создать вокруг себя большую группу молодых ученых; некоторые из них, например А. Марков и А. Ляпунов, впоследствии достигли мировой известности. Также нужно отметить большой вклад в теорию вероятностей российского ученого А. Колмогорова.

Невозможно проследить здесь, хотя бы и бегло, успехи математики за последние столетия. Новые теории в ней возникают теперь не только в результате запросов других наук, но и вследствие внутренней потребности самой

математики. Замечательным примером такой теории является сферическая геометрия, созданная российским ученым Н. Лобачевским.

Таким образом, историю математики кратко (по предложению академика А. Н. Колмогорова) можно условно разделить на четыре периода.

1. Период зарождения (IV в. до н.э.).

Появление у вавилонян методов решения квадратных уравнений, теорема Пифагора, измерение земельных участков, составление календарей, проектирование строительства и т.д. К сожалению, теоретические разработки этого периода до нашего времени не дошли.

2. Период элементарной математики (VI в. до н.э. — XVI в. н.э.).

Математика рассматривается древними греками как средство познания природы. Пифагорейцы усматривали сущность вещей и явлений в числах и числовых отношениях. Начало дедуктивного и аксиоматического метода.

Дедуктивная теория Аристотеля (384—322 гг. до н.э.). Первое изложение геометрии Евклида (около 300 лет до н.э.). Геометрическая система в виде «Начал» свыше 20 веков до XIX в. являлась образцом логического метода. Развитие в работах Паша (1882 г.), Пеано (1889 г.), Пиери (1889 г.).

3. Период создания математики переменных величин (XVI—XVIII вв.):

- переменные величины в аналитической геометрии Р. Декарта (1596—1650 гг.);
- дифференциальное и интегральное исчисление в трудах И. Ньютона (1642—1727 гг.) и Г. Лейбница (1646—1716 гг.);
- теория действительных чисел.

4. Современная математика (XVIII в. — до наших дней):

- неевклидова геометрия Н. Лобачевского (1792—1856 гг.);
- развитие аксиоматических методов в работах Д. Гильберта (1862—1943 гг.), А. Пуанкаре (1854—1912 гг.) и т.д.;
- комплексные числа, кватернионы У. Гамильтона (1805—1865 гг.), О. Хевисайда (1850—1925 гг.).

Потребности развития самой математики, «математизация» других областей науки, проникновение математических методов во многие сферы практической деятельности, прогресс вычислительной техники привели к появлению

новых математических дисциплин, например исследования операций, теории игр, математической экономики и др.

Роль математики в системе фундаментальной подготовки современного экономиста

Какими качествами и знаниями должен обладать экономист? Прежде всего — способностью к аналитической работе, умением сортировать информацию и классифицировать различные факты. Поэтому ему не обойтись без отличного знания математики. На всех экономических факультетах высших учебных заведений изучению этого предмета уделяется особое внимание. «Корпеть» над формулами и задачами студентам экономических вузов приходится вплоть до окончания вуза.

А. С. Пушкин про своего героя Евгения Онегина писал: «Зато читал Адама Смита и был глубокий эконо́м, то есть умел судить о том, как государство богатеет, и чем живет, и почему не нужно золота ему, когда простой продукт имеет».

Чтобы разобраться во всех тонкостях современных экономических учений, уже мало читать одного Адама Смита или Маркса с Энгельсом. Экономике нужно учиться, как хорошему инженеру. Прогноз в экономике немыслим без знаний и умения применять математические модели. В свою очередь, модели невозможно успешно освоить без математики — азбуки этих моделей.

Поэтому математическое образование является важнейшей составляющей в системе фундаментальной подготовки современного экономиста. Математика для него является не только мощным средством решения прикладных задач, но и элементом общей культуры.

Профессиональный уровень экономиста во многом зависит от того, освоил ли он современный математический аппарат и умеет ли использовать его при анализе сложных экономических процессов и принятии решений. Таким образом, в подготовке экономистов изучение математики играет важную роль.

Раздел I

Линейная алгебра



Глава 1

ОПЕРАЦИИ НАД МАТРИЦАМИ. ОПРЕДЕЛИТЕЛИ И ИХ СВОЙСТВА

1.1. Основные сведения о матрицах

На практике обширный числовой материал очень часто записывается в виде *таблиц*.

Пусть некая фирма производит товары трех наименований A , B , C и поставляет их в четыре магазина. Тогда объемы поставки за какой-то определенный день, например 1 сентября 2010 г., менеджер отдела сбыта может записать в виде таблицы

Номер магазина	Наименование изделия		
	A	B	C
1	1	2	0
2	2	3	1
3	4	1	5
4	2	0	1

Из таблицы очевидно, что в этот день фирма поставила магазину № 1 одно изделие A , два изделия B , а изделий C не поставляла. Магазину № 2 было поставлено два изделия A , три изделия B и одно изделие C и т.д. При каждодневной поставке менеджеру нет необходимости каждый раз писать «шапку» таблицы (он ее запоминает наизусть). Поэтому эту таблицу можно представить в следующем виде:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 5 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Такая таблица в математике называется *матрицей*.

Матрица — это прямоугольный массив чисел, записанный в форме строк и столбцов. Каждое число в матрице называется **элементом** матрицы.

Чаще всего матрица заключается в круглые скобки, но в литературе встречаются и другие обозначения. Например, вместо (...) пишут [...] или ||...||.

Размерностью матрицы называется совокупность двух чисел, состоящая из числа ее строк m и числа столбцов n . Обычно пишут $m \times n$ и читают «размерность m на n ». Но это не значит, что размерность матрицы представляет собой обычное произведение $m \cdot n$, которое равно количеству элементов матрицы.

Будем обозначать матрицы большими латинскими буквами A, B, C и т.д., а элементы матриц — соответствующими им малыми латинскими буквами с двумя индексами a_{ij} , b_{ij} , c_{ij} и т.д.: первый индекс i обозначает номер строки, в которой находится данный элемент, а второй индекс j — номер столбца. Индексы i, j определяют адрес элемента матрицы.

Тогда в общем виде матрица размерностью $m \times n$ может быть записана следующим образом:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Иногда используют сокращенную запись матрицы A в виде $A_{m \times n}$ или $(a_{ij})_{m \times n}$.

Если $m = n$, то матрицу называют **квадратной** матрицей **порядка n** . В квадратной матрице A элементы a_{11} , a_{22} , ..., a_{nn} образуют **главную диагональ** матрицы. Другая большая диагональ a_{1n} , a_{2n-1} , ..., a_{n1} называется **побочной диагональю**.

Если все элементы **квадратной матрицы**, кроме элементов главной диагонали, равны нулю, то матрица называется **диагональной**.

Пример 1.1.

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \text{ — диагональная матрица.} \quad \blacktriangleright$$

Если у *диагональной матрицы* все элементы, лежащие на *главной диагонали*, равны единице, то матрица называется **единичной** и обозначается буквой E (в ряде книг можно встретить обозначение I). Порядок единичной матрицы обычно определяется порядком матриц, с которыми производятся операции.

Пример 1.2.

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ — единичная матрица 3-го порядка;}$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ — единичная матрица 2-го порядка.} \quad \blacktriangleright$$

Если в *квадратной матрице* все элементы, расположенные выше или ниже главной диагонали, равны нулю, то такая матрица называется **треугольной**.

Пример 1.3.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ -1 & -3 & -2 \end{pmatrix}.$$

Здесь A и B — треугольные матрицы. $\blacktriangleright$

Если в *квадратной матрице* симметричные элементы относительно главной диагонали равны, т.е. $a_{ij} = a_{ji}$, то матрица называется **симметрической**.

Пример 1.4.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 6 \\ 5 & 6 & 4 \end{pmatrix} \text{ — симметрическая матрица.} \quad \blacktriangleright$$

Элемент строки матрицы любой размерности называется **крайним**, если он отличен от нуля, а все элементы этой строки, находящиеся левее него, равны нулю.

Матрица называется **ступенчатой**, если крайний элемент каждой строки находится правее крайнего элемента предыдущей строки.

Пример 1.5. Здесь крайний элемент каждой строки матрицы подчеркнут

$$\begin{pmatrix} \underline{2} & -1 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & \underline{5} & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \underline{-3} & 2 \end{pmatrix}. \quad \blacktriangleright$$

Если все элементы матрицы равны нулю, то такая матрица называется **нулевой** и обозначается обычно буквой O .

Пример 1.6. Нулевая матрица

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad \blacktriangleright$$

Две матрицы называются **равными** тогда и только тогда, когда они одинаковой размерности и все элементы с одинаковыми адресами этих матриц равны.

Пример 1.7.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow A = B. \quad \blacktriangleright$$

1.2. Операции над матрицами

Транспонирование матрицы. Переход от матрицы A к матрице A^T , строками которой являются столбцы, а столбцами — строки матрицы A , называется **транспонированием** матрицы A :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Для матрицы A и транспонированной матрицы A^T выполняется равенство $a_{ji} = a_{ij}^T$ для всех i и j .

Пример 1.8. Транспонировать матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 4 & -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Решение

$$A^T = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -3 \\ 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}. \quad \blacktriangleright$$

Необходимо заметить, что в литературе можно встретить другое обозначение транспонированной матрицы — A' .

Умножение (деление) матрицы на число. Пусть даны матрица A и действительное число λ .

Произведением λA по определению является матрица

$$\lambda A = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \dots & \lambda a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \dots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}.$$

То есть, чтобы умножить матрицу на число, нужно каждый элемент матрицы умножить на это число.

Аналогично для операции деления матрицы на число: нужно каждый элемент матрицы разделить на это число или, если каждый элемент матрицы A разделить на число λ ,

то получится матрица $\frac{1}{\lambda} \cdot A$.

Пример 1.9. Дана матрица A . Найти матрицу $3A$.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 4 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Решение

$$3A = \begin{pmatrix} 3 \cdot 2 & 3 \cdot 0 & 3 \cdot (-1) \\ 3 \cdot 4 & 3 \cdot (-1) & 3 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & -3 \\ 12 & -3 & 9 \end{pmatrix}. \quad \blacktriangleright$$

Сложение и вычитание матриц (алгебраическое сложение). **Суммой (разностью)** матриц A и B одинаковой размерности называется матрица $C = A \pm B$, элементы которой равны $c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}$ для всех i и j .

То есть, если

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix},$$

то необходимо сложить (вычесть) элементы с одинаковыми адресами. Тогда

$$C = A \pm B = \begin{pmatrix} a_{11} \pm b_{11} & a_{12} \pm b_{12} & \dots & a_{1n} \pm b_{1n} \\ a_{21} \pm b_{21} & a_{22} \pm b_{22} & \dots & a_{2n} \pm b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} \pm b_{m1} & a_{m2} \pm b_{m2} & \dots & a_{mn} \pm b_{mn} \end{pmatrix}.$$

Заметим, что складывать и вычитать матрицы различной размерности нельзя.

Пример 1.10. Найти матрицу $A + B$, если даны

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 4 & 3 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение

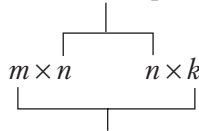
$$A + B = \begin{pmatrix} 1+3 & 0+1 & 2+5 \\ (-1)+4 & 4+2 & 3+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 7 \\ 3 & 6 & 4 \end{pmatrix}. \quad \blacktriangleright$$

Умножение матрицы на матрицу. Чтобы можно было умножить матрицу на матрицу, они должны быть *согласованными* для умножения, а именно *число столбцов* в первой матрице должно быть равно *числу строк* во второй матрице.

То есть если матрица A имеет размерность $m \times n$, то для существования произведения $A \cdot B$ необходимо, чтобы матрица B имела размерность $n \times k$, где k — любое натуральное число.

В итоге получается матрица с размерностью $m \times k$. Схематично это будет выглядеть так:

$$C = A_{m \times n} \cdot B_{n \times k} \Rightarrow \text{должны быть равны}$$



размерность полученной матрицы $\Rightarrow C_{m \times k}$

Произведением матрицы $A_{m \times n}$ на матрицу $B_{n \times k}$ называется матрица $C_{m \times k}$, каждый элемент которой c_{ij} равен сумме произведений элементов i -й строки матрицы A на соответствующие элементы j -го столбца матрицы B :

$$c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \dots + a_{in} \cdot b_{nj}.$$

Пример 1.11. Пусть даны матрицы A и B :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 4 & 3 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

В этом случае умножение $A \cdot B$ невозможно, так как в первой матрице три столбца, а во второй матрице две строки. Эти значения, очевидно, не совпадают.

Если дополнительно рассмотреть матрицу D , равную

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 2 & 7 \\ 2 & 4 & 4 & 3 \end{pmatrix},$$

то произведение $A \cdot D$ определено:

$$\begin{aligned} A \cdot D &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 6 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 2 & 7 \\ 2 & 4 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0+0+4 & 6+0+8 & 1+0+8 & 5+0+6 \\ 0+4+6 & -6+4+12 & -1+8+12 & -5+28+9 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 4 & 14 & 9 & 11 \\ 10 & 10 & 19 & 32 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Следует отметить, что обратное умножение $D \cdot A$ невозможно, так как не выполняется условие согласованности матриц. ►

Свойства операции умножения матриц.

1. Если матрица A имеет размерность $m \times n$, а матрица B — размерность $n \times k$, то произведение $A \cdot B$ существует.

Произведение $B \cdot A$ может существовать, только когда $m = k$.

2. Умножение матриц не коммутативно, т.е. $A \cdot B$ не всегда равно $B \cdot A$ даже если определены оба произведения. Однако если соотношение $A \cdot B = B \cdot A$ выполняется, то матрицы A и B называются *перестановочными*.

Самым характерным примером может служить единичная матрица, которая является перестановочной с любой другой матрицей той же размерности:

$$A \cdot E = E \cdot A = A.$$

Перестановочными могут быть только квадратные матрицы одного и того же порядка.

В случае произведения $A \cdot B$ говорят, что A умножается на B *справа* (или B на A *слева*), а в случае произведения $B \cdot A$ говорят, что A умножается на B *слева* (или B на A *справа*).

Пример 1.12. Даны матрицы A и B . Найти и сравнить произведения $A \cdot B$ и $B \cdot A$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 & 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \\ (-1) \cdot 1 + (-1) \cdot 1 & (-1) \cdot 1 + (-1) \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix};$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) & 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) \\ 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) & 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Видно, что $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, т.е. $A \cdot B \neq B \cdot A$. ►

Очевидно, что для матриц выполняются следующее свойство:

$$A \cdot O = O; O \cdot A = O,$$

если это умножение возможно.

3. Операция умножения матриц ассоциативна, т.е.

$$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C).$$

4. Операция умножения матриц дистрибутивна по отношению к алгебраическому сложению:

$$A \cdot (B \pm C) = A \cdot B \pm A \cdot C;$$

$$(A \pm B) \pm C = A \cdot C \pm B \cdot C.$$

5. Если произведение $A \cdot B$ определено, то для любого числа α верно соотношение

$$\alpha(A \cdot B) = (\alpha A) \cdot B = A \cdot (\alpha B).$$

6. Если определено произведение $A \cdot B$, то определено произведение $B^T \cdot A^T$ и выполняется равенство

$$(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T.$$

$$(A \cdot B \cdot C)^T = C^T \cdot B^T \cdot A^T,$$

при условии, что определено произведение матриц $A \cdot B \cdot C$.

7. Матрицу A можно умножить саму на себя только если она квадратная. Произведение $A \cdot A$ так же, как и в обычной алгебре, принято обозначать A^2 ; $A \cdot A \cdot A = A^3$ и т.д.

8. Произведение двух матриц может дать нулевую матрицу, хотя ни одна из матриц-сомножителей не является нулевой (см. пример 1.12).

Две матрицы называются **эквивалентными** или равносильными (но не равными), если одна из них может быть получена из другой следующими операциями (называемыми **элементарными преобразованиями** матриц):

- перемена местами двух строк (столбцов);
- умножение строки (столбца) на число, отличное от нуля;
- прибавление (вычитание) к элементам одной строки (столбца) соответствующих элементов другой строки (столбца), умноженных на одно и то же число;
- отбрасывание строки (столбца), целиком состоящей из нулей.

При элементарных преобразованиях между эквивалентными матрицами ставится знак $\sim$ или $\approx$. Зная основные операции над матрицами, можно производить вычисления матричных многочленов.

Известно, что в обычной алгебре можно вычислить многочлен, подставив в него вместо каждой переменной какое-то конкретное числовое значение. Аналогично можно вычислять матричные многочлены.

Пример 1.13. Вычислить матричный многочлен $A^3 + 2A^2 - A + 3E$, где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Решение

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 3 \cdot (-1) & 1 \cdot 3 + 3 \cdot 2 \\ (-1) \cdot 1 + 2 \cdot (-1) & (-1) \cdot 3 + 2 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 9 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} -2 & 9 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-2) \cdot 1 + 9 \cdot (-1) & (-2) \cdot 3 + 9 \cdot 2 \\ (-3) \cdot 1 + 1 \cdot (-1) & (-3) \cdot 3 + 1 \cdot 2 \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} -11 & 12 \\ -4 & -7 \end{pmatrix}.$$

$$2A^2 = 2 \cdot \begin{pmatrix} -2 & 9 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 18 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$A^3 + 2A^2 = \begin{pmatrix} -11 & 12 \\ -4 & -7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 & 18 \\ -6 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15 & 30 \\ -10 & -5 \end{pmatrix}.$$

$$A^3 + 2A^2 - A = \begin{pmatrix} -15 & 30 \\ -10 & -5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -16 & 27 \\ -9 & -7 \end{pmatrix}.$$

Поскольку матрица, к которой прибавляется $3E$ — квадратная матрица второго порядка, то подразумевается, что матрица E тоже берется второго порядка, чтобы можно было выполнить операцию сложения. Тогда

$$3E = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix};$$

$$A^3 + 2A^2 - A + 3E = \begin{pmatrix} -16 & 27 \\ -9 & -7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13 & 27 \\ -9 & -4 \end{pmatrix}. \quad \blacktriangleright$$

1.3. Определители квадратных матриц

Для *квадратных* (и только для квадратных) *матриц* существует числовая характеристика, называемая *определителем*.

Сначала рассмотрим понятия перестановки и инверсии.

Перестановкой каких-либо n однородных различимых элементов называется любое их упорядоченное расположение (т.е. можно указать, какой элемент занимает место № 1, какой элемент — место № 2 и т.д.).

Пример 1.14.

Возьмем пять букв: A, B, B, Γ и D .

Тогда: $AB\Gamma D$ — одна перестановка;

$AB\Gamma B$ — другая перестановка;

$\Gamma BBA D$ — третья перестановка и т.д. $\blacktriangleright$

Обозначим число различных перестановок n элементов P_n и определим, чему оно равно.

В примере с пятью буквами на первое место можно поставить любую из них, т.е. занять первую позицию можно пятью способами.

Пусть первая позиция занята. Тогда остается четыре буквы и вторую позицию можно занять четырьмя способами, а первые две позиции — $5 \cdot 4 = 20$ способами. Аналогично, все пять позиций можно занять $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ способами.

В математике для удобства введено обозначение $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 5!$ (читается «пять факториал»). То есть $n!$ — это произведение всех натуральных чисел от 1 до n .

Легко убедиться, что число различных перестановок n однородных различимых объектов P_n равно $n!$. Запишем:

$$P_n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!$$

Инверсия — это положение в перестановке первых n натуральных чисел, когда большее из двух чисел имеет меньший номер (или пара чисел в такой перестановке, левое из которых больше правого).

Пример 1.15.

В перестановке 1 2 3 4 5 нет инверсий;

В перестановке 1 2 4 3 5 — одна инверсия, образуемая парой чисел 4 и 3;

В перестановке 4 3 5 1 2 — семь инверсий: 4 и 3; 4 и 1; 4 и 2; 3 и 1; 3 и 2; 5 и 1; 5 и 2. ►

Перестановка первых n натуральных чисел называется *четной*, если в ней четное число инверсий, и *нечетной*, если в ней нечетное число инверсий.

Перейдем теперь непосредственно к понятию определителя матрицы n -го порядка (далее — определитель). Рассмотрим квадратную матрицу A порядка n :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Выберем из матрицы A по одному элементу из каждой строки и каждого столбца. Технически это можно сделать, например, так. Возьмем какой-либо элемент из первой строки и вычеркнем тот столбец, из которого взяли элемент.

Элемент второй строки берем из какого-либо невычеркнутого столбца и затем вычеркиваем этот столбец и т.д. Когда дойдем до последней n -й строки, останется один невычеркнутый столбец, из которого выбирается элемент матрицы, принадлежащий последней строке.

Составим произведение взятых элементов, причем расположим элементы в произведении так, чтобы первые индексы располагались в порядке возрастания:

$$a_{1,j_1} \cdot a_{2,j_2} \cdot \dots \cdot a_{n,j_n},$$

где вторые индексы элементов матрицы $j_1, j_2, \dots, j_n$ — номера столбцов матрицы, причем все разные. Эти номера образуют перестановку натуральных чисел от 1 до n .

Очевидно, что всего таких возможных произведений ровно столько, сколько перестановок чисел от 1 до n . Иначе говоря, таких произведений ровно $n!$, в каждом из которых n элементов.

Рассмотрим каждую из таких перестановок и, если она нечетная, умножим произведение с такой перестановкой вторых индексов на (-1) . Затем просуммируем все полученные таким образом $n!$ членов.

Полученное число называется *определителем* (или *детерминантом*) матрицы A , или просто **определителем n -го порядка**.

Определитель обозначается $\det A$ или Δ , но чаще всего определитель записывается так же, как и матрица, но не в круглых скобках, а в одиночных прямых линиях:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Обозначение $\det A$ обычно используется тогда, когда рассматривается несколько матриц.

Следует помнить, что хотя *определитель* записан в форме матрицы, он представляет собой *одно число*, которое вычисляется по указанному правилу.

Заметим, что *определитель матрицы первого порядка, состоящей из одного элемента, есть сам этот элемент*.

Вычисление определителей второго и третьего порядка. Запишем определитель второго порядка в общем матричном виде:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Число перестановок в определителе второго порядка равно $2! = 2$, а каждая перестановка содержит два сомножителя. Возможны всего две перестановки вторых индексов:

- перестановка 1 2 — нуль инверсий, т.е. перестановка четная;
- перестановка 2 1 — одна инверсия, т.е. перестановка нечетная.

Поэтому перед произведением $a_{12}a_{21}$ нужно поставить знак минус. Запишем:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Таким образом, определитель второго порядка равен разности произведений элементов главной и побочной диагоналей.

Пример 1.16. Вычислить определитель матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 5 & -8 \end{pmatrix}.$$

Решение

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 5 & -8 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-8) - 4 \cdot 5 = -16 - 20 = -36. \quad \blacktriangleright$$

Определитель третьего порядка имеет следующий вид:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Так как $n = 3$, то число возможных перестановок вторых индексов и, следовательно, число складываемых произведений в определителе равно $3! = 6$. Каждое произведение содержит три сомножителя. Рассмотрим все возможные перестановки вторых индексов:

- перестановка 1 2 3 — нуль инверсий (четная);
- перестановка 1 3 2 — одна инверсия (нечетная);
- перестановка 2 1 3 — одна инверсия (нечетная);
- перестановка 2 3 1 — две инверсии (четная);
- перестановка 3 1 2 — две инверсии (четная);
- перестановка 3 2 1 — три инверсии (нечетная).

Запишем определитель в виде суммы шести членов, причем перед членами, соответствующими нечетным перестановкам вторых индексов, поставим знак «минус». Тогда получим

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + \quad (1.1)$$

$$+ a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

Запомнить такую формулу затруднительно, а каждый раз выводить правило вычисления определителя третьего порядка долго. Существует два простых правила, позволяющих наглядно, без больших затруднений вычислять определители третьего порядка. Иногда эти правила называют **правилами Сарруса**.

Правило 1. Припишем снизу к определителю матрицы еще раз первую и вторую его строки. Проведем прямую линию через элементы главной диагонали и ниже еще

две прямые линии, параллельные первой. Произведения элементов, лежащих на каждой из этих прямых, входят в определитель со знаком «плюс». Проведем прямую пунктирную линию через элементы побочной диагонали и ниже еще две прямые пунктирные линии, параллельные этой прямой. Произведения элементов, лежащих на каждой из этих прямых линий, входят в определитель со знаком «минус»:

$$\Delta = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13} + a_{31} a_{12} a_{23} - \\ - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{23} \cdot a_{32} \cdot a_{11} - a_{33} \cdot a_{12} \cdot a_{21}.$$

Пример 1.17. Вычислить определитель матрицы

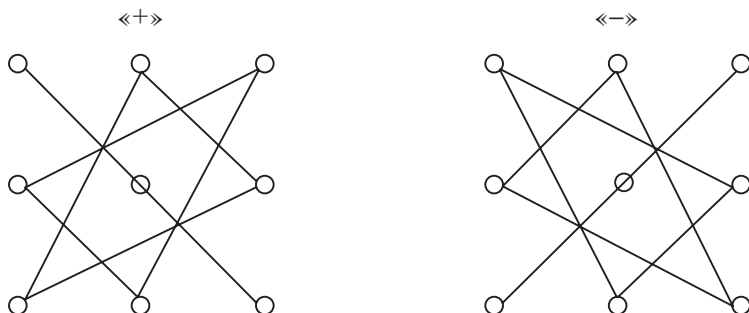
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Решение

$$\Delta = 1 \cdot 4 \cdot 2 + 2 \cdot (-2) \cdot (-1) + 3 \cdot 3 \cdot 1 - (-1) \cdot 4 \cdot 3 - 1 \cdot (-2) \cdot 1 - \\ - 2 \cdot 3 \cdot 2 = 8 + 4 + 9 + 12 + 2 - 12 = 23. \quad \blacktriangleright$$

Правило 2. Изобразим определитель дважды в виде 9 точек, каждая из которых означает соответствующий элемент. На левом рисунке проведем главную диагональ и два треугольника таким образом, чтобы одна сторона каждого треугольника была параллельна главной диагонали. Произведения элементов главной диагонали и произведения элементов, лежащих в вершинах обоих треугольников, берутся со знаком «плюс». На правом рисунке проведем побочную

диагональ и два треугольника со стороной, параллельной побочной диагонали. Соответствующие произведения входят в определитель со знаком «минус».



Выписываем сумму произведений матрицы, учитывая знаки.

Замечание. Правило Сарруса может быть использовано только для вычисления определителя третьего порядка.

Вычисление определителя матрицы любого порядка разложением по строке или столбцу.

Запишем полученную формулу (1.1) определителя третьего порядка и вынесем за скобку элементы первой строки:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} +$$

$$+ a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) +$$

$$+ a_{12}(-a_{21}a_{33} + a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}).$$

Обозначим члены в скобках соответственно A_{11} , A_{12} и A_{13} и назовем их **алгебраическими дополнениями** элементов — соответственно a_{11} , a_{12} и a_{13} . Тогда

$$\Delta = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}.$$

Аналогичные равенства можно получить для элементов второй и третьей строки, а также для элементов любого столбца. Для i -й строки или для j -го столбца определителя n -го порядка такие равенства соответственно имеют вид

$$\Delta = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in}, \text{ где } i = 1, \dots, n;$$

$$\Delta = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \dots + a_{nj}A_{nj}, \text{ где } j = 1, \dots, n.$$

Данная запись определителя называется *разложением определителя по строке или столбцу*.

Введем еще одно понятие.

Минором M_{ij} элемента a_{ij} определителя Δ n -го порядка называется определитель $(n - 1)$ -го порядка, полученный из Δ вычеркиванием i -й строки и j -го столбца, на пересечении которых стоит элемент a_{ij} .

Например, для определителя третьего порядка

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}; \quad M_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}.$$

Для определителя n -го порядка можно строго доказать, что

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}.$$

Этот способ вычисления определителя является универсальным, так как позволяет вычислять определители любого порядка.

Пример 1.18. Вычислить определитель матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

из предыдущего примера путем разложения его, например, по второй строке.

Решение

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \end{vmatrix} = \\ &= 2 \cdot (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} + 4 \cdot (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = \\ &= -2 \cdot (3 \cdot 2 - (-1) \cdot (-2)) + 4 \cdot (1 \cdot 2 - (-1) \cdot 3) - 1 \cdot (1 \cdot (-2) - 3 \cdot 3) = \\ &= -8 + 20 + 11 = 23. \end{aligned} \quad \blacktriangleright$$

Определитель треугольной матрицы. Легко видеть, что если последовательно раскладывать определитель треугольной матрицы по элементам первого столбца (если нули под главной диагональю) или первой строки (если над ней), определитель представляет собой произведение элементов главной диагонали:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \\
 = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \begin{vmatrix} a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} \cdot \dots \cdot a_{nn}.$$

Свойства определителей.

1. Если какая-либо строка или какой-либо столбец определителя состоит только из нулей, то определитель равен нулю.

Это сразу видно, если разложить определитель по нулевой строке или столбцу. Например:

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 0 \cdot A_{12} + 0 \cdot A_{22} + 0 \cdot A_{32} = 0.$$

2. При транспонировании матрицы ее определитель не изменяется:

$$\det A = \det A^T.$$

3. Определитель произведения двух квадратных матриц равен произведению их определителей, т.е. если

$$C = AB, \text{ то } \det C = \det A \cdot \det B.$$

Отсюда следует, что если даже $AB \neq BA$, то $\det(AB) = \det(BA)$.

4. При перестановке любых двух строк или столбцов определитель не изменяется по абсолютной величине, но меняет знак на противоположный.

Например, перестановка первой и второй строки дает

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 0 \\ 5 & -1 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 5 & -1 & 1 \end{vmatrix}.$$

5. Определитель, содержащий две одинаковые строки или два одинаковых столбца, равен нулю. Действительно,

если переставить эти две строки (столбца), то, с одной стороны, определитель должен поменять знак по свойству 4; с другой стороны — остаться неизменным, так как поменяли одинаковые строки (столбцы). Это возможно только когда определитель равен нулю.

Например,

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & -5 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Это свойство можно всегда проверить путем непосредственного вычисления определителя.

6. Общий множитель всех элементов какой-либо строки или столбца можно вынести за знак определителя.

Например,

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -1 & 9 & 1 \\ 0 & 15 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \cdot 1 & 4 \\ -1 & 3 \cdot 3 & 1 \\ 0 & 3 \cdot 5 & 5 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 5 \end{vmatrix}.$$

7. Сумма произведений элементов какой-либо строки (столбца) определителя на алгебраические дополнения к элементам другой строки (столбца) равна нулю.

Например, для определителя третьего порядка

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}A_{12} + a_{21}A_{22} + a_{31}A_{32} = a_{11}A_{21} + a_{12}A_{22} + a_{13}A_{23} = \dots = 0.$$

8. Определитель не изменится, если к элементам одной строки (или столбца) прибавить соответствующие элементы другой строки (столбца), умноженные на одно и то же число.

Например

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} + \lambda a_{11} & a_{32} + \lambda a_{12} & a_{33} + \lambda a_{13} \end{vmatrix}.$$

Пример 1.19. Используя свойство 8, вычислить определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \end{vmatrix}.$$

Решение

Прибавим ко второй строке определителя первую строку, умноженную на (-2) , а к третьей строке — первую, умноженную на (-3) . Согласно свойству определитель от этого не изменится. После этого разложим получившийся определитель по элементам первого столбца.

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 + (-2) \cdot 1 & 4 + (-2) \cdot 3 & 1 + (-2) \cdot (-1) \\ 3 + (-3) \cdot 1 & (-2) + (-3) \cdot 3 & 2 + (-3) \cdot (-1) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 3 \\ 0 & -11 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -11 & 5 \end{vmatrix} = (-2) \cdot 5 - 3 \cdot (-11) = -10 + 33 = 23. \quad \blacktriangleright$$

1.4. Обратная матрица

Во множестве действительных чисел есть особенное число, равное единице и обладающее свойством $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$. Во множестве квадратных матриц порядка n роль единицы играет единичная матрица того же порядка. В самом деле, легко проверить, что

$$A \cdot E = E \cdot A = A.$$

Во множестве действительных чисел для любого числа a , не равного нулю, существует единственное обратное число $a^{-1} = 1/a$, такое, что $a \cdot a^{-1} = 1$.

В матричной алгебре существуют матрицы, обладающие аналогичным свойством во множестве квадратных матриц порядка n . При этом роль условия $a \neq 0$ играет условие $\Delta \neq 0$.

Квадратная матрица, определитель Δ которой не равен нулю, называется **невырожденной**, или **неособенной**, матрицей, а матрица с $\Delta = 0$ называется **вырожденной**, или **особенной**, матрицей.

Матрица A^{-1} называется **обратной** для квадратной матрицы A n -го порядка, если

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E.$$

Можно доказать, что если определитель Δ матрицы A не равен нулю, то матрица A^{-1} существует, причем единственная.

Укажем **свойства обратных матриц**.

1. $(A^{-1})^{-1} = A$.
2. $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$.
3. $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

Рассмотрим **алгоритм** нахождения *обратной матрицы* для заданной матрицы A .

1. Вычисляем определитель Δ матрицы A . Если $\Delta = 0$, то обратная матрица не существует. Если $\Delta \neq 0$, то выполняем рекомендации следующего пункта.

2. Для каждого элемента a_{ij} матрицы A находим его алгебраическое дополнение A_{ij} и заменяем в матрице A все элементы их алгебраическими дополнениями:

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

3. Транспонируем матрицу алгебраических дополнений. Полученная матрица называется *присоединенной* к матрице A и обозначается $\tilde{A}$:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

4. Умножаем матрицу $\tilde{A}$ на множитель $1/\Delta$ и получаем обратную матрицу A^{-1} :

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \cdot \tilde{A}.$$

Пример 1.20. Найти обратную матрицу для матрицы A

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 4 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

*Решение*1. Находим определитель Δ матрицы A :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 4 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ (-1)+1 \cdot 1 & (-1)+1 \cdot 2 & 2+1 \cdot 1 \\ 4+(-4) \cdot 1 & (-1)+(-4) \cdot 2 & 1+(-4) \cdot 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -9 & -3 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -9 & -3 \end{vmatrix} = -3 + 27 = 24.$$

2. Вычисляем алгебраические дополнения к элементам матрицы A :

$$A_{11} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1; \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 9; \quad A_{13} = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = 5;$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -3; \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -3; \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = 9;$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 5; \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -3; \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 1.$$

Составляем матрицу алгебраических дополнений:

$$\begin{pmatrix} 1 & 9 & 5 \\ -3 & -3 & 9 \\ 5 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Транспонируем матрицу алгебраических дополнений и получаем присоединенную матрицу $\tilde{A}$:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 9 & -3 & -3 \\ 5 & 9 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Умножаем матрицу $\tilde{A}$ на множитель $1/\Delta$ и получаем обратную матрицу:

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \cdot \tilde{A} = \frac{1}{24} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 9 & -3 & -3 \\ 5 & 9 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{24} & -\frac{3}{24} & \frac{5}{24} \\ \frac{9}{24} & -\frac{3}{24} & -\frac{3}{24} \\ \frac{5}{24} & \frac{9}{24} & \frac{1}{24} \end{pmatrix}.$$

После нахождения обратной матрицы желательно сделать проверку правильности ее нахождения путем умножения A^{-1} на A :

$$\begin{aligned}
 A^{-1} \cdot A &= \begin{pmatrix} \frac{1}{24} & -\frac{3}{24} & \frac{5}{24} \\ \frac{9}{24} & -\frac{3}{24} & -\frac{3}{24} \\ \frac{5}{24} & \frac{9}{24} & \frac{1}{24} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 4 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} \frac{1 \cdot 1 + (-3) \cdot (-1) + 5 \cdot 4}{24} & \frac{1 \cdot 2 + (-3) \cdot (-1) + 5 \cdot (-1)}{24} & \frac{1 \cdot 1 + (-3) \cdot 2 + 5 \cdot 1}{24} \\ \frac{9 \cdot 1 + (-3) \cdot (-1) + (-3) \cdot 4}{24} & \frac{9 \cdot 2 + (-3) \cdot (-1) + (-3) \cdot (-1)}{24} & \frac{9 \cdot 1 + (-3) \cdot 2 + (-3) \cdot 1}{24} \\ \frac{5 \cdot 1 + 9 \cdot (-1) + 1 \cdot 4}{24} & \frac{5 \cdot 2 + 9 \cdot (-1) + 1 \cdot (-1)}{24} & \frac{5 \cdot 1 + 9 \cdot 2 + 1 \cdot 1}{24} \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} \frac{1+3+20}{24} & \frac{2+3-5}{24} & \frac{1-6+5}{24} \\ \frac{9+3-12}{24} & \frac{18+3+3}{24} & \frac{9-6-3}{24} \\ \frac{5-9+4}{24} & \frac{10-9-1}{24} & \frac{5+18+1}{24} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E.
 \end{aligned}$$

Следовательно, вычисления произведены верно. ►

1.5. Ранг матрицы

В любой матрице $A_{m \times n}$ вычеркиванием каких-либо строк или столбцов можно выделить квадратные матрицы k -го порядка.

Очевидно, что порядок k этих матриц будет удовлетворять неравенству

$$k \leq \min(m, n).$$

Определители таких матриц называются **минорами** k -го порядка матрицы A . Например, из матрицы $A_{4 \times 5}$ можно таким образом получить миноры 4, 3, 2 и 1-го порядков. При этом **минорами 1-го порядка** называются отдельные элементы матрицы.

Рангом матрицы A называется наивысший порядок отличных от нуля миноров этой матрицы. Ранг матрицы обозначается $r(A)$, $\text{rang} A$, $\text{rank} A$.

Следствия определения ранга матрицы:

1) ранг матрицы $A_{m \times n}$ не превосходит наименьшего из чисел m и n ;

2) если $r(A) = 0$, то A – нулевая матрица;

3) ранг невырожденной квадратной матрицы n -го порядка равен n , а ранг вырожденной квадратной матрицы n -го порядка меньше n ;

4) ранг матрицы $A_{m \times n}$ равен количеству ненулевых строк ее эквивалентной ступенчатой матрицы.

5) $r(A + B) \leq r(A) + r(B)$; 6) $r(A + B) \geq |r(A) - r(B)|$;

7) $r(AB) \leq \min [r(A); r(B)]$; 8) $r(A^T A) = r(A)$.

Пример 1.21. Определить ранг матрицы A

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Решение

Так как размерность матрицы A составляет 3×4 , то, согласно следствию 1, $r(A) \leq 3$. Ясно, что если хотя бы один из миноров 3-го порядка не равен нулю, то $r(A) = 3$. Вычислим минор, получаемый вычеркиванием, например, четвертого столбца:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

Вычислим минор, получаемый вычеркиванием первого столбца:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 5 \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 25 \neq 0.$$

Далее вычисления производить не имеет смысла, так как в данном примере наивысший порядок ненулевого минора матрицы A равен 3. Следовательно, $r(A) = 3$. ►

Пример 1.22. Определить ранг матрицы A

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Решение

Ранг этой матрицы $r(A) \leq 3$. Ясно, что миноры 3-го порядка, получаемые вычеркиванием первого, второго или четвертого столбца,

равны нулю, так как содержат столбец, состоящий из нулей. Вычислим минор, получаемый вычеркиванием третьего столбца:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & -7 & -11 \\ 0 & -7 & -11 \end{vmatrix} = 0.$$

Все миноры 3-го порядка равны нулю. Следовательно, $\text{r}(A)$ уже не может быть больше двух. Вычислим минор 2-го порядка, получаемый вычеркиванием третьей строки, третьего и четвертого столбцов:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -7 \neq 0.$$

Отсюда следует, что $\text{r}(A) = 2$. ►

Заметим, что ранг матрицы не меняется при элементарных преобразованиях. Таким образом, ранги эквивалентных матриц равны.

Примеры 1.23. Определить ранг матриц, используя их элементарные преобразования

$$1. A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 11 \end{pmatrix}.$$

Решение

Вычеркивая строки и столбцы, целиком состоящие из нулей, получаем эквивалентную матрицу:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 11 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 11 \end{pmatrix}.$$

Вычисляем единственный минор 2-го порядка — определитель эквивалентной матрицы:

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 11 \end{vmatrix} = 11 - 10 = 1 \neq 0 \Rightarrow \text{r}(A) = 2.$$

$$2. A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Решение

Проводим следующие элементарные преобразования матрицы.

Прибавляем к первой строке третью, затем делим полученную первую строку на 4.

После этого вычитаем из второй строки первую. Наконец, вычеркиваем вторую строку, целиком состоящую из нулей:

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & 8 & 12 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Ясно, что ранг эквивалентной матрицы не превышает 2. Вычисляем минор 2-го порядка, получаемый вычеркиванием третьего столбца:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 2 = 1 \neq 0 \Rightarrow r(A) = 2. \quad \blacktriangleright$$

Вопросы для самоконтроля

1. Что такое матрица?
2. Что называется размерностью матрицы?
3. Как записывается матрица размерностью $m \times n$ в общем и сокращенном виде?
4. Какая матрица называется квадратной?
5. Что такое главная и побочная диагонали квадратной матрицы?
6. Какая матрица называется диагональной; единичной; треугольной; нулевой?
7. Когда две матрицы равны между собой?
8. Что такое транспонирование матрицы?
9. Что является произведением матрицы A на число λ ?
10. Какие матрицы можно складывать и вычитать? Как произвести сложение и вычитание матриц?
11. При каком условии существует произведение двух матриц?
12. Как найти элемент c_{ij} , стоящий в i -й строке j -м столбце матрицы C , являющейся произведением матрицы A на матрицу B ?
13. Выполняется ли коммутативный закон при умножении матриц?
14. В каких случаях матрицу можно умножать саму на себя?
15. Может ли произведение двух ненулевых матриц быть нулевой матрицей?
16. Что называется определителем квадратной матрицы? Как записывается определитель матрицы?
17. Как вычислять определители второго и третьего порядков?
18. Что такое минор и алгебраическое дополнение элемента матрицы?

19. Каким образом можно вычислить определитель путем разложения его по строке или столбцу?
20. Каковы основные свойства определителей?
21. Какая матрица называется обратной для матрицы A ?
22. Какие матрицы имеют обратные матрицы?
23. Каков алгоритм нахождения квадратной матрицы?
24. Что называется рангом матрицы?
25. Что можно сказать о рангах невырожденной и вырожденной квадратных матриц n -го порядка?

Задачи для самостоятельного решения

- 1.1. Транспонировать матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 & -3 & 5 \\ -1 & -4 & -3 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- 1.2. Найти матрицу $3A - 2B$, если

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -2 & 2 \\ 3 & 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

- 1.3. Найти и сравнить произведения $A \cdot B$ и $B \cdot A$ матриц

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 3 & -2 & -2 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

- 1.4. Найти и сравнить произведения $(A \cdot B) \cdot C$ и $A \cdot (B \cdot C)$ матриц

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

- 1.5. Вычислить матричный многочлен $A^2B - 3AB + 2B^2 + 5E$, если

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 5 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

- 1.6. Вычислить определитель следующими способами:

- а) по одному из правил Сарруса;
- б) разложением по строке или столбцу;
- в) разложением с предварительным использованием свойства 8

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 5 & 1 \\ -3 & 2 & 2 \end{vmatrix}.$$

1.7. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 4 & 1 \\ 7 & 3 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 4 & -1 \\ -2 & 1 & -3 & 1 \end{vmatrix}.$$

1.8. Найти обратную матрицу для матрицы A и проверить правильность ее нахождения путем умножения $A^{-1} \cdot A$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

1.9. Найти ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & 3 & 1 \\ 9 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Общий вид системы линейных алгебраических уравнений следующий:

где $a_{ij}, i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n$ — известные величины, называемые **коэффициентами** системы уравнений. Первый индекс означает номер уравнения, а второй — номер неизвестного, при котором стоит коэффициент; $b_i, i = 1, \dots, m$ — известные величины, называемые **свободными членами**, или правыми частями уравнений; $x_j, j = 1, \dots, n$ — неизвестные переменные величины. В дальнейшем они называются просто **неизвестные**.

Система (2.1) называется *системой линейных уравнений*, потому что все неизвестные входят во все уравнения только в первой степени.

Матрица A , составленная из коэффициентов системы, называется **матрицей системы**. Матрица системы, дополненная столбцом свободных членов $A|B$, называется **расширенной матрицей системы**:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad A|B = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right).$$

Систему (2.1) можно записать в матричном виде

$$AX = B,$$

где $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}.$

Пример 2.1. Пусть дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 4, \\ 5x_1 + x_2 + 4x_3 = 8, \\ -2x_1 - x_2 + x_3 = 1. \end{cases}$$

Составить матрицу системы и расширенную матрицу системы.

Решение

Матрица системы имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 5 & 1 & 4 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Расширенная матрица системы:

$$A|B = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -1 & 4 \\ 5 & 1 & 4 & 8 \\ -2 & -1 & 1 & 1 \end{array} \right).$$

►

Набор чисел $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ называется **решением системы** (2.1), если при подстановке

$$x_1 = \alpha_1; x_2 = \alpha_2; \dots x_n = \alpha_n$$

все уравнения системы превращаются в верные числовые равенства.

Решить систему значит найти все ее решения или доказать, что не существует ни одного ее решения. Если решений бесконечное множество, то указать способ нахождения каждого из них.

Система линейных уравнений называется **совместной**, если она имеет хотя бы одно решение. Система, не имеющая ни одного решения, называется **несовместной**.

Если совместная система имеет **единственное решение**, то она называется **определенной**, а если **более одного** решения, то **неопределенной**.

Действительно, выполнив умножение $A \cdot X$, получим матрицу-столбец

$$A \cdot X = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n \end{pmatrix}.$$

Вспомнив определение равенства матриц и сравнивая матрицы-столбцы $A \cdot X$ и B , видим, что система может быть записана в виде $A \cdot X = B$. Пусть $\Delta \neq 0$. Тогда существует обратная матрица A^{-1} .

Умножив обе части последнего равенства слева на A^{-1} , имеем

$$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B; E \cdot X = A^{-1} \cdot B; X = A^{-1} \cdot B.$$

Следовательно, для того, чтобы найти матрицу-столбец X , в которой первым элементом будет x_1 , вторым x_2 и т.д., достаточно найти матрицу A^{-1} , обратную матрице системы A , и умножить ее справа на матрицу-столбец свободных членов B :

$$X = A^{-1} \cdot B.$$

Такой метод решения системы n линейных алгебраических уравнений с n неизвестными часто называют *методом обратной матрицы*.

Если определитель систем Δ равен нулю, то A^{-1} не существует и метод обратной матрицы неприменим.

Пример 2.2. Решить методом обратной матрицы систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6, \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 9, \\ 7x_1 + 8x_2 = -6. \end{cases}$$

Решение

Запишем матрицу системы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{pmatrix}.$$

Прежде всего вычисляем определитель матрицы A :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{vmatrix} = 27 \neq 0.$$

Находим алгебраические дополнения элементов матрицы A :

$$A_{11} = -48; \quad A_{12} = 42; \quad A_{13} = -3;$$

$$A_{21} = 24; \quad A_{22} = -21; \quad A_{23} = 6;$$

$$A_{31} = -3; \quad A_{32} = 6; \quad A_{33} = -3.$$

Транспонируя полученную матрицу алгебраических дополнений, выпишем обратную матрицу A^{-1} :

$$A^{-1} = \frac{1}{27} \cdot \begin{pmatrix} -48 & 24 & -3 \\ 42 & -21 & 6 \\ -3 & 6 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{16}{9} & \frac{8}{9} & -\frac{1}{9} \\ \frac{14}{9} & -\frac{7}{9} & \frac{2}{9} \\ -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} & -\frac{1}{9} \end{pmatrix}.$$

И наконец, вычисляем матрицу-столбец X :

$$\begin{aligned} X = A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ -6 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -\frac{16}{9} & \frac{8}{9} & -\frac{1}{9} \\ \frac{14}{9} & -\frac{7}{9} & \frac{2}{9} \\ -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} & -\frac{1}{9} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ -6 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \frac{(-16) \cdot 6 + 8 \cdot 9 + (-1) \cdot (-6)}{9} \\ \frac{14 \cdot 6 + (-7) \cdot 9 + 2 \cdot (-6)}{9} \\ \frac{(-1) \cdot 6 + 2 \cdot 9 + (-1) \cdot (-6)}{9} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Отсюда очевидно, что $x_1 = -2$; $x_2 = 1$; $x_3 = 2$.

Проверка производится подстановкой полученных значений в исходную систему уравнений. Имеем:

$$1 \cdot (-2) + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 = 6; \quad 6 = 6;$$

$$4 \cdot (-2) + 5 \cdot 1 + 6 \cdot 2 = 9; \quad \Rightarrow \quad 9 = 9;$$

$$7 \cdot (-2) + 8 \cdot 1 = -6. \quad -6 = -6,$$

что верно. Итак, $X = (-2, 1, 2)$. ►

В соответствии с формулой обратной матрицы A^{-1} запишем равенство $X = A^{-1}B$ в виде матриц-столбцов:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Выполнив умножение, получим

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + \dots + A_{n1}b_n}{\Delta} \\ \frac{A_{12}b_1 + A_{22}b_2 + \dots + A_{n2}b_n}{\Delta} \\ \dots \\ \frac{A_{1n}b_1 + A_{2n}b_2 + \dots + A_{nn}b_n}{\Delta} \end{pmatrix}.$$

Отсюда следует, что неизвестные $x_j, j = 1, \dots, n$ можно найти по формуле

$$\begin{aligned} x_j &= \frac{1}{\Delta} \cdot (A_{1j}b_1 + A_{2j}b_2 + \dots + A_{nj}b_n) = \\ &= \frac{1}{\Delta} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2,j-1} & b_2 & a_{2,j+1} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Справедливость последнего равенства легко проверить путем разложения последнего определителя, который обозначим Δ_j , по j -му столбцу, содержащему свободные члены.

Таким образом, доказано **правило Крамера**: если определитель Δ системы n линейных алгебраических уравнений с n неизвестными не равен нулю, то система имеет единственное решение, определяемое по формуле

$$x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta},$$

где $j = 1, 2, \dots, n$; Δ_j — определитель, получаемый подстановкой в Δ столбца свободных членов вместо j -го столбца.

Ясно, что правило Крамера можно использовать, только когда определитель системы Δ не равен нулю.

Пример 2.3. Решить, используя правило Крамера, систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = -1, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 2, \\ -x_1 + x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$$

Решение

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -11.$$

Вычислим дополнительные определители и значения неизвестных:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & 7 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 7 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -22;$$

$$x_1 = \Delta_1 / \Delta = (-22) / (-11) = 2.$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 11;$$

$$x_2 = \Delta_2 / \Delta = 11 / (-11) = -1.$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -11;$$

$$x_3 = \Delta_3 / \Delta = (-11) / (-11) = 1.$$

Путем подстановки можно проверить, что полученное решение $X = (2, -1, 1)$ является верным. ►

Пример 2.4.

Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 = 3, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 2, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 1. \end{cases}$$

Решение

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & -5 & 4 \\ 0 & 5 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -5 & 4 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} = 0.$$

Равенство нулю определителя системы отнюдь не означает, что система не имеет решений. Просто данная система уравнений не может быть решена ни методом обратной матрицы, ни по правилу Крамера. ►

2.3. Метод Гаусса

Этот метод является *универсальным*, так как он позволяет решать системы линейных алгебраических уравнений с матрицами любой размерности и квадратными матрицами с определителем, равным нулю.

Суть *метода Гаусса* состоит в том, что проводятся последовательные преобразования исходной системы уравнений в эквивалентную систему до тех пор, пока решение последней не станет очевидным или не станет очевидной неразрешимость системы.

Этот процесс осуществляется с помощью элементарных преобразований системы линейных алгебраических уравнений, аналогичных элементарным преобразованиям матрицы до получения матрицы эквивалентной системе *ступенчатого вида*.

Элементарные преобразования системы уравнений включают следующее.

1. Перестановку любых двух уравнений.
2. Умножение обеих частей уравнения на одно и то же число, не равное нулю.
3. Прибавление к обеим частям одного уравнения системы соответствующих частей другого, умноженных на одно и то же число.
4. Вычеркивание уравнения вида

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \dots + 0 \cdot x_n = 0$$

как не несущего никакой информации относительно решений системы. Действительно, решением такого уравнения является абсолютно любой набор чисел $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$.

Рассмотрим алгоритмизацию *метода Гаусса* на конкретном примере решения системы уравнений, уже решенной в примере 2.3 по правилу Крамера.

Решить методом Гаусса систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = -1, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 2, \\ -x_1 + x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$$

Так как элементарные преобразования системы уравнений аналогичны элементарным преобразованиям матрицы (см. гл. 1), то можно вместо преобразований системы осуществлять преобразования ее расширенной матрицы.

Запишем расширенную матрицу данной системы:

$$A|B = \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 3 & 0 \end{array} \right).$$

Метод Гаусса включает два процесса, которые называются **прямым** и **обратным ходами**.

На первом шаге прямого хода назовем элемент, стоящий в первой строке и первом столбце расширенной матрицы, **разрешающим элементом**, первую строку — **разрешающей строкой**, а первый столбец — **разрешающим столбцом**.

Для наглядности обведем разрешающий элемент в квадрат. Если разрешающий элемент равен нулю, то поменяем местами уравнения системы так, чтобы этот элемент не был равен нулю.

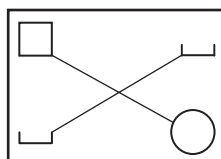
Цель **прямого хода** — преобразовать расширенную матрицу данной системы в матрицу ступенчатого вида.

На каждом шаге прямого хода следует руководствоваться следующими тремя правилами.

1. Элементы разрешающей строки остаются неизменными на данном и всех последующих шагах прямого хода.

2. Элементы разрешающего столбца, расположенные ниже разрешающего элемента, обращаются в нули и остаются нулями далее до конца прямого хода.

3. Остальные элементы пересчитываются по следующему правилу прямоугольника:



$$\bigcirc_{\text{Новый}} = \boxed{} \cdot \bigcirc_{\text{Старый}} - \boxed{} \cdot \boxed{}$$

$\boxed{}$ — разрешающий элемент
 $\bigcirc$ — пересчитываемый элемент

Проводим первый шаг прямого хода для исходной матрицы

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 3 & 0 \end{array} \right) \sim \\ & \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 \cdot 3 - 2 \cdot 2 & 1 \cdot 1 - (-1) \cdot 2 & 1 \cdot 2 - (-1) \cdot 2 \\ 0 & 1 \cdot 1 - 2 \cdot (-1) & 1 \cdot 3 - (-1) \cdot (-1) & 1 \cdot 0 - (-1) \cdot (-1) \end{array} \right) = \\ & = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 2 & -1 \end{array} \right). \end{aligned}$$

На втором шаге прямого хода метода Гаусса за разрешающий элемент принимаем элемент, стоящий во второй строке и во втором столбце полученной матрицы. Если он равен нулю, то проводим перестановку строк матрицы.

Далее руководствуемся тремя вышеуказанными правилами.

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & \boxed{-1} & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 2 & -1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & (-1) \cdot 2 - 3 \cdot 3 & (-1) \cdot (-1) - 4 \cdot 3 \end{array} \right) = \\ & = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -11 & -11 \end{array} \right). \end{aligned}$$

Получили матрицу ступенчатого вида. На основе этой матрицы выпишем систему уравнений, эквивалентную исходной системе:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 1, \\ -x_2 + 3x_3 = 4, \\ -11x_3 = -11. \end{cases}$$

Проводим обратный ход. Из третьего уравнения находим x_3 ; подставляем его значение во второе уравнение и находим x_2 и т.д.

$$x_3 = \frac{-11}{-11} = 1;$$

$$-x_2 + 3 \cdot 1 = 4; \quad -x_2 = 1; \quad x_2 = -1;$$

$$x_1 + 2 \cdot (-1) - 1 = -1; \quad x_1 - 3 = -1; \quad x_1 = 2.$$

Обратный ход можно также проводить аналогично прямому. При этом пользуются теми же тремя правилами, но во втором правиле в нули обращаются элементы разрешающего столбца, расположенные не ниже, а выше разрешающего элемента.

За разрешающий элемент на первом шаге обратного хода принимается крайний элемент последней строки.

Если разрешающий элемент не равен единице, то целесообразно разрешающую строку разделить на разрешающий элемент, что является элементарным преобразованием и не нарушает равносильности системы.

Проведем *обратный ход* для рассматриваемого примера:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & | & -1 \\ 0 & -1 & 3 & | & 4 \\ 0 & 0 & -11 & | & -11 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & | & -1 \\ 0 & -1 & 3 & | & 4 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & | & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & | & 0 \\ 0 & -1 & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & | & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & | & -1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 2 \\ 0 & 1 & 0 & | & -1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 \end{pmatrix}.$$

Получили расширенную матрицу системы, эквивалентной исходной, из которой элементарно выписывается решение:

$$\begin{cases} 1 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 = 2, \\ 0 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 = -1, \\ 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3 = 1. \end{cases}$$

Откуда $x_1 = 2$; $x_2 = -1$; $x_3 = 1$.

Можно *объединить* прямой и обратный ходы метода Гаусса в один ход. При этом в качестве разрешающего элемента выбирается *любой ненулевой* элемент матрицы системы, но на каждом последующем шаге в другой строке и в другом столбце.

В этом случае обнуляются все элементы *разрешающего столбца*, кроме разрешающего элемента. Пересчету по правилу

прямоугольника подлежат все элементы расширенной матрицы, не принадлежащие разрешающей строке и разрешающему столбцу. Заметим, что такой алгоритм метода Гаусса часто называют **методом Жордана**.

Решим ту же систему методом Жордана:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & \boxed{1} & 2 \\ -1 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 5 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ -7 & -8 & 0 & -6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & \frac{5}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ -7 & -8 & 0 & -6 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{5}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{1}{3} & 1 & \frac{4}{3} \\ 0 & \frac{11}{3} & 0 & -\frac{11}{3} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{5}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{1}{3} & 1 & \frac{4}{3} \\ 0 & \boxed{1} & 0 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right).$$

Отсюда $x_1 = 2$; $x_3 = 1$; $x_2 = -1$.

Метод Гаусса может быть использован не только для решения систем линейных алгебраических уравнений, но и для решения других задач линейной алгебры. Рассмотрим две из них.

Нахождение обратной матрицы. Для вычисления обратной матрицы A^{-1} для квадратной матрицы A порядка n можно применить следующий прием. Составим матрицу размерностью $n \times 2n$, левая часть которой представляет собой матрицу A , а правая — единичную матрицу n -го порядка.

Затем проводим процедуру метода Гаусса над составной матрицей таким образом, чтобы в левой части этой матрицы (на месте матрицы A) получилась единичная матрица n -го порядка. Тогда в правой части составной матрицы образуется матрица A^{-1} .

Пример 2.5. Вычислить обратную матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 4 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение

Допишем справа к матрице A единичную матрицу той же размерности и проведем элементарные преобразования методом Гаусса согласно изложенному выше правилу. Имеем

$$\begin{aligned}
& \left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -9 & -3 & -4 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \\
& \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 24 & 5 & 9 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & \frac{5}{24} & \frac{9}{24} & \frac{1}{24} \end{array} \right) \sim \\
& \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & \frac{19}{24} & -\frac{9}{24} & -\frac{1}{24} \\ 0 & \boxed{1} & 0 & \frac{9}{24} & -\frac{3}{24} & -\frac{3}{24} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{24} & \frac{9}{24} & \frac{1}{24} \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{24} & -\frac{3}{24} & \frac{5}{24} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{9}{24} & -\frac{3}{24} & -\frac{3}{24} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{24} & \frac{9}{24} & \frac{1}{24} \end{array} \right).
\end{aligned}$$

Откуда A^{-1} примет вид

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{24} & -\frac{3}{24} & \frac{5}{24} \\ \frac{9}{24} & -\frac{3}{24} & -\frac{3}{24} \\ \frac{5}{24} & \frac{9}{24} & \frac{1}{24} \end{pmatrix}.$$

Нахождение ранга матрицы. Для нахождения ранга матрицы используем то обстоятельство, что ранги эквивалентных матриц равны.

Пример 2.6. Найти ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & -3 \\ 5 & -2 & 8 & 5 \end{pmatrix}.$$

Решение

Проведем элементарные преобразования методом Гаусса

$$A = \left(\begin{array}{cccc} \boxed{2} & -1 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & -3 \\ 5 & -2 & 8 & 5 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc} 2 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & -10 \\ 0 & 1 & 1 & -10 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc} 2 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Получили две ненулевые строки и четыре столбца в ступенчатой матрице, поэтому $r(A) = 2$.

2.4. Система m линейных уравнений с n неизвестными

Если $m \neq n$, то для решения такой системы не могут быть применены ни метод обратной матрицы, ни правило Крамера. Для решения такой системы используют метод Гаусса или Жордана.

Прежде чем решать системы m линейных уравнений с n неизвестными, рассмотрим условия совместности и определенности систем. Ответ на вопрос о совместности системы дает теорема Кронекера — Капелли.

Теорема Кронекера — Капелли. Система линейных алгебраических уравнений совместна тогда и только тогда, когда ранг матрицы системы равен рангу расширенной матрицы системы.

Поясним условие теоремы на примере. Пусть в процессе прямого хода метода Гаусса получилась следующая матрица ступенчатого вида:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Очевидно, что ранг этой расширенной матрицы системы равен двум. Ранг собственно матрицы системы (матрица слева от пунктирной линии) также равен двум. Так как эти ранги равны, то система уравнений *совместна*.

Пусть теперь в последней строке последнего столбца стоит не нуль, а, к примеру, единица:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

Тогда ранг расширенной матрицы системы равен трем, в то время как ранг самой матрицы по-прежнему равен двум. При этом последняя строка расширенной матрицы представляет собой строку коэффициентов уравнения

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 = 1,$$

которое, очевидно, не имеет решений. Следовательно, вся система уравнений не имеет решений, т.е. она *несовместна*.

Для совместных систем линейных алгебраических уравнений верна следующая теорема.

Теорема. Если ранг матрицы совместной системы равен числу неизвестных $r(A) = n$, то система является **определенной** и имеет единственное решение, а если $r(A) < n$, то система **неопределенная** и имеет бесконечное множество решений.

Рассмотрим решение методом Гаусса систем, у которых число уравнений m не равно числу неизвестных n . Возможны следующие два случая.

1. Ранг матрицы системы равен числу неизвестных, т.е. $r(A) = n$. Тогда $m > n$ по определению ранга матрицы.

Если система совместна, то в процессе прямого хода метода Гаусса $(m - n)$ строк расширенной матрицы системы превращаются в нулевые строки и могут быть удалены из расширенной матрицы. Оставшаяся система n уравнений с n неизвестными решается, как и прежде.

Пример 2.7. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 4; \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 = 7; \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 3; \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 11; \\ -3x_1 + 2x_2 + x_3 = 4. \end{cases}$$

Решение

Запишем расширенную матрицу и преобразуем ее до получения ответа:

$$\begin{pmatrix} \boxed{3} & 2 & -1 & | & 4 \\ -1 & 1 & 2 & | & 7 \\ 2 & -1 & 1 & | & 3 \\ 2 & 3 & 1 & | & 11 \\ -3 & 2 & 1 & | & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & | & 4 \\ 0 & 5 & 5 & | & 25 \\ 0 & -7 & 5 & | & 1 \\ 0 & 5 & 5 & | & 25 \\ 0 & 12 & 0 & | & 24 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & | & 4 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & | & 5 \\ 0 & -7 & 5 & | & 1 \\ 0 & 5 & 5 & | & 25 \\ 0 & 12 & 0 & | & 24 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & | & 4 \\ 0 & 1 & 1 & | & 5 \\ 0 & 0 & 12 & | & 36 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & -1 & | & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & | & 4 \\ 0 & 1 & 1 & | & 5 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & | & 3 \\ 0 & 0 & -1 & | & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & | & 4 \\ 0 & 1 & 1 & | & 5 \\ 0 & 0 & 1 & | & 3 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\propto \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 3 \end{array} \right) \propto \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 0 & 7 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right) \propto \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right) \propto \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right).$$

Отсюда очевидно, что система имеет единственное решение:
 $x_1 = 1; x_2 = 2; x_3 = 3.$ ►

2. Ранг матрицы системы меньше числа неизвестных $r(A) < n$. Если система совместная, то она является неопределенной. В этом случае $r(A)$ неизвестных назначаются базисными, а остальные $n - r(A)$ — свободными неизвестными.

Общее решение такой системы представляет собой совокупность выражений базисных неизвестных через свободные. Ясно, что число таких выражений в общем решении должно быть равно рангу матрицы $r(A)$.

Общее решение позволяет получить любое конкретное решение системы, называемое **частным решением**, путем приравнивания свободных неизвестных любым действительным числам и вычисления базисных неизвестных из выражений, составляющих общее решение.

Совокупность базисных неизвестных обычно называют **базисом**. При решении системы методом Гаусса удобно в качестве базисных принимать неизвестные с первыми по порядку номерами, а при решении методом Жордана — любые неизвестные.

Общее решение, в котором все свободные неизвестные равны нулю, называется **базисным решением**. Ясно, что базисное решение зависит от выбора базиса и у рассматриваемой системы имеется некоторое множество различных базисных решений.

Пример 2.8. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 - 3x_5 = 6, \\ -2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 - x_5 = -3, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 + x_5 = 1. \end{cases}$$

Решение

Составим расширенную матрицу системы и совершим прямой ход метода Гаусса:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} \boxed{1} & 2 & -1 & 1 & -3 & 6 \\ -2 & 3 & 1 & 2 & -1 & -3 \\ 3 & -1 & 2 & 2 & 1 & 1 \end{array} \right) \propto \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & -3 & 6 \\ 0 & \boxed{7} & -1 & 4 & -7 & 9 \\ 0 & -7 & 5 & -1 & 10 & -17 \end{array} \right) \propto$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & -3 & 6 \\ 0 & 7 & -1 & 4 & -7 & 9 \\ 0 & 0 & 28 & 21 & 21 & -56 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & -3 & 6 \\ 0 & 7 & -1 & 4 & -7 & 9 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & 3 & -8 \end{array} \right).$$

Получилась расширенная матрица ступенчатого вида, эквивалентная исходной.

Система уравнений, соответствующая этой матрице, имеет вид

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 - 3x_5 = 6, \\ 7x_2 - x_3 + 4x_4 - 7x_5 = 9, \\ 4x_3 + 3x_4 + 3x_5 = -8. \end{cases}$$

Видим, что можно из третьего уравнения выразить, например, x_3 через x_4 и x_5 , затем, подставив выражение для x_3 во второе уравнение, выразить x_2 через x_4 и x_5 и, наконец, подставив выражения для x_2 и x_3 в первое уравнение, выразить x_1 через x_4 и x_5 .

В этом случае удобно неизвестные x_1 , x_2 и x_3 выбрать базисными неизвестными, а x_4 и x_5 — свободными неизвестными.

Из третьего уравнения получаем

$$x_3 = -2 - \frac{3}{4}x_4 - \frac{3}{4}x_5.$$

Подставляя x_3 во второе уравнение, имеем

$$\begin{aligned} 7x_2 + 2 + \frac{3}{4}x_4 + \frac{3}{4}x_5 + 4x_4 - 7x_5 &= 9; \\ 7x_2 + \frac{19}{4}x_4 - \frac{25}{4}x_5 &= 7; \\ x_2 &= 1 - \frac{19}{28}x_4 + \frac{25}{28}x_5. \end{aligned}$$

Подставляем в первое уравнение x_2 и x_3 :

$$\begin{aligned} x_1 + 2 - \frac{19}{14}x_4 + \frac{25}{14}x_5 + 2 + \frac{3}{4}x_4 + \frac{3}{4}x_5 + x_4 - 3x_5 &= 6; \\ x_1 + \frac{11}{28}x_4 - \frac{13}{28}x_5 &= 2; \\ x_1 &= 2 - \frac{11}{28}x_4 + \frac{13}{28}x_5. \end{aligned}$$

Таким образом, получены выражения для базисных неизвестных через свободные неизвестные, которые образуют общее решение системы:

$$\begin{aligned} x_1 &= 2 - \frac{11}{28}x_4 + \frac{13}{28}x_5; \\ x_2 &= 1 - \frac{19}{28}x_4 + \frac{25}{28}x_5; \\ x_3 &= -2 - \frac{3}{4}x_4 - \frac{3}{4}x_5. \end{aligned}$$

Подставляя вместо свободных неизвестных произвольные числа $x_4 = t$, $x_5 = s$, общее решение можно записать в виде вектора решения

$$x = \left(2 - \frac{11}{28}t + \frac{13}{28}s; 1 - \frac{19}{28}t + \frac{25}{28}s; -2 - \frac{3}{4}t - \frac{3}{4}s; t; s \right).$$

Для записи базисного решения свободные элементы приравняются к нулю. Тогда базисное решение будет

$$x_6 = (2; 1; -2; 0; 0).$$

Подставляя вместо свободных неизвестных любые числа, можно получить бесконечное множество частных решений системы. Например, при $t = 1$; $s = 1$ частное решение имеет вид

$$\begin{aligned} x_{\text{ч}} &= \left(2 - \frac{11}{28} \cdot 1 + \frac{13}{28} \cdot 1; 1 - \frac{19}{28} \cdot 1 + \frac{25}{28} \cdot 1; -2 - \frac{3}{4} \cdot 1 - \frac{3}{4} \cdot 1; 1; 1 \right) = \\ &= \left(\frac{29}{14}; \frac{17}{14}; -\frac{7}{2}; 1; 1 \right). \end{aligned}$$

Несколько проще такую систему решать методом Жордана. Выберем в исходной расширенной матрице в качестве базисных те же самые неизвестные x_1, x_2, x_3 . Тогда:

$$\begin{aligned} &\left(\begin{array}{ccccc|c} \boxed{1} & 2 & -1 & 1 & -3 & 6 \\ -2 & 3 & 1 & 2 & -1 & -3 \\ 3 & -1 & 2 & 2 & 1 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & -3 & 6 \\ 0 & 7 & -1 & 4 & -7 & 9 \\ 0 & -7 & 5 & -1 & 10 & -17 \end{array} \right) \sim \\ &\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & -3 & 6 \\ 0 & \boxed{1} & -\frac{1}{7} & \frac{4}{7} & -1 & \frac{9}{7} \\ 0 & -7 & 5 & -1 & 10 & -17 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -\frac{5}{7} & -\frac{1}{7} & -1 & \frac{24}{7} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{7} & \frac{4}{7} & -1 & \frac{9}{7} \\ 0 & 0 & 4 & 3 & 3 & -8 \end{array} \right) \sim \\ &\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -\frac{5}{7} & -\frac{1}{7} & -1 & \frac{24}{7} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{7} & \frac{4}{7} & -1 & \frac{9}{7} \\ 0 & 0 & \boxed{1} & \frac{3}{4} & \frac{3}{4} & -2 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{11}{28} & -\frac{13}{28} & 2 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{19}{28} & -\frac{25}{28} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{4} & \frac{3}{4} & -2 \end{array} \right). \end{aligned}$$

Последняя матрица соответствует следующей системе, равносильной исходной:

$$\begin{cases} x_1 + \frac{11}{28}x_4 - \frac{13}{28}x_5 = 2, \\ x_2 + \frac{19}{28}x_4 - \frac{25}{28}x_5 = 1, \\ x_3 + \frac{3}{4}x_4 + \frac{3}{4}x_5 = -2. \end{cases}$$

Очевидно, что если перенести слагаемые, содержащие свободные неизвестные x_4 и x_5 , с противоположным знаком в правые части уравнений, то получится то же самое общее решение, что и раньше. ►

Методом Гаусса можно также решать системы n линейных алгебраических уравнений с n неизвестными, у которых определитель равен нулю.

Пример 2.9. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 = 3, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 2, \\ -x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 1, \end{cases}$$

которая из-за $\Delta = 0$ не решается методами обратной матрицы и по правилу Крамера.

Решение

Записываем и преобразовываем расширенную матрицу системы:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 3 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & -3 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & \boxed{-5} & 4 & -4 \\ 0 & 5 & -4 & 4 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & -5 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Вычеркиваем последнюю нулевую строку матрицы и получаем следующую систему, равносильную исходной:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 = 3, \\ -5x_2 + 4x_3 = -4. \end{cases}$$

Пусть x_1 и x_2 — базисные неизвестные, а x_3 — свободное неизвестное. Выразая x_1 и x_2 через x_3 , получаем общее решение системы:

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{4}{5} + \frac{4}{5}x_3; \\ x_1 + \frac{12}{5} + \frac{12}{5}x_3 - x_3 &= 3; \\ x_1 + \frac{7}{5}x_3 &= \frac{3}{5}; \\ x_1 &= \frac{3}{5} - \frac{7}{5}x_3. \end{aligned}$$

а) если $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ — решение системы, то и набор чисел

$$(\lambda\alpha_1, \lambda\alpha_2, \dots, \lambda\alpha_n)$$

— также решение этой системы, где λ — любое действительное число;

б) если $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ и $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ — решения системы, то и набор чисел

$$(\lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\beta_1; \lambda_1\alpha_2 + \lambda_2\beta_2; \dots; \lambda_1\alpha_n + \lambda_2\beta_n)$$

— также решение этой системы, где λ_1 и λ_2 — любые действительные числа.

Пример 2.10. При каком значении a_{33} система линейных алгебраических уравнений имеет ненулевые решения

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + a_{33}x_3 = 0? \end{cases}$$

Найти общее решение полученной системы.

Решение

Записываем определитель системы и приравниваем его нулю:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 7 & a_{33} + 2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 7 & a_{33} + 2 \end{vmatrix} = \\ = -(a_{33} - 2 + 21) = a_{33} - 19 = 0.$$

Отсюда $a_{33} = 19$. Следовательно, имеем систему

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 0, \\ -2x_1 + 3x_2 + 19x_3 = 0. \end{cases}$$

Запишем для нее расширенную матрицу и преобразуем:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{2} & 3 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 19 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & \boxed{3} & 0 \\ 0 & 12 & 36 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Таким образом,

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0, \\ x_2 + 3x_3 = 0, \end{cases}$$

откуда, приняв за свободную переменную x_3 , получим

$$x_2 = -3x_3; 2x_1 - 9x_3 - x_3 = 0; 2x_1 = 10x_3; x_1 = 5x_3.$$

Общее решение имеет вид: $x = (5t, -3t, t)$.

В частности, положив, например, $t = 1$, получаем частное ненулевое решение системы: $x_1 = 5; x_2 = -3; x_3 = 1$. ►

Вопросы для самоконтроля

1. Каков общий вид системы линейных алгебраических уравнений?
2. Что называется коэффициентами, свободными членами (правыми частями), матрицей, расширенной матрицей системы?
3. Что называется решением системы? Что значит решить систему?
4. Какие системы называются совместными; несовместными; определенными; неопределенными?
5. Когда две системы называются эквивалентными (равносильными)?
6. Что называется определителем системы?
7. Запишите системы в матричной форме. Как решать системы с квадратной матрицей методом обратной матрицы?
8. Сформулируйте правило Крамера решения системы с квадратной матрицей.
9. Каков алгоритм решения системы методом Гаусса?
10. Каковы условия совместности и определенности системы m уравнений с n неизвестными?
11. Что называется общим решением системы m уравнений с n неизвестными? Какие неизвестные называются базисными (основными), а какие — свободными (неосновными)?
12. Какая система называется однородной? Может ли однородная система быть несовместной?
13. Когда однородная система имеет ненулевые решения?

Задачи для самостоятельного решения

2.1. Решить тремя методами (методом обратной матрицы, по правилу Крамера и методом Гаусса или Жордана) систему

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 5x_3 = 1, \\ x_1 + 4x_2 - x_3 = 14, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 2. \end{cases}$$

2.2. Решить тремя методами систему

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 + x_3 = 9, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 1, \\ x_1 + 3x_2 - 5x_3 = -16. \end{cases}$$

2.3. Найти методом Гаусса обратную матрицу для матрицы A

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 1 & 4 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

2.4. Найти методом Гаусса ранг матрицы A

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & -1 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

2.5. Решить систему

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 4, \\ -2x_1 + 3x_2 - x_3 = 3, \\ -x_1 - x_2 + 3x_3 = -14, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 2, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = -5. \end{cases}$$

2.6. Решить систему

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 2, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 7, \\ -x_1 - x_2 - 4x_3 = -11, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 0. \end{cases}$$

2.7. Найти общее и базисное решение системы

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 - x_4 + 2x_5 = 2, \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_4 - x_5 = 5, \\ 2x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 = -1. \end{cases}$$

2.8. Решить систему

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 = -1, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 10, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 9. \end{cases}$$

2.9. Имеет ли ненулевые решения система

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 0, \\ 2x_1 - 6x_2 + 5x_3 = 0? \end{cases}$$

Найти общее решение и какое-либо частное ненулевое решение, если система имеет таковые решения.

Глава 3

ВЕКТОРЫ НА ПЛОСКОСТИ И В ПРОСТРАНСТВЕ

3.1. Основные понятия

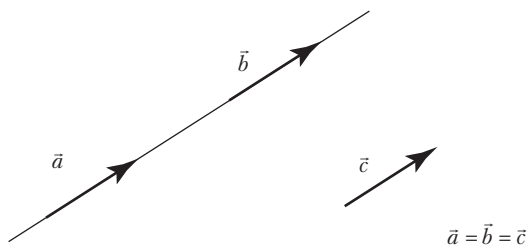
В курсе средней школы под вектором понимается направленный отрезок прямой, одна из концевых точек которого считается начальной, а вторая — конечной. Направление вектора отсчитывается от начальной точки к конечной.

Рассмотрим векторы на плоскости.



Обозначение такого вектора — $\overrightarrow{AB}$ или $\overline{AB}$. Чаще всего векторы обозначаются одной малой латинской буквой со стрелкой или чертой: $\vec{a}$, $\vec{b}$. В книгах векторы обычно обозначаются выделенными малыми латинскими буквами.

Вектор можно перемещать параллельно самому себе.



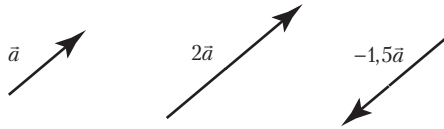
Коллинеарные (т.е. расположенные на одной прямой или параллельные) векторы, направленные в одну и ту же сторону и имеющие одинаковую длину, обычно рассматриваются как один и тот же вектор.

Векторы называются *компланарными*, если существует плоскость, которой они параллельны.

Коллинеарные векторы всегда компланарны, но не все компланарные векторы коллинеарны.

Длина (модуль) вектора — число, равное длине отрезка в принятых единицах измерения. Длину вектора обычно обозначают знаком абсолютной величины, например, $|\vec{a}|$.

Произведение вектора $\vec{a}$ на число λ (или числа λ на вектор $\vec{a}$) — это вектор, длина которого равна $|\vec{a}| \cdot |\lambda|$, а направление совпадает с направлением $\vec{a}$, если $\lambda > 0$, или противоположно направлению $\vec{a}$, если $\lambda < 0$.



Сложение векторов производится либо по правилу параллелограмма, либо по правилу треугольника (рис. 3.1).



Рис. 3.1. Сумма векторов

Разность векторов $\vec{a} - \vec{b}$ может быть найдена как сумма вектора $\vec{a}$ и вектора $\vec{b}$, умноженного на -1 (противоположного вектору $\vec{b}$). То есть $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-1) \cdot \vec{b}$.

Легко показать, что вектор $\vec{a} - \vec{b}$ — это вектор, проведенный из конца вектора $\vec{b}$ в конец вектора $\vec{a}$ (рис. 3.2.).

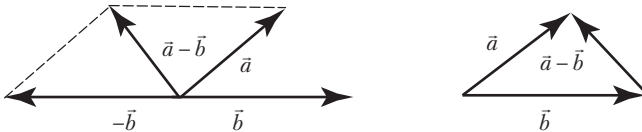


Рис. 3.2. Разность векторов

Скалярным произведением $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$ векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ним:

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\vec{a}, \vec{b}).$$

Косинус угла между векторами выражается через их скалярное произведение и длины векторов следующим образом:

$$\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}.$$

Записав выражение для скалярного произведения вектора $\vec{a}$ на самого себя, получаем так называемый скалярный квадрат вектора $\vec{a}$:

$$\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle = |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| \cos(\vec{a}, \vec{a}) = |\vec{a}|^2.$$

Отсюда видно, что **длина вектора** $\vec{a}$ равна квадратному корню из скалярного произведения этого вектора на самого себя:

$$|\vec{a}| = \sqrt{\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle}.$$

Геометрически любой вектор можно перенести параллельно так, чтобы его начало совпало с началом координат (рис. 3.3). Поэтому начальной точкой всех векторов на координатной плоскости принято считать начало координат. Тогда любой вектор полностью определяется своей конечной точкой, а та, в свою очередь, своими координатами. Следовательно, можно считать, что любой вектор равен совокупности координат его конечной точки.

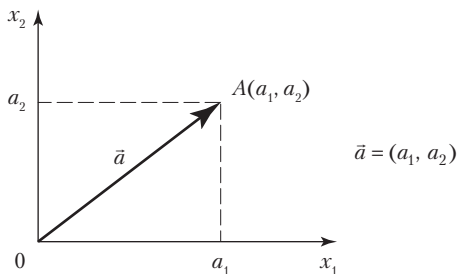


Рис. 3.3. Вектор на плоскости

Все вышеизложенные *действия над векторами* можно описать, используя лишь координаты этих векторов.

1. Два вектора на плоскости считаются *равными* тогда и только тогда, когда попарно равны обе их соответствующие координаты. Если

$$\vec{a} = (a_1, a_2), \quad \vec{b} = (b_1, b_2),$$

то

$$\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow a_1 = b_1 \text{ и } a_2 = b_2.$$

2. *Длина* вектора легко определяется через его координаты по теореме Пифагора

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}.$$

3. Чтобы *умножить вектор на число*, нужно каждую координату вектора умножить на это число (рис. 3.4).

4. Для нахождения *алгебраической суммы* векторов нужно сложить их соответствующие координаты с учетом знаков:

$$\vec{a} \pm \vec{b} = (a_1, a_2) \pm (b_1, b_2) = (a_1 \pm b_1, a_2 \pm b_2).$$

Правильность такой операции легко проверить, построив соответствующие рисунки на координатной плоскости.

Умножение вектора на число и нахождение алгебраической *суммы* векторов называются **линейными операциями над векторами**.

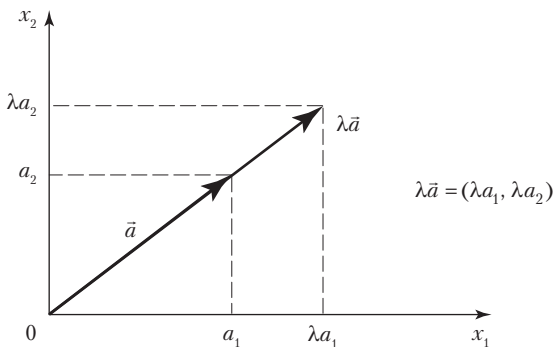


Рис. 3.4. Умножение вектора на число

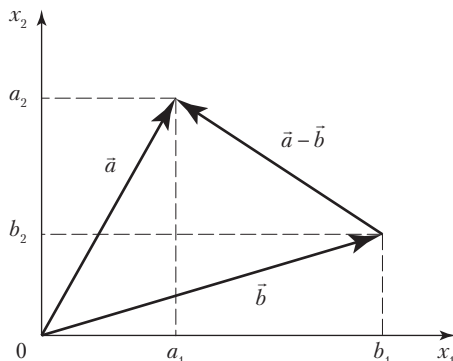


Рис. 3.5. Разность векторов

5. Найдем выражение для *скалярного произведения* векторов с использованием их координат. Для этого на координатной плоскости построим разность векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (рис. 3.5).

По теореме косинусов можно записать

$$|\vec{a} - \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b}).$$

Последний член справа — это по определению удвоенное скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, т.е.

$$|\vec{a} - \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle &= \frac{1}{2} \cdot \left(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2 \right) = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left[\left(\sqrt{a_1^2 + a_2^2} \right)^2 + \left(\sqrt{b_1^2 + b_2^2} \right)^2 - \left(\sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2} \right)^2 \right] = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left[a_1^2 + a_2^2 + b_1^2 + b_2^2 - (a_1 - b_1)^2 - (a_2 - b_2)^2 \right] = \\ &= \frac{1}{2} \cdot (a_1^2 + a_2^2 + b_1^2 + b_2^2 - a_1^2 + 2a_1b_1 - b_1^2 - a_2^2 + 2a_2b_2 - b_2^2). \end{aligned}$$

Окончательно: $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = a_1b_1 + a_2b_2$.

Следовательно, можно найти скалярное произведение вектора $\vec{a}$ на самого себя (скалярный квадрат вектора $\vec{a}$):

$$\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle = a_1^2 + a_2^2.$$

6. Угол между векторами определяется по формуле

$$\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2}}.$$

Что касается векторов в *трехмерном* пространстве, то легко показать, что формулы, записанные выше для плоскости, сохраняют свою силу при добавлении во все формулы третьей координаты. Пусть $a = (a_1, a_2, a_3)$, $b = (b_1, b_2, b_3)$. Тогда

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2};$$

$$\lambda \vec{a} = (\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3);$$

$$\vec{a} \pm \vec{b} = (a_1 \pm b_1, a_2 \pm b_2, a_3 \pm b_3);$$

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3;$$

$$\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}.$$

Иногда векторы в трехмерном пространстве записывают с использованием единичных векторов (так называемых ортов) $\vec{i} = (1, 0, 0)$; $\vec{j} = (0, 1, 0)$; $\vec{k} = (0, 0, 1)$.

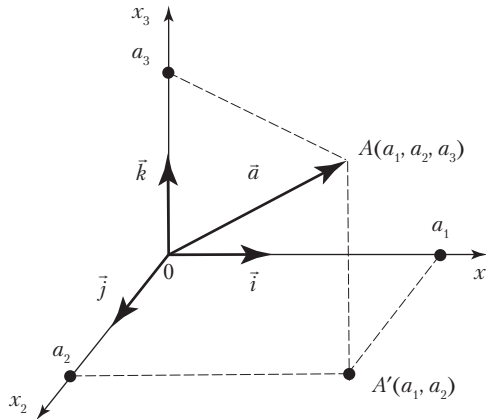


Рис. 3.6. Вектор в трехмерном пространстве

Используя единичные векторы, произвольный вектор $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ можно записать следующим образом:

$$\vec{a} = a_1 \vec{i} + a_2 \vec{j} + a_3 \vec{k}.$$

3.2. n -мерный вектор и пространство R^n

Итак, было установлено, что вектор на плоскости или двумерный вектор — это упорядоченная совокупность двух действительных чисел, а вектор в пространстве (трехмерный вектор) — упорядоченная совокупность трех действительных чисел.

По аналогии упорядоченную совокупность n действительных чисел назовем **n -мерным вектором**:

$$\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n).$$

Каждое число a_i , где $i = 1, \dots, n$, называется i -й *координатой* вектора $\vec{a}$.

Договоримся далее в этой главе не ставить черту над векторами, а отличать векторы от чисел по контексту.

По аналогии с двух- и трехмерными векторами определим *основные действия* над n -мерными векторами.

1. Два n -мерных вектора **равны** тогда и только тогда, когда попарно равны все их соответствующие координаты (координаты с одинаковыми адресами):

$$\begin{aligned} \text{если } a = (a_1, a_2, \dots, a_n), b = (b_1, b_2, \dots, b_n), \text{ то} \\ a = b \Leftrightarrow a_1 = b_1; a_2 = b_2; \dots; a_n = b_n. \end{aligned}$$

Вектор $(0, 0, \dots, 0)$, у которого значения координат равны нулю, будем называть **нулевым** вектором и обозначать θ .

2. Произведением n -мерного вектора a на действительное число λ называется n -мерный вектор λa , каждая координата которого равна произведению числа λ на соответствующую координату вектора a :

$$\lambda a = (\lambda a_1, \lambda a_2, \dots, \lambda a_n).$$

3. Алгебраической суммой (или разностью) двух n -мерных векторов a и b называется n -мерный вектор c , каждая координата которого равна алгебраической сумме соответствующих координат векторов a и b :

$$\begin{aligned} a \pm b = c \Leftrightarrow c = (c_1, c_2, \dots, c_n); \\ c_1 = a_1 \pm b_1; c_2 = a_2 \pm b_2; \dots c_n = a_n \pm b_n. \end{aligned}$$

4. Скалярным произведением двух n -мерных векторов a и b называется число, равное сумме произведений соответствующих координат этих векторов:

$$\langle a, b \rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n = \sum_{i=1}^n a_i b_i.$$

5. Длиной (модулем, нормой) n -мерного вектора a называется число, равное квадратному корню из скалярного произведения этого вектора на самого себя

$$|a| = \sqrt{\langle a, a \rangle} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}.$$

6. Угол между двумя n -мерными векторами a и b определяется равенством

$$\cos(a, b) = \frac{\langle a, b \rangle}{|a| \cdot |b|} = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2}}.$$

Два ненулевых вектора называются **ортогональными**, если их скалярное произведение равно нулю. Иначе говоря,

$$\cos(a, b) = 0 \Rightarrow \text{угол } (a, b) = \pi/2.$$

Принято считать, что нулевой вектор *ортогонален* любому вектору.

Множество, включающее всевозможные n -мерные векторы, называется **n -мерным векторным пространством, или пространством R^n** .

Таким образом, множество векторов на плоскости является пространством R^2 , а множество векторов в трехмерном пространстве является пространством R^3 .

Пример 3.1. Даны трехмерные векторы:

$$a = (1, 1, -1); b = (2, 0, 1); c = (4, 2, -1).$$

Найти угол между векторами a и $d = c - b$.

Решение

$$d = c - b = (4, 2, -1) - (2, 0, 1) = (2, 2, -2);$$

$$\begin{aligned} \varphi = (a, d) &= \arccos \frac{\langle a, d \rangle}{|a| \cdot |d|} = \arccos \frac{1 \cdot 2 + 1 \cdot 2 + (-1) \cdot (-2)}{\sqrt{1^2 + 1^2 + (-1)^2} \cdot \sqrt{2^2 + 2^2 + (-2)^2}} = \\ &= \arccos \frac{6}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{12}} = \arccos 1 = 0. \end{aligned}$$

Следовательно, вектора a и d сонаправлены и угол между ними равен нулю. ►

Пример 3.2. Даны векторы: $a = (m, 3, 4)$, $b = (4, m, -7)$. При каком значении m эти векторы ортогональны?

Решение

Векторы ортогональны, если их скалярное произведение равно нулю, т.е.

$$\langle a, b \rangle = 4m + 3m - 28 = 7m - 28 = 0; \quad m = 4. \quad \blacktriangleright$$

3.3. Линейное пространство

Пусть X — некоторое множество, состоящее из элементов. Будем говорить, что множество X наделено структурой, если между его элементами установлены некоторые связи (соотношения) или над его элементами *определены* некоторые *операции*. Множество, наделенное структурой, обычно называют **пространством**, а его элементы часто называют **точками** этого пространства.

Пространство X называется **линейным пространством**, если:

1) в пространстве X определено сложение элементов. То есть любым двум элементам $x, y \in X$ ставится в соответствие единственный элемент $x + y \in X$, называемый суммой элементов x и y ;

2) в пространстве X определено умножение элементов на действительные числа. То есть любому элементу $x \in X$ и любому действительному числу $\lambda \in R$ ставится в соответствие единственный элемент λx , называемый произведением числа λ на элемент x (или произведением элемента x на число λ).

Операции сложения элементов и умножения элементов на действительные числа называются **линейными операциями** в линейном пространстве.

Если при выполнении линейных операций имеет место выход за пределы X , т.е. найдутся элементы $x, y \in X$ и число $\alpha \in R$, такие, что $\alpha x \notin X$ или $x + y \notin X$, то X не является линейным пространством.

В линейных операциях должны выполняться следующие соотношения, называемые **аксиомами** линейного пространства.

1. $x + y = y + x$ для любых $x, y \in X$ — коммутативность.

2. $(x + y) + z = x + (y + z)$ для любых $x, y, z \in X$ — ассоциативность.

3. Существует элемент $\theta \in X$, называемый нулевым элементом, такой, что $x + \theta = x$ для любого $x \in X$.

4. Для любого $x \in X$ определен элемент $(-x) \in X$, называемый элементом противоположным x , такой, что $x + (-x) = \theta$.

5. $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$ для любого $x \in X$ и для любых $\alpha, \beta \in R$.

6. $1 \cdot x = x$ для любого $x \in X$.

7. $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$ для любого $x \in X$ и для любых $\alpha, \beta \in R$.

8. $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$ для любых $x, y \in X$ и для любого $\alpha \in R$.

Аксиомы 7 и 8 обычно называют аксиомами дистрибутивности.

Из аксиом линейного пространства следует, что линейные операции проводятся по тем же правилам, что и соответствующие операции над обычными числами. В частности, сохраняются правила раскрытия скобок, переноса элементов с противоположным знаком в другую часть равенства и т.д.

Также из аксиом следует, что нулевой элемент θ в линейном пространстве единственный. Часто его пишут просто как 0, поскольку обычно из контекста ясно, о чем идет речь: о нулевом элементе или числе ноль.

Кроме того, можно показать, что для любого $x \in X$ противоположный элемент $(-x)$ определяется единственным образом: $-x = (-1) \cdot x$.

Покажем, что пространство n -мерных векторов R^n с ранее определенными операциями сложения векторов и умножения вектора на число является линейным пространством. Для этого нужно показать, что результаты этих линейных операций над любыми элементами R^n также являются элементами R^n . Кроме того, необходимо проверить выполнение всех восьми аксиом линейного пространства.

Выберем произвольные n -мерные векторы

$$a = (a_1, a_2, \dots, a_n), b = (b_1, b_2, \dots, b_n) \in R^n$$

и числа $\alpha, \beta \in R$.

Рассмотрим

$$\begin{aligned} a + b &= (a_1, a_2, \dots, a_n) + (b_1, b_2, \dots, b_n) = \\ &= (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n) \in R^n; \end{aligned}$$

$$\alpha a = \alpha \cdot (a_1, a_2, \dots, a_n) = (\alpha a_1, \alpha a_2, \dots, \alpha a_n) \in R^n.$$

Проверим выполнение аксиом:

1. $a + b = (a_1, a_2, \dots, a_n) + (b_1, b_2, \dots, b_n) =$
 $= (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n) =$
 $= (b_1 + a_1, b_2 + a_2, \dots, b_n + a_n) =$
 $= (b_1, b_2, \dots, b_n) + (a_1, a_2, \dots, a_n) = b + a.$
2. $(a + b) + c =$
 $= [(a_1 + b_1) + c_1, (a_2 + b_2) + c_2, \dots, (a_n + b_n) + c_n] =$
 $= (a_1 + (b_1 + c_1), a_2 + (b_2 + c_2), \dots, a_n + (b_n + c_n)) =$
 $= a + (b + c).$
3. $a + \theta = (a_1 + 0, a_2 + 0, \dots, a_n + 0) = (a_1, a_2, \dots, a_n) = a.$
4. Так как $-a = (-1) \cdot a = (-a_1, -a_2, \dots, -a_n)$, то $a + (-a) =$
 $(a_1 - a_1, a_2 - a_2, \dots, a_n - a_n) = (0, 0, \dots, 0) = \theta.$
5. $\alpha(\beta a) = \alpha \cdot (\beta a_1, \beta a_2, \dots, \beta a_n) = (\alpha \beta a_1, \alpha \beta a_2, \dots, \alpha \beta a_n) =$
 $= [(\alpha \beta) a_1, (\alpha \beta) a_2, \dots, (\alpha \beta) a_n] = (\alpha \beta) a.$
6. $1 \cdot a = (1 \cdot a_1, 1 \cdot a_2, \dots, 1 \cdot a_n) = (a_1, a_2, \dots, a_n) = a.$
7. $(\alpha + \beta) \cdot a = [(\alpha + \beta) a_1, (\alpha + \beta) a_2, \dots, (\alpha + \beta) a_n] =$
 $= (\alpha a_1 + \beta a_1, \alpha a_2 + \beta a_2, \dots, \alpha a_n + \beta a_n) =$
 $= (\alpha a_1, \alpha a_2, \dots, \alpha a_n) + (\beta a_1, \beta a_2, \dots, \beta a_n) = \alpha a + \beta a.$
8. $\alpha \cdot (a + b) = \alpha \cdot (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n) =$
 $= (\alpha \cdot (a_1 + b_1), \alpha \cdot (a_2 + b_2), \dots, \alpha \cdot (a_n + b_n)) =$
 $= (\alpha a_1 + \alpha b_1, \alpha a_2 + \alpha b_2, \dots, \alpha a_n + \alpha b_n) =$
 $= (\alpha a_1, \alpha a_2, \dots, \alpha a_n) + (\alpha b_1, \alpha b_2, \dots, \alpha b_n) = \alpha a + \alpha b.$

Таким образом, показано, что R^n является *линейным* пространством.

Говоря о линейном пространстве, его часто называют **векторным пространством**, а его элементы — просто векторами, хотя эти элементы могут быть абсолютно любой природы.

Пример 3.3. Даны трехмерные векторы:

$$a = (2, -1, 1); b = (-1, 0, 3); c = (1, -1, -1).$$

Найти вектор $d = 2(a + b) + 3(a - c) + 4(b + c) - a + b.$

Решение

Раскрываем скобки и приводим подобные члены точно так же, как и в случае обычных чисел и алгебраических выражений:

$$d = 2a + 2b + 3a - 3c + 4b + 4c - a + b = 4a + 7b + c =$$

$$\begin{aligned}
 &= 4 \cdot (2, -1, 1) + 7 \cdot (-1, 0, 3) + (1, -1, -1) = \\
 &= (8, -4, 4) + (-7, 0, 21) + (1, -1, -1) = (2, -5, 24).
 \end{aligned}$$



3.4. Линейная зависимость

Пусть X — линейное пространство, $x_1, x_2, \dots, x_m \in X$ и числа $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m \in R$.

Выражение $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_m x_m$ называется **линейной комбинацией** элементов $x_1, x_2, \dots, x_m$ с коэффициентами $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$. Линейная комбинация векторов называется **тривиальной**, если $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_m = 0$, и нетривиальной в противном случае (хотя бы один из α_i отличен от нуля).

Отметим, что все линейные комбинации по определению линейного пространства также являются элементами X .

Система векторов $x_1, x_2, \dots, x_m$ называется **линейно зависимой**, если существует **нетривиальная** линейная комбинация этих векторов, равная нулевому вектору θ .

Иначе говоря, если существуют числа $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$, из которых *хотя бы одно* не равно нулю, такие, что

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_m x_m = \theta,$$

то система векторов $x_1, x_2, \dots, x_m$ линейно зависима.

Система векторов $x_1, x_2, \dots, x_m$ называется **линейно независимой**, если нулевому вектору θ может быть равна только **тривиальная** их линейная комбинация. То есть, если равенство

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_m x_m = \theta$$

выполняется только тогда, когда $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_m = 0$, система векторов линейно независима.

Заметим, что если среди векторов $x_1, x_2, \dots, x_m$ имеется нулевой вектор θ , то такая система векторов является линейно зависимой. Действительно, положив коэффициент при этом векторе равным, например, единице, а при остальных нулю, получим в сумме нулевой элемент.

Теорема. Пусть X — линейное пространство. Система векторов $x_1, x_2, \dots, x_m \in X$ линейно зависима тогда и только тогда, когда один из векторов представляется в виде линейной комбинации остальных.

Доказательство.

1. Необходимость.

Пусть система $x_1, x_2, \dots, x_m$ линейно зависима. Тогда найдутся числа $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$, из которых хотя бы одно не равно нулю, такие, что

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_m x_m = \theta.$$

Предположим без ограничения общности, что $\alpha_1 \neq 0$ (если это не так, то в качестве α_1 можно взять другой коэффициент, не равный нулю). Тогда равенство можно разделить на α_1

$$x_1 + \frac{\alpha_2}{\alpha_1} x_2 + \dots + \frac{\alpha_m}{\alpha_1} x_m = \theta,$$

откуда

$$x_1 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} x_2 - \dots - \frac{\alpha_m}{\alpha_1} x_m.$$

Если обозначить $\beta_i = -\frac{\alpha_i}{\alpha_1}$, то и получаем, что вектор x_1 является линейной комбинацией остальных векторов:

$$x_1 = \beta_2 x_2 + \dots + \beta_m x_m.$$

2. Достаточность.

Пусть один вектор из системы векторов $x_1, x_2, \dots, x_m$ линейного пространства X является линейной комбинацией остальных. Без ограничения общности предположим, что это вектор x_1 . То есть

$$x_1 = \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \dots + \alpha_m x_m.$$

Тогда

$$-1 \cdot x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \dots + \alpha_m x_m = \theta.$$

То есть существует нетривиальная линейная комбинация векторов $x_1, x_2, \dots, x_m$, равная θ , поскольку коэффициент $\alpha_1 = -1 \neq 0$.

Следовательно, система векторов $x_1, x_2, \dots, x_m$ линейно зависима.

Пример 3.4. Являются ли линейно зависимыми четырехмерные векторы $a = (1, 3, 1, 3)$; $b = (2, 1, 1, 2)$; $c = (3, -1, 1, 1)$? Если да, то представить a в виде линейной комбинации b и c .

Решение

Составим линейную комбинацию этих векторов и приравняем ее нулевому элементу:

$$\alpha_1 a + \alpha_2 b + \alpha_3 c = \theta.$$

Запишем в этом равенстве векторы в координатной форме:

$$\alpha_1 \cdot (1, 3, 1, 3) + \alpha_2 \cdot (2, 1, 1, 2) + \alpha_3 \cdot (3, -1, 1, 1) = (0, 0, 0, 0).$$

Выполним линейные операции над векторами в левой части равенства:

$$(\alpha_1, 3\alpha_1, \alpha_1, 3\alpha_1) + (2\alpha_2, \alpha_2, \alpha_2, 2\alpha_2) + (3\alpha_3, -\alpha_3, \alpha_3, \alpha_3) = (0, 0, 0, 0);$$

$$(\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3, 3\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, 3\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3) = (0, 0, 0, 0).$$

Два вектора равны тогда и только тогда, когда попарно равны все их соответствующие координаты. Следовательно,

$$\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 = 0;$$

$$3\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 = 0;$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0;$$

$$3\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 = 0.$$

Выписываем расширенную матрицу и решаем полученную систему однородных уравнений методом Гаусса:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & -10 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -8 & 0 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Полученная матрица соответствует системе

$$\begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 = 0; \\ \alpha_2 + 2\alpha_3 = 0. \end{cases}$$

Из второго уравнения получаем

$$\alpha_2 = -2\alpha_3.$$

Подставляя α_2 в первое уравнение, имеем

$$\alpha_1 - 4\alpha_3 + 3\alpha_3 = 0; \alpha_1 = \alpha_3.$$

Общее решение: $\alpha_1 = \alpha_3$; $\alpha_2 = -2\alpha_3$.

Положим, $\alpha_3 = 1$. Тогда $\alpha_1 = 1$; $\alpha_2 = -2$. Нашлось ненулевое решение исходной системы однородных уравнений. То есть нашлись такие числа $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, не все равные нулю, что выполняется

$$\alpha_1 a + \alpha_2 b + \alpha_3 c = \theta.$$

Следовательно, система векторов a, b, c линейно зависима.

Так как

$$1 \cdot a - 2 \cdot b + 1 \cdot c = \theta,$$

то $a = 2b - c$.

Проверка:

$$a = 2b - c = 2 \cdot (2, 1, 1, 2) - (3, -1, 1, 1) = \\ (4, 2, 2, 4) - (3, -1, 1, 1) = (1, 3, 1, 3) = a. \quad \blacktriangleright$$

Пример 3.5. Являются ли векторы $a = (1, 3, -1)$; $b = (2, 1, 2)$; $c = (1, 2, 3)$ линейно зависимыми?

Решение

$$\alpha_1 a + \alpha_2 b + \alpha_3 c = \theta;$$

$$\alpha_1 \cdot (1, 3, -1) + \alpha_2 (2, 1, 2) + \alpha_3 (1, 2, 3) = (0, 0, 0);$$

$$(\alpha_1, 3\alpha_1, -\alpha_1) + (2\alpha_2, \alpha_2, 2\alpha_2) + (\alpha_3, 2\alpha_3, 3\alpha_3) = (0, 0, 0);$$

$$(\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3, 3\alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3, -\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3) = (0, 0, 0).$$

Следовательно,

$$\begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 = 0, \\ 3\alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 = 0, \\ -\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 = 0. \end{cases}$$

Ранее было показано, что система n однородных линейных алгебраических уравнений с n неизвестными имеет ненулевые решения тогда и только тогда, когда ее определитель равен нулю.

Вычислим определитель полученной системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & -1 \\ 0 & 4 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -5 & -1 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} = -20 + 4 = -16 \neq 0.$$

Так как определитель системы Δ не равен нулю, то система имеет только нулевое решение и, следовательно,

$$\alpha_1 a + \alpha_2 b + \alpha_3 c = \theta$$

выполняется только при $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$. Таким образом, система векторов a, b, c линейно независима. $\blacktriangleright$

Отметим, что при решении этой задачи можно было не записывать систему, а сразу записать ее определитель, столбцы которого представляют собой координаты векторов a, b и c .

Если определитель не равен нулю, то векторы **линейно независимы**.

Отметим еще одно обстоятельство. Три вектора тогда и только тогда **линейно независимы**, когда их смешанное произведение не равно нулю, т.е.

$$a(b \times c) \neq 0.$$

Определение смешанного произведения векторов будет дано ниже в параграфе 3.8.

3.5. Размерность и базис линейного пространства

Пусть X — линейное пространство. Максимально возможное число линейно независимых векторов в пространстве X называется **размерностью** этого пространства и обозначается $\dim X$.

Другими словами, линейное пространство X называется n -мерным, если в нем существует n линейно независимых векторов, а любые $n + 1$ векторов уже являются линейно зависимыми.

Можно показать, что размерность векторного пространства R^n равна n . То есть в R^n обязательно найдутся n линейно независимых векторов, а любые $n + 1$ векторы являются линейно зависимыми.

Пусть X — линейное пространство с размерностью n . Тогда любая система из n максимально возможных линейно независимых векторов этого пространства называется его **базисом**.

Теорема. Пусть X — n -мерное линейное пространство, а $x_1, x_2, \dots, x_n$ — какой-либо базис в X . Тогда любой вектор $x \in X$ может быть представлен в виде линейной комбинации векторов базиса

$$x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n,$$

причем это представление единственно.

В этом случае числа $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ называются *коэффициентами разложения* вектора x в данном базисе.

Доказательство.

Очевидно, что система векторов $x, x_1, x_2, \dots, x_n$ является линейно зависимой, так как они образуют $n + 1$ вектор в n -мерном линейном пространстве. Тогда существует нетривиальная линейная комбинация этих векторов, равная нулю:

$$\beta_0 x + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \dots + \beta_n x_n = 0,$$

причем $\beta_0 \neq 0$.

Если бы β_0 был равен нулю, то один из коэффициентов $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ был бы не равен нулю и существовала бы нетривиальная линейная комбинация векторов $x_1, x_2, \dots, x_n$,

равная нулю. Это невозможно, так как векторы $x_1, x_2, \dots, x_n$ являются по условию *базисом*.

Итак, $\beta_0 \neq 0$. Разделим равенство на β_0 и перенесем все слагаемые, кроме первого, в правую часть равенства с противоположным знаком:

$$x = -\frac{\beta_1}{\beta_0}x_1 - \frac{\beta_2}{\beta_0}x_2 - \dots - \frac{\beta_n}{\beta_0}x_n.$$

Обозначив $\alpha_i = -\frac{\beta_i}{\beta_0}$, запишем:

$$x = \alpha_1x_1 + \alpha_2x_2 + \dots + \alpha_nx_n,$$

т.е. произвольный вектор $x \in X$ представлен в виде линейной комбинации векторов базиса.

Предположим теперь, что существует еще одна линейная комбинация, посредством которой вектор x выражается через векторы базиса

$$x = \alpha_1^*x_1 + \alpha_2^*x_2 + \dots + \alpha_n^*x_n.$$

Вычтем это равенство из предыдущего и получим

$$\theta = (\alpha_1 - \alpha_1^*)x_1 + (\alpha_2 - \alpha_2^*)x_2 + \dots + (\alpha_n - \alpha_n^*)x_n.$$

Так как $x_1, x_2, \dots, x_n$ — базис и эта система векторов линейно независима, то нулевому вектору может быть равна только тривиальная их линейная комбинация. Отсюда

$$\alpha_1 - \alpha_1^* = 0; \quad \alpha_2 - \alpha_2^* = 0; \quad \dots \quad \alpha_n - \alpha_n^* = 0$$

и, следовательно,

$$\alpha_1 = \alpha_1^*; \quad \alpha_2 = \alpha_2^*; \quad \dots \quad \alpha_n = \alpha_n^*,$$

т.е. представление вектора x в виде линейной комбинации векторов базиса *единственно*.

Пример 3.6. Образуют ли векторы $a = (2, 1, 1)$; $b = (-1, 1, 0)$; $c = (2, -2, 3)$ базис пространства R^3 ? Если да, то разложить по этому базису вектор $d = (1, -4, 5)$.

Решение

Три вектора образуют базис в пространстве R^3 , если они линейно независимы.

Для проверки линейной независимости системы из векторов a, b, c составим определитель, столбцы которого представляют собой координаты этих векторов.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 9 \neq 0.$$

Так как $\Delta \neq 0$, то a, b, c — линейно независимы и образуют базис. Коэффициенты разложения вектора d в этом базисе определяем путем приравнивания d линейной комбинации векторов базиса:

$$d = \alpha_1 a + \alpha_2 b + \alpha_3 c.$$

Подставим значения координат

$$(1, -4, 5) = \alpha_1 \cdot (2, 1, 1) + \alpha_2 \cdot (-1, 1, 0) + \alpha_3 \cdot (2, -2, 3);$$

$$(1, -4, 5) = (2\alpha_1, \alpha_1, \alpha_1) + (-\alpha_2, \alpha_2, 0) + (2\alpha_3, -2\alpha_3, 3\alpha_3);$$

$$(1, -4, 5) = (2\alpha_1 - \alpha_2 + 2\alpha_3, \alpha_1 + \alpha_2 - 2\alpha_3, \alpha_1 + 3\alpha_3).$$

Векторы равны, когда равны их соответствующие координаты. Тогда получаем систему уравнений для определения коэффициентов разложения:

$$\begin{cases} 2\alpha_1 - \alpha_2 + 2\alpha_3 = 1, \\ \alpha_1 + \alpha_2 - 2\alpha_3 = -4, \\ \alpha_1 + 3\alpha_3 = 5. \end{cases}$$

Выписываем расширенную матрицу и преобразовываем по методу Гаусса:

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{2} & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & -4 \\ 1 & 0 & 3 & 5 \end{array} \right) &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -6 & -9 \\ 0 & 1 & 4 & 9 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 4 & 9 \end{array} \right) \rightarrow \\ &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 6 & 12 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 2 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right) \rightarrow \\ &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right). \end{aligned}$$

Отсюда: $\alpha_1 = 1$; $\alpha_2 = 1$; $\alpha_3 = 2$.

Следовательно, $d = -a + b + 2c$.

Проверка:

$$\begin{aligned} d &= -(2, 1, 1) + (-1, 1, 0) + 2 \cdot (2, -2, 3) = \\ &= (-2, -1, -1) + (-1, 1, 0) + (4, -4, 6) = (1, -4, 5) = d. \end{aligned}$$

►

Из определения базиса можно заключить, что

- базисом в трехмерном пространстве являются любые три некомпланарных вектора;
- базисом на плоскости являются любые два неколлинеарных вектора;
- базисом на прямой является любой ненулевой вектор.

3.6. Евклидово пространство

Линейное пространство X называется **евклидовым пространством**, если каждой паре векторов $x, y \in X$ поставлено в соответствие единственное число $\langle x, y \rangle$, называемое скалярным произведением вектора x на вектор y .

Скалярное произведение векторов должно удовлетворять следующим **свойствам** или **аксиомам** евклидова пространства.

1. Для любого $x \in X$ верно $\langle x, x \rangle \geq 0$. При этом $\langle x, x \rangle = 0$ тогда и только тогда, когда $x = \theta$.
2. Для любых $x, y \in X$ выполняется условие $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$.
3. Для любых $x, y \in X$ и для любого числа $\alpha \in \mathbb{R}$ верно равенство $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$.
4. Для любых $x, y, z \in X$ выполняется условие $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$.

В евклидовом пространстве X также вводится понятие длины (нормы) каждого вектора $x \in X$. Длина $|x|$ вектора x в евклидовом пространстве X может быть введена различным образом. Но при этом обязательно должны выполняться следующие свойства.

1. $|x| \geq 0$ для любого $x \in X$. Если $|x| = 0$, то $x = \theta$.
2. Для любого $x \in X$ и для любого числа $\lambda \in \mathbb{R}$ имеет место равенство $|\lambda x| = |\lambda| \cdot |x|$.
3. Для любых $x, y \in X$ выполняется неравенство треугольника $|x + y| \leq |x| + |y|$.
4. Для любых $x, y \in X$ верно неравенство Коши — Буняковского $|\langle x, y \rangle| \leq |x| \cdot |y|$.

Чаще всего **длина вектора x** определяется как квадратный корень из скалярного произведения элемента на самого себя:

$$|x| = \sqrt{\langle x, x \rangle}.$$

Так вводилась длина вектора в n -мерном векторном пространстве R^n . Нетрудно показать, что все свойства скалярного произведения и длины для евклидова пространства выполняются в пространстве R^n .

Таким образом, n -мерное векторное пространство R^n , с введенными ранее скалярным произведением и длиной вектора, является евклидовым пространством.

Как и ранее, векторы x и y в евклидовом пространстве называются *ортгоналными*, если

$$\langle x, y \rangle = 0. \quad (3.1)$$

Рассмотрим в евклидовом n -мерном пространстве X с размерностью $\dim X = n$ систему из n ненулевых попарно ортогональных векторов $x_1, x_2, \dots, x_n$. Такая система векторов называется **ортогональной**.

Можно доказать, что ортогональная система векторов существует всегда. Например, в пространстве R^n примером такой системы является следующая:

[illegible]

где $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ — произвольные числа, не равные нулю.

Очевидно, что $\langle x_i, x_j \rangle = 0$ при $i \neq j$.

Теорема. Ортогональная система ненулевых векторов в евклидовом пространстве линейно независима.

Доказательство. Предположим, что ортогональная система $x_1, x_2, \dots, x_n$ линейно зависима. Тогда существует линейная комбинация

$$\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \dots + \beta_n x_n = \theta,$$

причем хотя бы один из $\beta_i, i = 1, \dots, n$ не равен нулю.

Без ограничения общности будем считать, что $\beta_1 \neq 0$. Если равны два вектора, то равны и скалярные произведения какого-либо вектора, например x_1 , на эти векторы:

$$\langle x_1, (\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \dots + \beta_n x_n) \rangle = \langle x_1, \theta \rangle.$$

Пример 3.7. Найти скалярное произведение вектора $(a - b)$ на самого себя, если $|a| = 2\sqrt{2}$; $|b| = 4$; угол $(a, b) = \frac{3\pi}{4}$.

Решение

$$\begin{aligned}\langle (a - b), (a - b) \rangle &= \langle a, a \rangle - 2\langle a, b \rangle + \langle b, b \rangle = |a|^2 - 2|a| \cdot |b| \cdot \cos(a, b) + |b|^2 = \\ &= (2\sqrt{2})^2 - 2 \cdot 2\sqrt{2} \cdot 4 \cdot \cos \frac{3\pi}{4} + 4^2 = 8 - 16\sqrt{2} \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 16 = 40. \quad \blacktriangleright\end{aligned}$$

Пример 3.8. Проверить, образуют ли векторы

$$a = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}} \right); \quad b = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{1}{\sqrt{2}}; 0 \right); \quad c = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}; \frac{1}{\sqrt{6}}; -\frac{2}{\sqrt{6}} \right)$$

ортонормированный базис евклидова пространства R^3 . Если да, то найти координаты разложения в этом базисе вектора $d = (4, 3, -1)$.

Решение

Для проверки условия ортогональности (3.1) вычислим скалярные произведения:

$$\begin{aligned}\langle a, b \rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot 0 = 0; \\ \langle a, c \rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} + \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} + \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \left(-\frac{2}{\sqrt{6}}\right) = 0; \\ \langle b, c \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} + 0 \cdot \left(-\frac{2}{\sqrt{6}}\right) = 0.\end{aligned}$$

Вычислим длины векторов:

$$\begin{aligned}|a| &= \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}} = 1; \\ |b| &= \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + 0^2} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 0} = 1; \\ |c| &= \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^2 + \left(-\frac{2}{\sqrt{6}}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{4}{6}} = 1.\end{aligned}$$

Результаты вычислений показывают, что векторы имеют единичную длину и они взаимно ортогональны. Следовательно, они образуют ортонормированный базис в пространстве R^3 .

Таким образом, разложение вектора d в этом базисе имеет вид

$$d = \alpha_1 a + \alpha_2 b + \alpha_3 c,$$

в котором

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= \langle d, a \rangle = 4 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} + 3 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} + (-1) \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{6}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}; \\ \alpha_2 &= \langle d, b \rangle = 4 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + 3 \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + (-1) \cdot 0 = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}; \\ \alpha_3 &= \langle d, c \rangle = 4 \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} + 3 \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} + (-1) \cdot \left(-\frac{2}{\sqrt{6}}\right) = \frac{9}{\sqrt{6}} = \frac{3}{2}\sqrt{6}.\end{aligned}$$

Окончательно запишем:

$$d = 2\sqrt{3} \cdot a + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot b + \frac{3}{2}\sqrt{6} \cdot c.$$

Проверка:

$$\begin{aligned}d &= 2\sqrt{3} \cdot a + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot b + \frac{3}{2}\sqrt{6} \cdot c = \\ &= 2\sqrt{3} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) + \frac{3}{2}\sqrt{6} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}\right) = \\ &= (2, 2, 2) + \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0\right) + \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, -3\right) = (4, 3, -1) = d. \quad \blacktriangleright\end{aligned}$$

3.7. Декартова система координат

Для определения положения произвольной точки могут использоваться различные системы координат. При этом положение каждой точки в любой системе координат как на плоскости, так и в трехмерном пространстве должно определяться однозначно. Понятие системы координат представляет собой совокупность точки начала отсчета (начала координат) и некоторого базиса. Выбор системы координат зависит от характера поставленной геометрической, физической или технической задачи.

Декартовой системой координат в пространстве называется совокупность точки начала координат и некоторого базиса из векторов в форме направленных отрезков, причем начало всех векторов базиса совпадает с началом координат.

Прямые, проходящие через начало координат, и векторы базиса называются **осями координат**. Оси координат упорядочены: первая ось называется *осью абсцисс*, вторая

ось — *осью ординат*, третья ось (в трехмерном пространстве) — *осью аппликат*. Как правило, эти оси обозначают в трехмерном пространстве соответственно x, y, z , а на плоскости — x, y .

Координатами точки в декартовой системе координат являются коэффициенты разложения в принятом базисе вектора, проведенного из начала координат в эту точку. Эти координаты также обозначают x, y, z (x, y).

Координатами вектора в декартовой системе считаются координаты точки, в которую переходит его конечная точка при параллельном переносе начальной точки вектора в начало координат. То есть, чтобы найти координаты вектора, начальная точка которого не совпадает с началом координат, нужно из координат его конечной точки вычесть соответствующие координаты начальной точки. Таким образом, вектор $\overrightarrow{AB}$, проведенный в трехмерном пространстве из точки A с координатами (x_A, y_A, z_A) в точку $B(x_B, y_B, z_B)$, равен

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A).$$

Декартова система координат, базис которой ортонормирован, называется **декартовой прямоугольной системой координат**. Обычно в такой системе координат в качестве векторов базиса используют единичные векторы (орты), как показано на рис. 3.6.

Пример 3.9. Найти длину медианы AM в треугольнике ABC с вершинами $A(2, -1, 3)$, $B(5, 1, -2)$, $C(-2, 3, 1)$.

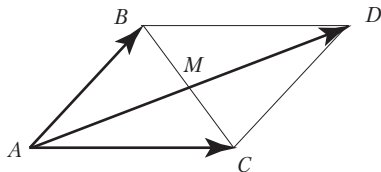
Решение

Дополним треугольник ABC до параллелограмма $ABDC$, как показано на рисунке.

Очевидно, что если считать стороны AB и AC треугольника векторами, то длина медианы AM равна половине длины вектора $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$. Тогда

$$\overrightarrow{AB} = (5 - 2, 1 - (-1), -2 - 3) = (3, 2, -5);$$

$$\overrightarrow{AC} = (-2 - 2, 3 - (-1), 1 - 3) = (-4, 4, -2);$$



$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = (-1, 6, -7);$$

$$|\overrightarrow{AD}| = \sqrt{(-1)^2 + 6^2 + (-7)^2} = \sqrt{86};$$

$$AM = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AD}| = \frac{\sqrt{86}}{2}.$$



3.8. Векторное произведение векторов

Векторным произведением векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$, удовлетворяющий следующим условиям:

- $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \varphi$, где φ — угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$; $\sin \varphi \geq 0$; $0 \leq \varphi \leq \pi$;
- вектор $\vec{c}$ ортогонален векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$;
- $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ образуют правую тройку векторов (см. ниже).

Обозначается:

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} \text{ или } \vec{c} = [\vec{a}, \vec{b}].$$

Таким образом, векторное произведение $\vec{a} \times \vec{b}$ дает вектор $\vec{c}$, направленный перпендикулярно плоскости, на которой лежат векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$.

Направление вектора $\vec{c}$ определяется направлением движения правого винта (штопора) при его вращении в соответствии с направлением роста угла φ (рис. 3.7).

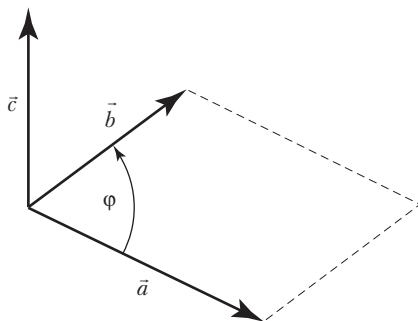


Рис. 3.7. Векторное произведение

Свойства векторного произведения векторов:

- 1) $\vec{b} \times \vec{a} = -\vec{a} \times \vec{b}$;
- 2) $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$;
- 3) $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$, если $\vec{a}$ и $\vec{b}$ параллельны или $\vec{a} = \vec{0}$, или $\vec{b} = \vec{0}$.
- 4) $(\lambda \cdot \vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda \cdot \vec{b}) = \lambda \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$;
- 5) $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$;
- 6) если заданы векторы $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ и $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ в декартовой прямоугольной системе координат (см. рис. 3.6) с единичными векторами $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, то

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} =$$

$$= (a_2 b_3 - a_3 b_2) \cdot \vec{i} - (a_1 b_3 - a_3 b_1) \cdot \vec{j} + (a_1 b_2 - a_2 b_1) \cdot \vec{k};$$

7) геометрическим смыслом векторного произведения векторов является то, что его длина численно равна площади параллелограмма $S = |\vec{a} \times \vec{b}|$, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (см. рис. 3.7).

Пример 3.10. Найти векторное произведение векторов $\vec{a} = 2\vec{i} + 5\vec{j} + \vec{k}$ и $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$.

Решение

Выпишем координаты векторов $\vec{a} = (2, 5, 1)$; $\vec{b} = (1, 2, -3)$.

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = \vec{i} \cdot \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} - \vec{j} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} + \vec{k} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -17\vec{i} + 7\vec{j} - \vec{k}. \blacktriangleright$$

Пример 3.11. Вычислить площадь треугольника S_{Δ} с вершинами $A(2; 2; 2)$, $B(4; 0; 3)$, $C(0; 1; 0)$.

Решение

Определим векторы $\overrightarrow{AC} = (0 - 2; 1 - 2; 0 - 2) = (-2; -1; -2)$;
 $\overrightarrow{AB} = (4 - 2; 0 - 2; 3 - 2) = (2; -2; 1)$. Тогда

$$\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AB} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i} \cdot \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} - \vec{j} \cdot \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + \vec{k} \cdot \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{i} \cdot (-1 - 4) - \vec{j} \cdot (-2 + 4) + \vec{k} \cdot (4 + 2) = -5\vec{i} - 2\vec{j} + 6\vec{k}.$$

Так как площадь треугольника ABC равна половине площади параллелограмма, построенного на векторах $\vec{AB}$ и $\vec{AC}$, то

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} |\vec{AC} \times \vec{AB}| = \frac{1}{2} \sqrt{25 + 4 + 36} = \frac{\sqrt{65}}{2} \text{ (ед}^2\text{)}. \quad \blacktriangleright$$

Пример 3.12. Доказать, что векторы $\vec{a} = 7\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{b} = 3\vec{i} - 7\vec{j} + 8\vec{k}$ и $\vec{c} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ компланарны.

Решение

$$\begin{pmatrix} 7 & -3 & 2 \\ 3 & -7 & 8 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \propto \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & 5 \\ 0 & 4 & -5 \end{pmatrix} \propto \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

так как векторы линейно зависимы, то они компланарны. $\blacktriangleright$

Пример 3.13. Найти площадь S параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a} + 3\vec{b}$; $3\vec{a} + \vec{b}$, если $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$; $\vec{a} \wedge \vec{b} = 30^\circ$.

Решение

$$\begin{aligned} S &= |(\vec{a} + 3\vec{b}) \times (3\vec{a} + \vec{b})| = |3\vec{a} \times \vec{a} + \vec{a} \times \vec{b} + 9\vec{b} \times \vec{a} + 3\vec{b} \times \vec{b}| = \\ &= |-\vec{b} \times \vec{a} + 9\vec{b} \times \vec{a}| = |8\vec{b} \times \vec{a}| = 8 |\vec{b}| \cdot |\vec{a}| \cdot \sin 30^\circ = 4. \quad \blacktriangleright \end{aligned}$$

Смешанным произведением векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ называется число, равное скалярному произведению вектора $\vec{a}$ на вектор, равный векторному произведению векторов $\vec{b}$ и $\vec{c}$. Обозначается $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$ или $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ (рис. 3.8).

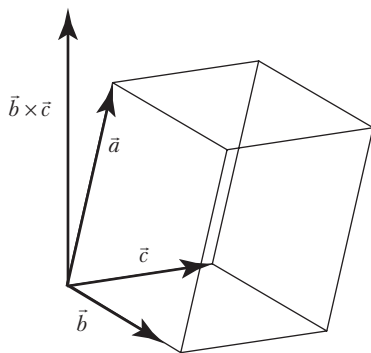


Рис. 3.8. Смешанное произведение векторов

Смешанное произведение $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$ по модулю равно объему параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$.

Свойства смешанного произведения:

1) смешанное произведение равно нулю, если:

- а) хоть один из векторов равен нулю,
- б) два вектора коллинеарны,
- в) векторы компланарны;

2) $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$;

3) $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}) = (\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}) =$
 $= -(\vec{b}, \vec{a}, \vec{c}) = -(\vec{c}, \vec{b}, \vec{a}) = -(\vec{a}, \vec{c}, \vec{b})$;

4) $(\lambda \vec{a}_1 + \mu \vec{a}_2, \vec{b}, \vec{c}) = \lambda \cdot (\vec{a}_1, \vec{b}, \vec{c}) + \mu \cdot (\vec{a}_2, \vec{b}, \vec{c})$;

5) объем треугольной пирамиды, образованной векторами $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, равен $\frac{1}{6} \cdot |(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})|$;

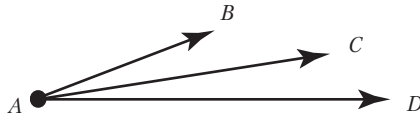
6) если $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$, $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$, то

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Пример 3.14. Доказать, что точки $A(5; 7; -2)$, $B(3; 1; -1)$, $C(9; 4; -4)$, $D(1; 5; 0)$ лежат в одной плоскости.

Решение

Выпишем векторы, составленные из этих точек: $\overrightarrow{AB} = (-2; -6; 1)$;
 $\overrightarrow{AC} = (4; -3; -2)$; $\overrightarrow{AD} = (-4; -2; 2)$.



Найдем смешанное произведение полученных векторов:

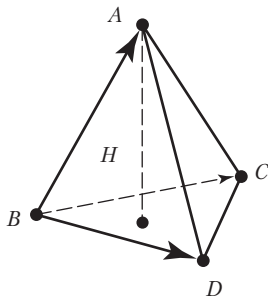
$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} -2 & -6 & 1 \\ 4 & -3 & -2 \\ -4 & -2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & -6 & 1 \\ 0 & -15 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -6 & 1 \\ 0 & -15 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Таким образом, полученные выше векторы компланарны, следовательно, точки A , B , C и D лежат в одной плоскости. ►

Пример 3.15. Найти объем треугольной пирамиды V и ее высоту H , опущенную на грань BCD , если вершины имеют координаты $A(0; 0; 1)$, $B(2; 3; 5)$, $C(6; 2; 3)$, $D(3; 7; 2)$.

Решение

Найдем координаты векторов: $\overrightarrow{BA} = (-2; -3; -4)$; $\overrightarrow{BD} = (1; 4; -3)$; $\overrightarrow{BC} = (4; -1; -2)$.



Тогда объем пирамиды

$$V = \frac{1}{6} \cdot \begin{vmatrix} -2 & -3 & -4 \\ 1 & 4 & -3 \\ 4 & -1 & -2 \end{vmatrix} = \frac{1}{6} [-2(-8-3) + 3(-2+12) - 4(-1-16)] =$$

$$= \frac{1}{6} (22 + 30 + 68) = 20.$$

Для нахождения высоты пирамиды найдем сначала площадь основания BCD . Вычислим

$$\overrightarrow{BD} \times \overrightarrow{BC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 4 & -3 \\ 4 & -1 & -2 \end{vmatrix} = \vec{i}(-8-3) - \vec{j}(-2+12) + \vec{k}(-1-16) =$$

$$= -11\vec{i} - 10\vec{j} - 17\vec{k}.$$

Следовательно, площадь основания BCD

$$S_{\text{осн}} = \frac{1}{2} \cdot |\overrightarrow{BD} \times \overrightarrow{BC}| = \frac{1}{2} \sqrt{11^2 + 10^2 + 17^2} = \frac{\sqrt{510}}{2} \approx 11,29.$$

Из $V = \frac{S_{\text{осн}} \cdot H}{3}$ вычислим

$$H = \frac{3V}{S_{\text{осн}}} = \frac{3 \cdot 20}{11,29} \approx 5,31. \quad \blacktriangleright$$

3.9. Понятие линейного оператора. Матрица как линейный оператор

Пусть X и Y — линейные пространства. Говорят, что на пространстве X задан оператор A (в некоторых книгах — преобразование, отображение) со значениями в пространстве Y , если каждому элементу $x \in X$ по определенному правилу поставлен в соответствие единственный элемент $y \in Y$.

Обычно этот факт обозначают как $y = Ax$. При этом часто говорят, что оператор A отображает пространство X в пространство Y и пишут:

$$A : X \rightarrow Y.$$

Оператор A называется **линейным**, если:

1) для всех $x, z \in X$ выполняется аддитивность оператора, т.е.

$$A(x + z) = Ax + Az;$$

2) для всех $x \in X$ и всех $\alpha \in R$ имеет место однородность оператора, т.е.

$$A(\alpha x) = \alpha Ax.$$

Элемент $y = Ax$ обычно называют образом элемента x , а элемент x — прообразом элемента y .

Пусть дана матрица $A = (a_{ij})_{m \times n}$. Выберем произвольный вектор $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in R^n$ и запишем его в виде матрицы-столбца. Ясно, что вектор x остается тем же самым вектором при записи его не в строку, а в столбец.

Умножим матрицу A на x и получим

$$\begin{aligned} Ax &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_m \end{pmatrix} = y. \end{aligned}$$

В другой форме записи

$$y_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j, \quad i = 1, \dots, m.$$

Ясно, что $y \in R^m$.

Таким образом, очевидно, что для любого $x \in R^n$ существует $y \in R^m$ такой, что $y = Ax$. Следовательно, матрица A является оператором, отображающим R^n в R^m :

$$A: R^n \rightarrow R^m.$$

Нетрудно убедиться, что матрица A является **линейным оператором**. Покажем, что для произвольных $x, z \in R^n$ выполняется равенство

$$A(x + z) = Ax + Az.$$

Запишем:

$$\begin{aligned} A(x + z) &= \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 + z_1 \\ \dots \\ x_n + z_n \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} a_{11}(x_1 + z_1) + \dots + a_{1n}(x_n + z_n) \\ \dots \\ a_{m1}(x_1 + z_1) + \dots + a_{mn}(x_n + z_n) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{11}z_1 + \dots + a_{1n}x_n + a_{1n}z_n \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m1}z_1 + \dots + a_{mn}x_n + a_{mn}z_n \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n + a_{11}z_1 + \dots + a_{1n}z_n \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n + a_{m1}z_1 + \dots + a_{mn}z_n \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11}z_1 + \dots + a_{1n}z_n \\ \dots \\ a_{m1}z_1 + \dots + a_{mn}z_n \end{pmatrix} = Ax + Az, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Аналогично можно показать, что для произвольных $x \in R^n$ и $\alpha \in R$ выполняется равенство

$$A(\alpha x) = \alpha Ax.$$

Если $m = n$, то

$$A: R^n \rightarrow R^n,$$

т.е. квадратная матрица порядка n отображает пространство R^n в себя.

Пример 3.16. Линейным оператором, отображающим R^3 само в себя, является матрица A :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -1 & 5 & 6 \\ 1 & 8 & 2 \end{pmatrix}.$$

Найти образ $y = Ax$ вектора $x = (4, -3, 1)$.

Решение

$$y = Ax = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -1 & 5 & 6 \\ 1 & 8 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 + (-6) + 4 \\ (-4) + (-15) + 6 \\ 4 + (-24) + 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -13 \\ -18 \end{pmatrix}.$$

В обычной записи $y = (10, -13, -18)$. ►

Вопросы для самоконтроля

1. Что такое вектор на плоскости и в трехмерном пространстве?
2. Что называется длиной (модулем) вектора?
3. Как определяется произведение вектора на число?
4. По каким правилам производятся сложение и вычитание векторов на плоскости?
5. Что называется скалярным произведением двух векторов?
6. Как найти длину вектора, произведение вектора на число, сумму и разность векторов, их скалярное произведение и косинус угла между векторами на плоскости и в трехмерном пространстве, используя лишь координаты векторов?
7. Что называется n -мерным вектором и n -мерным векторным пространством (пространством R^n)?
8. Как определяются основные операции над n -мерными векторами?
9. Какие два n -мерных вектора называются ортогональными?
10. Какое множество, состоящее из элементов, называется линейным пространством?
11. Перечислите аксиомы линейного пространства.
12. Является ли пространство R^n линейным пространством? Докажите это путем проверки выполнения в пространстве R^n аксиом линейного пространства.

13. Что называется линейной комбинацией элементов линейного пространства?
14. Какая система элементов линейного пространства является линейно зависимой; линейно независимой?
15. Что называется размерностью и базисом линейного пространства?
16. Сформулируйте теорему о разложении элемента линейного пространства по элементам базиса.
17. Что называется евклидовым пространством? Сформулируйте основные аксиомы евклидова пространства.
18. Каковы основные аксиомы длины (нормы) элемента в евклидовом пространстве?
19. Какой базис является ортонормированным? Как найти коэффициенты разложения элемента евклидова пространства в ортонормированном базисе?
20. Дайте определение векторного произведения.
21. Перечислите свойства векторного произведения.
22. Что называется смешанным произведением векторов?
23. Перечислите свойства смешанного произведения векторов.
24. В чем заключается геометрический смысл векторного произведения; смешанного произведения?
25. Что такое оператор; линейный оператор?
26. Покажите, что матрица является линейным оператором в пространстве R^n .

Задачи для самостоятельного решения

- 3.1. Найти длину вектора $a = 4\vec{i} - 5\vec{j} + 2\vec{k}$.
- 3.2. Даны четырехмерные векторы $a = (2, -1, 0, 3)$; $b = (-1, 1, 2, -1)$; $c = (2, 1, 2, -2)$.
Найти:
 - а) длину вектора $d = 3(a + c) + 2(b - c) - (b + c) + 2a + c$;
 - б) скалярное произведение вектора d на вектор $f = 2a + 2(b - c) - 3(a + c)$;
 - в) косинус угла между векторами a и f .
- 3.3. Какие пары из следующих векторов ортогональны: $a = (1, 2, -2, 1)$; $b = (4, 0, 4, 0)$; $c = (1, -1, -1, -1)$?
- 3.4. Является ли система векторов $a = (2, -1, 1)$; $b = (1, 3, 4)$; $c = (1, 2, 3)$ линейно зависимой? Если да, то представить вектор c в виде линейной комбинации векторов a и b .
- 3.5. Образуют ли базис пространства R^3 векторы $a = (1, 2, 1)$; $b = (-1, 0, 3)$; $c = (3, 1, -1)$? Если да, то разложить по этому базису вектор $d = (0, 2, -2)$.

3.6. Векторы a и b ортогональны, а вектор c образует с ними углы, равные $\frac{\pi}{3}$. Зная, что $|a|=|b|=4$, $|c|=1$, найти скалярное произведение $\langle (3a-b), (c-a) \rangle$.

3.7. Образуют ли векторы $a = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{2}{\sqrt{3}} \right)$ и $b = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$ ортонормированный базис пространства R^2 ? Если да, то разложить по этому базису вектор $c = (3, 2)$.

3.8. Две смежные стороны параллелограмма образованы векторами $a = (2, -3, 1)$ и $b = (-1, 5, 0)$. Найти сумму длин диагоналей параллелограмма.

3.9. Вычислить векторное произведение векторов $a = (2, -3, 1)$ и $b = (-1, 5, 0)$.

3.10. Вычислить смешанное произведение векторов $a = (2, -3, 1)$, $b = (-1, 5, 0)$ и $c = (1, 2, 3)$.

Глава 4

СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ КВАДРАТНЫХ МАТРИЦ

4.1. Характеристическое уравнение

Рассмотрим квадратную матрицу A n -го порядка:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

и n -мерный вектор $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, записанный в форме матрицы-столбца:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Как было уже показано выше, произведение Ax также является n -мерным вектором.

В ряде задач возникает необходимость так подобрать ненулевой вектор x для матрицы A , чтобы умножение матрицы A на вектор x давало тот же результат, что и умножение вектора x на какое-то действительное число λ , т.е.

$$Ax = \lambda x.$$

Если для какого-то ненулевого вектора x и какого-то числа λ это равенство выполняется, то вектор x называется **собственным вектором**, а число λ — **собственным значением** матрицы A .

Перепишем последнее равенство в развернутом виде:

$$\begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \dots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}.$$

Это матричное равенство равносильно системе уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = \lambda x_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = \lambda x_2, \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = \lambda x_n \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda)x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda)x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0, \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + (a_{nn} - \lambda)x_n = 0. \end{cases}$$

Как установлено ранее, полученная система n однородных алгебраических линейных уравнений с n неизвестными имеет ненулевые решения тогда и только тогда, когда ее определитель равен нулю.

Именно такие решения в данном случае имеют практическое значение, поскольку нулевое решение $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ дает нулевой вектор $x = (0, 0, \dots, 0)$, который по определению не может быть *собственным* вектором.

Запишем для последней системы уравнений определитель и приравняем его к нулю:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Определитель, стоящий в левой части этого равенства, является многочленом n -й степени относительно λ . Этот многочлен называется **характеристическим многочленом**, а все уравнение — **характеристическим уравнением** матрицы A .

Последнее равенство можно переписать в матричном виде:

$$|A - \lambda E| = 0.$$

Решив характеристическое уравнение, находим *собственные значения*, а подставляя их по очереди в систему однородных уравнений, находим *собственные векторы*, отвечающие каждому собственному значению.

Как известно из алгебры, уравнение n -го порядка с одним неизвестным имеет не более n действительных корней, поэтому матрица A n -го порядка может иметь не более n действительных собственных значений.

Пример 4.1. Найти собственные значения и собственные векторы матрицы A :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Решение

Составим характеристическое уравнение и найдем его корни:

$$\begin{vmatrix} 3 - \lambda & -1 \\ -2 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = 0. \quad (*)$$

Откуда получаем квадратное уравнение

$$(3 - \lambda) \cdot (2 - \lambda) - (-1) \cdot (-2) = 0;$$

$$\lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0.$$

Решение характеристического уравнения дает собственные значения

$$\lambda_1 = 4; \lambda_2 = 1.$$

Для нахождения собственных векторов записываем систему однородных линейных алгебраических многочленов, определитель которой является левой частью характеристического уравнения (*):

$$(3 - \lambda)x_1 - x_2 = 0;$$

$$-2x_1 + (2 - \lambda)x_2 = 0.$$

Подставив по очереди собственные значения в систему, находим собственные векторы:

а) $\lambda = 4$.

$$(3 - 4)x_1 - x_2 = 0;$$

$$-2x_1 + (2 - 4)x_2 = 0.$$

Тогда

$$-x_1 - x_2 = 0;$$

$$-2x_1 - 2x_2 = 0,$$

откуда

$$x_1 + x_2 = 0.$$

Общее решение: $x_1 = -x_2$. Подставляем вместо свободного неизвестного x_2 любое число β , не равное нулю, получаем семейство собственных векторов $x = (-\beta, \beta)$.

Проверка:

$$Ax = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\beta \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3\beta - \beta \\ 2\beta + 2\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4\beta \\ 4\beta \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} -\beta \\ \beta \end{pmatrix} = 4x = \lambda x.$$

б) $\lambda = 1$.

$$\begin{aligned} (3-1)x_1 - x_2 &= 0; \\ -2x_1 + (2-1)x_2 &= 0. \end{aligned}$$

Тогда

$$2x_1 - x_2 = 0,$$

откуда

$$-2x_1 + x_2 = 0.$$

Общее решение: $x_2 = 2x_1$. Семейство собственных векторов $(\beta, 2\beta)$.

Проверка:

$$Ax = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \beta \\ 2\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\beta - 2\beta \\ -2\beta + 4\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta \\ 2\beta \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} \beta \\ 2\beta \end{pmatrix} = 1 \cdot x = \lambda x. \blacktriangleright$$

4.2. Собственные значения неотрицательных матриц

В ряде экономических задач требуется найти неотрицательные (положительные) собственные векторы квадратных матриц, т.е. собственные векторы, все координаты которых $x_i \geq 0$ (для положительных матриц $x_i > 0$).

Заметим, что если все элементы a_{ij} матрицы A неотрицательны, то говорят, что A — **неотрицательная матрица**, и пишут $A \geq 0$. Среди неотрицательных матриц выделяют **положительные матрицы** $A > 0$, все элементы которых строго больше нуля.

Для собственных значений и собственных векторов неотрицательных матриц доказана теорема, которую сформулируем без доказательства.

Теорема Фробениуса — Перрона. Пусть A — неотрицательная квадратная матрица. Тогда:

а) максимальное собственное значение λ_A матрицы A неотрицательно. Среди собственных векторов, отвечающих λ_A , имеется неотрицательный вектор;

б) если $A > 0$, то все неотрицательные собственные векторы матрицы A положительны и отвечают только ее максимальному собственному значению λ_A ;

в) любые два положительных собственных вектора x и y отличаются лишь числовым множителем: $y = \alpha x$.

Максимальное собственное значение неотрицательной матрицы A называется **числом Фробениуса** матрицы A , а отвечающий ему неотрицательный собственный вектор — **вектором Фробениуса** матрицы A .

Пример 4.2. Найти собственные значения и собственные векторы положительной матрицы A

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

и убедиться в том, что положения теоремы Фробениуса — Перрона для этой матрицы выполняются.

Решение

Составим характеристическое уравнение и вычислим его корни:

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 3 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0. \quad (*)$$

$$(2-\lambda) \cdot (4-\lambda) - 3 = 0; \lambda^2 - 6\lambda + 5 = 0.$$

$$\lambda_1 = 5; \lambda_2 = 1.$$

Подставим собственные значения в исходную систему уравнений определителя (*).

1) $\lambda = 5$. Тогда

$$\begin{cases} (2-\lambda) \cdot x_1 + x_2 = 0, \\ 3x_1 + (4-\lambda)x_2 = 0. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} -3x_1 + x_2 &= 0; \\ 3x_1 - x_2 &= 0. \end{aligned}$$

Решение системы:

$$x_2 = 3x_1.$$

Тогда $x = (\beta, 3\beta)$ — общее решение, т.е. семейство собственных векторов матрицы A , отвечающих собственному значению $\lambda = 5$.

2) Аналогично для $\lambda = 1$:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0, \\ 3x_1 + 3x_2 = 0. \end{cases}$$

Решение системы:

$$x_1 = -x_2.$$

Тогда $x = (-\beta, \beta)$ — общее решение, т.е. семейство собственных векторов матрицы A , отвечающих собственному значению $\lambda = 1$.

Итак, очевидно, что все положения теоремы Фробениуса — Перрона для данной матрицы A выполняются:

а) максимальное собственное значение матрицы $\lambda_A = 5$ неотрицательно;

б) среди собственных векторов, отвечающих этому значению $\lambda_A = 5$, имеется неотрицательный вектор. Например, при $\lambda = 1$ это вектор $x = (1, 3)$;

в) все неотрицательные собственные векторы матрицы A отвечают только ее максимальному собственному значению. Так, собственному значению $\lambda = 1$ ни один неотрицательный собственный вектор не отвечает, так как вектор $x = (-\beta, \beta)$ имеет координаты разных знаков при любом β .

Также ясно, что в семействе собственных векторов $x = (\beta, 3\beta)$, отвечающих $\lambda = 5$, все неотрицательные координаты положительны (так как нулевой вектор не может быть собственным вектором) и пропорциональны. ►

4.3. Квадратичные формы

Многочлен второй степени относительно переменных x_1 и x_2

$$\Phi(x_1, x_2) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2,$$

не содержащий свободного члена и неизвестных в первой степени, называется **квадратичной формой** переменных x_1 и x_2 .

Многочлен второй степени относительно переменных x_1 , x_2 и x_3

$$\begin{aligned}\Phi(x_1, x_2, x_3) = & a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + \\ & + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{23}x_2x_3 + 2a_{13}x_1x_3,\end{aligned}$$

не содержащий свободного члена и неизвестных в первой степени, называется **квадратичной формой** переменных x_1 , x_2 и x_3 .

Рассмотрим квадратичную форму двух переменных. Симметрическая матрица $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$ называется матрицей этой квадратичной формы.

Определитель этой матрицы называется **определителем квадратичной формы**.

Пусть на плоскости задан ортонормированный базис $\vec{e}_1, \vec{e}_2$. Каждая точка плоскости имеет в этом базисе координаты x_1, x_2 , совокупность которых будем рассматривать как вектор $\vec{x} = (x_1, x_2)$.

Если задана квадратичная форма

$$\Phi(x_1, x_2) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2, \quad (4.1)$$

то ее можно рассматривать как функцию от переменных x_1 и x_2 .

Говорят, что квадратичная форма имеет канонический вид, если ее матрица является диагональной.

Рассмотрим порядок приведения квадратичных форм к каноническому виду. Пусть дан линейный оператор A с симметрической матрицей $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$, преобразующий множество векторов $\bar{x} \in R^2$ в множество векторов

$$\bar{y} = A\bar{x} \in R^2.$$

Это симметрическое преобразование можно записать в виде

$$y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2;$$

$$y_2 = a_{12}x_1 + a_{22}x_2,$$

где y_1 и y_2 — координаты вектора y в ортонормированном базисе $\bar{e}_1, \bar{e}_2$.

Перепишем квадратичную форму (4.1)

$$\Phi(x_1, x_2) = x_1y_1 + x_2y_2.$$

Как очевидно, **геометрический смысл** числового значения квадратичной формы Φ в точке с координатами x_1 и x_2 — это скалярное произведение векторов $\langle \bar{x}, A\bar{x} \rangle$.

Если взять другой ортонормированный базис на плоскости, то в нем квадратичная форма Φ будет выглядеть иначе, хотя ее числовое значение в каждой точке не изменится.

Если найти такой базис, в котором квадратичная форма не будет содержать координат в первой степени, а только координаты в квадрате, то квадратичную форму можно будет *привести* к каноническому виду.

Если в качестве базиса взять совокупность собственных векторов матрицы линейного оператора, то в этом базисе матрица линейного преобразования имеет вид

$$A' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

При переходе к новому базису от переменных x_1 и x_2 переходим к переменным E'_1 и E'_2 . Тогда

$$\begin{aligned}\Phi &= x'_1 y'_1 + x'_2 y'_2; \\ y'_1 &= a'_{11} x'_1 + a'_{12} x'_2; \\ y'_2 &= a'_{12} x'_1 + a'_{22} x'_2.\end{aligned}\tag{4.2}$$

В этом случае $y'_1 = \lambda_1 x'_1$, $y'_2 = \lambda_2 x'_2$. Подставляя в выражение (4.2), получим

$$\Phi(x'_1, x'_2) = \lambda_1 (x'_1)^2 + \lambda_2 (x'_2)^2.\tag{4.3}$$

Зависимость (4.3) называется **каноническим видом** квадратичной формы. Аналогично можно привести к каноническому виду квадратичную форму с большим числом переменных.

Теория квадратичных форм используется, как правило, для приведения к каноническому виду уравнений кривых и поверхностей второго порядка, которые будут рассмотрены в гл. 6.

Пример 4.3. Привести к каноническому виду квадратичную форму

$$\Phi(x_1, x_2) = 27x_1^2 - 10x_1x_2 + 3x_2^2.$$

Решение

В исходном уравнении коэффициенты $a_{11} = 27$, $a_{12} = -5$, $a_{22} = 3$. С учетом этих коэффициентов составим характеристическое уравнение и решим его:

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} 27 - \lambda & -5 \\ -5 & 3 - \lambda \end{vmatrix} &= 0; \\ (27 - \lambda)(3 - \lambda) - 25 &= 0; \\ \lambda^2 - 30\lambda + 56 &= 0; \\ \lambda_1 = 2; \lambda_2 &= 28.\end{aligned}$$

Подставляя полученные значения в выражение (4.3), окончательно запишем

$$\Phi(x'_1, x'_2) = 2x'^2_1 + 28x'^2_2. \quad \blacktriangleright$$

Пример 4.4. Привести к каноническому виду уравнение второго порядка

$$17x^2 + 12xy + 8y^2 - 20 = 0.$$

Решение

Выпишем коэффициенты $a_{11} = 17$, $a_{12} = 6$, $a_{22} = 8$. Из этих коэффициентов оформим матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 17 & 6 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}.$$

Составим характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} 17 - \lambda & 6 \\ 6 & 8 - \lambda \end{vmatrix} = 0;$$

$$(17 - \lambda)(8 - \lambda) - 36 = 0;$$

$$136 - 8\lambda - 17\lambda + \lambda^2 - 36 = 0;$$

$$\lambda^2 - 25\lambda + 100 = 0;$$

$$\lambda_1 = 5; \lambda_2 = 20.$$

С учетом собственных значений из формулы (4.3) запишем:

$$5(x')^2 + 20(y')^2 - 20 = 0.$$

Получили уравнение эллипса в канонической форме:

$$\frac{x'^2}{4} + \frac{y'^2}{1} = 1. \quad \blacktriangleright$$

Пример 4.5. Привести к каноническому виду уравнение линии второго порядка

$$5x^2 + 2\sqrt{3}xy + 3y^2 - 6 = 0.$$

Построить ее график.

Решение

Составим характеристическое уравнение квадратичной формы $5x^2 + 2\sqrt{3}xy + 3y^2$ при $a_{11} = 5$, $a_{12} = \sqrt{3}$, $a_{22} = 3$. Имеем

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 - \lambda & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 3 - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Откуда характеристическое уравнение имеет вид

$$\lambda^2 - 8\lambda + 12 = 0.$$

Решив последнее уравнение, получим $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 6$.

Найдем координаты собственных векторов.

Для $\lambda_1 = 2$ вычислим систему уравнений:

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda_1)x_1 + a_{12}x_2 = 0, \\ a_{12}x_1 + (a_{22} - \lambda_1)x_2 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} 3E_1 + \sqrt{3}x_2 = 0, \\ \sqrt{3}x_1 + x_2 = 0, \end{cases} \quad \text{полагая } x_1 = 1, \text{ получим}$$

$$x_2 = -\sqrt{3}.$$

Для $\lambda_2 = 2$ имеем

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda_2)x_1 + a_{12}x_2 = 0, \\ a_{12}x_1 + (a_{22} - \lambda_2)x_2 = 0; \end{cases} \begin{cases} -x_1 + \sqrt{3}x_2 = 0, \\ \sqrt{3}x_1 - 3x_2 = 0, \end{cases} \text{ полагая } x_1 = 1, \text{ полу-}$$

чим $x_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

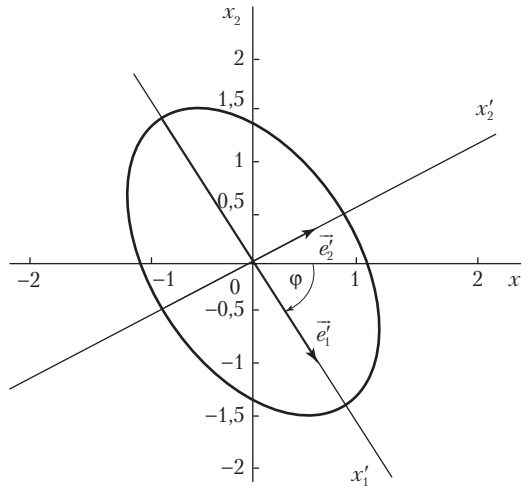
Следовательно, собственные векторы $\vec{u}_1 = (1, -\sqrt{3})$, $\vec{u}_2 = (1, \frac{1}{\sqrt{3}})$. Вычислим их длины:

$$|\vec{u}_1| = \sqrt{1+3} = 2; |\vec{u}_2| = \sqrt{1+\frac{1}{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Найдя отношение $\vec{e}'_1 = \frac{\vec{u}_1}{|\vec{u}_1|}$; $\vec{e}'_2 = \frac{\vec{u}_2}{|\vec{u}_2|}$, выпишем координаты единичных векторов нового базиса:

$$\vec{e}'_1 = \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2} \right); \vec{e}'_2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} \right).$$

Вычислим угол поворота старой системы координат x_1x_2 . Из координат вектора $\vec{e}'_1$ следует, что $\cos \varphi = \frac{1}{2}$, $\sin \varphi = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. Эти значения соответствуют углу $\varphi = -\frac{\pi}{3}$. Угол имеет отрицательное значение, так как поворот производится по часовой стрелке.



Подставляя собственные значения $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 6$ в формулу (4.3), имеем уравнение линии в новой системе координат

$$2(x')^2 + 6(y')^2 = 6.$$

Каноническое уравнение линии (уравнение эллипса) в новой системе координат будет иметь вид

$$\frac{(x')^2}{(\sqrt{3})^2} + \frac{(y')^2}{1^2} = 1.$$

Построим эту линию в новой системе координат. ►

Пример 4.6. Построить линию, описываемую уравнением

$$4xy + 3y^2 + 16 = 0.$$

Решение

Выпишем из исходного уравнения значения коэффициентов $a_{11} = 0$, $a_{12} = 2$, $a_{22} = 3$. Составим характеристическое уравнение и решим его:

$$\begin{vmatrix} 0 - \lambda & 2 \\ 2 & 3 - \lambda \end{vmatrix} = -3\lambda + \lambda^2 - 4 = 0,$$

откуда $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 4$.

Для $\lambda_1 = -1$:

$$\begin{cases} 1 \cdot x_1 + 2x_2 = 0, \\ 2x_1 + 4x_2 = 0, \end{cases} \quad x_1 = 1; x_2 = -0,5; \quad \overline{u_1} = (1; -0,5); \quad |\overline{u_1}| = \frac{\sqrt{5}}{2};$$

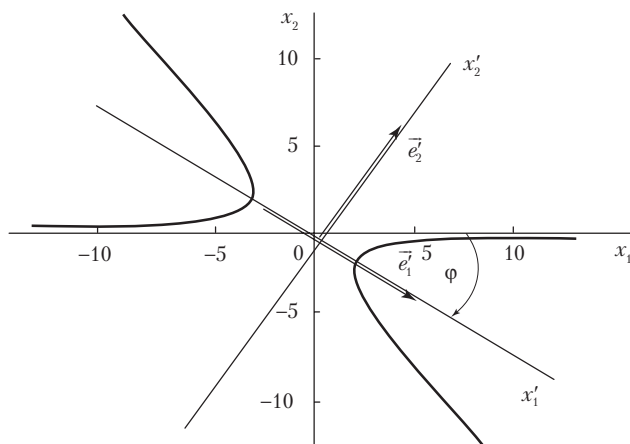
$$\overline{e'_1} = \frac{\overline{u_1}}{|\overline{u_1}|} = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}; -\frac{1}{\sqrt{5}} \right).$$

Для $\lambda_2 = 4$:

$$\begin{cases} -4x_1 + 2x_2 = 0, \\ 2x_1 - x_2 = 0, \end{cases} \quad x_2 = 1; x_1 = 2; \quad \overline{u_2} = (1; 2); \quad |\overline{u_2}| = \sqrt{5};$$

$$\overline{e'_2} = \frac{\overline{u_2}}{|\overline{u_2}|} = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}; \frac{2}{\sqrt{5}} \right).$$

Из координат единичного вектора $\overline{e'_1}$ можно найти, что $\cos \varphi = \frac{2}{\sqrt{5}}$ и $\sin \varphi = -\frac{1}{\sqrt{5}}$. Угол поворота старой системы координат имеет отрицательное значение $\varphi = -\arccos \frac{2}{\sqrt{5}}$.



Подставляя собственные значения в формулу (4.3) получаем функцию в квадратичной форме:

$$-x'^2 + 4y'^2 = -16.$$

Перепишем ее в виде канонического уравнения гиперболы:

$$\frac{x'^2}{16} - \frac{y'^2}{4} = 1$$

и построим ее график в новой системе координат. ►

Вопросы для самоконтроля

1. Что такое собственный вектор и собственное значение квадратной матрицы?
2. Какой системе уравнений соответствует матричное равенство $Ax = \lambda x$?
3. Что такое характеристический многочлен и характеристическое уравнение?
4. Сколько действительных собственных значений может иметь квадратная матрица n -го порядка?
5. Как найти собственные значения и собственные векторы квадратной матрицы?
6. Какие матрицы и векторы называются неотрицательными; положительными?
7. Что можно сказать про максимальное собственное значение неотрицательной матрицы и отвечающий ему собственный вектор?
8. Какому собственному значению отвечают все положительные собственные векторы положительной матрицы?
9. Дайте определение многочлена квадратичной формы двух и трех переменных.

10. Какой вид квадратичной формы называется каноническим?

Задачи для самостоятельного решения

4.1. Найти собственные значения и собственные векторы матриц

а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix};$

б) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 6 \end{pmatrix};$

в) $\begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$

4.2. Используя квадратичные формы, построить линию, описываемую уравнением

$$5x^2 + 4\sqrt{6}xy + 7y^2 - 22 = 0.$$

Глава 5

КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

5.1. Понятие комплексного числа

Комплексным числом называется выражение вида

$$z = x + iy,$$

где x и y — действительные числа; i — мнимая единица, такая, что $i^2 = -1$.

Например, комплексными числами являются $5 + 3i$; $-4 + 2i$; $-6 - i$ и т.д.

Число x называется **действительной частью** комплексного числа z и обозначается $x = \operatorname{Re} z$, а число y называется **мнимой частью** комплексного числа z и обозначается $y = \operatorname{Im} z$.

Действительные числа являются частным случаем комплексных чисел при $y = 0$. Комплексные числа включают в себя все множества чисел, которые изучались ранее. Так, натуральные, целые, рациональные, иррациональные, действительные числа являются частными случаями комплексных чисел.

Если $x = 0$, $y \neq 0$, то комплексное число называется **мнимым** (в некоторых книгах — чисто мнимым). Если $x = 0$, $y = 0$, то комплексное число равно нулю.

Два комплексных числа $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ называются **равными**, если равны их действительные и мнимые части, т.е. $x_1 = x_2$ и $y_1 = y_2$. Числа $z = x + iy$ и $\bar{z} = x - iy$ называются сопряженными или комплексно **сопряженными**.

Если для геометрического изображения действительных чисел используются точки числовой прямой, то для изображения комплексных чисел служат точки координатной плоскости xu (рис. 5.1). Такая плоскость называется **комплексной плоскостью**.

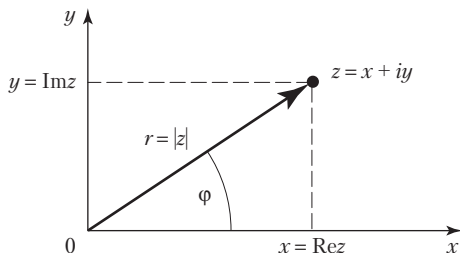


Рис. 5.1. Геометрическая интерпретация комплексного числа

На ней каждая точка с координатами (x, y) соответствует комплексному числу $x + iy$ и, наоборот, каждое комплексное число соответствует точке комплексной плоскости, причем это соответствие взаимно однозначное.

Ось x , на которой расположены действительные числа $x + 0i$, называется **действительной осью** комплексной плоскости, а ось y , на которой расположены мнимые числа $0 + iy$, называется **мнимой осью**.

5.2. Тригонометрическая форма записи комплексного числа

С каждой точкой $z(x, y)$ комплексной плоскости связан радиус-вектор этой точки, который тоже обозначается z (см. рис. 5.1).

Длина r радиуса-вектора z называется **модулем** комплексного числа z и обозначается $r = |z|$. В соответствии с рис. 5.1 по теореме Пифагора запишем:

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Угол φ , образованный радиусом-вектором z и осью x , называется **аргументом** комплексного числа z и обозначается $\text{Arg } z$.

$\text{Arg } z$ положителен, если вращение от положительной полуоси x до радиуса-вектора z осуществляется против часовой стрелки и отрицателен, если вращение происходит по часовой стрелке.

Из рис. 5.1 очевидно, что

$$x = r \cdot \cos \varphi; y = r \cdot \sin \varphi.$$

Следовательно, комплексное число $x + iy$ можно представить как

$$z = r \cdot (\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

Легко видеть, что

$$\cos \varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}; \quad \sin \varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Представление комплексного числа в виде

$$z = r \cdot (\cos \varphi + i \sin \varphi),$$

где $r = |z|$ и $\varphi = \operatorname{Arg} z$, называется **тригонометрической формой** записи комплексного числа.

Из значений $\operatorname{Arg} z$ выделяется главное значение $\varphi = \arg z$, удовлетворяющее условию

$$-\pi < \arg z \leq \pi.$$

Пример 5.1.

$$\arg 5 = 0; \quad \arg(-3i) = -\pi/2; \quad \arg(1 + i) = \pi/4.$$



5.3. Действия над комплексными числами

Все *арифметические операции* над комплексными числами определяются естественным образом из правил действий над многочленами $x_1 + iy_1$ и $x_2 + iy_2$, если считать $i^2 = -1$:

а) **сложение (вычитание)** комплексных чисел

$$z_1 \pm z_2 = (x_1 + iy_1) \pm (x_2 + iy_2) = (x_1 \pm x_2) + i \cdot (y_1 \pm y_2).$$

В геометрическом представлении при сложении (вычитании) комплексных чисел их радиусы-векторы складываются (вычитаются) по правилам, установленным для векторов на плоскости (рис. 5.2);

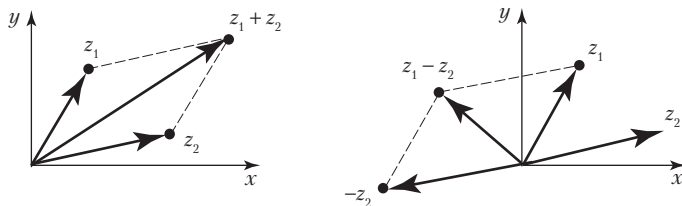


Рис. 5.2. Сложение и вычитание комплексных чисел

б) **умножение** комплексных чисел

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) = x_1 x_2 + ix_1 y_2 + ix_2 y_1 - y_1 y_2 = \\ &= (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i \cdot (x_1 y_2 + x_2 y_1). \end{aligned}$$

Если комплексные числа представлены в тригонометрической форме, то

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1 \cdot (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) \cdot r_2 \cdot (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) = \\ &= r_1 r_2 \cdot (\cos \varphi_1 \cdot \cos \varphi_2 + i \sin \varphi_1 \cdot \cos \varphi_2 + i \cos \varphi_1 \cdot \sin \varphi_2 - \sin \varphi_1 \cdot \sin \varphi_2) = \\ &= r_1 r_2 \cdot [(\cos \varphi_1 \cdot \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \cdot \sin \varphi_2) + \\ &\quad + i(\sin \varphi_1 \cdot \cos \varphi_2 + \cos \varphi_1 \cdot \sin \varphi_2)]. \end{aligned}$$

Окончательно

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 \cdot [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)].$$

Таким образом, для перемножения двух комплексных чисел достаточно перемножить их модули и сложить их аргументы. Модуль произведения комплексных чисел при этом равен произведению их модулей, а аргумент — сумме аргументов сомножителей.

Геометрически умножение числа z_1 на z_2 означает увеличение длины r_1 радиуса-вектора z_1 в r_2 раз и его поворот вокруг начала координат на угол φ_2 против часовой стрелки;

в) **деление** комплексных чисел

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{(x_1 + iy_1) \cdot (x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2) \cdot (x_2 - iy_2)} = \\ &= \frac{x_1 x_2 - ix_1 y_2 + ix_2 y_1 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} = \frac{(x_1 x_2 + y_1 y_2) + i(x_2 y_1 - x_1 y_2)}{x_2^2 + y_2^2}. \end{aligned}$$

Если комплексные числа представлены в тригонометрической форме, то

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{r_1 \cdot (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)}{r_2 \cdot (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)} = \frac{r_1 \cdot (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) \cdot (\cos \varphi_2 - i \sin \varphi_2)}{r_2 \cdot (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) \cdot (\cos \varphi_2 - i \sin \varphi_2)} = \\ &= \frac{r_1 \cdot (\cos \varphi_1 \cdot \cos \varphi_2 - i \cos \varphi_1 \cdot \sin \varphi_2 + i \sin \varphi_1 \cdot \cos \varphi_2 + \sin \varphi_1 \cdot \sin \varphi_2)}{r_2 \cdot (\cos^2 \varphi_2 + \sin^2 \varphi_2)} = \\ &= \frac{r_1}{r_2} \cdot [(\cos \varphi_1 \cdot \cos \varphi_2 + \sin \varphi_1 \cdot \sin \varphi_2) + i(\sin \varphi_1 \cdot \cos \varphi_2 - \cos \varphi_1 \cdot \sin \varphi_2)] \end{aligned}$$

или

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \cdot [\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)].$$

Следовательно, для того, чтобы разделить одно комплексное число на другое, достаточно разделить модуль делимого на модуль делителя и вычесть аргумент делителя из аргумента делимого.

Модуль частного двух комплексных чисел при этом равен частному их модулей, а аргумент — разности аргументов.

Геометрически деление числа z_1 на z_2 означает уменьшение длины r_1 радиусы-вектора z_1 в r_2 раз и его поворот вокруг начала координат на угол φ_2 по часовой стрелке, если $\varphi_2 > 0$;

г) **возведение** комплексных чисел в натуральную степень и **извлечение** корня натуральной степени.

Так как при умножении комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются, легко получить формулу возведения комплексного числа в натуральную степень n , известную как формула Муавра

$$z^n = [r \cdot (\cos \varphi + i \sin \varphi)]^n = r^n \cdot (\cos n\varphi + i \sin n\varphi).$$

Используя определение корня и формулу Муавра, нетрудно получить

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \cdot \left(\cos \frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right),$$

где $k = 0, 1, \dots, n-1$.

При $k = n, n+1, \dots$ значения корня будут повторяться. Таким образом, корень n -й степени из комплексного числа, не равного нулю, имеет n различных значений.

Примеры 5.2.

1. Даны комплексные числа $z_1 = 12 + 5i$, $z_2 = 3 - 4i$. Найти:

$$z_1 + z_2; \quad z_1 - z_2; \quad z_1 z_2; \quad \frac{z_1}{z_2}.$$

Решение

Вычисляем:

$$z_1 + z_2 = (12 + 5i) + (3 - 4i) = 15 + i;$$

$$z_1 - z_2 = (12 + 5i) - (3 - 4i) = 9 + 9i;$$

$$z_1 z_2 = (12 + 5i) \cdot (3 - 4i) = 36 - 48i + 15i + 20 = 56 - 33i;$$

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{12 + 5i}{3 - 4i} = \frac{(12 + 5i) \cdot (3 + 4i)}{(3 - 4i) \cdot (3 + 4i)} = \frac{36 + 48i + 15i - 20}{9 + 16} = \\ &= \frac{16 + 63i}{25} = 0,64 + 2,52i. \end{aligned}$$

2. Комплексные числа $z_1 = -1 + i$, $z_2 = \sqrt{3} + i$ представить в тригонометрической форме и найти $z_1 z_2$ и $\frac{z_1}{z_2}$.

Решение

Проведем необходимые преобразования и вычислим:

$$r_1 = |z_1| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}; \quad \cos \varphi_1 = \frac{-1}{\sqrt{2}}; \quad \sin \varphi_1 = \frac{1}{\sqrt{2}};$$

$$\varphi_1 = \arg z_1 = \frac{3\pi}{4}; \quad z_1 = \sqrt{2} \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right).$$

$$r_2 = |z_2| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2; \quad \cos \varphi_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad \sin \varphi_1 = \frac{1}{2};$$

$$\varphi_1 = \arg z_1 = \frac{\pi}{6}; \quad z_1 = 2 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right).$$

$$z_1 z_2 = \sqrt{2} \cdot 2 \cdot \left[\cos \left(\frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left(\frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{6} \right) \right] = 2\sqrt{2} \cdot \left(\cos \frac{11\pi}{12} + i \sin \frac{11\pi}{12} \right);$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \left[\cos \left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{6} \right) \right] = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \left(\cos \frac{7\pi}{12} + i \sin \frac{7\pi}{12} \right).$$

3. Найти $(-1 + i)^{20}$.

Решение

$$(-1 + i)^{20} = \left[\sqrt{2} \cdot \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right) \right]^{20} = (\sqrt{2})^{20} \cdot \left(\cos \frac{20 \cdot 3\pi}{4} + i \sin \frac{20 \cdot 3\pi}{4} \right) =$$

$$= 1024 \cdot (\cos 15\pi + i \sin 15\pi) = 1024 \cdot (-1 + 0i) = -1024.$$

4. Найти $\sqrt[3]{-1 + i}$.

Решение

Выпишем общую формулу корня

$$\sqrt[3]{-1 + i} = \sqrt[3]{\sqrt{2}} \cdot \left(\cos \frac{\frac{3\pi}{4} + 2k\pi}{3} + i \sin \frac{\frac{3\pi}{4} + 2k\pi}{3} \right), \quad k = 0, 1, 2.$$

Отсюда получаем три значения корня:

$$(\sqrt[3]{-1+i})_1 = \sqrt[6]{2} \cdot \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) \approx 0,79 + 0,79i;$$

$$(\sqrt[3]{-1+i})_2 = \sqrt[6]{2} \cdot \left(\cos \frac{11\pi}{12} + i \sin \frac{11\pi}{12} \right) \approx -1,08 + 0,29i;$$

$$(\sqrt[3]{-1+i})_3 = \sqrt[6]{2} \cdot \left(\cos \frac{19\pi}{12} + i \sin \frac{19\pi}{12} \right) \approx 0,29 - 1,08i. \quad \blacktriangleright$$

5.4. Показательная форма комплексного числа

Рассмотрим показательную функцию $w = e^z$, в которой $z = x + iy$. Такую функцию можно записать в виде

$$w = e^{x+iy} = e^x (\cos y + i \sin y).$$

Данное равенство называется **уравнением Эйлера**.

Для показательной функции комплексного аргумента справедливы следующие **свойства**:

$$1) e^{z_1+z_2} = e^{z_1} e^{z_2};$$

$$2) e^{z_1-z_2} = \frac{e^{z_1}}{e^{z_2}};$$

$$3) (e^z)^m = e^{mz}, \text{ где } m \text{ — целое число.}$$

Если в уравнении Эйлера показатель степени принять за чисто мнимое число ($x = 0$), то получаем

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y.$$

Для его комплексно-сопряженного числа запишем

$$e^{-iy} = \cos y - i \sin y.$$

Из этих двух уравнений получаем

$$\begin{cases} \cos y = \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2}, \\ \sin y = \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i}. \end{cases}$$

Этими формулами пользуются для нахождения значений степеней тригонометрических функций через функции кратных углов.

Если представить комплексное число в тригонометрической форме

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

и воспользоваться формулой Эйлера

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi,$$

в которой $x = 0$, то легко видеть, что

$$z = re^{i\varphi}.$$

Полученное равенство называется **показательной формой комплексного числа**.

Вопросы для самоконтроля

1. Что называется комплексным числом? Приведите примеры комплексных чисел.
2. Что такое действительная и мнимая части комплексного числа?
3. Когда два комплексных числа равны?
4. Какие комплексные числа называются комплексно сопряженными?
5. Что используется для геометрической интерпретации комплексных чисел?
6. Какая точка комплексной плоскости соответствует комплексному числу $x + iy$?
7. Что называется модулем и аргументом комплексного числа?
8. Как можно представить комплексное число в тригонометрической форме?
9. Каким образом определяются арифметические операции над комплексными числами?
10. Как выполняются умножение и деление комплексных чисел, записанных в тригонометрической форме?
11. Как выполняются возведение комплексных чисел в натуральную степень и извлечение корня натуральной степени?
12. Запишите комплексное число в показательной форме.

Задачи для самостоятельного решения

5.1. Выполнить действия над комплексными числами

а) $(2 + 3i) - (4 - 7i)$;

б) $(1 - i)(3 + 2i)$;

в) $\frac{1 + 3i}{1 + i}$;

г) $\frac{(1 - i\sqrt{3})^2}{\sqrt{3} - i}$.

5.2. Записать в тригонометрической форме комплексные числа

$$z_1 = \frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ и } z_2 = \frac{3}{\sqrt{2}} + i\frac{3}{\sqrt{2}}. \text{ Найти } z_1 z_2 \text{ и } \frac{z_1}{z_2}.$$

5.3. Найти z^5 , если $z = 3\left(\cos\frac{\pi}{10} + i\sin\frac{\pi}{10}\right)$.

5.4. Найти $\sqrt[4]{-8 + 8i\sqrt{3}}$.

5.5. Записать в показательной форме комплексные числа
 $z = 2 + 3i$, $z = 1 - i$, $z = \sqrt{3} + i$.

Глава 6

ЭЛЕМЕНТЫ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

6.1. Уравнение линии на плоскости. Уравнение прямой

Уравнением линии на координатной плоскости $xу$ называется уравнение, которому удовлетворяют координаты x и y каждой точки этой линии и не удовлетворяют координаты ни одной точки, не лежащей на этой линии.

В общем случае уравнение линии может быть записано в виде

$$F(x, y) = 0$$

или, если это возможно, в явном виде

$$y = f(x),$$

где $F(x, y)$ и $f(x)$ — некоторые формулы.

Если произвольная точка $M(x, y)$ движется по линии, то ее координаты, все время удовлетворяющие уравнению данной линии, называются **текущими координатами** этой точки.

В принципе, любую линию можно описать соответствующим уравнением, хотя на практике не всегда легко это сделать. Однако не всякое уравнение, связывающее x и y , определяет некоторую линию на плоскости. Например, уравнение $x^2 + y^2 = 0$ определяет только одну точку $(0; 0)$, а уравнению $x^2 + y^2 + 4 = 0$ не удовлетворяют координаты ни одной точки плоскости.

Рассмотрим **виды уравнения прямой на плоскости**.

Уравнение прямой с угловым коэффициентом. **Углом наклона** прямой называется угол α , отсчитываемый до прямой от положительного направления оси x против часовой стрелки. Тангенс этого угла $\operatorname{tg} \alpha$ называется **угловым коэффициентом** прямой и обозначается $k = \operatorname{tg} \alpha$.

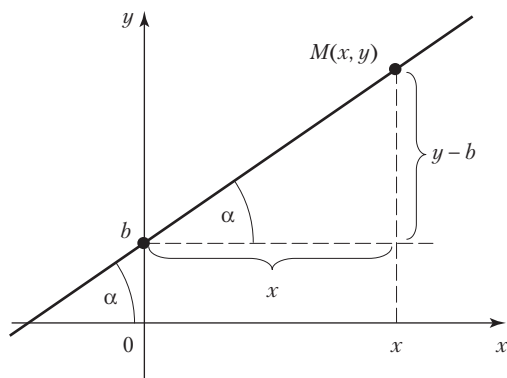


Рис. 6.1. Прямая на плоскости

Пусть прямая отсекает на оси y отрезок b . Из рис. 6.1 очевидно, что

$$k = \operatorname{tg} \alpha = \frac{y - b}{x}.$$

Отсюда следует, что

$$y = kx + b.$$

Это уравнение называется уравнением *прямой с угловым коэффициентом*.

Пример 6.1. Записать уравнение прямой с угловым коэффициентом 3, которая отсекает на оси y отрезок, равный 2.

Решение

Ясно, что $k = 3$; $b = 2$. Тогда уравнение этой прямой $y = 3x + 2$. ►

Рассмотрим **частные случаи** уравнения прямой с угловым коэффициентом.

- если $b = 0$, то уравнение имеет вид $y = kx$ — это уравнение прямой, проходящей через начало координат;
- если $\alpha = 0$, то и $k = \operatorname{tg} \alpha = 0$ и уравнение имеет вид $y = b$ — это уравнение прямой, параллельной оси x . Если и $b = 0$, то получаем уравнение оси x : $y = 0$;
- если $\alpha = \frac{\pi}{2}$, то прямая перпендикулярна оси x и $k = \operatorname{tg} \alpha$ не существует. То есть вертикальная прямая не имеет углового коэффициента. Пусть прямая отсекает на оси x отрезок a . Тогда ясно, что уравнение такой прямой $x = a$.

Уравнение прямой с угловым коэффициентом k , проходящей через данную точку $M_0(x_0, y_0)$. Уравнение прямой с угловым коэффициентом k имеет вид

$$y = kx + b.$$

Поскольку эта прямая проходит через точку $M_0(x_0, y_0)$, то ее координаты должны удовлетворять уравнению

$$y_0 = kx_0 + b.$$

Вычитаем из первого уравнения второе и получаем искомое уравнение:

$$y - y_0 = k(x - x_0).$$

Последнее уравнение определяет пучок прямых, проходящих через точку $M_0(x_0, y_0)$, кроме вертикальной прямой, имеющей уравнение $x = x_0$.

Пример 6.2. Записать уравнение прямой с угловым коэффициентом 3, проходящей через точку $M(1; -2)$.

Решение

$$y - (-2) = 3 \cdot (x - 1) \Rightarrow y + 2 = 3x - 3 \Rightarrow y = 3x - 5. \quad \blacktriangleright$$

Уравнение прямой, проходящей через две данные точки $M_1(x_1, y_1)$, и $M_2(x_2, y_2)$. Уравнение прямой, проходящей через заданную точку $M_1(x_1, y_1)$ имеет вид

$$y - y_1 = k(x - x_1).$$

Но так как прямая проходит и через точку $M_2(x_2, y_2)$, то при подстановке ее координат в последнее уравнение вместо x и y равенство должно также сохраняться

$$y_2 - y_1 = k(x_2 - x_1),$$

откуда угловой коэффициент k равен

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Подставляя выражение для k в предыдущее уравнение, получаем

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot (x - x_1)$$

и окончательно

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}.$$

Заметим, что нет принципиальной разницы, какую точку выбирать за M_1 , а какую — за M_2 .

Пример 6.3. Записать уравнение прямой, проходящей через точки $M_1(3; -1)$ и $M_2(1; 1)$.

Решение

$$\frac{y - (-1)}{1 - (-1)} = \frac{x - 3}{1 - 3} \Rightarrow \frac{y + 1}{2} = \frac{x - 3}{-2} \Rightarrow y = -x + 2. \quad \blacktriangleright$$

Уравнение прямой в отрезках. Пусть прямая отсекает на осях x и y соответственно отрезки $a \neq 0$ и $b \neq 0$. Тогда она пересекает оси через точки с координатами $(a, 0)$ и $(0, b)$. Подставляем эти координаты в уравнение прямой, проходящей через две точки:

$$\begin{aligned} \frac{y - 0}{b - 0} &= \frac{x - a}{0 - a} \Rightarrow \frac{y}{b} = -\frac{x}{a} + 1 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1. \end{aligned}$$

Последнее уравнение и называется *уравнением прямой в отрезках*.

Пример 6.4. Записать уравнение прямой, пересекающей ось x в точке $(2; 0)$, а ось y — в точке $(0; -3)$.

Решение

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{-3} = 1 \Rightarrow -3x + 2y = -6 \Rightarrow y = \frac{3}{2}x - 3. \quad \blacktriangleright$$

Общее уравнение прямой. Общим уравнением прямой на плоскости называется уравнение вида

$$Ax + By + C = 0,$$

где A, B, C — действительные числа, а A и B не равны одновременно нулю, т.е. $A^2 + B^2 \neq 0$.

В отличие от уравнения пучка прямых общее уравнение включает и уравнение любой вертикальной прямой.

Заметим, что прямая будет пересекать ось $0x$ в точке $x = -\frac{C}{A}$, а ось $0y$ — в точке $y = -\frac{C}{B}$.

Уравнение прямой по точке и вектору нормали. В декартовой прямоугольной системе координат вектор $\vec{n} = (A, B)$ перпендикулярен прямой $Ax + By + C = 0$, компоненты которой являются координатами вектора.

Пример 6.5. Найти уравнение прямой, проходящей через точку $M(1; 2)$ перпендикулярно вектору $\vec{n} = (3; -1)$.

Решение

Составим при $A = 3$ и $B = -1$ уравнение прямой:

$$3x - y + C = 0.$$

Для нахождения коэффициента C подставим в полученное выражение координаты заданной точки M . Получаем

$$3 - 2 + C = 0,$$

следовательно $C = -1$. Тогда искомое уравнение примет вид

$$3x - y - 1 = 0. \quad \blacktriangleright$$

Уравнение прямой по точке и направляющему вектору.

По аналогии с пунктом, рассматривающим уравнение прямой через вектор нормали можно ввести задание прямой через точку и направляющий вектор прямой.

Каждый ненулевой вектор $\vec{a} = (a_1, a_2)$, компоненты которого удовлетворяют условию $Aa_1 + Ba_2 = 0$, называется *направляющим* вектором прямой $Ax + By + C = 0$.

Пример 6.6. Найти уравнение прямой с направляющим вектором $\vec{a} = (1; -1)$ и проходящей через точку $M(1; 2)$.

Решение

Уравнение искомой прямой будем искать в виде $Ax + By + C = 0$. В соответствии с определением, коэффициенты должны удовлетворять условию

$$1 \cdot A + (-1) \cdot B = 0, \text{ т.е. } A = B.$$

Тогда уравнение прямой имеет вид $Ax + By + C = 0$ или $x + y + C/A = 0$. При $x = 1, y = 2$ получаем $\frac{C}{A} = -3$, т.е. искомое уравнение

$$x + y - 3 = 0. \quad \blacktriangleright$$

6.2. Условия параллельности и перпендикулярности прямых

Углом между двумя прямыми $y_1 = k_1x + b_1$ и $y_2 = k_2x + b_2$ называется угол φ , образованный этими прямыми при пересечении и лежащий в диапазоне $0 \leq \varphi \leq \pi$.

Обозначим $k_1 = \operatorname{tg} \alpha_1$; $k_2 = \operatorname{tg} \alpha_2$. Из рис. 6.2 очевидно, что

$$\alpha_2 = \alpha_1 + \varphi; \quad \varphi = \alpha_2 - \alpha_1.$$

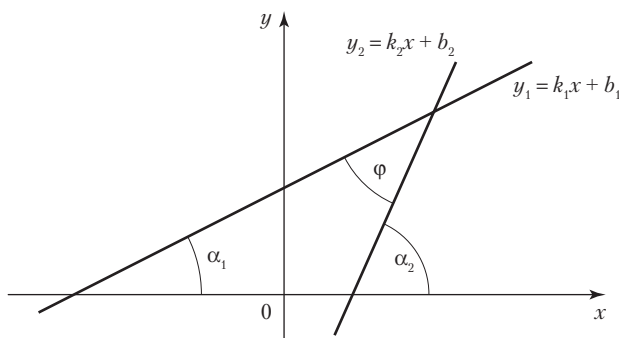


Рис. 6.2. Взаимное расположение прямых

Тогда

$$\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg}(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{\operatorname{tg} \alpha_2 - \operatorname{tg} \alpha_1}{1 + \operatorname{tg} \alpha_2 \cdot \operatorname{tg} \alpha_1} = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}. \quad (*)$$

Пример 6.7. Определить угол между прямыми $y_1 = 2x + 1$; $y_2 = -3x + 2$.

Решение

По условию примера

$$k_1 = 2; k_2 = -3 \Rightarrow \operatorname{tg} \varphi = \frac{-3 - 2}{1 + 2 \cdot (-3)} = 1; \quad \varphi = \frac{\pi}{4}. \quad \blacktriangleright$$

Если прямые $y_1 = k_1x + b_1$ и $y_2 = k_2x + b_2$ *параллельны*, то угол $\varphi = 0$ и $\operatorname{tg} \varphi = 0$. Поэтому из формулы (*) запишем

$$k_1 = k_2.$$

И наоборот, если $k_1 = k_2$, то по формуле (*) $\operatorname{tg} \varphi = 0$ и $\varphi = 0$.

Таким образом, равенство угловых коэффициентов является **необходимым и достаточным условием параллельности** двух прямых.

Если прямые *перпендикулярны*, то $\varphi = \frac{\pi}{2}$ и $\operatorname{ctg} \varphi = \frac{1}{\operatorname{tg} \varphi} = \frac{1 + k_1 k_2}{k_2 - k_1} = 0$.

Отсюда $k_1 \cdot k_2 = -1$ или

$$k_1 = -\frac{1}{k_2}.$$

Справедливо также и обратное утверждение. Таким образом, для **перпендикулярности** прямых необходимо и достаточно, чтобы их угловые коэффициенты были обратными по величине и противоположными по знаку.

Если прямые заданы общими уравнениями $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$, то, учитывая, что их угловые коэффициенты $k_1 = -\frac{A_1}{B_1}$ и $k_2 = -\frac{A_2}{B_2}$, **условие параллельности прямых** $k_1 = k_2$ примет вид

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}.$$

Следовательно, условием параллельности прямых, заданных общими уравнениями, является пропорциональность коэффициентов при переменных.

Условие перпендикулярности прямых $k_1 \cdot k_2 = -1$ в этом случае примет вид

$$\left(-\frac{A_1}{B_1}\right) \cdot \left(-\frac{A_2}{B_2}\right) = -1$$

или

$$A_1A_2 + B_1B_2 = 0,$$

т.е. условием перпендикулярности двух прямых, заданных общими уравнениями, является равенство нулю суммы произведений коэффициентов при переменных x и y .

Пример 6.8. Составить уравнения двух прямых, проходящих через точку $M(2;1)$, одна из которых параллельна прямой $3x - 2y + 2 = 0$, а другая перпендикулярна этой прямой.

Решение

Уравнение пучка прямых, проходящих через точку $M(2; 1)$, имеет вид

$$y - 1 = k \cdot (x - 2).$$

Перепишем исходное уравнение прямой в виде $y = \frac{3}{2}x + 1$.

В этом уравнении $k = \frac{3}{2}$. У прямой, параллельной этой прямой,

угловой коэффициент также должен быть равен $k = \frac{3}{2}$.

Поэтому уравнение искомой прямой имеет вид

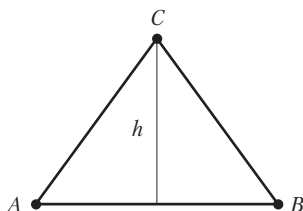
$$C-1 = \frac{3}{2} \cdot (x-2), \text{ т.е. } y = \frac{3}{2}x - 2.$$

У прямой, перпендикулярной данной прямой, угловой коэффициент должен быть равен $-\frac{1}{k}$, т.е. $-\frac{2}{3}$.

Следовательно, уравнение запишется как

$$y-1 = -\frac{2}{3} \cdot (x-2) \text{ или } y = -\frac{2}{3}x + \frac{7}{3}. \quad \blacktriangleright$$

Пример 6.9. Даны вершины треугольника $A(0; 1)$, $B(6; 5)$, $C(12; -1)$. Найти уравнение высоты, проведенной из вершины C .



Решение

Находим уравнение стороны AB :

$$\frac{x-0}{6-0} = \frac{y-1}{5-1}$$

или

$$y = \frac{2}{3}x + 1.$$

Искомое уравнение высоты имеет вид $y = kx + b$. Учитывая перпендикулярность высоты h к стороне AB , запишем:

$$k = -\frac{3}{2}.$$

Тогда

$$y = -\frac{3}{2}x + b.$$

Так как высота проходит через точку C , то ее координаты удовлетворяют уравнению

$$-1 = -\frac{3}{2} \cdot 12 + b,$$

откуда $b = 17$.

Таким образом,

$$y = -\frac{3}{2}x + 17.$$

Или

$$3x + 2y - 34 = 0.$$



6.3. Расстояние от точки до прямой

Пусть даны точка $M(x_0, y_0)$ и прямая $Ax + By + C = 0$. Под **расстоянием** d от точки M до прямой понимается длина перпендикуляра, опущенного из точки M на данную прямую (рис. 6.3).

Для определения расстояния d необходимо:

а) составить уравнение прямой MN , перпендикулярной данной и проходящей через точку $M(x_0, y_0)$.

Уравнение заданной в условии прямой с угловым коэффициентом имеет вид

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}.$$

То есть ее угловой коэффициент равен $k = -\frac{A}{B}$. Угловой коэффициент перпендикулярной прямой равен $-\frac{1}{k} = \frac{B}{A}$. Тогда уравнение перпендикулярной прямой, проходящей через точку M , имеет вид

$$MN: y - y_0 = \frac{B}{A} \cdot (x - x_0)$$

или

$$Bx - Ay - (Bx_0 - Ay_0) = 0;$$

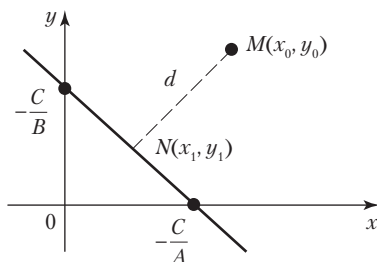


Рис. 6.3. Расстояние от точки до прямой

б) найти координаты x_1 и y_1 точки N , являющейся точкой пересечения данной прямой и перпендикулярной. Эти координаты находятся путем решения системы уравнений

$$\begin{cases} Ax + By = -C, \\ Bx - Ay = Bx_0 - Ay_0. \end{cases}$$

Решаем эту систему по правилу Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & -A \end{vmatrix} = -(A^2 + B^2);$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -C & B \\ Bx_0 - Ay_0 & -A \end{vmatrix} = AC - B^2x_0 + AB y_0;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} A & -C \\ B & Bx_0 - Ay_0 \end{vmatrix} = ABx_0 + A^2y_0 + BC.$$

Отсюда

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = -\frac{AC - B^2x_0 + AB y_0}{A^2 + B^2};$$

$$y_1 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = -\frac{ABx_0 + A^2y_0 + BC}{A^2 + B^2};$$

в) найти расстояние между двумя точками $M(x_0, y_0)$ и $N(x_1, y_1)$ по известной формуле

$$\begin{aligned} d &= \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2} = \\ &= \sqrt{\left(\frac{B^2x_0 - AB y_0 - AC}{A^2 + B^2} - x_0\right)^2 + \left(\frac{A^2y_0 - ABx_0 - BC}{A^2 + B^2} - y_0\right)^2} = \\ &= \frac{1}{A^2 + B^2} \cdot \sqrt{A^2 \cdot (Ax_0 + By_0 + C)^2 + B^2 \cdot (Ax_0 + By_0 + C)^2} = \\ &= \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \end{aligned}$$

Окончательно запишем формулу *расстояния между точкой и прямой*:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Пример 6.10. Найти расстояние от точки $M(2; 1)$ до прямой $3x + 4y + 15 = 0$.

Решение

В данном случае $x_0 = 2$; $y_0 = 1$; $A = 3$; $B = 4$; $C = 15$. По формуле находим расстояние d :

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|3 \cdot 2 + 4 \cdot 1 + 15|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 5. \quad \blacktriangleright$$

6.4. Окружность и эллипс

Окружностью называется геометрическое место точек, равноудаленных от точки, называемой центром окружности.

Пусть дана окружность (рис. 6.4) радиуса R с центром в точке $O(x_0, y_0)$.

Для произвольной точки $M(x, y)$, лежащей на окружности, выполняется условие $OM = R$. Используя формулу расстояния между двумя точками, получим

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = R$$

или после возведения в квадрат двух положительных частей уравнения запишем равносильное уравнение:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2. \quad (6.1)$$

Координаты каждой точки $M(x, y)$ окружности удовлетворяют этому уравнению. Нетрудно показать, что координаты любой точки, не лежащей на этой окружности, этому уравнению не удовлетворяют.

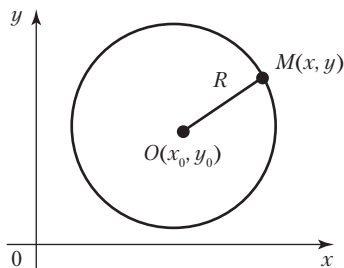


Рис. 6.4. Вид окружности

Уравнение (6.1) называется **нормальным уравнением окружности**. В частности, уравнение окружности с центром в начале координат ($x_0 = 0$; $y_0 = 0$) имеет вид

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

Уравнение окружности радиуса R с центром в точке с координатами (x_0, y_0) , приведенное выше, можно получить из уравнения

$$Ax^2 + Ay^2 + Dx + Ey + F = 0, \quad (6.2)$$

которое называется **общим уравнением окружности**.

Поделив это уравнение на A и дополнив члены содержащие x и y , до полного квадрата, получим

$$\left(x + \frac{D}{2A}\right)^2 + \left(y + \frac{E}{2A}\right)^2 = \frac{D^2 + E^2 - 4AF}{4A^2}.$$

Сравним полученное уравнение с уравнением (6.1). Видим, что для того, чтобы уравнение (6.2) являлось уравнением окружности, должно дополнительно выполняться условие

$$D^2 + E^2 - 4AF > 0.$$

Из этого же сравнения следуют формулы для координат ее центра окружности и ее радиуса:

$$x_0 = -\frac{D}{2A}; \quad y_0 = -\frac{E}{2A}; \quad R = \frac{\sqrt{D^2 + E^2 - 4AF}}{2 \cdot |A|}.$$

Пример 6.11. Найти координаты центра и радиус окружности

$$x^2 + y^2 + 16y - 9 = 0.$$

Решение

Из уравнения окружности выпишем $A = 1$; $D = 0$; $E = 16$; $F = -9$. Подставляя эти значения в формулы, получаем решение задачи:

$$\begin{aligned} x_0 &= -\frac{D}{2A} = -\frac{0}{2 \cdot 1} = 0; \quad y_0 = -\frac{E}{2A} = -\frac{16}{2A} = -\frac{16}{2 \cdot 1} = -8. \\ R &= \frac{\sqrt{D^2 + E^2 - 4AF}}{2 \cdot |A|} = \frac{\sqrt{0^2 + 16^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-9)}}{2 \cdot 1} = \\ &= \frac{\sqrt{256 + 36}}{2} = \sqrt{73}. \end{aligned}$$



Если в уравнении (6.2) значение коэффициента при y^2 не равно значению A (как при x^2), то уравнение (6.2) уже не будет уравнением окружности.

Если в уравнении

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad (6.3)$$

величины A и C имеют одинаковые знаки, причем $A \neq C$, то это уравнение описывает кривую на плоскости, называемую **эллипсом**.

Преобразуем это уравнение:

$$A \cdot \left(x^2 + \frac{D}{A}x + \frac{D^2}{4A^2} \right) + C \cdot \left(y^2 + \frac{E}{C}y + \frac{E^2}{4C^2} \right) - \frac{D^2}{4A^2} - \frac{E^2}{4C^2} + F = 0$$

или

$$A \cdot \left(x + \frac{D}{2A} \right)^2 + C \cdot \left(y + \frac{E}{2C} \right)^2 = \frac{D^2}{4A} + \frac{E^2}{4C} - F.$$

Обозначим:

$$x_0 = -\frac{D}{2A}; \quad y_0 = -\frac{E}{2C}; \quad \delta = \frac{D^2}{4A} + \frac{E^2}{4C} - F.$$

Окончательно исходное уравнение переписывается в виде

$$A \cdot (x - x_0)^2 + C \cdot (y - y_0)^2 = \delta.$$

Если величины A , C и δ имеют *одинаковые знаки*, то последнее уравнение также описывает замкнутую кривую на плоскости, называемую **эллипсом**, с центром в точке (x_0, y_0) .

Пусть $x_0 = y_0 = 0$, что означает, что центр эллипса находится в начале координат. Разделив уравнение на δ и положив

$$a = \sqrt{\frac{\delta}{A}} \quad \text{и} \quad b = \sqrt{\frac{\delta}{C}},$$

получим уравнение

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

которое называется **каноническим уравнением эллипса**.

Если $a = b$, то получаем уравнение *окружности*, являющейся, таким образом, частным случаем эллипса:

$$x^2 + y^2 = a^2.$$

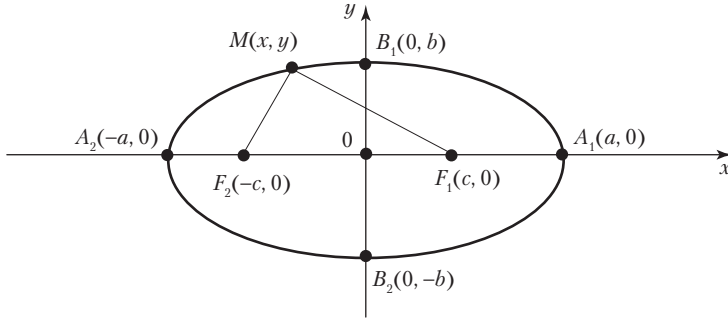


Рис. 6.5. Вид эллипса

Пусть $a > b$. Тогда числа a и b называются соответственно **большой** и **малой полуосями** эллипса (рис. 6.5).

Центром эллипса называется точка пересечения его полуосей.

Точки $F_1(c, 0)$ и $F_2(-c, 0)$, где $c = \sqrt{a^2 - b^2}$, называются **фокусами** эллипса, а отношение $\varepsilon = \frac{c}{a}$ — его **эксцентриситетом**.

Эксцентриситет характеризует форму эллипса — чем величина ε больше, тем эллипс более сжатый. Ясно, что $0 \leq \varepsilon < 1$, причем если $\varepsilon = 0$, то эллипс вырождается в окружность, для которой $a = b$.

Точки $A_1(a, 0)$, $A_2(-a, 0)$, $B_1(0, b)$ и $B_2(0, -b)$ называются **вершинами эллипса**.

Что касается фокусов эллипса, то можно легко показать, что сумма расстояний от любой точки эллипса до ее фокусов постоянна и равна $2a$. То есть $|MF_1 + MF_2| = 2a$. Это **характеристическое свойство эллипса** часто принимают за определение эллипса.

Если центр эллипса лежит не в начале координат, а в точке (x_0, y_0) , то каноническое уравнение эллипса имеет вид

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1.$$

Если в каноническом уравнении эллипса $a < b$, то $c = \sqrt{b^2 - a^2}$ и фокусы располагаются по оси Oy , т.е. $F_1(0, c)$ и $F_2(0, -c)$.

Пример 6.12. Определить вид и расположение кривой

$$x^2 + 2y^2 - 4x + 16y = 0.$$

Если это эллипс, то найти его полуоси, эксцентриситет, а также координаты центра и фокусов.

Решение

Так как коэффициенты при x^2 и y^2 одного знака, то данная кривая описывает эллипс. Получим его каноническое уравнение

$$(x^2 - 4x + 4) + 2 \cdot (y^2 + 8y + 16) - 4 - 32 = 0;$$

$$(x - 2)^2 + 2 \cdot (y + 4)^2 = 36;$$

$$\frac{(x - 2)^2}{36} + \frac{(y + 4)^2}{18} = 1; \quad \frac{(x - 2)^2}{6^2} + \frac{(y + 4)^2}{(3\sqrt{2})^2} = 1.$$

Отсюда очевидно, что центр эллипса лежит в точке с координатами $(2; -4)$. Большая полуось эллипса $a = 6$; малая $b = 3\sqrt{2}$.

Тогда $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{36 - 18} = 3\sqrt{2}$; эксцентриситет

$$\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{3\sqrt{2}}{6} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Чтобы найти координаты фокусов, нужно к абсциссе центра прибавить c и от абсциссы центра отнять c . Ордината фокусов при этом совпадает с ординатой центра:

$$F_1(2 + 3\sqrt{2}, -4); \quad F_2(2 - 3\sqrt{2}, -4). \quad \blacktriangleright$$

Пример 6.13. Составить уравнение прямой, проходящей через левый фокус и нижнюю вершину эллипса, заданного уравнением

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1.$$

Решение

- 1) координаты нижней вершины $x = 0$; $y^2 = 16$; $y = -4$;
- 2) координаты левого фокуса $c^2 = a^2 - b^2 = 25 - 16 = 9$; $c = 3$; $F_2(-3; 0)$;
- 3) уравнение прямой, проходящей через две точки,

$$\frac{x - 0}{-3 - 0} = \frac{y + 4}{0 + 4}; \quad \frac{x}{-3} = \frac{y + 4}{4};$$

$$4x = -3y - 12; \quad 4x + 3y + 12 = 0. \quad \blacktriangleright$$

Пример 6.14. Составить уравнение эллипса, если его фокусы $F_1(0; 0)$, $F_2(1; 1)$, большая ось равна 2. Центр эллипса находится в начале координат.

Решение

Уравнение эллипса имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Расстояние между фокусами

$$2c = \sqrt{(1-0)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{2}.$$

Таким образом, $a^2 - b^2 = c^2 = 1/2$. По условию $2a = 2$, следовательно, $a = 1$, $b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{1 - 1/2} = \sqrt{2}/2$. Окончательно

$$\frac{x^2}{1^2} + \frac{y^2}{1/2} = 1. \quad \blacktriangleright$$

6.5. Гипербола и парабола

Если в уравнении $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ величины A и C имеют разные знаки, то это уравнение описывает кривую на плоскости, называемую **гиперболой**.

Если в уравнении $A \cdot (x - x_0)^2 + C \cdot (y - y_0)^2 = \delta$ положить, что $A > 0$, $C < 0$, а $x_0 = y_0 = 0$, то разделив уравнение

$$Ax^2 - |C|y^2 = \delta$$

на δ и обозначив $a = \sqrt{\frac{\delta}{A}}$ и $b = \sqrt{\frac{\delta}{|C|}}$,

получим **каноническое уравнение гиперболы**:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Так же как и эллипс, гипербола имеет **фокусы** — точки $F_1(c, 0)$ и $F_2(-c, 0)$, в которых $c = \sqrt{a^2 + b^2}$, а ее **эксцентриситет** $\epsilon = \frac{c}{a}$ принимает любые значения, большие единицы.

Вершины гиперболы — точки $A_1(a, 0)$ и $A_2(-a, 0)$. График гиперболы изображен на рис. 6.6.

Можно показать, что для любой точки гиперболы $M(x, y)$ абсолютная величина разности ее расстояний до фокусов

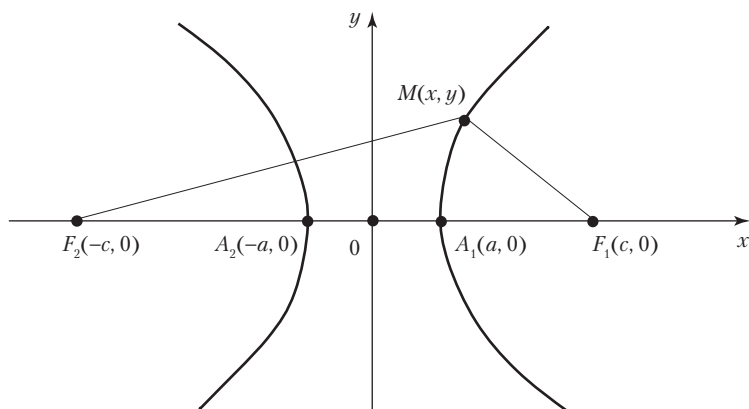


Рис. 6.6. Вид гиперболы

есть величина постоянная и равная $2a$. То есть выполняется равенство

$$|MF_2 - MF_1| = 2a.$$

Это **характеристическое свойство** гиперболы часто принимают за определение гиперболы.

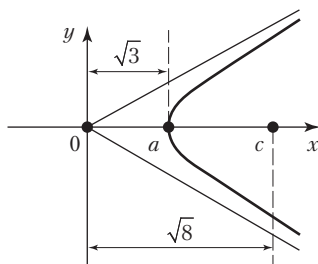
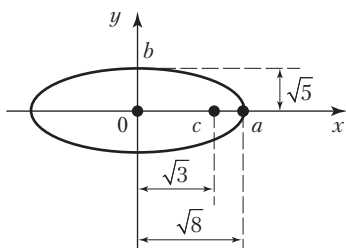
Пример 6.15. Найти уравнение гиперболы, вершины которой находятся в фокусах, а фокусы — в вершинах данного эллипса

$$\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{5} = 1.$$

Решение

Для эллипса $c^2 = a^2 - b^2$; для гиперболы $c^2 = a^2 + b^2$. Из исходного уравнения для эллипса $a = \sqrt{8}$; $b = \sqrt{5} \Rightarrow c = \sqrt{8 - 5} = \sqrt{3}$.

Для гиперболы $a = \sqrt{3}$; $b = \sqrt{5} \Rightarrow c = \sqrt{3 + 5} = \sqrt{8}$.



Следовательно, уравнение гиперболы

$$\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{5} = 1. \quad \blacktriangleright$$

Пример 6.16. Составить уравнение гиперболы, если ее эксцентриситет равен 2, а фокусы совпадают с фокусами эллипса с уравнением

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

Решение

По условию из уравнения эллипса $a^2 = 25$; $b^2 = 9$. Найдем квадрат расстояния между фокусами эллипса: $c^2 = 25 - 9 = 16$.

Тогда и для гиперболы по условию задачи выполняется равенство: $c^2 = a^2 + b^2 = 16$.

Из $e = c/a = 2 \Rightarrow c = 2a \Rightarrow c^2 = 4a^2 = 16$. Тогда $a^2 = 4$ и $b^2 = 16 - 4 = 12$.

Таким образом $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$ — искомое уравнение гиперболы. $\blacktriangleright$

Пусть теперь в уравнении

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

один из коэффициентов A или C равен нулю. Пусть для определенности $C = 0$. При этом положим, что A и E не равны нулю.

Получаем уравнение **параболы**

$$Ax^2 + Dx + Ey + F = 0.$$

Дополним члены, содержащие x , до полного квадрата:

$$A \cdot \left(x^2 + \frac{D}{A}x + \frac{D^2}{4A^2} \right) - \frac{D^2}{4A^2} + F = -Ey;$$

$$A \cdot \left(x + \frac{D}{2A} \right)^2 = -Ey + \frac{D^2}{4A} - F;$$

$$\left(x + \frac{D}{2A} \right)^2 = -\frac{E}{A}y + \frac{D^2}{4A^2} - \frac{F}{A};$$

$$\left(x + \frac{D}{2A} \right)^2 = -\frac{E}{A} \left(y - \frac{D^2}{4AE} + \frac{F}{E} \right).$$

Обозначив

$$x_0 = -\frac{D}{2A}; y_0 = \frac{D^2}{4AE} - \frac{F}{E};$$

$$2p = -\frac{E}{A},$$

получаем

$$(x - x_0)^2 = 2p \cdot (y - y_0).$$

Это уравнение описывает кривую, которая называется *параболой* относительно оси Oy . Точка (x_0, y_0) — вершина параболы.

Если вершина параболы расположена в начале координат, то уравнение параболы принимает вид

$$2py = x^2.$$

Величина p называется **параметром** параболы. Точка $F(0; p/2)$ называется **фокусом** параболы, а прямая $y = -p/2$ — ее **директрисой** (рис. 6.7).

Можно показать, что парабола представляет собой множество всех точек плоскости, равноотстоящих от фокуса и от директрисы: $FM = MP$. Это *характеристическое свойство* часто принимают за определение параболы.

Пусть теперь в общем уравнении $A = 0$. Тогда получаем уравнение параболы относительно Ox :

$$Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

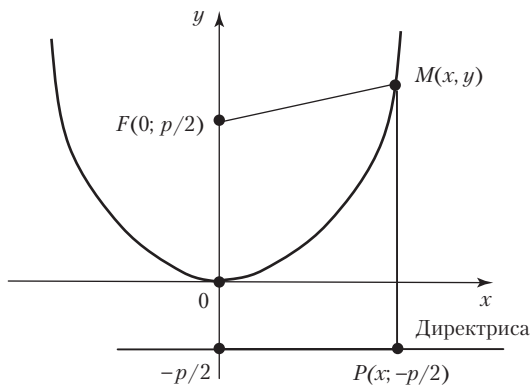


Рис. 6.7. Вид параболы

с координатами вершины $y_0 = -\frac{E}{2C}$; $E_0 = \frac{E^2}{4!D} - \frac{F}{D}$.

Пример 6.17. На параболе $y^2 = 8x$ найти точку, расстояние до которой от директрисы равно 4.

Решение

Из уравнения параболы получаем $p=4$. В соответствии с рис. 6.7 расстояние $r = x + p/2 = 4$. Следовательно: $x=2$; $y^2=16$; $y=\pm 4$.

Искомые точки: $M_1(2; 4)$, $M_2(2; -4)$. ►

6.6. Понятие об уравнении плоскости и прямой в пространстве

Общее уравнение плоскости в пространстве записывается в виде

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

При этом A , B , C не равны одновременно нулю, т.е. $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$.

Можно доказать, что всякое уравнение первой степени с тремя переменными есть уравнение плоскости в пространстве.

Возможны следующие **частные случаи** расположения плоскости относительно трехмерной системы координат:

1. $A = 0$ — плоскость параллельна оси Ox .
2. $B = 0$ — плоскость параллельна оси Oy .
3. $C = 0$ — плоскость параллельна оси Oz .
4. $D = 0$ — плоскость проходит через начало координат.
5. $A = B = 0$ — плоскость параллельна плоскости xOy .
6. $A = C = 0$ — плоскость параллельна плоскости xOz .
7. $B = C = 0$ — плоскость параллельна плоскости yOz .
8. $A = D = 0$ — плоскость проходит через ось Ox .
9. $B = D = 0$ — плоскость проходит через ось Oy .
10. $C = D = 0$ — плоскость проходит через ось Oz .
11. $A = B = D = 0$ — плоскость совпадает с плоскостью xOy .
12. $A = C = D = 0$ — плоскость совпадает с плоскостью xOz .
13. $B = C = D = 0$ — плоскость совпадает с плоскостью yOz .

Пусть даны две плоскости

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \text{ и } A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$$

Тогда **условием** их **параллельности** является пропорциональность коэффициентов при одноименных переменных, т.е.

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2},$$

а **условием** их **перпендикулярности**

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0.$$

Виды задания прямой в пространстве

1. Прямая в пространстве может быть задана **как линия пересечения двух плоскостей**, т.е. как множество точек, удовлетворяющих системе уравнений

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases}$$

2. Если прямая параллельна вектору $\vec{s} = (m, n, p)$ и проходит через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$, то ее уравнения могут быть получены из условия параллельности вектора $\overrightarrow{MM_0} = (x_0 - x, y_0 - y, z_0 - z)$, где $M(x, y, z)$ — текущая точка на прямой, и вектора $\vec{s} = (m, n, p)$, т.е.

$$\frac{x_0 - x}{m} = \frac{y_0 - y}{n} = \frac{z_0 - z}{p}.$$

Эти уравнения называются **каноническими уравнениями прямой в пространстве**.

Можно показать, что необходимым и достаточным **условием параллельности прямой**, заданной вышеуказанными каноническими уравнениями, и **плоскости** $Ax + By + Cz + D = 0$ является условие

$$Am + Bn + Cp = 0,$$

а **условием** их **перпендикулярности**

$$\frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p}.$$

Рассмотрим **формы задания уравнения плоскости**.

Уравнение плоскости, проходящей через три точки

Для того чтобы через три какие-либо точки пространства можно было провести единственную плоскость, необходимо, чтобы эти точки не лежали на одной прямой.

Рассмотрим точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$ в декартовой системе координат.

Для того чтобы произвольная точка $M(x, y, z)$ лежала в одной плоскости с точками M_1, M_2, M_3 , необходимо, чтобы векторы $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\overrightarrow{M_1M_3}$, $\overrightarrow{M_1M}$ были компланарны. Тогда их смешанное произведение

$$(\overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_1M_3}, \overrightarrow{M_1M}) = 0.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{M_1M} &= (x - x_1; y - y_1; z - z_1); \\ \overrightarrow{M_1M_2} &= (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1); \\ \overrightarrow{M_1M_3} &= (x_3 - x_1; y_3 - y_1; z_3 - z_1),\end{aligned}$$

а уравнение плоскости, проходящей через три точки, имеет вид

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Уравнение плоскости по двум точкам и вектору, параллельному плоскости

Пусть заданы точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ и вектор $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$.

Составим уравнение плоскости, проходящей через данные точки M_1 и M_2 и произвольную точку $M(x, y, z)$ параллельно вектору $\vec{a}$.

Векторы

$\overrightarrow{M_1M} = (x - x_1; y - y_1; z - z_1)$; $\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$ и вектор $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ должны быть компланарны, т.е.

$$(\overrightarrow{M_1M}, \overrightarrow{M_1M_2}, \vec{a}) = 0.$$

Уравнение плоскости имеет вид

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Уравнение плоскости по одной точке и двум векторам, параллельным плоскости

Пусть заданы два вектора $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ и $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$, параллельные плоскости. Тогда для произвольной точки $M(x, y, z)$, принадлежащей плоскости, векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\overrightarrow{MM_1}$ должны быть компланарны.

В этом случае уравнение плоскости

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Уравнение плоскости по точке и вектору нормали

Для произвольной точки $M(x, y, z)$, принадлежащей плоскости, составим вектор $\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$. Так как вектор $\vec{N} = (A, B, C)$ — вектор нормали, то он перпендикулярен плоскости, а следовательно, перпендикулярен и вектору $\overrightarrow{M_0M}$. Тогда скалярное произведение

$$\langle \overrightarrow{M_0M}, \vec{N} \rangle = 0.$$

Таким образом, получаем уравнение плоскости:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

Уравнение плоскости в отрезках

Если в общем уравнении $Ax + By + Cz + D = 0$ поделить обе части на $-D$, то

$$-\frac{A}{D}x - \frac{B}{D}y - \frac{C}{D}z - 1 = 0.$$

Заменив $-\frac{D}{A} = a$, $-\frac{D}{B} = b$, $-\frac{D}{C} = c$, получим уравнение плоскости в отрезках:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$$

Числа a, b, c являются точками пересечения плоскости соответственно с осями x, y, z .

В заключение запишем формулу для вычисления расстояния от произвольной точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Пример 6.18. Найти уравнение плоскости, зная, что точка $P(4; -3; 12)$ — основание перпендикуляра, опущенного из начала координат на эту плоскость.

Решение

$$\overline{OP} = (4; -3; 12); |\overline{OP}| = \sqrt{16 + 9 + 144} = \sqrt{169} = 13.$$

Тогда вектор нормали

$$\vec{N} = \left(\frac{4}{13}; -\frac{3}{13}; \frac{12}{13} \right).$$

Таким образом, $A = 4/13$; $B = -3/13$; $C = 12/13$. Воспользуемся формулой

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

После подстановки соответствующих значений получим

$$\frac{4}{13}(x - 4) - \frac{3}{13}(y + 3) + \frac{12}{13}(z - 12) = 0$$

или

$$4x - 3y + 12z - 169 = 0. \quad \blacktriangleright$$

Пример 6.19. Найти уравнение плоскости, проходящей через две точки $P(2; 0; -1)$ и $Q(1; -1; 3)$ перпендикулярно плоскости $3x + 2y - z + 5 = 0$.

Решение

Вектор нормали к плоскости $3x + 2y - z + 5 = 0$ будет $\vec{N} = (3; 2; -1)$. Он параллелен искомой плоскости. Тогда

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-0 & z+1 \\ 1-2 & -1-0 & 3+1 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = (x-2)(1-8) - y(1-12) + (z+1)(-2+3) = 0$$

или

$$-7x + 11y + z + 15 = 0. \quad \blacktriangleright$$

Пример 6.20. Найти уравнение плоскости, проходящей через точки $A(2; -1; 4)$ и $B(3; 2; -1)$ перпендикулярно плоскости $x + y + 2z - 3 = 0$.

Решение

В отличие от примера 6.19 решим эту задачи иначе. Искомое уравнение плоскости имеет вид $Ax + By + Cz + D = 0$, вектор нормали к этой плоскости $\vec{n}_1 = (A, B, C)$.

Вектор $\overrightarrow{AB} = (1; 3; -5)$ принадлежит плоскости. Заданная плоскость, перпендикулярная искомой, имеет вектор нормали $\vec{n}_2 = (1; 1; 2)$.

Так как точки A и B принадлежат обеим плоскостям, а плоскости взаимно перпендикулярны, то

$$\begin{aligned}\vec{n}_1 = \overrightarrow{AB} \times \vec{n}_2 &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 3 & -5 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = \\ &= 11\vec{i} - 7\vec{j} - 2\vec{k}.\end{aligned}$$

Таким образом, вектор нормали $\vec{n}_1 = (11; -7; -2)$. Так как точка A принадлежит искомой плоскости, то ее координаты должны удовлетворять уравнению этой плоскости, т.е. $11 \cdot 2 + 7 \cdot 1 - 2 \cdot 4 + D = 0 \Rightarrow D = -21$.

Таким образом, получаем уравнение плоскости:

$$11x - 7y - 2z - 21 = 0.$$



Пример 6.21. Даны координаты вершин пирамиды $A_1(1; 0; 3)$, $A_2(2; -1; 3)$, $A_3(2; 1; 1)$, $A_4(1; 2; 5)$.

1. Найти длину ребра A_1A_2 .

$$\overrightarrow{A_1A_2} = (2-1; -1-0; 3-3) = (1; -1; 0); \quad |\overrightarrow{A_1A_2}| = \sqrt{1+1+0} = \sqrt{2}.$$

2. Найти угол между ребрами A_1A_2 и A_1A_4 .

$$\overrightarrow{A_1A_4} = (1-1; 2-0; 5-3) = (0; 2; 2); \quad |\overrightarrow{A_1A_4}| = 2\sqrt{2}.$$

С одной стороны

$$\overrightarrow{A_1A_2} \cdot \overrightarrow{A_1A_4} = (1; -1; 0)(0; 2; 2) = -2.$$

По другой формуле

$$\overrightarrow{A_1A_2} \cdot \overrightarrow{A_1A_4} = |\overrightarrow{A_1A_2}| |\overrightarrow{A_1A_4}| \cos \alpha = 2\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2} \cos \alpha = 4 \cos \alpha.$$

Тогда

$$\cos \alpha = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}; \quad \alpha = 120^\circ.$$

3. Найти угол между ребром A_1A_4 и гранью $A_1A_2A_3$.

Сначала найдем вектор нормали $\vec{N}$ к грани $A_1A_2A_3$ как векторное произведение векторов $\overrightarrow{A_1A_3}$ и $\overrightarrow{A_1A_2}$.

Так как

$$\overrightarrow{A_1A_3} = (2-1; 1-0; 1-3) = (1; 1; -2); \quad \overrightarrow{A_1A_2} = (1; -1; 0), \text{ тогда}$$

$$\vec{N} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \vec{i}(0-2) - \vec{j}(0+2) + \vec{k}(-1-1) = -2\vec{i} - 2\vec{j} - 2\vec{k};$$

$$\vec{N} = (-2; -2; -2); \quad |\vec{N}| = 2\sqrt{3}.$$

Найдем угол между вектором нормали $\vec{N}$ и вектором $\overrightarrow{A_1A_4}$.

С одной стороны,

$$\vec{N} \cdot \overrightarrow{A_1A_4} = |\vec{N}| \cdot |\overrightarrow{A_1A_4}| \cos \beta = 2\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{2} \cos \beta = 4\sqrt{6} \cos \beta.$$

С другой стороны, по формуле скалярного произведения

$$\vec{N} \cdot \overrightarrow{A_1A_4} = (-2; -2; -2) \cdot (0; 2; 2) = 0 - 4 - 4 = -8.$$

Искомый угол γ между вектором и плоскостью будет равен $\gamma = 90^\circ - \beta$.

$$\sin \gamma = \cos \beta = \frac{|-8|}{4\sqrt{6}} = \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{3} \Rightarrow \gamma = \arcsin \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

4. Найти площадь грани $A_1A_2A_3$.

$$S = \frac{1}{2} |\overrightarrow{A_1A_2} \times \overrightarrow{A_1A_3}| = \frac{1}{2} |\vec{N}| = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

5. Найти объем пирамиды.

$$V = \frac{1}{6} |(\overrightarrow{A_1A_2} \times \overrightarrow{A_1A_3}) \cdot \overrightarrow{A_1A_4}| = \frac{1}{6} |\vec{N} \cdot \overrightarrow{A_1A_4}| = \frac{4}{3}.$$

6. Найти уравнение плоскости $A_1A_2A_3$.

Воспользуемся формулой уравнения плоскости, проходящей через три точки:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-0 & z-3 \\ 2-1 & -1-0 & 3-3 \\ 2-1 & 1-0 & 1-3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-1 & y & z-3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \\ = (x-1) \cdot 2 - y(-2) + (z-3)(1+1) = \\ = 2x - 2 + 2y + 2z - 6 = 0$$

или

$$x + y + z - 4 = 0.$$



6.7. Геометрия кривых и поверхностей в трехмерном пространстве

Поверхности второго порядка — это поверхности, уравнения которых в прямоугольной системе координат являются уравнениями второго порядка вида

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^3 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + \\ + 2a_{23}yz + 2b_1x + 2b_2y + 2b_3z = 0,$$

где a_{ij}, b_k — коэффициенты.

Рассмотрим два вида поверхностей: цилиндрические и поверхности вращения.

Цилиндрические поверхности. *Цилиндрическими поверхностями* называются поверхности, образованные линиями, параллельными какой-либо фиксированной прямой.

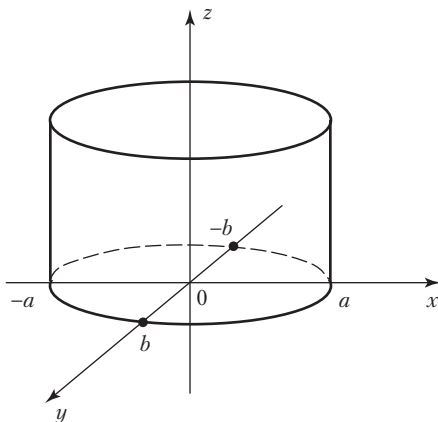
Всякая линия, которую образующая пересекает в любом своем положении, называется *направляющей*.

Рассмотрим поверхности, в уравнении которых отсутствует составляющая z , т.е. направляющие цилиндрической поверхности параллельны оси Oz .

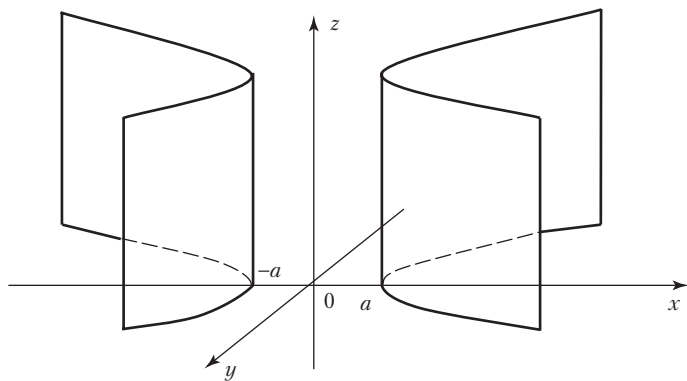
Тип линии L на плоскости xOy (направляющая) определяет характер цилиндрической поверхности. Рассмотрим частные случаи в зависимости от уравнения направляющих:

1) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ — **эллиптический цилиндр**, представляет

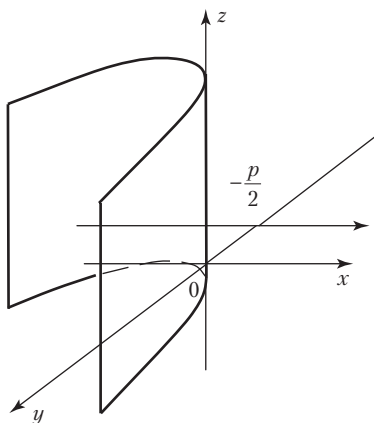
на плоскости xOy эллипс;



2) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ — **гиперболический цилиндр**, представля-
ет на плоскости xOy гиперболу



3) $x^2 = 2py$ — **параболический цилиндр**.



Поверхности вращения. Поверхность, описываемая неко-
торой линией, вращающейся вокруг неподвижной прямой d ,
называется *поверхностью вращения* с осью вращения d .

Если уравнение поверхности в прямоугольной системе
координат имеет вид

$$F(x^2 + y^2, z) = 0,$$

то эта поверхность — поверхность вращения с осью враще-
ния Oz .

Аналогично $F(x^2 + z^2, y) = 0$ — поверхность вращения с осью вращения Oy , $F(z^2 + y^2, x) = 0$ — поверхность вращения с осью вращения Ox .

Запишем уравнения поверхностей вращения для некоторых частных случаев:

1) $\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ — эллипсоид вращения;

2) $\frac{x^2 + y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ — однополостный гиперболоид вращения;

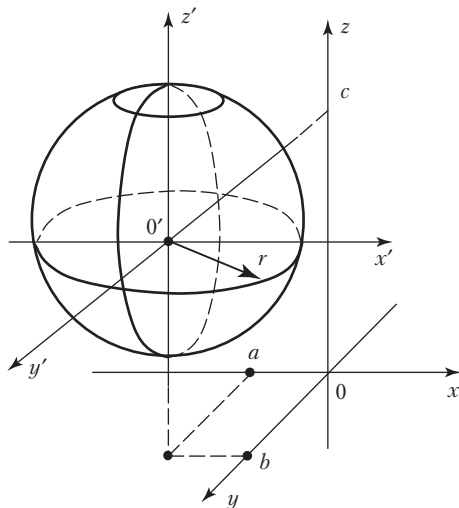
3) $\frac{x^2 + y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$ — двуполостный гиперболоид вращения;

4) $\frac{x^2 + y^2}{p} = 2z$ — параболоид вращения.

Аналогично могут быть записаны уравнения для рассмотренных выше поверхностей вращения, если осью вращения является Ox или Oy .

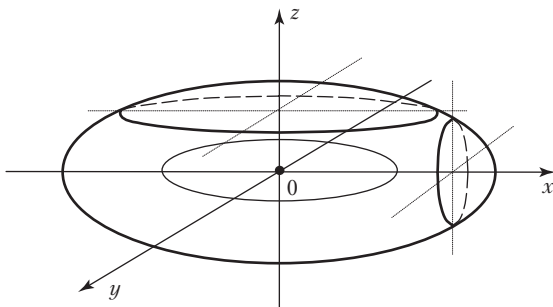
Однако перечисленные выше поверхности являются всего лишь частными случаями **поверхностей второго порядка общего вида**, некоторые типы которых изображены ниже.

Сфера: $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2$.



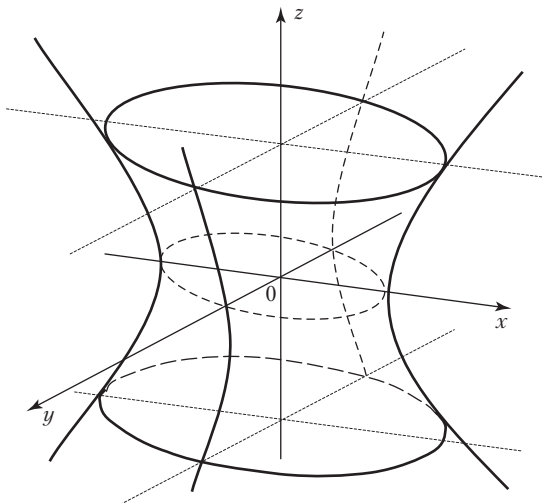
Трехосный эллипсоид: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

В сечении эллипсоида плоскостями, параллельными координатным плоскостям, получают эллипсы с различными осями:



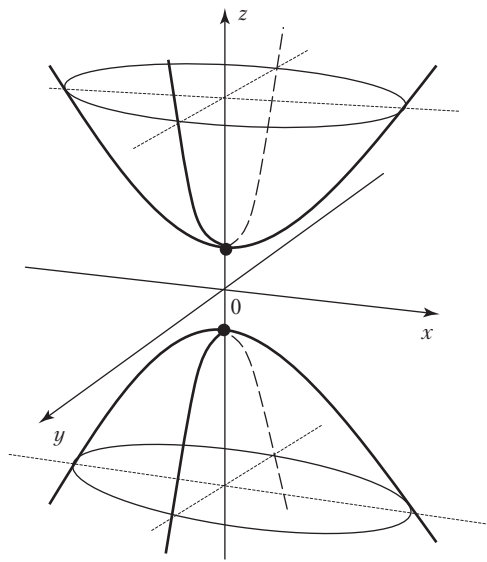
Однополостный гиперболоид: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$.

Название «однополостный» подчеркивает, что поверхность не разорвана на две «полости», а представляет сплошную бесконечную трубку, вытянутую вдоль оси Oz:



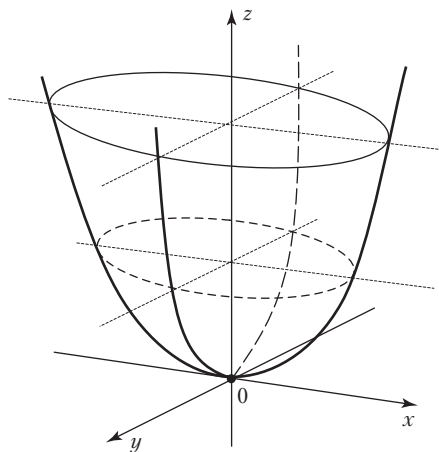
Двуполостный гиперболоид: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$.

Поверхность состоит из двух разобщенных полостей:

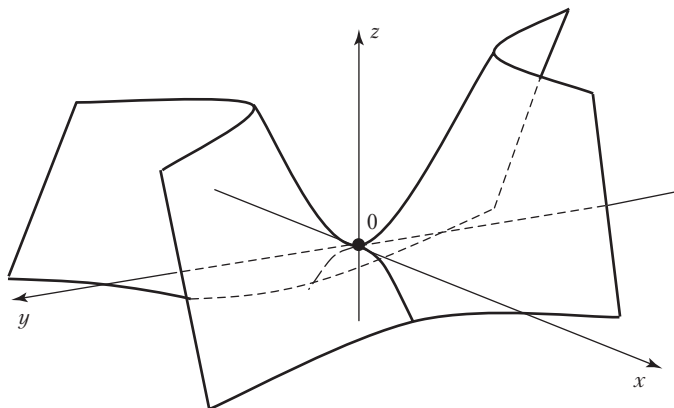


Эллиптический параболоид:

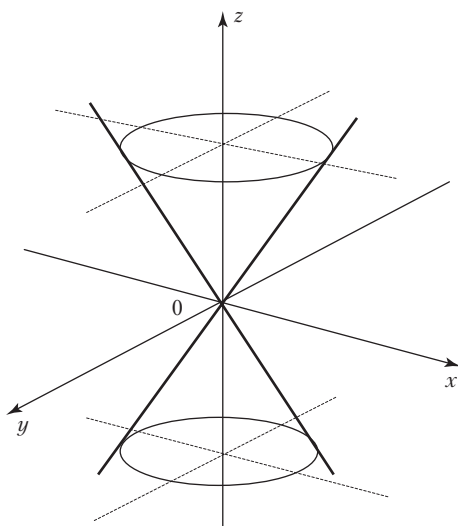
$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z, \quad \text{где } p > 0, q > 0.$$



Гиперболический параболоид: $\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z$.



Конус второго порядка: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$.



Вопросы для самоконтроля

1. Что называется уравнением линии на плоскости $xу$?
2. Как записывается уравнение прямой с угловым коэффициентом?
3. Уравнение какой прямой нельзя записать с угловым коэффициентом? Как записывается уравнение такой прямой?
4. Как записывается уравнение прямой с угловым коэффициентом k , проходящей через данную точку?
5. Как записывается уравнение прямой, проходящей через две данные точки?
6. Как записать уравнение прямой в отрезках?
7. Что такое общее уравнение прямой?
8. Назовите условия параллельности и перпендикулярности прямых, записанных с угловым коэффициентом, и аналогичные условия для прямой, заданной общим уравнением.
9. Как найти расстояние от точки до прямой?
10. Запишите нормальное уравнение окружности. Как по этому уравнению определить координаты центра и радиус окружности?
11. Какое уравнение называется каноническим уравнением эллипса?
12. Что называется большой и малой полуосью, вершинами, фокусами и эксцентриситетом эллипса?
13. Сформулируйте характеристическое свойство эллипса.
14. Чем отличается каноническое уравнение гиперболы от канонического уравнения эллипса?
15. Сформулируйте характеристическое свойство гиперболы.
16. Какое уравнение описывает параболу?
17. Что называется параметром, фокусом и директрисой параболы?
18. Сформулируйте характеристическое свойство параболы.
19. Как записывается общее уравнение плоскости в пространстве?
20. Как записать уравнение плоскости в пространстве, проходящей через данную точку и перпендикулярной данному вектору?
21. Назовите условия параллельности и перпендикулярности двух плоскостей в пространстве.
22. Как может быть задана прямая в пространстве?
23. Какие уравнения называются каноническими уравнениями прямой в пространстве?
24. Запишите виды уравнений плоскости в пространстве.
25. Какие поверхности второго порядка вы знаете?

Задачи для самостоятельного решения

- 6.1. Записать общее уравнение для следующих прямых:
 - а) прямая с угловым коэффициентом $4/7$, отсекающая на оси y отрезок (-2) ;

б) прямая с угловым коэффициентом 3, проходящая через точку $(-1; 2)$;

в) прямая, проходящая через точки $(1; 2)$ и $(-1; 3)$;

г) прямая, отсекающая на оси x отрезок 4, а на оси y — отрезок -5 .

6.2. Найти угловой коэффициент и отрезок, отсекаемый на оси y прямой $7x - 2y - 6 = 0$.

6.3. Найти угловой коэффициент и отрезок, отсекаемый на оси y прямой, проходящей через точки $(2; 3)$ и $(-4; -1)$.

6.4. Найти угол между прямыми $3x + 2y - 1 = 0$ и $5x - y + 4 = 0$.

6.5. Записать общее уравнение прямых, проходящих через точку $(2; -3)$:

а) параллельно прямой, соединяющей точки $(-4; 0)$ и $(2; 2)$;

б) перпендикулярно этой прямой.

6.6. Найти расстояние от точки $(2; -5)$ до прямой $x - 2y - 7 = 0$.

6.7. Найти координаты центра и радиус окружности, общее уравнение которой имеет вид

$$3x^2 + 3y^2 + 18x - 12y + 12 = 0.$$

6.8. Найти координаты фокусов эллипса

$$25x^2 + 16y^2 = 400.$$

6.9. Найти координаты вершины параболы

$$2x^2 - 8x + y + 5 = 0.$$

Глава 7

ВЫПУКЛЫЕ МНОЖЕСТВА И ИХ СВОЙСТВА

7.1. Понятие выпуклого множества

Рассмотрим некоторое множество точек на плоскости. Например, таким множеством может быть круг, прямоугольник, другая геометрическая фигура, прямая или кривая линия, совокупность отдельных точек плоскости (конечная или бесконечная) и т.д.

Множество точек называется **выпуклым**, если оно вместе с *любыми двумя* своими точками содержит весь отрезок, соединяющий эти точки.

Согласно этому определению фигуры «а», «б», «в», «г» являются выпуклыми множествами, а фигуры «д», «е», «ж» таковыми не являются.

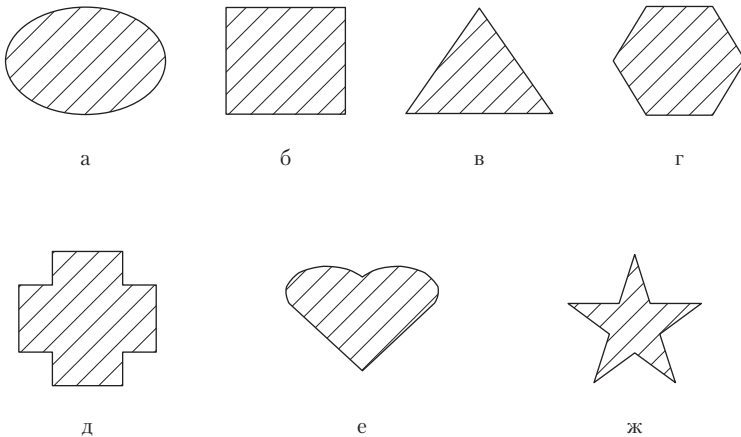


Рис. 7.1. Графическая иллюстрация множеств

То же самое определение можно ввести для выпуклых множеств в пространстве. Например, выпуклыми множествами являются куб, шар, пирамида и т.д.

Выпуклые множества обладают важным *свойством*, которое устанавливается следующей **теоремой**.

Множество, представляющее собой общую часть (пересечение) любого конечного числа выпуклых множеств, есть выпуклое множество.

Доказательство. Пусть M и N — две любые точки, принадлежащие пересечению двух выпуклых множеств A и B . Следовательно, $M \in A$; $N \in A$.

Так как множество A выпукло, то и отрезок MN принадлежит A . С другой стороны, $M \in B$; $N \in B$. Так как множество B выпукло, то и отрезок MN принадлежит B .

Поскольку отрезок MN принадлежит и A , и B , то он принадлежит их общей части, т.е. их пересечению. А так как рассматривались произвольные точки M и N , то доказано, что вместе с любыми двумя точками пересечения множеств A и B принадлежит и отрезок, их соединяющий.

Следовательно, пересечение множеств A и B — выпуклое множество. Аналогичное доказательство можно провести для пересечения большего количества выпуклых множеств.

7.2. Полупространство как выпуклое множество

Полупространством в трехмерном пространстве называется множество всех точек $M(x, y, z)$, координаты которых удовлетворяют неравенству

$$Ax + By + Cz + D \geq 0$$

или неравенству

$$Ax + By + Cz + D \leq 0.$$

Действительно, сравнивая эти неравенства с общим уравнением плоскости, легко видеть, что каждое из этих неравенств описывает точки, *лежащие по одну сторону* от указанной плоскости. То есть плоскость разбивает трехмерное пространство на два полупространства, входя в каждое из них.

Очевидно, что каждое из этих полупространств является выпуклым множеством, так как если две точки находятся

в одном полупространстве (т.е. по одну сторону от разделяющей плоскости), то и отрезок, соединяющий их, целиком находится в том же полупространстве.

7.3. Выпуклые множества в пространстве R^n

Рассмотрим систему из m векторов $x_1, x_2, \dots, x_m$ в пространстве R^n и составим их линейную комбинацию с коэффициентами $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$.

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_m x_m.$$

Линейная комбинация называется *выпуклой*, если выполняются условия

$$\alpha_i \geq 0 \quad (i = 1, \dots, m);$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_m = \sum_{i=1}^m \alpha_i = 1.$$

Так, например, линейная комбинация $0,5x_1 + 0,3x_2 + 0,2x_3$ является *выпуклой* линейной комбинацией элементов x_1, x_2, x_3 , а выражения $0,5x_1 + 0,8x_2 + 0,3x_3$ и $0,5x_1 - 0,3x_2 + 0,8x_3$ являются линейными комбинациями этих элементов, но не выпуклыми.

В частности, в пространстве R^2 (на плоскости) выпуклыми линейными комбинациями любых двух векторов x_1 и x_2 являются все те и только те векторы, концы которых лежат на отрезке, соединяющем концы векторов x_1 и x_2 .

Поэтому *выпуклыми множествами в пространстве R^n* называются множества, которые вместе с двумя своими произвольными элементами содержат и любую их выпуклую линейную комбинацию.

По аналогии с трехмерным пространством полупространством в пространстве R^n называется множество, содержащее все те и только те элементы $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, координаты которых удовлетворяют неравенству

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n + b \geq 0.$$

$$(\leq)$$

Можно доказать, что любое полупространство в пространстве R^n является выпуклым множеством. Так же как и

Вопросы для самоконтроля

1. Какое множество точек на плоскости и в пространстве называется выпуклым? Приведите примеры выпуклых и невыпуклых множеств.
2. Сформулируйте теорему о пересечении конечного числа выпуклых множеств.
3. Что называется полупространством в трехмерном пространстве? Является ли полупространство выпуклым множеством?
4. Какая линейная комбинация векторов в пространстве R^n называется выпуклой?
5. Какие множества называются выпуклыми в пространстве R^n ?
6. Что называется полупространством и многогранной областью в пространстве R^n ? Являются ли они выпуклыми множествами?
7. Что называется угловой точкой (вершиной) многогранной области в пространстве R^n ?

Раздел II

Математический анализ



Глава 8

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ

8.1. Понятие множества

Множество в математике не определяется через простые понятия так же, как не определяются понятия «число», «точка», «линия». Просто говорят, что *множество состоит из элементов*.

Интуитивно под **множеством** будем понимать совокупность определенных однородных вполне различных объектов, рассматриваемую как единое целое.

Можно говорить о множестве стульев в комнате, множестве людей, живущих в г. Рязани, множестве моделей производственных процессов, множестве студентов в группе, множестве натуральных чисел, множестве букв в алфавите и т.п. При этом о множестве можно вести речь только тогда, когда элементы множества *различимы* между собой. Например, нельзя говорить о множестве капель в стакане воды, так как невозможно четко и ясно указать каждую отдельную каплю.

Отдельные объекты, из которых состоит множество, называются **элементами множества**. Так, число 3 — элемент множества натуральных чисел, а буква «б» — элемент множества букв русского алфавита; производственный процесс — элемент множества всех экономических процессов.

Общим обозначением множества служит пара фигурных скобок $\{ \}$, внутри которых перечисляются элементы множества. Для обозначения конкретных множеств обычно используются различные прописные буквы $A, S, X, \dots$ или прописные буквы с индексами $A_1, A_2, \dots$. Для обозначения элементов множества в общем виде используются различные строчные буквы $a, s, x, \dots$ или строчные буквы с индексами $a_1, a_2, \dots$

Тот факт, что множество A состоит из элементов $a_1, a_2, \dots, a_n$, записывается следующим образом:

$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}.$$

Для указания того, что некоторый элемент a является элементом множества S , используется символ принадлежности элемента множеству « $\in$ ». Запись $a \in S$ означает, что элемент a *принадлежит* множеству S , а запись $x \notin S$ означает, что элемент x *не принадлежит* множеству S .

Записью

$$x_1, x_2, \dots, x_n \in S$$

пользуются для сокращения записи

$$x_1 \in S, x_2 \in S, \dots, x_n \in S.$$

Множества бывают *конечными* и *бесконечными*.

Множество называется **конечным**, если число его элементов конечно, т.е. если существует натуральное число N , являющееся числом элементов множества. Множество называется **бесконечным**, если оно содержит бесконечное число элементов.

Различают множества *упорядоченные* и *неупорядоченные*.

Упорядоченными называются множества, порядок расположения элементов в которых является существенным. В **неупорядоченных** множествах это расположение может быть произвольным.

Например, координаты точки на географической карте образуют упорядоченное множество. По договоренности между странами на первом месте стоит координата широты, на втором — долготы.

Для оперирования с конкретными множествами нужно уметь задавать эти множества. Существуют *два способа* задания множеств: *перечисление* и *описание*.

Задание множества способом **перечисления** соответствует перечислению всех элементов, составляющих множество. Так, множество A отличников группы можно задать, перечислив студентов, которые учатся на «отлично», например $A = \{\text{Иванов, Петров, Сидоров}\}$; множество K фирм некоторого региона можно задать, перечислив все фирмы этого региона; множество X моделей, используемых для описания деятельности некоторого предприятия, можно задать, указав все эти модели.

Для сокращения записи пишут

$$X = \{x_i\}_1^n,$$

здесь индекс i меняет свои значения от 1 до n . Иногда вводят множество индексов $I = \{1, 2, \dots, n\}$. Тогда

$$X = \{x_i\}, i \in I.$$

Такой способ удобен при рассмотрении конечных множеств, содержащих небольшое число элементов, но иногда он может применяться и для задания бесконечных множеств, например, множество положительных четных чисел $Y = \{2, 4, 6, 8, \dots\}$. Естественно, такая запись применима, только если вполне ясно, что понимается под многоточием.

Описательный способ задания множества состоит в том, что указывается *характерное свойство*, которым обладают все элементы множества. Так, если M — множество студентов группы, то множество A отличников этой группы запишется в виде

$$A = \{x \in M \mid x \text{ — отличник группы}\}.$$

Запись читается следующим образом: множество A состоит из элементов x множества M , обладающих тем свойством, что x является отличником группы.

Если K — множество фирм, то множество P производственных фирм запишется в виде

$$P = \{x \in K \mid x \text{ — производственная фирма}\}.$$

В тех случаях, когда не вызывает сомнений, из какого множества берутся элементы x , указание о принадлежности x множеству M можно не делать. При этом множество A запишется в виде

$$A = \{x \mid x \text{ — отличник группы}\}.$$

Пример 8.1. Задание множеств методом описания

1. $C = \{x \mid x \text{ — четное}\}$ — множество четных чисел.
2. $K = \{x \mid x \text{ — фирма региона}\}$ — множество фирм некоторого региона.

3. $D = \{x \mid x^2 - 1 = 0\}$ — множество $\{-1, 1\}$.

4. Пусть Z — множество целых чисел. Тогда множество

$$G = \{x \in Z \mid 0 < x \leq 7\}$$

эквивалентно множеству $G = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. ►

Важным понятием теории множеств является понятие пустого множества. **Пустым множеством** называется множество, не содержащее ни одного элемента.

Пустое множество обозначается $\emptyset$. Например, множество

$$C = \{x \mid x^2 - x + 1 = 0\} = \emptyset.$$

Понятие пустого множества играет важную роль при задании множеств с помощью описания. Введение пустого множества позволяет совершенно спокойно оперировать с множеством, не заботясь о том, есть в нем элементы или нет. Пустое множество будем условно относить к конечным множествам.

Рассмотрим теперь вопрос о *равенстве* множеств.

Два множества X и Y называются **равными** ($X = Y$), если они состоят из одних и тех же элементов, т.е. представляют собой одно и то же множество.

Множества X и Y **не равны** ($X \neq Y$), если в множестве X есть элементы, не принадлежащие множеству Y , либо в множестве Y есть элементы, не принадлежащие множеству X .

Из определения равенства множеств вытекает, что порядок расположения элементов в неупорядоченных множествах *несущественен*. Так, например, множества $A = \{3, 4, 5, 6\}$ и $B = \{4, 5, 6, 3\}$ представляют собой одно и то же множество, т.е. $A = B$.

Из определения множества следует, что в нем не должно быть неразличимых элементов. Поэтому в множестве не может быть одинаковых элементов. Например, запись $C = \{2, 2, 3, 5\}$ следует рассматривать как некорректную и заменить ее на $C = \{2, 3, 5\}$.

8.2. Понятие подмножества

Множество X называется **подмножеством** множества Y , если любой элемент множества X принадлежит множеству Y .

Например, M — множество студентов группы, а A — множество отличников той же группы. Так как каждый отличник группы является в то же время студентом этой группы, то множество A является подмножеством множества M . Множество торговых фирм региона является подмножеством множества всех его фирм.

Многие определения теории множеств удобно давать в виде математических выражений, содержащих логические символы. Для определения подмножества используем два таких символа:

$\forall$ — символ, называемый квантором общности и означающий «любой», «каков бы ни был», «для всех»;

$\rightarrow$ — символ следствия (импликации), означающий «влечет за собой».

Определение подмножества, которое может быть сформулировано в виде: для любого x утверждение « x принадлежит X » влечет за собой утверждение « x принадлежит Y », с использованием символов запишется так:

$$\forall x | x \in X \rightarrow x \in Y.$$

Более краткой записью выражения « X является подмножеством Y » является запись

$$X \subseteq Y,$$

« X содержится (лежит) или совпадает с Y ».

Если желают подчеркнуть, что Y содержит и другие элементы, кроме элементов из X , то используют символ строгого включения $\subset$

$$X \subset Y.$$

Принято считать, что для любого множества M выполняется

$$\emptyset \subseteq M.$$

Если все подмножества, рассматриваемые в данном конкретном случае, входят в множество I , то множество I называется **универсальным множеством**. Из этого определения ясно, что универсальное множество I содержит все элементы, относящиеся к рассматриваемому классу задач.

Роль универсального множества могут играть различные множества. Так, при рассмотрении множеств, включающих отличников в группе студентов, множество неуспевающих студентов группы, множество студентов группы старше 20 лет, роль универсального множества играет множество студентов группы.

Пример 8.2. Дано множество $A = \{x \in Z | 0 < x \leq 12\}$, где Z — множество целых чисел. Найти множество B такое, что $B \subset A$ и $B = \{x | x \text{ делится на } 4\}$.

Решение

Ясно, что $A = \{1, 2, 3, \dots, 12\}$, а B содержит целые числа, делящиеся на 4, но только те, которые входят в множество A . Следовательно, $B = \{4, 8, 12\}$. ►

8.3. Операции над множествами

Над множествами можно производить **действия**, которые во многом напоминают известные действия сложения и умножения над числами. Рассмотрим их.

1. Объединением множеств X и Y называется множество, состоящее из всех тех и только тех элементов, которые принадлежат хотя бы одному из множеств X , Y , т.е. или принадлежат X , или принадлежат Y , или принадлежат и X , и Y .

Объединение X и Y обозначается через $X \cup Y$. Формальное определение объединения двух множеств X и Y имеет вид

$$X \cup Y = \{x \mid x \in X, \text{ или } x \in Y, \text{ или } x \in X \text{ и } x \in Y\}.$$

Объединение множеств иногда называют суммой множеств и обозначают $X + Y$, но этим термином пользуются редко.

Пример 8.3. $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$; $Y = \{2, 4, 6, 7\}$. Найти множество $X \cup Y$.

Решение

$$X \cup Y = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}. \quad \blacktriangleright$$

Пример 8.4. Пусть X — множество отличников в группе, а Y — множество студентов, проживающих в общежитии. Что представляет собой множество $X \cup Y$?

Решение

$X \cup Y$ — это множество студентов, которые или учатся на «отлично», или проживают в общежитии. ►

Рассмотрим два овала, показанных на рис. 8.1. Пусть X — множество точек левого овала, а Y — множество точек правого овала (рис. 8.1, *а*). Тогда операция $X \cup Y$ представляет собой заштрихованную область на рис. 8.1, *б*. Эти овалы называются **диаграммами Эйлера — Венна**.

Понятие объединения можно распространить и на большее число множеств.

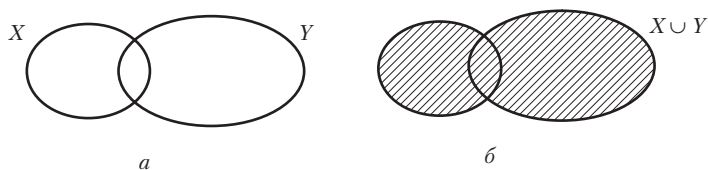


Рис. 8.1. Объединение множеств

Для операции объединения множеств справедливы *коммутативный* и *ассоциативный законы*:

$$X \cup Y = Y \cup X.$$

$$(X \cup Y) \cup Z = X \cup (Y \cup Z) = X \cup Y \cup Z.$$

$$X \cup \emptyset = X.$$

Это также очевидное соотношение, так как пустое множество не содержит элементов, а значит, X и $X \cup \emptyset$ состоят из одних и тех же элементов. Еще одно очевидное равенство поглощения универсальным множеством:

$$X \cup I = I.$$

2. Пересечением множеств X и Y называется множество, состоящее из всех тех и только тех элементов, которые принадлежат как множеству X , так и множеству Y .

Пересечение множеств X и Y обозначается через $X \cap Y$. Формальное определение

$$X \cap Y = \{x \mid x \in X \text{ и } x \in Y\}.$$

Пересечение множеств иногда называют *произведением* множеств и обозначают $X \cdot Y$.

Пример 8.5. $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$; $Y = \{2, 4, 6, 7\}$. Найти множество $X \cap Y$.

Решение

$$X \cap Y = \{2, 4\}. \quad \blacktriangleright$$

Пример 8.6. Пусть X — множество отличников в группе, а Y — множество студентов, проживающих в общежитии. Что представляет собой множество $X \cap Y$?

Решение

$X \cap Y$ — это множество отличников группы, которые проживают в общежитии. $\blacktriangleright$

Пусть X — множество точек левого овала (рис. 8.2, а), а Y — правого овала. Тогда $X \cap Y$ представляет собой

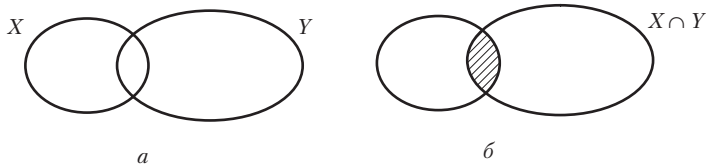


Рис. 8.2. Пересечение множеств

заштрихованную область на рис. 8.2, б, являющуюся общей частью обоих овалов.

Операция пересечения позволяет установить ряд соотношений между множествами.

Множества X и Y называются **непересекающимися**, если они не имеют общих элементов, т.е. если

$$X \cap Y = \emptyset.$$

Пример 8.7. Являются ли непересекающимися следующие множества:

- 1) множества чисел $A = \{1, 2, 3\}$ и $B = \{4, 5, 6\}$;
- 2) множество отличников и множество неуспевающих студентов в группе?

Решение

В обоих случаях рассматриваемые множества являются непересекающимися. ►

Понятие пересечения, так же как и объединения, можно распространить и на большее число множеств.

Для пересечения множеств также справедливы *коммутативный* и *ассоциативный законы*, аналогичные соответствующим законам для умножения в элементарной алгебре:

$$X \cap Y = Y \cap X.$$

$$(X \cap Y) \cap Z = X \cap (Y \cap Z) = X \cap Y \cap Z,$$

справедливость которых, как и в случае объединения множеств, вытекает из того, что левая и правая части равенств состоят из одних и тех же элементов.

Еще два очевидных равенства:

$$X \cap \emptyset = \emptyset;$$

$$X \cap I = X.$$

Для операций объединения и пересечения множеств справедливы *дистрибутивные законы*, причем, в отличие

от элементарной алгебры, и тот и другой записываются в виде

$$\begin{aligned}(X \cup Y) \cap Z &= (X \cap Z) \cup (Y \cap Z); \\ (X \cap Y) \cup Z &= (X \cup Z) \cap (Y \cup Z).\end{aligned}$$

3. Разностью множеств X и Y называется множество, стоящее из всех тех и только тех элементов, которые принадлежат X и не принадлежат Y .

Разность множеств X и Y обозначается через $X \setminus Y$. Таким образом,

$$X \setminus Y = \{x \mid x \in X, x \notin Y\}.$$

Пример 8.8. $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$; $Y = \{2, 4, 6, 7\}$. Найти множества $X \setminus Y$ и $Y \setminus X$.

Решение

$$X \setminus Y = \{1, 3, 5\}; Y \setminus X = \{6, 7\}.$$

Пример 8.9. Пусть X — множество отличников в группе, а Y — множество студентов, проживающих в общежитии. Что представляет собой множество $X \setminus Y$?

Решение

$X \setminus Y$ — это множество отличников группы, которые не проживают в общежитии. ►

Пусть X — множество точек левого овала (рис. 8.3, а), а Y — правого овала. Операция $X \setminus Y$ представляет собой заштрихованную область на рис. 8.3, б, являющуюся частью овала X , которая не входит в овал Y .

Следствие. Множество $\bar{X}$, определяемое из соотношения

$$\bar{X} = I \setminus X,$$

называется **дополнением** множества X (до универсального множества I).

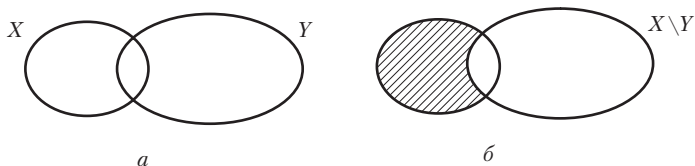


Рис. 8.3. Разность множеств

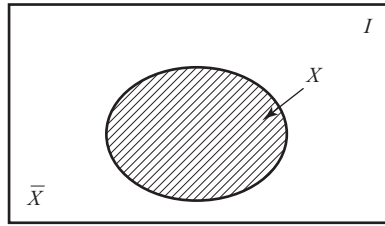


Рис. 8.4. Дополнение множества

Диаграмма, характеризующая дополнение множества, показана на рис. 8.4, где множество X заштриховано, а его дополнение $\bar{X}$ представляет собой незаштрихованную область.

Формальное определение дополнения множества X имеет вид

$$\bar{X} = \{x \mid x \in I \text{ и } x \notin X\}.$$

Пример 8.10. Пусть $I = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, а $X = \{3, 5, 7\}$. Найти $\bar{X}$.

Решение

$$\bar{X} = \{1, 2, 4, 6\}.$$

►

Из формального определения следует, что X и $\bar{X}$ не имеют общих элементов, так что

$$X \cap \bar{X} = \emptyset.$$

Кроме того, не имеется элементов универсального множества I , которые не принадлежали бы ни X , ни $\bar{X}$. Следовательно,

$$X \cup \bar{X} = I.$$

Ясно, что X является дополнением $\bar{X}$. Но дополнение $\bar{X}$ есть $\bar{\bar{X}}$. Таким образом,

$$\bar{\bar{X}} = X.$$

С помощью операции дополнения можно в удобном виде представить разность множеств

$$X \setminus Y = \{x \mid x \in X \text{ и } x \notin Y\} = \{x \mid x \in X \text{ и } x \in \bar{Y}\},$$

т.е.

$$X \setminus Y = X \cap \bar{Y}.$$

4. Одной из наиболее часто встречающихся операций над множествами является операция **разбиения** множества

на систему подмножеств. Например, курсы данного факультета являются разбиением множества студентов факультета; группы данного курса являются разбиением множества студентов курса.

Если N — множество натуральных чисел, а A_0 и A_1 — множества четных и нечетных чисел, то система $\{A_0, A_1\}$ будет разбиением множества N .

Например, множество натуральных чисел может быть разбито иначе: на множество чисел, делящихся на 3 без остатка, с остатком 1 и с остатком 2. Продукция предприятия разбивается на систему множеств, состоящих из продукции первого сорта, второго сорта и брака.

Для того чтобы дать понятию разбиения строгое определение, рассмотрим некоторое множество M и систему множеств $K = \{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ (рис. 8.5).

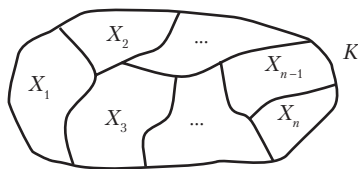


Рис. 8.5. Разбиение множества

Система множеств $K = \{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ называется **разбиением** множества M , если она удовлетворяет следующим условиям:

— любое множество X_i является подмножеством множества M

$$\forall X_i \in K \rightarrow X_i \subset M;$$

— любые два множества X_i и X_j из K являются непересекающимися

$$\forall X_i, X_j \in K \rightarrow X_i \cap X_j = \emptyset, \text{ если } i \neq j;$$

— объединение всех множеств, входящих в разбиение, дает множество M

$$X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_n = M.$$

Пример 8.11. Дано множество $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Является ли разбиением множества X система множеств $K = \{X_1, X_2, X_3\}$, где $X_1 = \{1, 4, 7\}$; $X_2 = \{2, 3, 5\}$; $X_3 = \{1, 6\}$?

Решение

Нет, не является, так как не выполняется второе условие. Действительно, $X_1 \cap X_3 = \{1\} \neq \emptyset$. ►

8.4. Числовые множества

Элементами числовых множеств являются различные числа. Говорят, что числовое множество **замкнуто** относительно какой-либо операции (в том числе арифметического действия), если результат этой операции над любыми элементами рассматриваемого множества тоже является элементом данного множества.

Наиболее простым числовым множеством, замкнутым относительно операций сложения и умножения, является **множество натуральных чисел** $N = \{1, 2, 3, \dots\}$. Действительно,

$$\forall m, n \in N \rightarrow m + n \in N \text{ и } mn \in N.$$

Однако множество натуральных чисел не замкнуто относительно, например, операции вычитания. Если $m \leq n$, то очевидно, что $m - n \notin N$.

Множество целых чисел $Z = \{\dots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ образуется путем добавления к множеству N отрицательных чисел, равных по абсолютной величине элементам N , а также особого числа «ноль», обладающего следующими свойствами, которыми не обладает ни одно другое число:

$$\forall m \rightarrow m + 0 = m;$$

$$\forall m \rightarrow m + (-m) = 0;$$

$$-0 = 0.$$

На ноль делить нельзя.

Множество целых чисел Z замкнуто относительно операций сложения, вычитания и умножения, т.е.

$$\forall m, n \in Z \rightarrow m + n \in Z, m - n \in Z, mn \in Z.$$

Но множество Z не замкнуто относительно операции деления, так как результат деления одного целого числа на другое — не всегда целое число.

Множество рациональных чисел Q можно задать следующим образом:

$$Q = \left\{ x \mid x = \frac{k}{l}; k \in Z; l \in N \right\}.$$

Если l можно представить в виде

$$l = 5^m \cdot 2^n, \quad (8.1)$$

где $m, n \in N$ и одно из них может быть равно нулю, то произвольное число x из Q представимо в виде конечной десятичной дроби, например:

$$\frac{7}{20} = \frac{7}{5 \cdot 2^2} = \frac{5 \cdot 7}{5^2 \cdot 2^2} = \frac{35}{100} = 0,35;$$

$$\frac{3}{8} = \frac{3}{2^3} = \frac{5^3 \cdot 3}{5^3 \cdot 2^3} = \frac{375}{1000} = 0,375.$$

Если знаменатель l невозможно представить в виде равенства (8.1), то рациональное число записывается в виде бесконечной периодической десятичной дроби, например:

$$\frac{1}{3} = 0,33333... = 0,(3); \quad \frac{1}{11} = 0,090909... = 0,(09).$$

Множество Q замкнуто относительно операции деления (за исключением деления на нуль, которое вообще невозможно), так как

$$\forall x, y \in Q (y \neq 0) \rightarrow x/y \in Q,$$

а также относительно других рассмотренных ранее операций.

Бесконечные непериодические десятичные дроби называются **иррациональными числами**. К ним относятся, например, $\sqrt{2} = 1,41421356...$, число $\pi = 3,1415926...$

Рациональные и иррациональные числа вместе образуют множество **действительных чисел** R . Очевидно, что

$$N \subset Z \subset Q \subset R.$$

Основными подмножествами множества действительных чисел R являются:

1) отрезок $[a, b]$, определяемый следующим образом:

$$[a, b] = \{x \mid a \leq x \leq b\};$$

2) интервал (a, b) :

$$(a, b) = \{x \mid a < x < b\};$$

3) полуинтервалы $[a, b)$ и $(a, b]$:

$$\begin{aligned}[a, b) &= \{x \mid a \leq x < b\}; \\ (a, b] &= \{x \mid a < x \leq b\}.\end{aligned}$$

Интервалы и полуинтервалы могут быть бесконечными: $(-\infty, +\infty)$, $(-\infty, a)$, $(a, +\infty)$, $(-\infty, a]$, $[a, +\infty)$. Если для задачи неважно, входят или нет в подмножество концевые точки, то часто для обозначения отрезков, интервалов и полуинтервалов используют общий термин «промежуток»;

4) существует понятие *окрестности* точки: ε (эпсилон)-окрестность точки a — это интервал, определяемый соотношением

$$\varepsilon\text{-окрестность } a = \{x \mid a - \varepsilon < x < a + \varepsilon\}.$$

Очевидно, что если $x \in \varepsilon$ -окрестности точки a , то выполняется неравенство $|x - a| < \varepsilon$.

8.5. Упорядоченное множество. Понятие кортежа

Наряду с понятием множества как совокупности элементов важным является понятие *упорядоченного* множества или *кортежа*.

Кортежем называется последовательность элементов, в которой каждый элемент занимает определенное место. Сами элементы при этом называются **компонентами кортежа** (первая компонента, вторая компонента и т.п.).

Примеры кортежей: множество людей, стоящих в очереди; множество слов в фразе; два числа, выражающих долготу и широту точки на местности, и т.п. Во всех этих множествах место каждого элемента является вполне определенным и не может быть произвольно изменено.

В различных задачах эта определенность часто является просто предметом договоренности. Так, только договоренностью можно объяснить, почему широту ставят на первое место, а долготу — на второе. Чтобы не оговаривать каждый раз, какое число что означает, устанавливают заранее, какой параметр считать первым, какой вторым и т.д., т.е. совокупность параметров представляют в виде *упорядоченного множества*.

Число элементов кортежа называется его **длиной**. Для обозначения кортежа используют круглые скобки. Так, упорядоченное множество, состоящее из n элементов

$$a = (a_1, a_2, \dots, a_n),$$

является кортежем длины n с компонентами $a_1, a_2, \dots, a_n$.

Кортежи длины 2 называются парами, кортежи длины 3 — тройками, длины 4 — четверками и т.д. Частными случаями кортежа являются кортеж (a) длины 1 и пустой кортеж длины 0, обозначаемый $()$ или Λ .

В отличие от неупорядоченного множества в кортеже могут быть и одинаковые элементы: два одинаковых слова в фразе, одинаковые числовые значения долготы и широты точки на местности и т.п.

Два кортежа $a = (a_1, a_2, \dots, a_m)$ и $b = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ считаются **равными** тогда и только тогда, когда они одной длины $m = n$ и попарно равны их соответствующие компоненты $(a_1 = b_1; a_2 = b_2; \dots; a_n = b_n)$.

Кортежи, все компоненты которых являются действительными числами, представляют *точки пространства* или *векторы*. Так, кортеж длины 2 с компонентами (a_1, a_2) может рассматриваться как точка на плоскости (т.е. точка двумерного пространства) или двумерный вектор, проведенный из начала координат в точку с координатами (a_1, a_2) .

Компоненты такого кортежа a_1 и a_2 являются проекциями вектора соответственно на оси абсцисс (обозначим ось 1) и ординат (ось 2), такие, что

$$\text{Пр}_1(a_1, a_2) = a_1; \quad \text{Пр}_2(a_1, a_2) = a_2.$$

Кортеж (a_1, a_2, a_3) может рассматриваться как точка в трехмерном пространстве или как трехмерный вектор, проведенный из начала координат в эту точку. Проекции вектора на оси координат имеют вид

$$\text{Пр}_i(a_1, a_2, a_3) = a_i; \quad i = 1, 2, 3.$$

Однако в данном случае можно говорить и о проекции кортежа сразу на две оси, например оси 1 и 2, т.е. на координатную плоскость. Нетрудно видеть, что в этом случае проекция представляет собой двухкомпонентный кортеж

$$\text{Пр}_{12}(a_1, a_2, a_3) = (a_1, a_2).$$

Обобщая эти понятия, будем рассматривать упорядоченное n -элементное множество (n -компонентный кортеж) действительных чисел $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ как точку в воображаемом n -мерном пространстве, называемом иногда **гиперпространством**, или как n -мерный вектор. При этом компоненты кортежа будем рассматривать как его проекции на соответствующие оси

$$\text{Пр}_i a = a_i, \quad i = \overline{1, n}.$$

Используемая здесь и далее запись $i = \overline{1, n}$ означает перечисление $i = 1, 2, \dots, n$.

Пример 8.12. Равны ли кортежи $a = (3; 6; 1; 0)$ и $b = (1 + 2; 2 \cdot 3; 10 : 5; 2 - 2)$?

Решение

Нет, так как их третьи компоненты различны. ►

Пример 8.13. Найти проекцию кортежа $a = (6; 7; 13)$ на координатную плоскость, образованную осями 2 и 3.

Решение

$\text{Пр}_{23} a = (7; 13)$. ►

8.6. Прямое произведение множеств

Прямым (или **декартовым**) **произведением** множеств X и Y называется множество, обозначаемое $X \times Y$ и состоящее из всех тех и только тех упорядоченных пар (двухкомпонентных кортежей), первая компонента которых принадлежит множеству X , а вторая принадлежит множеству Y .

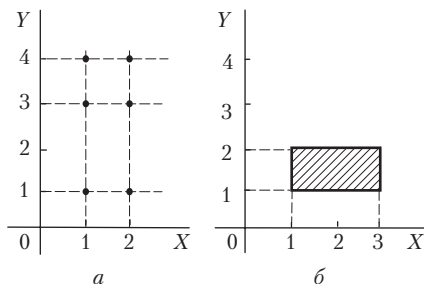
Таким образом, элементами прямого произведения являются пары вида (x, y) . Формальное определение:

$$X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X, y \in Y\}.$$

Пример 8.14. Пусть $X = \{1, 2\}$, $Y = \{1, 3, 4\}$. Найти $X \times Y$.

Решение

$X \times Y = \{(1, 1), (1, 3), (1, 4), (2, 1), (2, 3), (2, 4)\}$. Геометрическая иллюстрация этого множества приведена на рис. 8.6, а. Элементы $X \times Y$ — это пары координат точек, находящихся на пересечении пунктирных линий. ►



Пример 8.15. Пусть $X = [1, 3]$; $Y = [1, 2]$. Найти $X \times Y$.

Рис. 8.6. Геометрическая иллюстрация прямого произведения множеств

Решение

Множества X и Y представляют собой подмножества R , а именно отрезки, каждый из которых содержит бесконечное количество элементов. Следовательно, и пар элементов $X \times Y$ бесконечное количество и перечислить их все невозможно. Ответ записывается в следующем виде:

$$X \times Y = \{(x, y) \mid x \in [1, 3]; y \in [1, 2]\}.$$

При решении аналогичных примеров ответ часто предпочитают для наглядности представлять в графическом виде. Прямое произведение $X \times Y$ изобразится заштрихованным прямоугольником на рис. 8.6, б. То есть пара координат любой точки этого прямоугольника является элементом прямого произведения $X \times Y$. ►

Из определения прямого произведения и последнего примера очевидно, что свойства прямого произведения отличаются от свойств обычного произведения в арифметическом смысле. В частности, прямое произведение изменяется при изменении порядка сомножителей, т.е. не выполняется коммутативность

$$X \times Y \neq Y \times X.$$

Операция прямого произведения легко распространяется и на большее число множеств. *Прямым произведением множеств* $X_1, X_2, \dots, X_n$ называется множество, обозначаемое $X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$ и состоящее из всех тех и только тех кортежей длины n , первая компонента которых принадлежит X_1 , вторая — X_2 и т. д.

Частным случаем операции прямого произведения является понятие *степеней* множества. Пусть M — произвольное множество. Назовем k -й *степенью множества* M и обозначим через M^k прямое произведение k одинаковых множеств, равных M :

$$M^k = M \times M \times \dots \times M.$$

Это определение пригодно для $k = 2, 3, \dots$ Его можно расширить на любое целое неотрицательное k , если специальными определениями положить

$$M^1 = M, M^0 = \{\Lambda\}.$$

Если R — множество действительных чисел, то

$$R^2 = R \times R$$

представляет собой координатную *плоскость*, а

$$M^3 = R \times R \times R$$

представляет собой трехмерное действительное *пространство*.

По аналогии с введенной операцией проецирования кортежа можно ввести операцию проецирования множеств, которая может применяться лишь к таким множествам, элементами которых являются кортежи одинаковой длины.

Пусть M — множество, состоящее из кортежей длины n . Тогда *проекцией множества M на какую-то компоненту (или совокупность нескольких компонент)* будем называть множество проекций кортежей из M на эту компоненту (совокупность компонент).

Пример 8.16. Пусть $M = \{(1, 2, 3, 4, 5), (2, 1, 3, 5, 5), (3, 3, 3, 3, 3), (3, 2, 3, 4, 3)\}$. Найти $\text{Pr}_2 M$ и $\text{Pr}_{24} M$.

Решение

$$\text{Pr}_2 M = \{2, 1, 3\}. \quad \text{Pr}_{24} M = \{(2, 4), (1, 5), (3, 3)\}.$$

►

Легко проверить, что если $M = X \times Y$, то

$$\text{Pr}_1 M = X; \quad \text{Pr}_2 M = Y.$$

8.7. Соответствия

Рассмотрим два множества X и Y . Элементы этих двух множеств могут каким-либо образом сопоставляться друг с другом, образуя пары (x, y) .

Если способ такого сопоставления определен, т.е. для каждого элемента $x \in X$ указан элемент $y \in Y$, с которым сопоставляется элемент x , то говорят, что между множествами X и Y установлено **соответствие**. При этом совершенно необязательно, чтобы в сопоставлении участвовали все элементы множеств X и Y .

Для того чтобы *задать соответствие*, необходимо указать:

- множество X , элементы которого сопоставляются с элементами другого множества;
- множество Y , с элементами которого сопоставляются элементы первого множества;
- множество $Q \subseteq X \times Y$, определяющее закон, в соответствии с которым осуществляется соответствие, т.е. *перечисляющее* все пары (x, y) , участвующие в сопоставлении.

Таким образом, соответствие, обозначаемое q , представляет собой тройку множеств

$$q = (X, Y, Q),$$

в которой $Q \subseteq X \times Y$.

В этом выражении первая компонента X называется **областью отправления** соответствия, вторая компонента Y называется **областью прибытия** соответствия, третья компонента Q называется **графиком** соответствия.

Кроме трех рассмотренных множеств X , Y и Q , с каждым соответствием неразрывно связаны еще два множества: это множество $\text{Пр}_1 Q$, называемое **областью определения** соответствия, в которое входят элементы множества X , участвующие в сопоставлении, и множество $\text{Пр}_2 Q$, называемое **областью значений** соответствия, в которое входят элементы множества Y , участвующие в сопоставлении.

Очевидно, что область определения соответствия и область значений соответствия являются подмножествами соответственно X и Y , т.е. $\text{Пр}_1 Q \subseteq X$; $\text{Пр}_2 Q \subseteq Y$.

Если $(x, y) \in Q$, то говорят, что элемент y соответствует элементу x . Графически это наглядно изображается стрелкой, направленной от x к y .

Пример 8.17. Пусть $X = \{1, 2\}$, $Y = \{3, 5\}$. Сколько различных графиков соответствия можно составить? Привести и графически проиллюстрировать некоторые из них.

Решение

Ясно, что $X \times Y = \{(1, 3), (1, 5), (2, 3), (2, 5)\}$. Следовательно, число возможных графиков соответствия равно числу различных способов, которыми мы можем выбрать одну или несколько пар из $X \times Y$ или не выбрать ни одной.

Последнее можно сделать только одним способом, а выбрать одну пару из четырех — четырьмя способами. Чтобы найти, сколькими способами можно выбрать две пары из четырех, применим следующее рассуждение. Сначала можно выбрать одну пару четырьмя способами, а для каждого из этих способов подсоединить вторую пару можно тремя способами. Всего получается $4 \times 3 = 12$.

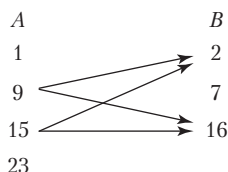
Так как неважно, какую пару из двух выбранных выбираем первой, число различных способов в два раза меньше, т.е. шесть. Выбрать три пары из четырех (т.е. отбросить одну лишнюю пару) можно четырьмя способами, а четыре из четырех — одним. Это дает возможность получить $1 + 4 + 6 + 4 + 1 = 16$ различных графиков соответствия. Приведем некоторые из них:

$Q_1 = \{\};$		$Q_2 = \{(1, 3)\};$		$Q_3 = \{(1, 5)\};$		$Q_4 = \{(1, 3), (1, 5)\};$ и т.д.	
X	Y	X	Y	X	Y	X	Y
1	3	1	3	1	3	1	3
2	5	2	5	2	5	2	5

Пример 8.18. Даны множества $A = \{1, 9, 15, 23\}$ и $B = \{2, 7, 16\}$. Составить график Q соответствия $q = (A, B, Q)$, если известно, что четные элементы B соответствуют элементам, делимым на 3, из A .

Решение

График соответствия имеет вид: $Q = \{(9, 2), (9, 16), (15, 2), (15, 16)\}$.



Для каждого соответствия

$$q = (X, Y, Q), Q \subseteq X \times Y$$

существует **обратное соответствие**, которое получается, если данное соответствие рассматривать в обратном направлении, т.е. определять элементы $x \in X$, с которыми сопоставляются элементы $y \in Y$. Соответствие, обратное соответствию q , будем обозначать

$$q^{-1} = (Y, X, Q^{-1}),$$

где $Q^{-1} \subseteq Y \times X$.

Пример 8.19. В условии предыдущего примера найти график Q^{-1} обратного соответствия $q^{-1} = (B, A, Q^{-1})$.

Решение

$$Q^{-1} = \{(2, 9), (2, 15), (16, 9), (16, 15)\}.$$

Ясно, что графическое представление обратного соответствия получается путем изменения направления стрелок в графическом представлении прямого соответствия. Очевидно также, что обратным соответствием обратного соответствия будет прямое соответствие $(q^{-1})^{-1} = q$.

8.8. Отображения и функции

Пусть X и Y — некоторые множества и

$$\Gamma \subseteq X \times Y,$$

причем $\text{Пр}_1 \Gamma = X$.

В этом случае тройка множеств (X, Y, Γ) определяет соответствие, обладающее тем свойством, что его область определения $\text{Пр}_1 \Gamma$ совпадает с областью отправления X , и, следовательно, это соответствие определено всюду на X . Другими словами, для каждого $x \in X$ существует $y \in Y$, так что $(x, y) \in \Gamma$.

Соответствие (X, Y, Γ) , определенное всюду в области отправления соответствия X , называется **отображением** X на Y .

Часто такое отображение записывают $\Gamma : X \rightarrow Y$ и говорят, что оператор Γ отображает множество X на множество Y .

Под словом «отображение» иногда понимают однозначное отображение. Однако здесь не будем придерживаться этого правила и будем считать, что каждому элементу $x \in X$ отображение ставит в соответствие некоторое подмножество $\Gamma x \subseteq Y$, называемое **образом** элемента x .

Сам элемент x в этом случае называется **прообразом** подмножества Γx . Закон, в соответствии с которым осуществляется соответствие, определяется множеством Γ .

Пример 8.20. Является ли отображением соответствие $q = (A, B, Q)$, если $A = \{1, 9, 15, 23\}$ и $B = \{2, 7, 16\}$ и известно, что четные элементы B соответствуют элементам, делящимся на 3, из A ? Если нет, то приведите пример множества A , при котором данное соответствие является отображением.

Решение

Нет, не является, так как элементы 1 и 23 из множества A не имеют образа в множестве B . Если бы множество A имело вид, например, $A = \{9, 15\}$, то данное соответствие было бы отображением. ►

Отображение называется **функцией**, если оно однозначное, т.е. каждому прообразу ставится в соответствие единственный элемент — образ.

Если отображение является функцией, то обычно вместо символа Γ используют f . Из определения функции следует, что

$$f : X \rightarrow Y,$$

если $x_1 = x_2$, то $y_1 = y_2$, для любых пар

$$(x_1, y_1) \in f \text{ и } (x_2, y_2) \in f.$$

Если функция $f: X \rightarrow Y$ такова, что для любого элемента $y \in Y$ существует единственный прообраз $x \in X$, то говорят, что f *устанавливает взаимно однозначное* соответствие между множествами X и Y .

8.9. Отношения

Отношение — это особый вид соответствия, заданный на одном и том же множестве, т.е. это соответствие вида (A, A, R) . Элемент $a \in A$ находится в отношении R к элементу $b \in A$ тогда и только тогда, когда $(a, b) \in R$.

Обычно если элемент a находится в отношении R к элементу b , то пишут $a R b$. При этом существенен порядок элементов. То есть элемент a может находиться в отношении R к элементу b и в то же время элемент b может не находиться в отношении R к элементу a . Принято обозначать одной и той же буквой R и само отношение, и его график.

Пример 8.21. Пусть имеются четыре мужчины, обозначенные a, b, c, d . При этом b — сын a , а c и d — сыновья b . R — отношение «быть сыном». Найти график этого отношения.

Решение

Ясно, что $b R a$, $c R b$ и $d R b$. Следовательно, $R = \{(b, a), (c, b), (d, b)\}$. ►

Пример 8.22. Для условий предыдущего примера построить график отношения R — «быть дедушкой».

Решение

$$R = \{(a, c), (a, d)\}. \quad \blacktriangleright$$

Отношение R на множестве A называется:

- 1) *рефлексивным*, если для любого элемента $a \in A \rightarrow a R a$;
- 2) *симметричным*, если для любых элементов $a, b \in A$ из $a R b \rightarrow b R a$;
- 3) *транзитивным*, если для любых элементов $a, b, c \in A$ из $a R b$ и $b R c \rightarrow a R c$.

Очевидно, что использованные в примерах отношения «быть сыном» и «быть дедушкой» нерефлексивны, несимметричны и нетранзитивны.

В математике важную роль играют два вида специальных отношений: отношение эквивалентности и отношение порядка.

Говорят, что элементы множества находятся в *отношении эквивалентности* по некоторому признаку, если с точки зрения этого признака один элемент может быть заменен другим.

Пример. 8.23. Отношения эквивалентности:

- отношение, характеризуемое признаком «быть на первом курсе» на множестве студентов факультета. Действительно, если первокурсника Иванова заменить первокурсником Петровым, то с точки зрения рассматриваемого признака ничего не изменится;

- отношение, характеризуемое признаком «иметь остаток 2 при делении на 3» на множестве натуральных чисел N . С точки зрения этого признака числа 5 и 26 эквивалентны;

- отношение, характеризуемое признаком «быть прямой, параллельной данной» на множестве прямых плоскости. Для этого признака неважно, какая из прямых плоскости, параллельных данной прямой, будет выбрана. ►

В математике принята формулировка, что термин «отношение эквивалентности» применяется только в том случае, когда отношение рефлексивно, симметрично и транзитивно. Обычно для обозначения эквивалентности применяют символ « $\equiv$ ».

Тогда математическое определение эквивалентности можно получить, записав эти три условия в виде следующих соотношений:

- 1) $x \equiv x$ (рефлексивность);
- 2) $x \equiv y \rightarrow y \equiv x$ (симметричность);
- 3) $x \equiv y$ и $y \equiv z \rightarrow x \equiv z$ (транзитивность).

Отношения порядка определяют некоторый порядок расположения элементов множества. Если элементы множества являются числами, то отношение порядка характеризуется понятиями «больше» ($>$), «меньше» ($<$), «больше или равно (другими словами, не меньше)» ($\geq$), «меньше или равно (не больше)» ($\leq$).

Первые два отношения называются отношениями строгого порядка, а вторые два — отношениями нестрогого порядка.

Очевидно, что отношения *строгого* порядка нерефлексивны, несимметричны и транзитивны. Отношения же *нестрогого* порядка рефлексивны и транзитивны. Что касается симметричности этих отношений, то для них принято

использовать термин «антисимметричность», что означает, что из $x \leq y$ следует $y \leq x$ тогда и только тогда, когда $x = y$.

Пример 8.24. Дано множество $A = \{2, 3, 5\}$. Найти график R отношения порядка (A, A, R) , характеризующегося понятием «меньше».

Решение

$$R = \{(2, 3), (2, 5), (3, 5)\}.$$



8.10. Мощность множеств

Пусть X и Y — два множества. Если в множестве X содержится больше элементов, чем в множестве Y , то говорят, что множество X имеет *большую мощность*, чем множество Y .

Если множества X и Y конечны, то решение вопроса о том, какое множество имеет большую мощность, не представляет большого труда и осуществляется просто путем пересчета и сравнения числа элементов в этих множествах.

Мощность конечного множества — это число его элементов.

Для бесконечных множеств такой способ определения их мощности, очевидно, не подходит. Ясно, что мощность любого бесконечного множества больше, чем мощность любого конечного. Но как сравнивать число элементов в бесконечных множествах, ведь оно бесконечно?

Два бесконечных множества X и Y считаются **равномощными**, если можно установить взаимно однозначное соответствие между элементами этих множеств.

Среди бесконечных множеств наименьшей мощностью обладает множество натуральных чисел N . Все множества, равномощные множеству N , называются *счетными* множествами. Мощность множества R действительных чисел (которая называется *континуум*) больше, чем мощность счетного множества.

Пример 8.25. Какую мощность имеет множество целых чисел Z ?

Решение

Множество Z имеет мощность счетного множества. Одним из способов установления взаимно однозначного соответствия между множествами Z и N является следующий:

N	1	2	3	4	5	6	7	8	...
Z	0	1	-1	2	-2	3	-3	4	...



Вопросы для самоконтроля

1. Что называется множеством; элементами множества?
2. Какие множества называются конечными; равными?
3. Дайте определение подмножества.
4. Какое множество называется пустым; универсальным?
5. Какие существуют способы задания множеств? Опишите их.
6. Перечислите и опишите основные операции над множествами. Изобразите диаграммы Эйлера — Венна, иллюстрирующие операции над множествами.
7. Какие существуют числовые множества? Дайте определение основных подмножеств множества действительных чисел.
8. Что называется кортежем; компонентами кортежа; длиной кортежа?
9. Что называется прямым произведением множеств; степенью множества?
10. Дайте определение соответствия, отображения, функции.

Задачи для самостоятельного решения

- 8.1. Дано универсальное множество $I = \{1, 2, \dots, 12\}$, а также множества $A = \{1, 2, 5, 7\}$, $B = \{3, 4, 5, 8, 9, 11\}$, $A = \{1, 4, 6, 7, 12\}$. Найти множество $D = (\bar{A} \cup B) \setminus (B \cap \bar{C})$.
- 8.2. Даны множества $A = \{3, 4, 6\}$ и $B = \{1, 4\}$. Найти $A \times B$.
- 8.3. Даны множества $A \subset R$, $B \subset R$. $A = (2, 3]$; $B = (-2, 1) \cup [2, 4)$. Найти $A \times B$.
- 8.4. Даны множества $A = \{1, 5, 10, 12\}$ и $B = \{3, 6, 8\}$. Составить график Q соответствия $q = (A, B, Q)$, если известно, что нечетные элементы B соответствуют элементам, делящимся на 5, из A .
- 8.5. Дано множество $A = \{2, 3, 5, 9, 10, 12, 15, 20\}$. Найти график R отношения (A, A, R) , характеризующегося признаком «частное — натуральное число, делящееся на 3».

Глава 9

ПРЕДЕЛ ЧИСЛОВОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ И ЕГО СВОЙСТВА

9.1. Понятие числовой последовательности

Если каждому натуральному числу n по определенному правилу поставлено в соответствие единственное действительное число a_n , то говорят, что задана **числовая последовательность**.

Пример 9.1. Пусть числовая последовательность задана таблицей

N	1	2	3	4	5	6	7	...
a_n	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{7}$	...

Из таблицы очевидно правило, по которому каждому натуральному числу n ставится в соответствие действительное число a_n . То есть уверенно можно сказать, что 248-й член данной числовой последовательности равен $\frac{1}{248}$ и т.д. ►

Чаще всего числовую последовательность задают формулой общего члена, имеющей вид

$$a_n = f(n), \quad n \in N,$$

где правая часть представляет собой некоторое выражение, зависящее от n .

Ясно, что в приведенном примере формула общего члена имеет вид

$$a_n = \frac{1}{n}.$$

Для обозначения числовой последовательности обычно используют фигурные скобки: $\{a_n\}$ или $\{f(n)\}$.

Пример 9.2. Найти 5, 7 и 12-й члены последовательности $\left\{ \frac{n^2}{n+1} \right\}$.

Решение

Формула общего члена последовательности имеет вид $a_n = \frac{n^2}{n+1}$.

По формуле выписываем

$$a_5 = \frac{25}{6}; a_7 = \frac{49}{8}; a_{12} = \frac{144}{13}. \quad \blacktriangleright$$

Укажем основные действия над числовыми последовательностями:

— **суммой, разностью, произведением, частным** двух последовательностей $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ называются последовательности $\{c_n\}$, общие члены которых определяются по следующим формулам, соответственно:

$$c_n = a_n + b_n; c_n = a_n - b_n; c_n = a_n \cdot b_n; c_n = \frac{a_n}{b_n};$$

— **произведением** последовательности $\{a_n\}$ **на число** λ называется последовательность $\{\lambda a_n\}$.

Существуют *стандартные* числовые последовательности. Рассмотрим их.

Арифметической прогрессией называется числовая последовательность, каждый последующий член которой образуется путем прибавления к предыдущему члену одного и того же числа d (положительного или отрицательного), называемого *разностью арифметической прогрессии*:

a_1 — первый член арифметической прогрессии;

$$a_2 = a_1 + d;$$

$$a_3 = a_2 + d = a_1 + 2d;$$

$$a_4 = a_3 + d = a_1 + 3d;$$

...

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d \text{ — формула общего члена.}$$

В ряде задач арифметическую прогрессию обрывают на каком-то члене, т.е. рассматривают не бесконечную, а конечную последовательность. При этом часто требуется найти сумму всех членов такой конечной последовательности.

Можно показать, что сумма S_n первых n членов арифметической прогрессии определяется по формуле

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{2a_1 + (n-1) \cdot d}{2} \cdot n.$$

Пример 9.3. Арифметическая прогрессия состоит из 110 членов: 2; 5; 8; 11; 14, ... Найти сумму всех ее членов.

Решение

Ясно, что $a_1 = 2$, $d = 3$. Сумму всех членов находим по формуле

$$S_n = \frac{2a_1 + (110-1) \cdot d}{2} \cdot 110 = \frac{2 \cdot 2 + 109 \cdot 3}{2} \cdot 110 = 18\,205. \quad \blacktriangleright$$

Геометрической прогрессией называется числовая последовательность, у которой каждый последующий член образуется путем умножения предыдущего члена на одно и то же число q , называемое *знаменателем прогрессии*:

b_1 — первый член геометрической прогрессии;

$$b_2 = b_1 \cdot q;$$

$$b_3 = b_2 \cdot q = b_1 \cdot q^2;$$

$$b_4 = b_3 \cdot q = b_1 \cdot q^3;$$

...

$$b_n = b_1 \cdot q^{n-1} \text{ — формула общего члена.}$$

Так же, как в случае арифметической прогрессии, геометрическая прогрессия может содержать конечное число членов. Получим формулу суммы первых n членов геометрической прогрессии:

$$S_n = b_1 + b_1 \cdot q + b_1 \cdot q^2 + b_1 \cdot q^3 + \dots + b_1 \cdot q^{n-2} + b_1 \cdot q^{n-1}.$$

Умножив обе части этой формулы на q , получаем

$$S_n \cdot q = b_1 \cdot q + b_1 \cdot q^2 + b_1 \cdot q^3 + b_1 \cdot q^4 + \dots + b_1 \cdot q^{n-1} + b_1 \cdot q^n.$$

После вычитания из второго уравнения первого имеем

$$S_n \cdot q - S_n = b_1 \cdot q^n - b_1,$$

откуда следует, что

$$S_n = b_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

Пример 9.4. Найти сумму первых 10 членов геометрической прогрессии: 7; 14; 28; 56; 112, ...

Решение

Ясно, что $b_1 = 7$, а $q = 2$. Подставляя в формулу, получаем

$$S_{10} = b_1 \cdot \frac{q^{10} - 1}{q - 1} = 7 \cdot \frac{2^{10} - 1}{2 - 1} = 7 \cdot 1023 = 7161. \quad \blacktriangleright$$

9.2. Предел числовой последовательности

Последовательность $\{a_n\}$ может быть такой, что при увеличении номера n члены последовательности приближаются к некоторому конкретному числу a таким образом, что абсолютная величина разности a_n и a становится все меньше и меньше и приближается к нулю.

В этом случае говорят, что число a является *пределом числовой последовательности* $\{a_n\}$ при n , стремящемся к бесконечности, и записывают это следующим образом:

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n.$$

Помимо указанного качественного определения существует несколько точных математических определений предела последовательности. Вот наиболее распространенное из них:

— число a называется **пределом последовательности** $\{a_n\}$ тогда и только тогда, когда для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется номер N члена последовательности, зависящий от ε , такой, что для любого $n > N$ выполняется неравенство $|a_n - a| < \varepsilon$.

Кроме квантора общности $\forall$ («любой», «для любого») для сокращения записи математических определений используют следующие символы:

- квантор существования $\exists$ — «существует», «найдется»;
- двоеточие ($:$) или прямая вертикальная черта ($|$) — «такой, что»;
- символ равносильности или эквивалентности ($\Leftrightarrow$) — «тогда и только тогда, когда»;
- символ следования ($\Rightarrow$) — «следует», «вытекает».

С использованием указанных символов определение предела последовательности можно записать в виде

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N = N(\varepsilon) : \forall n > N \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon.$$

Это определение предела последовательности можно проиллюстрировать рис. 9.1.

Ординаты точек на графике равны значениям членов последовательности a_n при соответствующих значениях n . Возьмем произвольное число $\varepsilon > 0$. Выполнение неравенства $|a_n - a| < \varepsilon$ означает попадание точки в горизонтальную полосу, ограниченную линиями с ординатами $a - \varepsilon$ и $a + \varepsilon$.

Из рис. 9.1 очевидно, что нашелся такой номер члена последовательности $N = 4$, что при всех $n > N$ соответствующие точки попадают в указанную полосу. Однако такая ситуация может иметь место лишь потому, что взято слишком большое число ε .

Берем другое число $\varepsilon_1 < \varepsilon$ и видим, что и на этот раз нашлось число $N = 7$, удовлетворяющее указанному условию. Таким образом, если для каждого $\varepsilon > 0$, как бы мало оно ни было, найдется такой номер N , после которого все точки последовательности попадают в полосу $a \pm \varepsilon$, то число a является пределом последовательности $\{a_n\}$.

Последовательность, имеющая предел (число), называется *сходящейся*, а не имеющая предела — *расходящейся*.

Если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0,$$

то последовательность $\{a_n\}$ называется бесконечно малой последовательностью или просто бесконечно малой.

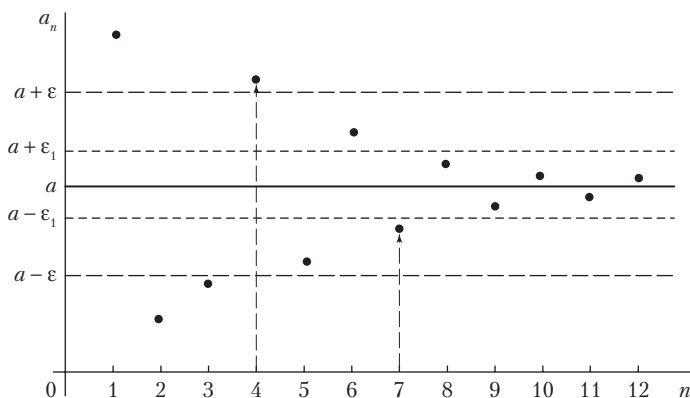


Рис. 9.1. Графическая иллюстрация предела числовой последовательности

Последовательность $a_n = \frac{1}{n}$ является бесконечно малой, так как выполняется условие

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Аналогично можно показать, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^a} = 0, \text{ где } a > 0.$$

Последовательность $\{a_n\}$ называется **бесконечно большой**, если

$$\forall C > 0 \exists N = N(C): \forall n > N \Rightarrow |a_n| > C,$$

т.е., если для любого положительного числа C найдется номер N члена последовательности, зависящий от C , такой, что для любого номера $n > N$ абсолютная величина члена последовательности a_n больше C .

В этом случае часто говорят, что последовательность $\{a_n\}$ имеет бесконечный предел и пишут

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty,$$

хотя формально эта запись является не совсем корректной, так как по определению предел последовательности — это число, а бесконечность числом не является.

Запись $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ означает то, что последовательность $\{a_n\}$ является бесконечно большой. Легко доказать, что если последовательность $\{a_n\}$ бесконечно малая, то последовательность $\{b_n\}$, где $b_n = \frac{1}{a_n}$ — бесконечно большая, и наоборот.

9.3. Свойства пределов числовой последовательности

1. Сходящаяся числовая последовательность имеет единственный предел.

2. Пусть $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ и $\{c_n\}$ — числовые последовательности, причем для любого n выполняется двойное неравенство

$$a_n \leq c_n \leq b_n.$$

Если $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = a$.

3. Пусть $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ — числовые последовательности, c — постоянное число и при этом $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$; $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$. Тогда выполняются следующие равенства:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} ca_n = c \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = ca;$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \pm b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \pm \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a \pm b;$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = ab;$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n} = \frac{a}{b}, \text{ если } b \neq 0.$$

Пример 9.5. Найти пределы последовательностей:

$$\begin{aligned} 1. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + 10n - 1}{7n^2 + 100n + 5} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2n^2 + 10n - 1}{n^2}}{\frac{7n^2 + 100n + 5}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{10}{n} - \frac{1}{n^2}}{7 + \frac{100}{n} + \frac{5}{n^2}} = \\ &= \frac{2 + 0 - 0}{7 + 0 + 0} = \frac{2}{7}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + 10n - 1}{7n^3 + 100n + 5} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2n^2 + 10n - 1}{n^3}}{\frac{7n^3 + 100n + 5}{n^3}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2}{n} + \frac{10}{n^2} - \frac{1}{n^3}}{7 + \frac{100}{n^2} + \frac{5}{n^3}} = \\ &= \frac{0 + 0 - 0}{7 + 0 + 0} = \frac{0}{7} = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^3 + 10n - 1}{7n^2 + 100n + 5} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2n^3 + 10n - 1}{n^3}}{\frac{7n^2 + 100n + 5}{n^3}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{10}{n^2} - \frac{1}{n^3}}{\frac{7}{n} + \frac{100}{n^2} + \frac{5}{n^3}} = \\ &= \left[\frac{2}{0} \right] = \infty. \end{aligned}$$

Последний предел равен бесконечности, так как предел числителя равен 2, а в знаменателе бесконечно малая величина, записанная в виде нуля. ►

Из примера очевидно, что предел отношений многочленов от n , при $n \rightarrow \infty$:

— равен отношению коэффициентов при максимальных степенях n , если максимальные степени n в числителе и знаменателе равны;

— равен нулю, если максимальная степень n в знаменателе выше, чем в числителе;

— бесконечен, если максимальная степень n в числителе выше, чем в знаменателе.

Вопросы и задания для самоконтроля

1. Что такое числовая последовательность?
2. Что представляет собой формула общего члена последовательности?
3. Что называется суммой, разностью, произведением, частным двух последовательностей, произведением последовательности на число?
4. Какая числовая последовательность называется арифметической прогрессией?
5. Запишите формулу общего члена и выражение для суммы первых n членов арифметической прогрессии.
6. Какая числовая последовательность называется геометрической прогрессией?
7. Запишите формулу общего члена и выражение для суммы первых n членов геометрической прогрессии.
8. Дайте определение предела последовательности. Как обозначается предел последовательности?
9. Как называются имеющая предел и не имеющая предела последовательности?
10. Какие последовательности называются бесконечно малыми и бесконечно большими?
11. Сформулируйте основные свойства пределов числовой последовательности.

Задачи для самостоятельного решения

9.1. Найти сумму первых 28 членов арифметической прогрессии 5; 8; 11; 14; 17, ...

9.2. Найти сумму первых 20 членов геометрической прогрессии 3; 6; 12; 24; 48, ...

9.3. Найти пределы последовательностей:

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1000n + 5}{n^2 + 1}.$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n^3 + 5n^2 - 2n + 4}{19n^3 + 3n - 1}.$$

$$3) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n - 5 + 7n^2}{4n^2 + n}.$$

$$4) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n^2 + 3n}{2n + 1} - \frac{(n + 1)(2n - 2)}{2n - 1} \right).$$

Глава 10

ПРЕДЕЛ И НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ

10.1. Понятие функции одной переменной

Рассмотрим сначала понятие переменной величины, или просто переменной.

Переменная величина x определяется множеством тех значений, которые она может принять в рассматриваемом случае. Это множество X назовем областью изменения значений переменной x .

Главным предметом изучения в математике является, однако, не изменение одной переменной самой по себе, а зависимость между двумя или несколькими переменными при их совместном изменении. Во многих случаях переменные не могут принимать любую пару значений из своих областей изменения; если одной из них придано конкретное значение, то этим уже определяется и значение другой. Тогда первая из них называется **независимой**, а вторая — **зависимой** переменной.

Пусть даны две переменные x и y с областями изменения X и Y . Если при этом каждому элементу $x \in X$ по определенному правилу f поставлен в соответствие единственный элемент $y \in Y$, то говорят, что на множестве X задана **функция** $y = f(x)$.

Ясно, что при этом переменная x является независимой переменной. Ее часто называют **аргументом** функции.

Переменная y является зависимой переменной и называется **значением** функции, или просто **функцией**.

Множество X называется **областью определения** функции, а множество Y — **областью ее значений**.

Существует **ряд способов** задания функции:

а) наиболее простой — **аналитический** способ, т.е. задание функции в виде формулы. Если область определения

функции X при этом не указана, то под X подразумевается множество значений x , при которых формула имеет смысл;

б) **графический** способ. Этот способ особенно нагляден. Для функции одной переменной $y = f(x)$ используется координатная плоскость xy .

Совокупность точек (x, y) , для которых ордината y является значением функции от аргумента x , определяет график функции на плоскости (xy) ;

в) **табличный** способ. Он часто используется, когда независимая переменная x принимает лишь конечное число значений.

10.2. Основные свойства функций

Рассмотрим основные свойства функций, которые упрощают проведение их исследования:

Четность. Функция $y = f(x)$ называется **четной**, если для любого значения x , принадлежащего области определения функции X , значение $(-x)$ тоже принадлежит X и при этом выполняется равенство

$$f(-x) = f(x).$$

График четной функции *симметричен* относительно оси ординат.

Функция $y = f(x)$ называется **нечетной**, если для любого $x \in X$ следует $(-x) \in X$ и при этом

$$f(-x) = -f(x).$$

График нечетной функции *симметричен* относительно начала координат.

Если функция $y = f(x)$ не является ни четной, ни нечетной, то ее часто называют **функцией общего вида**.

Монотонность. Функция $y = f(x)$ называется **возрастающей** на некотором интервале (a, b) , если для любых $x_1, x_2 \in (a, b)$, таких, что $x_1 < x_2$, следует, что $f(x_1) < f(x_2)$, и **убывающей**, если $f(x_1) > f(x_2)$.

Возрастающую и убывающую на интервале (a, b) функции называют **монотонными** на этом интервале, а сам интервал (a, b) — интервалом монотонности этих функций.

В некоторых учебниках такие функции называют *строго монотонными*, а *монотонными* называют неубывающую

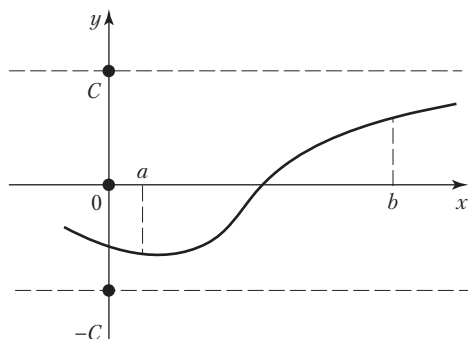


Рис. 10.1. Вид ограниченной функции

и невозрастающую на рассматриваемом интервале функции (вместо строгих неравенств для функций пишутся нестрогие).

Ограниченность. Функция $y = f(x)$ называется **ограниченной** на интервале (a, b) , если существует такое число $C > 0$, что для любого $x \in (a, b)$ следует $|f(x)| < C$, и **неограниченной** в противном случае, т.е. если для любого числа $C > 0$ существует такой $x \in (a, b)$, что $|f(x)| > C$. На рис. 10.1 показан график функции, ограниченной на интервале (a, b) .

Аналогичное определение ограниченности можно дать для любого вида промежутка.

Периодичность. Функция $y = f(x)$ называется **периодической**, если существует такое число t , что для любого $x \in X$ выполняется равенство

$$f(x + t) = f(x).$$

Наименьшее из таких чисел t называется **периодом функции** и обозначается T .

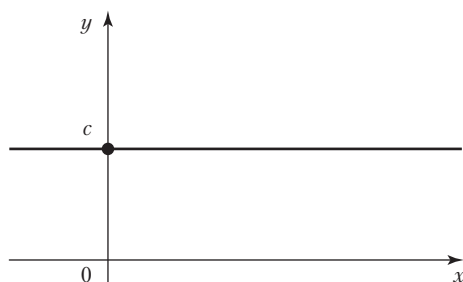
Характерным признаком периодичности функций является наличие в их составе тригонометрических функций.

10.3. Элементарные функции и их графики

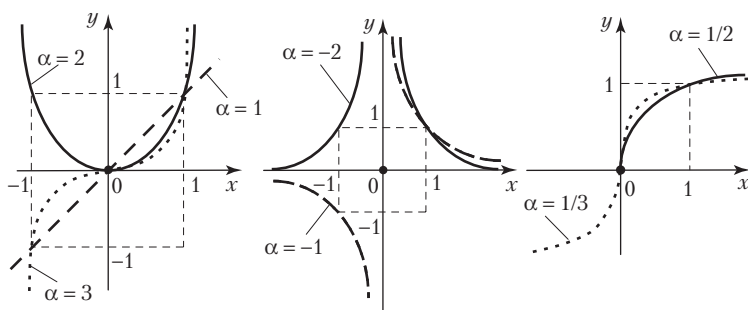
К элементарным функциям относятся:

а) *простейшие элементарные функции*

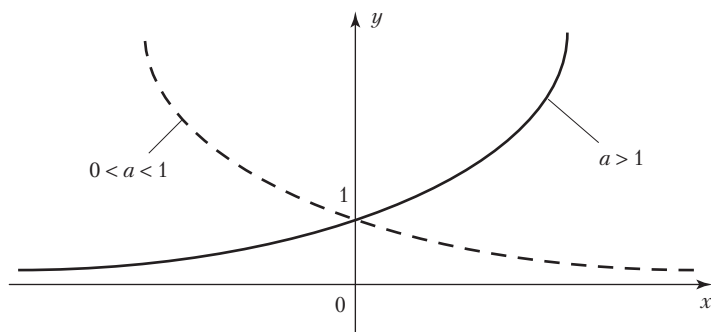
1. Константа $y = c$, где c — постоянное для данной функции действительное число, одно и то же для всех значений x .

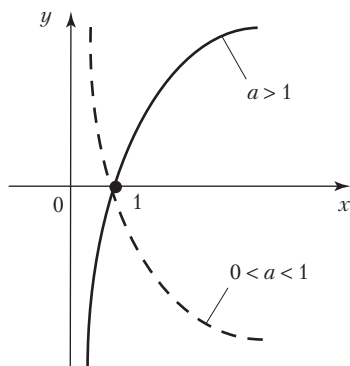
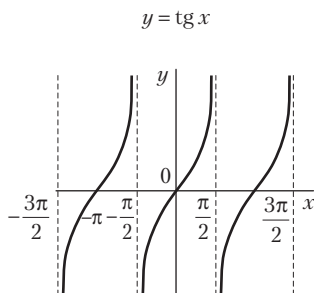
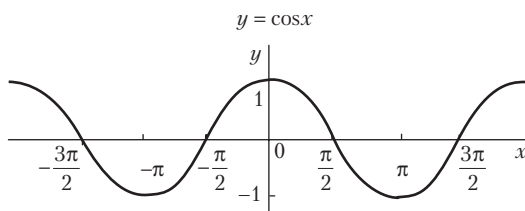
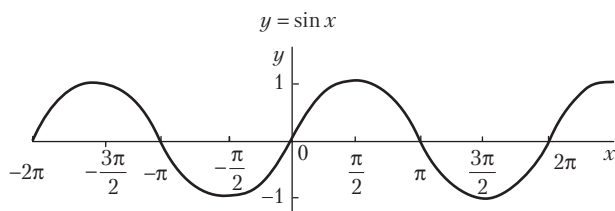


2. Степенная функция $y = x^\alpha$, где α — любое постоянное действительное число, кроме нуля. Вид графиков функций при некоторых целых положительных ($\alpha = n$), целых отрицательных ($\alpha = -n$) и дробных ($\alpha = 1/n$) значениях α представлен ниже.

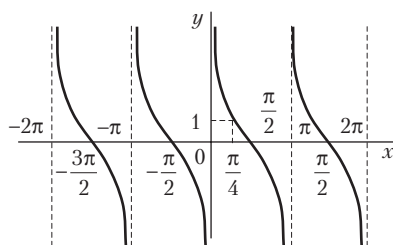


3. Показательная функция $y = a^x$ ($a > 0$; $a \neq 1$).



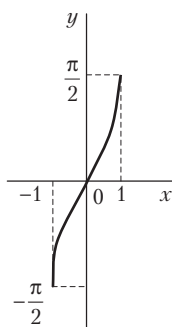
4. Логарифмическая функция $y = \log_a x$ ($a > 0$; $a \neq 1$).5. Тригонометрические функции: $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$.

$$y = \operatorname{ctg} x$$

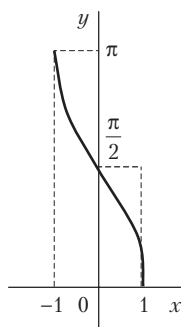


6. Обратные тригонометрические функции: $y = \arcsin x$,
 $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{arcctg} x$

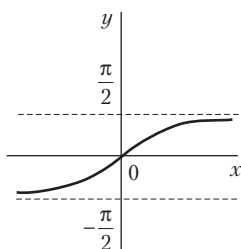
$$y = \arcsin x$$



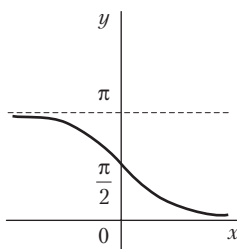
$$y = \arccos x$$



$$y = \operatorname{arctg} x$$



$$y = \operatorname{arcctg} x$$



б) сложные функции

Кроме перечисленных простейших элементарных функций аргумента x к элементарным функциям также относятся функции, аргументами которых являются тоже элементарные функции, а также функции, полученные путем

выполнения конечного числа арифметических действий над элементарными функциями. Например, функция

$$y = \frac{\sin\left(5^{2x} + \frac{x}{x+1}\right)}{\sqrt{x^2 + 4x - 5}}$$

тоже является элементарной функцией.

Функции, аргументами которых являются не независимые переменные, а другие функции, называются **сложными функциями** или суперпозициями функций. Пусть даны две функции: $y = \sin x$ и $z = \log_2 y$. Тогда сложная функция (суперпозиция функций) может иметь вид

$$z = \log_2(\sin x).$$

Также можно ввести понятие **обратной функции**. Пусть $y = f(x)$ задана в области определения X , а Y — множество ее значений. Выберем какое-нибудь значение $y = y_0$ и по нему найдем x_0 так, чтобы y_0 было равно $f(x_0)$. Подобных значений x_0 может оказаться и несколько.

Таким образом, каждому значению y из области Y ставится в соответствие одно или несколько значений x . Если такое значение x только одно, то в области Y может быть определена функция $x = g(y)$, которая называется **обратной** для функции $y = f(x)$.

Найдем, например, обратную функцию для показательной функции $y = a^x$. Из определения логарифма следует, что если задано значение y , то значение x , удовлетворяющее условию $y = a^x$, находится по формуле $x = \log_a y$. То есть каждому y из области Y можно поставить в соответствие одно определенное значение $x = \log_a y$.

Следовательно, функция $x = \log_a y$ является обратной для функции $y = a^x$ на множествах X и Y . Так как принято у любой функции независимую переменную обозначать x , то в этом случае говорят, что $y = f(x)$ и $y = g(x)$ — обратные функции.

Графики функции $y = f(x)$ и обратной ей функции $y = g(x)$ симметричны относительно биссектрисы первого и третьего координатных углов.

10.4. Предел функции в точке и в бесконечности

Рассмотрим сначала понятие **предела функции в точке**. Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности

точки x_0 кроме, может быть, самой точки x_0 . Будем рассматривать поведение $f(x)$ при приближении независимой переменной x к точке x_0 .

Графически понятие предела можно ввести следующим образом. Говорят, что функция $y = f(x)$ имеет пределом число a в точке x_0 , если при движении по графику функции так, что абсцисса точки графика приближается к x_0 слева или справа, ордината этой точки приближается к значению a (рис. 10.2). При этом по графику приближаемся к точке A .

Обозначают этот факт так:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a.$$

Запись под обозначением « $\lim$ » называется условием предельного перехода. Здесь это условие $x \rightarrow x_0$.

Существует несколько математических определений предела функции в точке. Наиболее употребительным из них является определение по Коши, также называемое определением на языке $\varepsilon - \delta$.

Число a называется **пределом функции** $y = f(x)$ в точке x_0 тогда и только тогда, когда для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое число $\delta > 0$, зависящее от ε , что для любого x , не равного x_0 и удовлетворяющего неравенству $|x - x_0| < \delta$, следует $|f(x) - a| < \varepsilon$.

Используя математические символы, это определение можно записать следующим образом:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 (\delta = \delta(\varepsilon)) : \forall x (x \neq x_0) : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon.$$

Пусть задано некоторое число $\varepsilon > 0$. Из определения предела следует, что если число a является пределом функции $y = f(x)$ в точке x_0 , то при этом должно существовать число δ такое, что как только независимая переменная x попадает в вертикальную полосу от $x_0 - \delta$ до $x_0 + \delta$, то значение функции $f(x)$ попадает в горизонтальную полосу от $a - \varepsilon$ до $a + \varepsilon$ (см. рис. 10.2).

Как очевидно из рис. 10.2, также существует число δ_1 для $\varepsilon_1 < \varepsilon$. Таким образом, если для каждого малого положительного числа ε найдется такое число δ , то тогда число a является пределом функции $y = f(x)$ в точке x_0 .

Можно говорить об **односторонних** пределах функции $f(x)$ в точке x_0 слева или справа. При определении таких

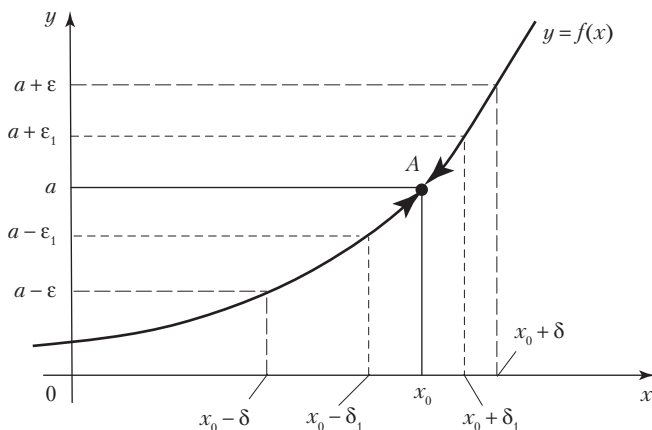


Рис. 10.2. Предел функции в точке

пределов рассматриваются значения x , которые соответственно меньше или больше, чем x_0 .

Такие пределы обозначаются: слева $\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x)$ и справа $\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x)$. На рис. 10.3 графически показан случай, когда существуют односторонние пределы функции $y = f(x)$ слева и справа, но предел функции в точке x_0 не существует.

Из рис. 10.3 видно, что для функции $y = f(x)$, представленной на графике,

$$\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = a; \quad \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = b.$$

Для существования *предела функции в точке* x_0 *необходимо и достаточно*, чтобы выполнялось условие

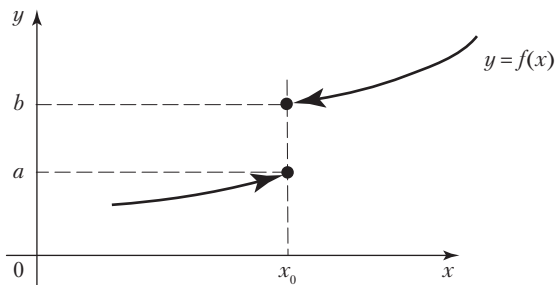


Рис. 10.3. Односторонние пределы функции

$$\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x).$$

Аналогично можно ввести определение предела функции и при стремлении независимой переменной x к бесконечности. Пусть функция $y = f(x)$ определена при достаточно больших по абсолютной величине значениях независимой переменной x .

Тогда число a называется *пределом функции* $y = f(x)$ в бесконечности тогда и только тогда, когда для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое число $S > 0$, зависящее от ε , что для любого x , удовлетворяющего неравенству $|x| > S$, следует $|f(x) - a| < \varepsilon$.

Используя математические символы, это определение можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = a &\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists S > 0 (S = S(\varepsilon)) : \forall x: |x| > S \Rightarrow \\ &\Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Аналогично односторонним пределам в точке можно ввести односторонний предел функции в бесконечности при $x \rightarrow +\infty$ и при $x \rightarrow -\infty$.

При $x \rightarrow +\infty$ рассматривают только такие значения x , которые больше S , а при $x \rightarrow -\infty$ — те, которые меньше $-S$.

Пределы $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ и $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ могут быть разными (рис. 10.4).

Из рис. 10.4 очевидно, что $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = a$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b$.

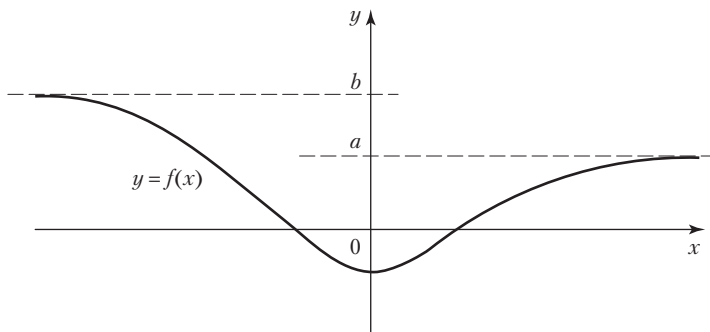


Рис. 10.4. Пределы функции на бесконечностях разных знаков

10.5. Бесконечно малые и бесконечно большие величины

Функция $y = f(x)$ называется **бесконечно малой величиной** (функцией) **в точке** x_0 , если выполняется равенство

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0.$$

Часто такие функции обозначают греческими буквами: $\alpha(x)$, $\beta(x)$ и т.д. При этом можно доказать, что $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$ тогда и только тогда, когда вблизи точки x_0 выполняется равенство

$$f(x) = a + \alpha(x),$$

где $\alpha(x)$ — бесконечно малая при $x \rightarrow x_0$.

Аналогично можно ввести понятие бесконечно малой величины (функции) на бесконечности. То есть функция $f(x)$ называется **бесконечно малой величиной (функцией) на бесконечности**, если

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0.$$

Основные свойства бесконечно малых величин.

Пусть $\alpha = \alpha(x)$, $\beta = \beta(x)$, $\gamma = \gamma(x)$ — бесконечно малые величины; A — постоянная величина. Тогда верно следующее.

1. Алгебраическая *сумма* конечного числа бесконечно малых — бесконечно малая величина

$$\gamma = \alpha \pm \beta.$$

2. Произведение бесконечно малой на ограниченную функцию (в том числе на постоянную или бесконечно малую) — бесконечно малая величина

$$\gamma = \alpha \cdot A; \gamma = \alpha \cdot \beta.$$

3. Частное от деления бесконечно малой на функцию, имеющую предел, не равный нулю, — бесконечно малая величина

$$\gamma = \frac{\alpha}{A}.$$

Функция $f(x)$ называется **бесконечно большой величиной** (функцией) **в точке** x_0 , если для любого числа $M > 0$ найдется такое число $\delta > 0$, зависящее от M , что для любого x , не равного x_0 , удовлетворяющего неравенству $|x - x_0| < \delta$, следует $|f(x)| > M$, и **на бесконечности**, если

$$\forall M > 0 \exists S > 0 (S = S(M)): \forall x: |x| > S \Rightarrow |f(x)| > M.$$

В этом случае пишут $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$ или $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ и говорят о бесконечном пределе, хотя это и противоречит приведенному выше определению предела.

Основные свойства бесконечно больших величин.

1. Произведение бесконечно большой величины на функцию, предел которой не равен нулю (или постоянную, не равную нулю), есть бесконечно большая величина, т.е.

$$\infty \cdot A = \infty.$$

2. Алгебраическая сумма бесконечно большой величины и ограниченной величины есть бесконечно большая величина

$$\infty + A = \infty.$$

3. Частное от деления бесконечно большой величины на ограниченную есть бесконечно большая величина

$$\frac{\infty}{A} = \infty.$$

Примерами бесконечно больших величин являются $\operatorname{tg} x$ при $x \rightarrow \frac{\pi}{2}$, $\frac{1}{x}$ при $x \rightarrow 0$, x^2 при $x \rightarrow \infty$ и т.д.

Следует отметить, что если $f(x)$ — бесконечно большая величина, то $\alpha(x) = \frac{1}{f(x)}$ — бесконечно малая, и наоборот.

Заметим, что пределы вида $\frac{0}{0}$; $\frac{\infty}{\infty}$; 1^∞ ; $\infty - \infty$; $0 \cdot \infty$ в теории пределов называются неопределенными.

10.6. Основные теоремы о пределах

Обозначим условие предельного перехода в виде $x \rightarrow \square$. Здесь под обозначением $\square$ будем понимать x_0 или $\pm\infty$.

Пусть $f(x)$ и $g(x)$ — функции, для которых существуют пределы при $x \rightarrow \square$, т.е.

$$\lim_{x \rightarrow \square} f(x) = a; \quad \lim_{x \rightarrow \square} g(x) = b.$$

Кроме того, пусть c — постоянная величина.

Сформулируем **основные теоремы о пределах функций**.

1. Постоянный множитель можно выносить за знак предела

$$\lim_{x \rightarrow \square} [c \cdot f(x)] = c \cdot \lim_{x \rightarrow \square} f(x) = ca.$$

2. Предел алгебраической суммы функций равен алгебраической сумме пределов этих функций

$$\lim_{x \rightarrow \square} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \rightarrow \square} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow \square} g(x) = a \pm b.$$

3. Предел произведения функций равен произведению пределов этих функций

$$\lim_{x \rightarrow \square} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow \square} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow \square} g(x) = a \cdot b.$$

Теоремы по п. 2 и 3 можно распространить на любое конечное число функций.

4. Предел частного двух функций равен частному пределов этих функций при условии, что предел делителя не равен нулю

$$\lim_{x \rightarrow \square} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow \square} f(x)}{\lim_{x \rightarrow \square} g(x)} = \frac{a}{b}, \text{ где } b \neq 0.$$

5. Если $\lim_{u \rightarrow u_0} f(u) = a$, $\lim_{x \rightarrow \square} \varphi(x) = u_0$, то предел сложной функции равен

$$\lim_{x \rightarrow \square} f[\varphi(x)] = a.$$

6. Если в некоторой окрестности точки x_0 или при достаточно больших x выполняется условие $f(x) < g(x)$, то

$$\lim_{x \rightarrow \square} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow \square} g(x).$$

Замечательные пределы. Два часто используемых при решении задач предела называют *замечательными пределами*.

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. Если аргумент x является функцией $f(x)$, то $\lim_{f(x) \rightarrow 0} \frac{\sin f(x)}{f(x)} = 1$.

2. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$. Аналогично, $\lim_{f(x) \rightarrow \infty} \left[1 + \frac{1}{f(x)}\right]^{f(x)} = e$.

В первом замечательном пределе, как и везде в курсе высшей математики, аргумент синуса берется в радианах. Второй замечательный предел равен иррациональному

числу e , являющемуся основанием натуральных логарифмов и приближенно равному 2,72.

Второй замечательный предел иногда записывают в следующей форме:

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e \quad \text{или} \quad \lim_{f(x) \rightarrow 0} [1+f(x)]^{\frac{1}{f(x)}}.$$

10.7. Асимптоты графика функции

Асимптотой графика функции $y = f(x)$ называется прямая, расстояние до которой от точки графика стремится к нулю при неограниченном удалении точки графика от начала координат.

Различают три вида **асимптот**:

а) **вертикальная асимптота**. Ее уравнение $x = a$. График функции $y = f(x)$, имеющий вертикальную асимптоту, может иметь вид, показанный на рис. 10.5.

Для нахождения вертикальной асимптоты графика функции $y = f(x)$ достаточно найти точку a такую, что в этой точке хотя бы один односторонний предел бесконечен, т.е.

$$\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = \pm\infty \quad \text{или} \quad (\text{и}) \quad \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \pm\infty.$$

Тогда прямая $x = a$ является **вертикальной** асимптотой графика функции $y = f(x)$;

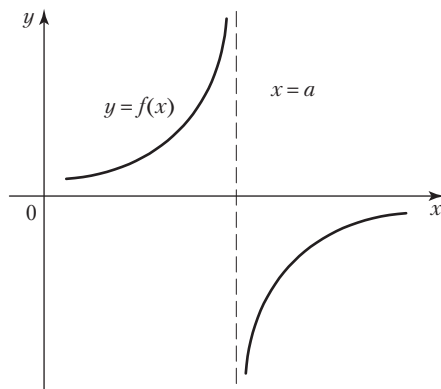


Рис. 10.5. Вертикальная асимптота

б) **горизонтальная асимптота**. Ее уравнение $y = b$. График функции $y = f(x)$ изображен на рис. 10.6.

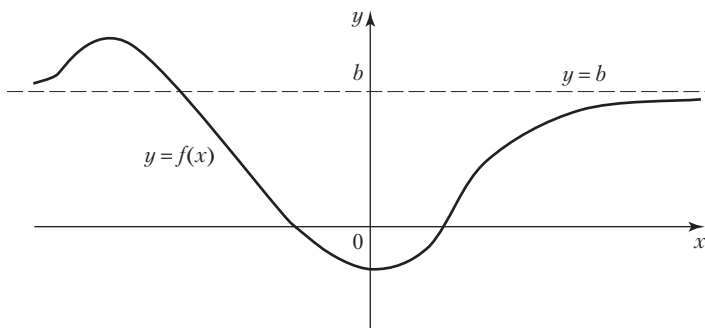


Рис. 10.6. Горизонтальная асимптота

Если

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b \text{ или (и) } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b,$$

то прямая $y = b$ является **горизонтальной асимптотой** (справа на ∞ ; слева на $-\infty$ графика функции $y = f(x)$). Если оба эти предела бесконечны или не существуют, то график функции $y = f(x)$ горизонтальных асимптот не имеет. Если горизонтальных асимптот нет, то отыскивают наклонную асимптоту;

в) **наклонная асимптота**. Ее уравнение $y = kx + b$. График функции, имеющий наклонную асимптоту, изображен на рис. 10.7.

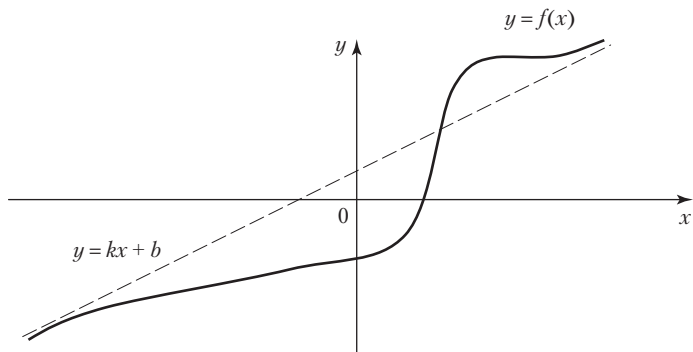


Рис. 10.7. Наклонная асимптота

Если существуют конечные пределы

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = k_1 \text{ и } \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - k_1 x] = b_1,$$

то прямая $y = k_1 x + b_1$ является *наклонной асимптотой справа* графика функции $y = f(x)$.

Если существуют и конечные пределы

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = k_2, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - k_2 x] = b_2,$$

то прямая $y = k_2 x + b_2$ является *наклонной асимптотой слева*.

Если хотя бы один из пределов при $x \rightarrow -\infty$ и при $x \rightarrow +\infty$ бесконечен или не существует, то график функции $y = f(x)$ наклонных асимптот *не имеет*.

Заметим, что на рис. 10.7 прямая $y = kx + b$ является одновременно наклонной асимптотой слева и справа (так как $k = k_1 = k_2$; $b = b_1 = b_2$).

Нетрудно видеть, что если $k = 0$, то наклонная асимптота превращается в горизонтальную, т.е. горизонтальная асимптота представляет собой частный случай наклонной асимптоты при $k = 0$.

10.8. Непрерывность функции в точке и на отрезке

Функция $y = f(x)$ называется **непрерывной в точке** x_0 , если выполняются три следующих условия.

1. Существует $f(x_0)$, т.е. значение функции в точке x_0 .
2. Существует конечный предел $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$.

3. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

Очевидно, что если функция $y = f(x)$ непрерывна в точке x_0 , то ее график можно провести через эту точку, не отрывая карандаша от бумаги (отсюда и название).

Если в точке x_0 не выполняется хотя бы одно из трех указанных выше условий, то функция $y = f(x)$ не является непрерывной (терпит разрыв) в точке x_0 .

Невыполнение каждого из условий можно проиллюстрировать рис. 10.8.

Можно доказать следующие **свойства функций, непрерывных в точке**.

Не выполняется:

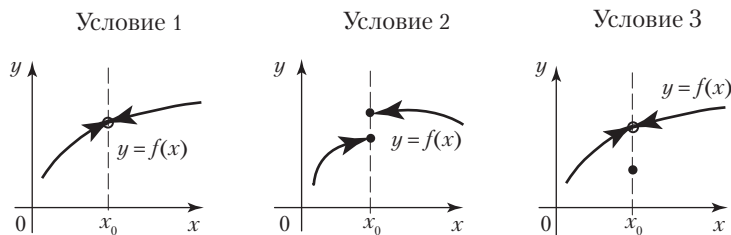


Рис. 10.8. Невыполнение условий непрерывности функции

1. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке x_0 , а c — постоянная величина, то функции

$$cf(x); f(x) \pm g(x); f(x) \cdot g(x); \frac{f(x)}{g(x)}, \text{ где } g(x_0) \neq 0,$$

также непрерывны в точке x_0 .

2. Если функция $u = \varphi(x)$ непрерывна в точке x_0 , а функция $f(u)$ непрерывна в точке u_0 , то сложная функция

$$y = f[\varphi(x)]$$

непрерывна в точке x_0 .

Таким образом, знак предела можно вносить под знак непрерывной функции, т.е.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f[\varphi(x)] = f[\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x)].$$

3. Все элементарные функции непрерывны во всех точках, принадлежащих области их определения.

Функция $y = f(x)$ называется **непрерывной на отрезке** $[a, b]$ (интервале (a, b)), если она непрерывна в каждой точке этого отрезка (интервала).

Если функция $y = f(x)$ в точке x_0 не является непрерывной, то точка x_0 называется **точкой разрыва** функции $y = f(x)$.

Принята следующая **классификация точек разрыва**.

1. Если в точке разрыва x_0 функции $y = f(x)$ существует конечный предел $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, то x_0 называется **точкой устранимого разрыва** функции $y = f(x)$ (см. рис. 10.8, условие 1 и 3).

2. Если в точке разрыва x_0 функции $y = f(x)$ существуют конечные односторонние пределы $\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x)$ и $\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x)$,

то x_0 называется **точкой разрыва первого рода** (см. рис. 10.8, условие 2).

Точки устранимого разрыва также можно отнести к точкам разрыва первого рода, так как в этих точках существуют конечные односторонние пределы функции $y = f(x)$.

3. Если в точке разрыва x_0 функции $y = f(x)$ хотя бы один из односторонних пределов не существует или бесконечен, то x_0 называется **точкой разрыва второго рода** функции $y = f(x)$.

Возвращаясь к вопросу *нахождения* вертикальных асимптот, можно сформулировать следующий признак существования вертикальной асимптоты:

— если x_0 — точка разрыва второго рода функции $y = f(x)$ и хотя бы один из односторонних пределов функции в этой точке бесконечен, то прямая $x = x_0$ является *вертикальной асимптотой* графика функции $y = f(x)$.

Свойства функций, непрерывных на отрезке.

1. Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она ограничена на этом отрезке (рис. 10.9).

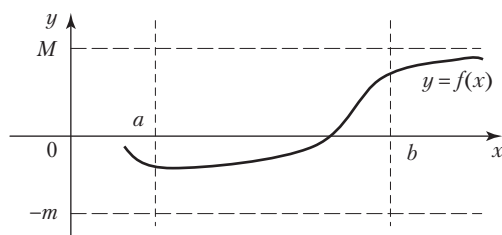


Рис. 10.9. Ограниченная функция

2. Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она достигает на этом отрезке своего наибольшего M и наименьшего m значения (теорема Вейерштрасса) (рис. 10.10).

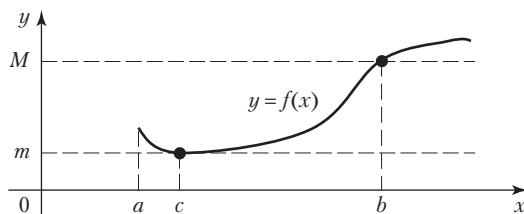


Рис. 10.10. Наименьшее и наибольшее значения функция

3. Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, а ее значения на концах отрезка $f(a)$ и $f(b)$ имеют разные знаки, то найдется точка $c \in [a, b]$ такая, что $f(c) = 0$ (теорема Больцано — Коши) (рис. 10.11).

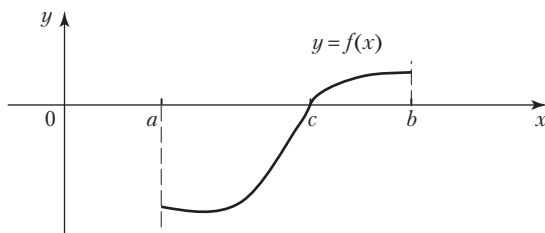


Рис. 10.11. К теореме Больцано — Коши

Легко показать, что все эти свойства не имеют силы для функции $y = f(x)$, непрерывной на интервале, а не на отрезке. Например, как показано на рисунке ниже, непрерывная на интервале (a, b) функция $y = f(x)$ не удовлетворяет свойствам 1 и 2 в части наибольшего ее значения (рис. 10.12).

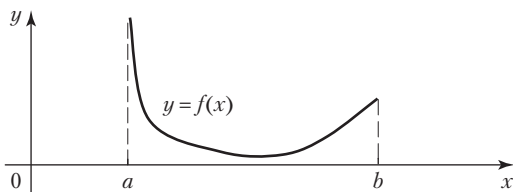


Рис. 10.12. Функция, непрерывная только на интервале

Пример 10.1. Найти область определения функции

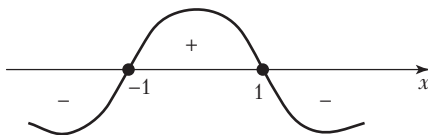
$$y = \ln \frac{1+x}{1-x}.$$

Решение

Выражение, стоящее в правой части равенства, имеет смысл, если аргумент натурального логарифма больше нуля, а знаменатель дроби не равен нулю. То есть

$$\frac{1+x}{1-x} > 0 \text{ и } x \neq 1.$$

Исследуя левую часть неравенства, можно построить интервалы ее положительного и отрицательного значений.



Из рисунка очевидно, что областью решений неравенства является интервал $(-1; 1)$. Следовательно, область определения исходной функции: $x \in (-1; 1)$. ►

В примерах 10.2—10.4 установить четность функций.

Пример 10.2. $y = \frac{4x^2 + 1}{x}$.

Решение

Найдем $y(-x)$: $y(-x) = \frac{4 \cdot (-x)^2 + 1}{(-x)} = -\frac{4x^2 + 1}{x} = -y(x)$. Функция

нечетная. ►

Пример 10.3. $y = \frac{4x^2 + 1}{x^2}$.

Решение

Найдем $y(-x)$: $y(-x) = \frac{4 \cdot (-x)^2 + 1}{(-x)^2} = \frac{4x^2 + 1}{x^2} = y(x)$. Функция четная. ►

Пример 10.4. $y = \frac{4x^2 + 1}{x + 1}$.

Решение

Найдем $y(-x)$: $y(-x) = \frac{4 \cdot (-x)^2 + 1}{(-x) + 1} = \frac{4x^2 + 1}{-x + 1}$. По виду функция $y(-x)$ не равна ни $y(x)$, ни $-y(x)$. Проверим это для какой-либо произвольной точки, например $x = \pm 2$:

$$y(2) = \frac{4 \cdot 2^2 + 1}{2 + 1} = \frac{17}{3}; \quad y(-2) = \frac{4 \cdot (-2)^2 + 1}{(-2) + 1} = -17.$$

Функция не является ни четной, ни нечетной, т.е. это функция общего вида. ►

Пример 10.5. Найти предел функции $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 4}{x^2 - x - 2}$.

Решение

Используем свойство непрерывности элементарных функций в области их определения. Из свойства следует, что если существует

значение функции в той точке, к которой стремится x , то предел функции в этой точке существует и равен значению функции.

Поэтому первым шагом при вычислении предела является подстановка в функцию условия предельного перехода:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 4}{x^2 - x - 2} = \frac{1^2 - 4}{1^2 - 1 - 2} = \frac{-3}{-2} = \frac{3}{2} = 1,5. \quad \blacktriangleright$$

Пример 10.6. Найти предел функции $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 - x - 2}$.

Решение

Подставляем $x = 2$ в формулу функции. Получаем

$$\frac{2^2 - 4}{2^2 - 2 - 2} = \frac{0}{0}.$$

В таком случае говорят, что данный предел представляет собой неопределенность вида $\frac{0}{0}$, которую надо раскрыть.

Для функций, представляющих собой алгебраическую рациональную дробь, основным методом раскрытия неопределенностей является разложение числителя и знаменателя на множители и сокращение множителей, обращающих в нуль числитель и знаменатель. Такое действие является правомерным, так как при определении понятия предела функции специально подчеркивалось, что значение функции в самой точке, к которой стремится x (равно как и его отсутствие), никак не влияет на предел функции в этой точке.

Поэтому сокращение указанных множителей при определении предела не является сокращением на нуль. Ясно, что числитель заданной функции можно разложить на множители по формуле «разность квадратов», а знаменатель — используя решение соответствующего квадратного уравнения или способом группировки.

Тогда

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 - x - 2} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+2)(x-2)}{(x+1)(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+2}{x+1} = \frac{2+2}{2+1} = \frac{4}{3}. \quad \blacktriangleright$$

Пример 10.7. Найти предел функции

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 2x - 15}{x^2 - 6x + 5} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{(x-5)(x+3)}{(x-5)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x+3}{x-1} = \frac{8}{4} = 2. \quad \blacktriangleright$$

Пример 10.8. Найти предел функции

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{3x^2 - 5x - 12}{2x^2 - 14x + 24} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3 \cdot (x-3) \left(x + \frac{4}{3}\right)}{2 \cdot (x-4)(x-3)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3x + 4}{2x - 8} = \frac{13}{-2} = -6,5. \quad \blacktriangleright$$

Пример 10.9. Найти предел функции $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3}{(x-1)^3}$.

Решение

У заданной функции в числителе постоянная величина не равная нулю, а в знаменателе бесконечно малая функция при $x \rightarrow 1$. Следовательно, заданная функция является бесконечно большой функцией при $x \rightarrow 1$ и ответ нужно записать так:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3}{(x-1)^3} = \frac{3}{0} = \infty.$$

Здесь вместо значения нуль понимается бесконечно малая величина. В этом случае обычно говорят, что предел заданной функции бесконечен (или равен бесконечности). $\blacktriangleright$

Пример 10.10. Найти предел функции $\lim_{x \rightarrow -1-0} \frac{x^2 + 4x - 5}{x^2 - 1}$.

Решение

Подставив $x = -1$, имеем частное от деления функции, предел которой не равен нулю, на бесконечно малую функцию при $x \rightarrow -1$. Это значит, что предел заданной функции бесконечен, т.е.

$$\lim_{x \rightarrow -1-0} \frac{x^2 + 4x - 5}{x^2 - 1} = \frac{-8}{0} = -\infty. \quad \blacktriangleright$$

Пример 10.11. Найти предел функции

$$\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{12}{x^3 + x^2 - 4x - 4} - \frac{1}{x-2} \right).$$

Решение

Подставив $x = 2$, убеждаемся, что предел каждого из слагаемых заданной алгебраической суммы бесконечен. То есть имеем дело с пределом вида $\infty - \infty$. Такой предел является неопределенностью и в зависимости от вида функций-слагаемых может оказаться равным как бесконечности, так и любому конкретному числу, включая нуль. Для раскрытия такой неопределенности следует перейти к неопределенности вида $\frac{0}{0}$ путем приведения дробей к общему знаменателю и выполнения сложения или вычитания, а затем действовать аналогично ранее рассмотренным случаям.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{12}{x^3 + x^2 - 4x - 4} - \frac{1}{x-2} \right) = \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{12}{x^2(x+1) - 4(x+1)} - \frac{1}{x-2} \right) =$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{12}{(x+1)(x+2)(x-2)} - \frac{1}{x-2} \right) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{12 - (x+1)(x+2)}{(x+1)(x+2)(x-2)} = \\
&= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{12 - x^2 - 3x - 2}{(x+1)(x+2)(x-2)} = - \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 3x - 10}{(x+1)(x+2)(x-2)} = \\
&= - \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+5)}{(x+1)(x+2)(x-2)} = - \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+5}{(x+1)(x+2)} = - \frac{7}{12}. \quad \blacktriangleright
\end{aligned}$$

Пример 10.12. Найти предел функции $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{8x}$.

Решение

Чтобы найти заданный предел, нужно домножить числитель и знаменатель на 3, после чего вынести за знак предела множитель $\frac{3}{8}$ и использовать первый замечательный предел. Запишем

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{8x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \sin 3x}{3 \cdot 8x} = \frac{3}{8} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{3x} = \frac{3}{8} \cdot 1 = \frac{3}{8}. \quad \blacktriangleright$$

Пример 10.13. Найти предел функции

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + 3x^2 - x}{7x^3 + 100x - 5} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2x^3}{x^3} + \frac{3x^2}{x^3} - \frac{x}{x^3}}{\frac{7x^3}{x^3} + \frac{100x}{x^3} - \frac{5}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{3}{x} - \frac{1}{x^2}}{7 + \frac{100}{x^2} - \frac{5}{x^3}} = \\
&= \frac{2 + \frac{3}{\infty} - \frac{1}{\infty}}{7 + \frac{100}{\infty} - \frac{5}{\infty}} = \frac{2}{7}. \quad \blacktriangleright
\end{aligned}$$

Пример 10.14. Найти предел функции $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x$, $a \neq 0$.

Решение

Для нахождения данного предела следует числитель и знаменатель дроби разделить на a , сделать замену переменной $t = \frac{x}{a}$, а затем использовать непрерывность степенной функции и второй замечательный предел

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{x}{a}}\right)^{\frac{x}{a}} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{t}\right)^t\right]^a =$$

$$= \left[\lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t} \right)^t \right]^a = e^a. \quad \blacktriangleright$$

Пример 10.15. Найти предел функции

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x-1} \right)^x &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x+1}{x-1} - 1 \right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x+1-x+1}{x-1} \right)^x = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x-1} \right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x-1} \right)^{\frac{x-1}{2} \cdot \frac{2}{x-1} \cdot x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{(x-1)}{2}} \right)^{\frac{(x-1)}{2}} \right]^{\frac{2x}{x-1}} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{t} \right)^t \right]^{2 \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x-1}} = e^2. \quad \blacktriangleright \end{aligned}$$

Пример 10.16. Найти и классифицировать точки разрыва функции

$$y = \frac{x^3 - 2x^2 - 3x}{x^3 - 4x^2 + 3x}.$$

Решение

Так как заданная функция является элементарной, то точками разрыва являются только точки, в которых функция не существует, т.е. точки, в которых знаменатель дроби равен нулю.

Поэтому найдем корни знаменателя:

$$x^3 - 4x^2 + 3x = 0; \quad x \cdot (x^2 - 4x + 3) = 0; \quad x_1 = 0; \quad x_2 = 1; \quad x_3 = 3.$$

а) $x = 0$. Для обоих односторонних пределов выполняется

$$\lim_{x \rightarrow \pm 0} \frac{x^3 - 2x^2 - 3x}{x^3 - 4x^2 + 3x} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow \pm 0} \frac{x \cdot (x^2 - 2x - 3)}{x \cdot (x^2 - 4x + 3)} = \lim_{x \rightarrow \pm 0} \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 4x + 3} = -1.$$

Точка устранимого разрыва.

б) $x = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 2x^2 - 3x}{x^3 - 4x^2 + 3x} = \frac{-4}{0} = -\infty.$$

Точка разрыва второго рода.

в) $x = 3$. Для обоих односторонних пределов выполняется

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 2x^2 - 3x}{x^3 - 4x^2 + 3x} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 4x + 3} = \frac{0}{0} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x+1)}{(x-3)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+1}{x-1} = 2.$$

Точка устранимого разрыва. ►

Пример 10.17. Найти асимптоты графика функции

$$y = \frac{x^2 - 2x + 3}{x + 2}.$$

Решение

а) Ищем вертикальные асимптоты. Обычно их определяют точки разрыва или точки на краях интервала области определения функции.

Очевидно, что точка $x = -2$ — точка разрыва второго рода с бесконечными односторонними пределами, так как

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -2-0} \frac{x^2 - 2x + 3}{x + 2} &= \lim_{x \rightarrow -2-0} \frac{11}{x + 2} = \frac{11}{-0} = -\infty; \\ \lim_{x \rightarrow -2+0} \frac{x^2 - 2x + 3}{x + 2} &= \lim_{x \rightarrow -2+0} \frac{11}{x + 2} = \frac{11}{+0} = +\infty. \end{aligned}$$

Следовательно, прямая $x = -2$ — вертикальная асимптота графика заданной функции.

б) Ищем горизонтальные асимптоты:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 - 2x + 3}{x + 2} = \pm\infty.$$

Горизонтальных асимптот нет. Ищем наклонные асимптоты.

в) Ищем наклонные асимптоты. Для уравнения прямой $y = kx + b$ вычисляем значения коэффициентов для наклонной асимптоты справа:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 2x + 3}{(x + 2) \cdot x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 2x + 3}{x^2 + 2x} = 1 = k; \\ \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - kx] &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 2x + 3}{x + 2} - 1 \cdot x \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 2x + 3 - x^2 - 2x}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-4x + 3}{x + 2} = -4 = b. \end{aligned}$$

Следовательно, прямая $y = x - 4$ — наклонная асимптота справа заданной функции.

Аналогично можно показать при $E \rightarrow -\infty$, что эта же прямая является наклонной асимптотой слева заданной функции. ►

Вопросы для самоконтроля

1. Что такое функция одной переменной?
2. Что называется аргументом, областью определения и областью значений функции?
3. Назовите основные способы задания функций.
4. Дайте определения основным свойствам функции: четности и нечетности, монотонности, ограниченности, периодичности.
5. Запишите формулы и изобразите примерные графики основных (простейших) элементарных функций: константы, степенной функции (при различных значениях показателя степени), показательной и логарифмической функций, тригонометрических и обратных тригонометрических функций.
6. Какие функции, кроме простейших, являются элементарными функциями?
7. Дайте определение предела функции в точке и в бесконечности. Как обозначается предел функции?
8. Как определяются и записываются односторонние пределы?
9. Какие функции называются бесконечно малой и бесконечно большой функциями (величинами) в точке и в бесконечности?
10. Сформулируйте основные свойства бесконечно малых и бесконечно больших функций.
11. Сформулируйте основные теоремы о пределах суммы, разности, произведения, частного, сложной функции.
12. Запишите два предела, называемых замечательными пределами.
13. Что называется асимптотой графика функции?
14. Назовите виды асимптот и сформулируйте правила их нахождения.
15. Сформулируйте условия непрерывности функции в точке.
16. Какая функция называется непрерывной на отрезке?
17. Что называется точкой разрыва функции? Какие точки являются точками разрыва элементарных функций?
18. Дайте классификацию точек разрыва.
19. Сформулируйте свойства функций, непрерывных на отрезке.

Задачи для самостоятельного решения

- 10.1. Найти область определения функции

$$y = \frac{\sqrt{x-3}}{\sqrt{10-2x}}.$$

Найти пределы функций.

10.2. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 6}{5x^2 - 7x - 6}.$

$$10.3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^7 + 5x^6 + 4x^3}{x^7 + 2x^3}.$$

$$10.4. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - x^3 + x^2 - 3x + 2}{x^3 - x^2 - x + 1}.$$

$$10.5. \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{2}{2x - x^2} + \frac{1}{x^2 - 3x + 2} \right).$$

$$10.6. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{8x}{\sin 3x}.$$

$$10.7. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sin 6x - \sin 7x}.$$

$$10.8. \lim_{x \rightarrow 0} (x \cdot \operatorname{ctg} 5x).$$

$$10.9. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + x - 6}{5x - 7x^2 + 2}.$$

$$10.10. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+3}{x-2} \right)^x.$$

10.11. Найти и классифицировать точки разрыва функции

$$y = \frac{2x-1}{2x^2+3x-2}.$$

10.12. Найти асимптоты графика функции

$$y = \frac{3x^2+1}{2x-3}.$$

Глава 11

ЭЛЕМЕНТЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

11.1. Производная функции одной переменной

Пусть задана функция $y = f(x)$. Возьмем произвольную точку x и найдем значение $f(x)$ (рис. 11.1). Дадим независимой переменной x приращение Δx и найдем $f(x + \Delta x)$.

Составим разность

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x),$$

называемую **приращением функции** $y = f(x)$ в точке x .

Найдем отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ и перейдем к пределу этого отношения при $\Delta x \rightarrow 0$.

Если этот предел существует и конечен, то он и называется **производной** функции $y = f(x)$ в точке x

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

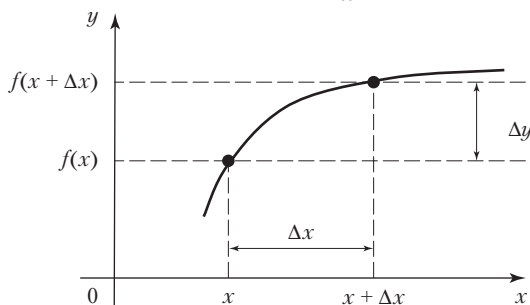


Рис. 11.1. График функции $y = f(x)$

Таким образом, **производная функции** одной переменной $y = f(x)$ в точке x представляет собой предел отношения приращения функции к приращению независимой переменной при стремлении последнего к нулю.

В математике принято несколько обозначений производной функции одной переменной:

$$y'; f'(x); f'_x; \frac{dy}{dx}; \frac{df(x)}{dx}.$$

При конкретном значении x производная функции $y = f(x)$ представляет собой определенное **число**, зависящее от самой функции и от точки x . Отсюда следует, что сама производная y' в области определения функции $y = f(x)$ также является некоторой функцией той же независимой переменной x .

Нахождение этой функции называется **дифференцированием функции** $y = f(x)$ и представляет собой одну из основных задач дифференциального исчисления.

Геометрический смысл производной. Обозначим на рис. 11.2 буквой A точку с координатами $[x, f(x)]$; $B[x + \Delta x, f(x + \Delta x)]$; $C[x + \Delta x, f(x)]$. Проведем секущую AB к графику функции $y = f(x)$ (рис. 11.2).

Из треугольника ABC очевидно отношение

$$\frac{BC}{AC} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \operatorname{tg} \alpha_1.$$

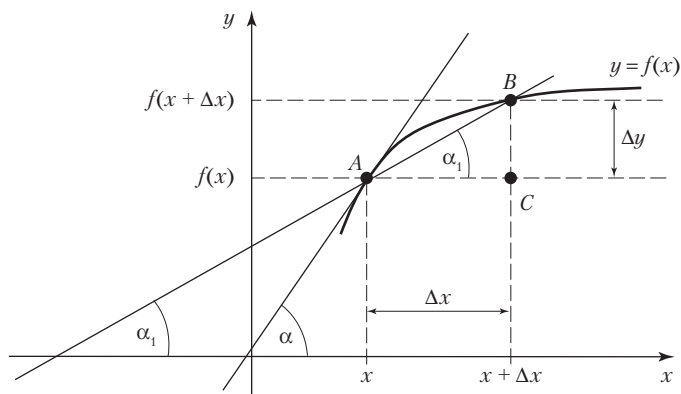


Рис. 11.2. Геометрический смысл производной

При $\Delta x \rightarrow 0$ точка B стремится к точке A , а секущая AB стремится занять положение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке A . Поэтому $\alpha_1 \rightarrow \alpha$.

Таким образом, производная запишется в виде

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \operatorname{tg} \alpha_1 = \operatorname{tg} \alpha,$$

где α — угол наклона к оси x касательной к графику функции в точке с координатами $[x, f(x)]$. В этом состоит **геометрический смысл** производной.

Таким образом, если задан график функции $y = f(x)$, то, чтобы определить производную графически, нужно провести касательную к графику в рассматриваемой точке, затем измерить угол наклона касательной и найти тангенс этого угла.

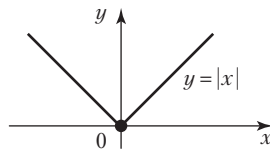
Следовательно, значение производной при данном значении x равно тангенсу угла, образованного касательной к графику функции в точке с соответствующим значением x с положительным направлением оси Ox .

Производная y' в каждой точке x характеризует **скорость изменения функции** в данной точке. Чем больше абсолютная величина производной, тем быстрее изменяются значения функции, проходя через эту точку.

Можно доказать, что если функция $y = f(x)$ имеет производную в данной точке x , то она в этой точке непрерывна. Обратное утверждение, вообще говоря, неверно. Функция $y = f(x)$ может быть непрерывной в точке x , но не иметь производной в этой точке.

Пример 11.1. Функция $y = |x|$, непрерывная на всей числовой оси, в точке $x = 0$ производной не имеет.

Действительно, к угловой точке 0 можно провести бесконечное множество касательных и ни одной определенной.



11.2. Правила вычисления производных простейших элементарных функций

Исходя из определения производной, найдем производные функций $y = x^2$ и $y = \sin x$.

а) $y = x^2$.

$$f(x) = x^2; \quad f(x + \Delta x) = (x + \Delta x)^2 = x^2 + 2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2.$$

$$\Delta y = \Delta f = f(x + \Delta x) - f(x) = x^2 + 2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2 - x^2 =$$

$$= 2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2.$$

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x + \Delta x) = 2x.$$

б) $y = \sin x$.

$$f(x) = \sin x; \quad f(x + \Delta x) = \sin(x + \Delta x).$$

$$\Delta y = \Delta f = f(x + \Delta x) - f(x) = \sin(x + \Delta x) - \sin x =$$

$$= 2 \sin \frac{x + \Delta x - x}{2} \cdot \cos \frac{x + \Delta x + x}{2} = 2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cdot \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right).$$

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cdot \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\frac{\Delta x}{2} \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right) = 1 \cdot \cos x = \cos x.$$

Аналогично, используя определение производной, можно найти производные остальных простейших элементарных функций.

Таблица производных простейших элементарных функций

1. $y = C, \quad y' = 0.$

2. $y = x^a (a \neq 0), \quad y' = a \cdot x^{a-1}.$

3. $y = a^x (a > 0; a \neq 1), \quad y' = a^x \cdot \ln a,$

$$y = e^x, \quad y' = e^x.$$

4. $y = \log_a x (a > 0, a \neq 1), \quad y' = \frac{1}{x \cdot \ln a},$

$$y = \ln x, \quad y' = \frac{1}{x}.$$

5. $y = \sin x, \quad y' = \cos x.$

6. $y = \cos x, \quad y' = -\sin x.$

$$7. y = \operatorname{tg} x, y' = \frac{1}{\cos^2 x}. \quad 8. y = \operatorname{ctg} x, y' = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

$$9. y = \arcsin x, y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$10. y = \arccos x, y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$11. y = \operatorname{arctg} x, y' = \frac{1}{1+x^2}. \quad 12. y = \operatorname{arcctg} x, y' = -\frac{1}{1+x^2}.$$

Правила нахождения производной в алгебраических действиях. Пусть $y = y(x)$, $u = u(x)$, $v = v(x)$ — функции независимой переменной x , c — постоянная величина. Тогда можно доказать следующие **правила нахождения производной**.

1. Постоянный множитель можно **выносить** за знак производной. Если

$$y = cu, \text{ то } y' = cu'.$$

2. Производная **алгебраической суммы** равна алгебраической сумме производных:

$$y = u \pm v, \quad y' = u' \pm v'.$$

3. Производная **произведения** равна сумме произведений производной первого сомножителя на неизменный второй и неизменного первого сомножителя на производную второго, т.е. если

$$y = uv, \text{ то } y' = u'v + uv'.$$

Докажем для примера это правило (остальные доказываются аналогично). Пусть $y = uv$. Тогда

$$\begin{aligned} \Delta y &= (u + \Delta u) \cdot (v + \Delta v) - uv = uv + \Delta u \cdot v + u \cdot \Delta v + \Delta u \cdot \Delta v - uv = \\ &= \Delta u \cdot v + u \cdot \Delta v + \Delta u \cdot \Delta v. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} y' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u \cdot v + u \cdot \Delta v + \Delta u \cdot \Delta v}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u \cdot v}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u \cdot \Delta v}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u \cdot \Delta v}{\Delta x} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= v \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + u \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u \cdot \Delta v \cdot \Delta x}{\Delta x \cdot \Delta x} = \\
&= v \cdot u' + u \cdot v' + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta x = \\
&= v \cdot u' + u \cdot v' + u' \cdot v' \cdot 0 = u'v + uv'.
\end{aligned}$$

4. Производная **частного** равна разности произведений производной числителя на знаменатель и числителя на производную знаменателя, деленной на квадрат знаменателя. Если

$$y = \frac{u}{v}, \text{ то } y' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

5. Производная **сложной функции**.

Пусть $y = f[u(x)]$. Тогда производная y' равна произведению производной функции $f(u)$, где функция u считается независимой переменной, на производную функции $u(x)$, т.е.

$$y' = f'_u \cdot u'_x.$$

Пример 11.2. Найти производные функций:

$$y = x = x^1, y' = 1 \cdot x^{1-1} = 1.$$

$$y = x^2, y' = 2 \cdot x^{2-1} = 2x.$$

$$y = x^7, y' = 7x^6.$$

$$y = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}, y' = \frac{1}{2} \cdot x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

$$y = \frac{1}{x} = x^{-1}, y' = -1 \cdot x^{-1-1} = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}.$$

$$y = \frac{1}{x^2} = x^{-2}, y' = -2 \cdot x^{-3} = -\frac{2}{x^3}.$$

$$y = x^3 - \sin x, y' = 3x^2 - \cos x.$$

$$y = x^3 \cdot \sin x, y' = 3x^2 \cdot \sin x + x^3 \cdot \cos x.$$

$$\begin{aligned}
y &= \frac{x^3}{\cos x}, y' = \frac{3x^2 \cdot \cos x - x^3 \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x} = \\
&= \frac{3x^2 \cos x + x^3 \sin x}{\cos^2 x}.
\end{aligned}$$



При вычислении производных сложных функций удобно пользоваться приемом введения промежуточной функции $u = u(x)$. Для этого в исходной формуле определяют функцию, которая при подстановке произвольного значения переменной вычисляется в последнюю очередь. Назовем эту функцию внешней. Предшествующие вычисления внешней функции обозначают $u = u(x)$. И далее находят производную сложной функции в соответствии с правилом 5.

Пример 11.3. Найти производную функцию $y = e^{x^2}$.

Решение

Здесь внешней функцией является операция возведения числа e в степень x^2 . Следовательно, для нахождения производной обозначим $u = x^2$. Тогда

$$(e^{x^2})' = \{u = x^2\}' = (e^u)' = e^u u' = e^{x^2} (x^2)' = 2xe^x. \quad \blacktriangleright$$

Заметим, что в некоторых задачах промежуточная функция $u = u(x)$ может использоваться несколько раз до тех пор, пока решение задачи не станет очевидным.

Пример 11.4. Найти производную функции $y = \cos^2 \sqrt{x}$.

Решение

Очевидно, что здесь внешняя функция представляет собой операцию возведения косинуса в квадрат. Тогда, обозначая

$$u = \cos \sqrt{x},$$

запишем

$$\begin{aligned} (\cos^2 x)' &= \{u = \cos \sqrt{x}\}' = (u^2)' = 2u \cdot u' = 2\cos \sqrt{x} (\cos \sqrt{x})' = \\ &= \{u = \sqrt{x}\}' = 2\cos u (\cos u)' = 2\cos u (-\sin u) u' = \\ &= 2\cos \sqrt{x} (-\sin \sqrt{x}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = -\frac{\sin 2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}. \quad \blacktriangleright \end{aligned}$$

Пример 11.5. Вычислить производные

$$\left[\left(\frac{x^2 - 1}{x^2 + 2} \right)^4 \right]' = \{u = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 2}\}' = (u^4)' = 4u^3 \cdot u'.$$

Вычислим отдельно:

$$u' = \left(\frac{x^2 - 1}{x^2 + 2} \right)' = \frac{2x(x^2 + 2) - (x^2 - 1) \cdot 2x}{(x^2 + 2)^2} = \frac{12x}{(x^2 + 2)^2}.$$

Подставляя в исходную формулу, получим

$$u' = \left[\left(\frac{x^2-1}{x^2+2} \right)^4 \right]' = 4u^3 \cdot u' = 4 \left(\frac{x^2-1}{x^2+2} \right)^3 \cdot \frac{12x}{(x^2+2)^2} = \frac{48x(x^2-1)^3}{(x^2+2)^5}. \quad \blacktriangleright$$

Пример 11.6.

$$\begin{aligned} \left(\sqrt{1+e^{4x}} + \sqrt{5} \right)' &= \left(\sqrt{1+e^{4x}} \right)' = \{1+e^{4x}\}' = \\ &= (u^{\frac{1}{4}})' = \frac{1}{4} u^{-\frac{3}{4}} \cdot u' = \frac{e^{4x}}{\sqrt[4]{(1+e^{4x})^3}}. \end{aligned} \quad \blacktriangleright$$

Пример 11.7.

$$\left[3x \cdot \ln(1-x^2) \right]' = 3 \ln(1-x^2) + 3x \cdot \frac{1}{1-x^2} \cdot (-2x) = 3 \ln(1-x^2) - \frac{6x^2}{1-x^2}. \quad \blacktriangleright$$

Пример 11.8.

$$\left(\frac{2^{3x}}{3^{2x}} \right)' = \left[\left(\frac{8}{9} \right)^x \right]' = \left(\frac{8}{9} \right)^x \ln \left(\frac{8}{9} \right). \quad \blacktriangleright$$

11.3. Дифференциал

Если приращение Δy функции $y = f(x)$ в точке x можно представить в виде

$$\Delta y = A \cdot \Delta x + \mu(\Delta x) \cdot \Delta x,$$

где A — число, а функция $\mu(\Delta x)$ такова, что

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \mu(\Delta x) = 0,$$

то величина $A \cdot \Delta x$ называется *дифференциалом* функции $y = f(x)$ в точке x и обозначается $dy = A \cdot \Delta x$, а сама функция $y = f(x)$ называется *дифференцируемой в точке x* .

Таким образом, *дифференциалом* dy функции $y = f(x)$ в точке x называется *главная линейная часть* приращения Δy функции в этой точке относительно Δx .

Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x . Тогда в этой точке

$$\Delta y = A \cdot \Delta x + \mu(\Delta x) \cdot \Delta x.$$

Следовательно,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = A + \mu(\Delta x),$$

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} [A + \mu(\Delta x)] = A + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \mu(\Delta x) = A.$$

То есть число A является не произвольной величиной, а равно производной функции $y = f(x)$ в точке x , т.е. $A = y'$.

Тогда формулу дифференциала можно записать в виде

$$dy = y' \cdot \Delta x.$$

Рассмотрим функцию $y = x$ и найдем ее дифференциал

$$dy = dx = x' \cdot \Delta x = \Delta x.$$

То есть любое приращение независимой переменной можно принять за ее дифференциал $dx = \Delta x$.

Отсюда окончательно получаем выражение для дифференциала

$$dy = y' \cdot dx$$

и видим, что *производная* равна отношению дифференциалов функции и независимой переменной

$$y' = \frac{dy}{dx}.$$

Выясним **геометрический смысл дифференциала**. Для этого изобразим график $y = f(x)$, аналогичный тому, который был рассмотрен при введении понятия производной (рис. 11.3).

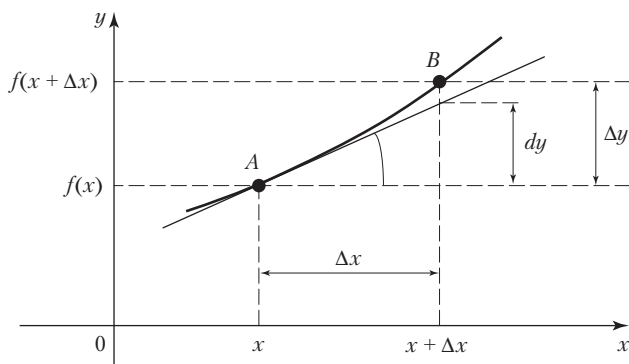


Рис. 11.3. Геометрический смысл дифференциала

Из рисунка очевидно, что касательная к графику функции $y = f(x)$ отсекает от приращения функции Δy отрезок, длина которого равна

$$\Delta x \cdot \operatorname{tg} \alpha = \Delta x \cdot y' = y' \cdot dx = dy.$$

То есть *длина этого отрезка равна дифференциалу функции*.

Таблица дифференциалов простейших элементарных функций получается из таблицы производных путем умножения y' на dx .

Правила дифференцирования аналогичны соответствующим правилам нахождения производной

$$1. y = cu; \quad dy = cdu.$$

$$2. y = u \pm v; \quad dy = du \pm dv.$$

$$3. y = uv; \quad du = vdu + u dv.$$

$$4. y = \frac{u}{v}; \quad dy = \frac{vdu - u dv}{v^2}.$$

Рассмотрим дифференциал сложной функции $y = y[u(x)]$. Ее производная равна

$$y' = y'_x = y'_u \cdot u'.$$

Тогда дифференциал сложной функции по определению равен

$$dy = y'_x \cdot dx = y'_u \cdot u' \cdot dx = y'_u \cdot du.$$

То есть дифференциал сложной функции равен *произведению производной функции на дифференциал переменной*, по которой находится производная.

При этом форма записи выражения для дифференциала не зависит от того, является ли эта переменная независимой, либо это какая-то внутренняя функция сложной функции. Это свойство называется **инвариантностью формы** записи дифференциала.

Понятие дифференциала можно применять для **приближенного вычисления** значений функций. Как уже было показано, приращение Δy функции $y = f(x)$ можно записать в виде

$$\Delta y = y' \cdot \Delta x + \mu(\Delta x) \cdot \Delta x = [y' + \mu(\Delta x)] \cdot \Delta x.$$

Так как y' в данной точке x — вполне конкретное число, а

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \mu(\Delta x) = 0,$$

то при малых Δx можно пренебречь вторым слагаемым в скобках и считать, что

$$\Delta y \approx y' \cdot \Delta x = dy.$$

Таким образом, приращение функции при малых Δx примерно равняется ее дифференциалу.

Пусть известно значение функции $y = f(x)$ и ее производной в некоторой точке x_0 . Требуется найти значение функции в точке $x_0 + \Delta x$. Из вышеизложенного следует, что

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \approx dy = f'(x_0) \cdot \Delta x.$$

Тогда приближенно запишем

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x.$$

Пример 11.9. Вычислить приближенно $\sqrt[5]{33}$.

Решение

Исходное задание является нахождением значения степенной функции

$$y = \sqrt[5]{x} = x^{\frac{1}{5}} = f(x).$$

Естественно принять за x_0 близкое к числу 33 значение 32, корень пятой степени из которого равен 2.

Тогда

$$x_0 = 32; x_0 + \Delta x = 33; \Delta x = 1; f(x_0) = \sqrt[5]{32} = 2;$$

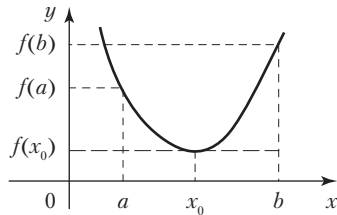
$$f'(x) = \frac{1}{5} x^{-\frac{4}{5}} = \frac{1}{5(\sqrt[5]{x})^4}; \quad f'(x_0) = \frac{1}{5(\sqrt[5]{32})^4} = \frac{1}{80} = 0,0125.$$

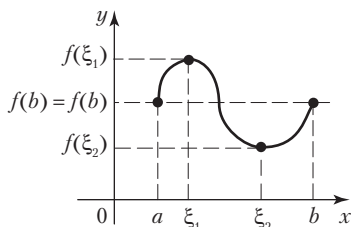
Следовательно,

$$\sqrt[5]{33} = f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x = 2 + 0,0125 \cdot 1 = 2,0125. \quad \blacktriangleright$$

При производстве вычислений, связанных с исследованием функций, весьма полезными являются **теоремы дифференциального исчисления**.

Теорема Ферма. Если дифференцируемая на промежутке (a, b) функция $y = f(x)$ достигает наибольшего или наименьшего значения в точке $x_0 \in (a, b)$, то производная функции в этой точке равна нулю, т.е. $f'(x_0) = 0$.





Теорема Ролля. Пусть функция $y = f(x)$ удовлетворяет следующим условиям:

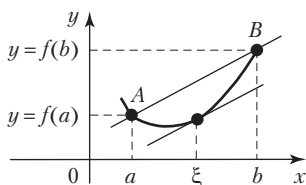
- 1) непрерывна на отрезке $[a, b]$;
- 2) дифференцируема на интервале (a, b) ;
- 3) на концах отрезка $[a, b]$

принимает равные значения, т.е. $f(a) = f(b)$.

Тогда внутри отрезка существует хотя бы одна точка $\xi \in (a, b)$, в которой производная равна нулю $f'(\xi) = 0$ (на рисунке таких точек две).

Геометрически это означает, что при выполнении условий теоремы Ролля найдется хотя бы одна точка, в которой касательная к графику функции будет параллельна оси абсцисс.

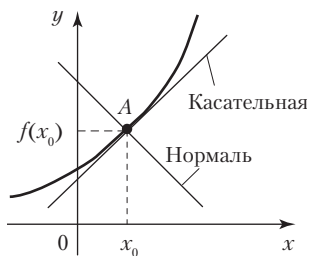
Обобщением теоремы Ролля является **теорема Лагранжа**.



Пусть функция $y = f(x)$ является непрерывной на отрезке $[a, b]$ и дифференцируемой на интервале (a, b) . Тогда внутри отрезка существует, по крайней мере, одна точка $\xi \in (a, b)$, в которой производная функции равна

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Геометрически теорема означает, что найдется хотя бы одна точка $\xi \in (a, b)$, в которой касательная к графику функции $y = f(x)$ и хорда AB параллельны.



Используя *геометрический смысл* производной, можно легко составить уравнения **касательной** и **нормали** к графику функции $y = f(x)$ в точке A с координатами $[x_0, f(x_0)]$. Действительно, формула $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$ определяет касательную, а формула

$$y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$$

— нормаль к графику $y = f(x)$ в точке A .

Пример 11.10. Составить уравнения касательной и нормали к графику $y = \frac{x^2}{2} - x$ в точке с координатой $x_0 = 4$.

Решение

Вычислим

$$f(x_0) = f(4) = \frac{4^2}{2} - 4 = 4.$$

Найдем производную

$$f'(x) = \left(\frac{x^2}{2} - x \right)' = x - 1$$

и вычислим

$$f'(x_0) = f'(4) = 3.$$

Тогда уравнение касательной будет иметь вид

$$y - 4 = 3(x - 4)$$

или

$$y = 3x - 8.$$

Аналогично определяется уравнение нормали

$$y = -\frac{1}{3}x + \frac{16}{3}.$$



11.4. Производные и дифференциалы высших порядков

Пусть функция $y = f(x)$ определена и имеет производную в некоторой области определения X . Как показано ранее, производная $y' = f'(x)$ также является функцией той же независимой переменной x :

$$\varphi(x) = f'(x)$$

и тоже может иметь производную $\varphi'(x)$ в области определения X .

Эта производная

$$\varphi'(x) = [f'(x)]'$$

называется **второй производной** (или производной второго порядка) функции $y = f(x)$ и обозначается y'' или $f''(x)$.

Часто используют обозначения $\frac{d^2 y}{dx^2}$ (читается: «д-два игрек по д-икс в квадрате») или $\frac{d^2 f(x)}{dx^2}$.

Если существует $[f''(x)]'$, то ее называют третьей производной (производной третьего порядка) от $f(x)$ и обозначают $f'''(x)$ или

$$y''', \frac{d^3 y}{dx^3}, \frac{d^3 f(x)}{dx^3}.$$

Таким образом, можно ввести производные любого порядка. Четвертую и пятую производные обычно обозначают с использованием римских цифр — $y^{\text{IV}}, y^{\text{V}}$, а более высокий порядок указывают с использованием верхнего индекса, представляющего собой соответствующую арабскую цифру в скобках — $y^{(6)}, y^{(7)}, \dots, y^{(n)}, \dots$

Дифференциалом второго порядка (вторым дифференциалом) функции $y = f(x)$ называется дифференциал от первого дифференциала

$$d^2 y = d(dy).$$

Легко получить формулу, выражающую дифференциал второго порядка через вторую производную

$$\begin{aligned} d^2 y &= d(dy) = d[f'(x) \cdot dx] = dx \cdot d[f'(x)] = \\ &= dx \cdot f''(x) \cdot dx = f''(x) \cdot dx^2. \end{aligned}$$

Третье равенство в этой строке имеет место, так как dx — произвольное и не зависящее от x приращение независимой переменной x , поэтому при нахождении дифференциала $d[f'(x) \cdot dx]$ dx следует рассматривать как постоянный множитель, который можно вынести за знак дифференциала.

В общем случае можно показать, что

$$d^n y = f^{(n)}(x) \cdot dx^n.$$

В отличие от первого дифференциала дифференциалы второго и более высоких порядков свойством *инвариантности* формы записи *не обладают*.

Пример 11.11. Найти вторую производную функции

$$y = -\frac{3}{x^2 - 5}.$$

Решение

$$\begin{aligned}
 y' &= -\frac{3 \cdot 2x}{(x^2 - 5)^2} = \frac{6x}{(x^2 - 5)^2}; \\
 y'' &= \frac{6 \cdot (x^2 - 5)^2 - 6x \cdot 2 \cdot (x^2 - 5) \cdot 2x}{(x^2 - 5)^4} = \\
 &= \frac{(x^2 - 5) \cdot [6 \cdot (x^2 - 5) - 6x \cdot 2 \cdot 2x]}{(x^2 - 5)^4} = \\
 &= \frac{6x^2 - 30 - 24x^2}{(x^2 - 5)^3} = -\frac{18x^2 + 30}{(x^2 - 5)^3} = -\frac{6 \cdot (3x^2 + 5)}{(x^2 - 5)^3}. \quad \blacktriangleright
 \end{aligned}$$

Пример 11.12. Найти третью производную функции

$$y = x \cdot e^{-x}.$$

Решение

$$\begin{aligned}
 y' &= e^{-x} - x \cdot e^{-x} = e^{-x} \cdot (1 - x); \\
 y'' &= -e^{-x} \cdot (1 - x) + e^{-x} \cdot (-1) = -e^{-x} + x \cdot e^{-x} - e^{-x} = e^{-x} \cdot (x - 2); \\
 y''' &= -e^{-x} \cdot (x - 2) + e^{-x} = -xe^{-x} + 2 \cdot e^{-x} + e^{-x} = e^{-x} \cdot (3 - x). \quad \blacktriangleright
 \end{aligned}$$

Пример 11.13. Найти n -ю производную функции $y = \sin x$.*Решение*

$$\begin{aligned}
 y' &= \cos x; \quad y'' = -\sin x; \quad y''' = -\cos x; \\
 y^{IV} &= \sin x \text{ и т.д.}
 \end{aligned}$$

Отсюда следует, что:

если $n = 4k$ ($k \in \mathbb{N}$), то $y^{(n)} = \sin x$;если $n = 4k + 1$ ($k \in \mathbb{N}$), то $y^{(n)} = \cos x$;если $n = 4k + 2$ ($k \in \mathbb{N}$), то $y^{(n)} = -\sin x$;если $n = 4k + 3$ ($k \in \mathbb{N}$), то $y^{(n)} = -\cos x$. $\blacktriangleright$

11.5. Правило Лопиталья раскрытия неопределенностей

Для раскрытия неопределенностей вида $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$ используется правило Лопиталья. То есть это правило применяется, когда нужно найти предел

$$\lim_{x \rightarrow \square} \frac{f(x)}{g(x)}, \text{ если } \lim_{x \rightarrow \square} f(x) = \lim_{x \rightarrow \square} g(x) = 0 \text{ или } \infty.$$

Правило Лопиталя. Предел отношения двух бесконечно малых или бесконечно больших функций равен пределу отношения их производных (конечному или бесконечному), если последний существует.

Другими словами, если $\lim_{x \rightarrow \square} \frac{f(x)}{g(x)}$ — неопределенность вида $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$, то

$$\lim_{x \rightarrow \square} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \square} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Замечания.

1. Правило Лопиталя неприменимо, когда пределы числителя и знаменателя одновременно не равны нулю или бесконечности.

Например,

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+3}{x+7} = \frac{6}{10} = 0,6,$$

в то время как неправомерное применение правила Лопиталя дает

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+3}{x+7} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x+3)'}{(x+7)'} = \frac{1}{1} = 1 \text{ — неверно!}$$

2. При использовании правила Лопиталя находится предел отношения производных числителя и знаменателя, т.е.

$$\lim_{x \rightarrow \square} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

а не предел производной отношения

$$\lim_{x \rightarrow \square} \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right]'. \quad \square$$

В примерах найти пределы функций

Пример 11.14. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4x + 3}$.

Решение

Подставляя $x = 1$, убеждаемся, что имеет место неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Тогда

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4x + 3} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2 - 3x + 2)'}{(x^2 - 4x + 3)'} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x - 3}{2x - 4} = \frac{-1}{-2} = 0,5. \quad \blacktriangleright$$

Пример 11.15.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^5 - 1}{2x^3 - x - 1} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{5x^4}{6x^2 - 1} = \frac{5}{5} = 1. \quad \blacktriangleright$$

Пример 11.16.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x \cdot \cos x}{x^3} &= \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos x + x \cdot \sin x}{3x^2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \sin x}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{3x} = \frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \frac{1}{3}. \end{aligned} \quad \blacktriangleright$$

Пример 11.17.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{10} - 10x + 9}{x^5 - 5x + 4} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{10x^9 - 10}{5x^4 - 5} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{90x^8}{20x^3} = \frac{9}{2} = 4,5. \quad \blacktriangleright$$

Пример 11.18.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot (e^x + 1) - 2 \cdot (e^x - 1)}{x^3} &= \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + 1 + x \cdot e^x - 2e^x}{3x^2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xe^x - e^x + 1}{3x^2} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + x \cdot e^x - e^x}{6x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{6} = \frac{1}{6}. \end{aligned} \quad \blacktriangleright$$

11.6. Интервалы монотонности и экстремумы функции одной переменной

Для нахождения интервалов монотонности функции $y = f(x)$ используется следующее **достаточное условие** возрастания (убывания) функции на интервале (a, b) :

— если функция $y = f(x)$ имеет производную на интервале (a, b) и во всех точках этого интервала выполняется

$$y' = f'(x) > 0 \quad (y' = f'(x) < 0),$$

то функция $y = f(x)$ является монотонно *возрастающей* (*убывающей*) на этом интервале.

Следовательно, чтобы найти интервалы монотонности функции $y = f(x)$, достаточно найти выражение для

$$y' = f'(x)$$

и решить два неравенства

$$f'(x) > 0 \quad \text{и} \quad f'(x) < 0.$$

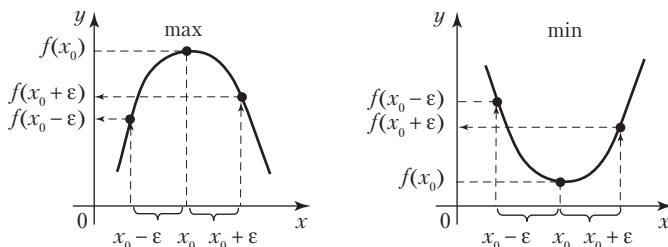


Рис. 11.4. Иллюстрация определения точек экстремума

При этом область решения неравенства $f'(x) > 0$ является областью монотонного **возрастания** функции $y = f(x)$, а область решения неравенства $f'(x) < 0$ — областью монотонного **убывания** функции.

Точка x_0 называется **точкой максимума** (max) функции $y = f(x)$, если существует окрестность точки x_0 такая, что для любого x ($x \neq x_0$), принадлежащего этой окрестности, выполняется неравенство $f(x) < f(x_0)$, и **точкой минимума** (min), если $f(x) > f(x_0)$.

Значение функции в точке x_0 называется соответственно **максимумом** или **минимумом функции** $y = f(x)$. Максимум и минимум имеют общее название «**экстремум**» (рис. 11.4).

Функция, график которой представлен на рис. 11.5, имеет три максимума с абсциссами x_1, x_3, x_5 и два минимума с абсциссами x_2, x_4 . Причем, как это видно из рисунка, может быть так, что максимум в одной точке меньше минимума в другой.

При исследовании функций на экстремумы необходимо рассмотреть необходимые и достаточные условия их существования.

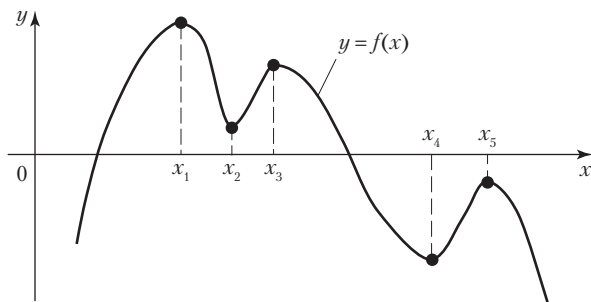


Рис. 11.5. Экстремумы функции

Необходимое условие экстремума можно сформулировать следующим образом:

— если функция $y = f(x)$ имеет экстремум в точке x_0 , то ее производная в этой точке $f'(x_0)$ либо равна нулю, либо *не существует*.

Точки, в которых выполнено необходимое условие экстремума функции $y = f(x)$, т.е. в которых ее производная равна нулю или не существует (при существовании значения функции в этой точке), называются **критическими** или **стационарными** точками этой функции.

Рассмотрим, например, функцию $y = x^2$. Она имеет экстремум (минимум) в точке $x_0 = 0$. Производная этой функции $y' = 2x$ в точке x_0 равна нулю.

График функции $y = \sqrt[3]{x^2}$ изображен на рис. 11.6.

Из графика очевидно, что эта функция имеет экстремум (минимум) в точке $x_0 = 0$. Однако производная этой функции

$$y' = \left(\sqrt[3]{x^2}\right)' = \left(x^{\frac{2}{3}}\right)' = \frac{2}{3} \cdot x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3 \cdot \sqrt[3]{x}}$$

в точке x_0 не существует, так как при $x = 0$ знаменатель дроби обращается в нуль.

Необходимое условие экстремума *не является* достаточным, т.е. производная функции $y = f(x)$ в точке x_0 может быть равна нулю или не существовать, но между тем экстремума в этой точке нет. Так, например, производная функции $y = x^3$ ($y' = 3x^2$) в точке $x = 0$ равна нулю, но никакого экстремума в этой точке нет.

Сформулируем **первое достаточное условие экстремума**.

Пусть x_0 — критическая точка функции $y = f(x)$, и если при переходе через точку x_0 слева направо $f'(x)$ изменяет знак с «+» на «-», то в точке x_0 — **максимум**, если с «-» на «+», то **минимум**. Если при переходе $f'(x)$ не изменяет знак, то экстремума в точке x_0 нет.

Для отыскания экстремумов функции можно вместо первого достаточного условия использовать **второе**

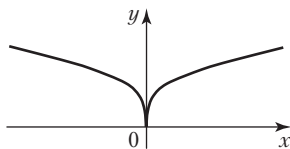


Рис. 11.6. График функции $y = \sqrt[3]{x^2}$

достаточное условие экстремума, которое формулируется следующим образом.

Пусть в критической точке x_0 производная функции $y = f(x)$ равна нулю, т.е. $f'(x_0) = 0$, и в этой точке существует вторая производная $f''(x_0)$.

Тогда если

$$f''(x_0) > 0,$$

то в точке x_0 — **минимум**,

если

$$f''(x_0) < 0,$$

то в точке x_0 — **максимум**,

а если

$$f''(x_0) = 0,$$

то экстремума в точке x_0 нет.

Можно рекомендовать следующую **схему исследования функции** $y = f(x)$ на **экстремумы**.

1. Найти выражение для $y' = f'(x)$.

2. Найти критические точки функции, решив уравнение $f'(x) = 0$ или определив значения x_i , при которых $f'(x_i)$ не существует, но существует исходная функция $f(x_i)$.

3. а) Исследовать изменение знака $f'(x)$ при переходе через каждую критическую точку x_i и, используя первое достаточное условие, определить, есть ли в этой точке экстремум и какой именно.

б) Если в критической точке $f'(x_i) = 0$, то найти $f''(x_i)$ в этой точке и по ее знаку, используя второе достаточное условие экстремума, определить наличие и характер экстремума.

4. Найти значения экстремумов, подставив точки экстремумов x_i в формулу $y = f(x)$.

Часто в задаче необходимо найти и интервалы монотонности, и экстремумы заданной функции $y = f(x)$. В этом случае целесообразно сначала найти критические точки, потом интервалы монотонности, а затем исследовать критические точки по первому достаточному условию, так как знак производной уже определен на всей числовой оси при отыскании интервалов монотонности.

В ряде экономических задач требуется найти **наибольшее** и **наименьшее** значения непрерывной функции $y = f(x)$ на некотором отрезке $[a, b]$. По теореме Вейерштрасса эти значения достигаются.

Рекомендуется следующая **схема** решения этой задачи.

1. Найти выражение для $f'(x)$.

2. Найти критические точки функции $y = f(x)$, принадлежащие отрезку $[a, b]$.

3. Найти значения функции $y = f(x)$ в критических точках.

4. Найти значения функции на концах отрезка, т.е. $f(a)$ и $f(b)$.

5. Выбрать из найденных значений по п. 3, 4 наибольшее и наименьшее.

Из рис. 11.7 ясно, почему надо рассматривать значения функции на концах отрезка. Схема вычисления экстремума дает точки x_1, x_2 . На самом деле минимальное и максимальное значения функции находятся в точках A, B графика функции.

При нахождении интервалов монотонности часто приходится решать рациональные алгебраические неравенства. Проще всего такие алгебраические неравенства решать методом «змейки».

Для этого двойное неравенство нужно привести к виду

$$A \cdot \frac{(x - x_1)^{m_1} \cdot (x - x_2)^{m_2} \cdot \dots \cdot (x - x_n)^{m_n}}{(x - x_{n+1})^{m_{n+1}} \cdot (x - x_{n+2})^{m_{n+2}} \cdot \dots \cdot (x - x_{n+k})^{m_{n+k}}} (> <) 0,$$

где A — действительное число.

Здесь значения x_i и показатели степеней — известные числа.

Затем все значения x_i наносятся на числовую ось. Если $A > 0$, то «змейка» начинается справа над числовой осью, а если $A < 0$, то справа под числовой осью и ведется в отрицательном направлении числовой оси. В ближайшем значении x_i «змейка» опускается (или поднимается) на ось.

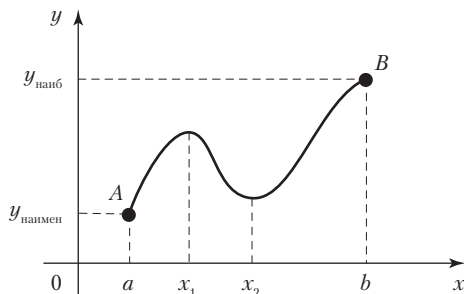


Рис. 11.7. Наибольшее $y_{\text{наиб}}$ и наименьшее $y_{\text{наимен}}$ значения функции на отрезке

Если показатель степени m_i у скобки $(x - x_i)$ — нечетное число, то «змейка» пересекает ось, а если четное, то «змейка» возвращается в ту же сторону, откуда пришла. Те интервалы, на которых участок «змейки» лежит выше оси, являются решением неравенства: «левая часть больше нуля», а на которых ниже оси — «левая часть меньше нуля».

Пример 11.19. Найти интервалы монотонности и экстремумы функции

$$y = x^3 - 6x^2 + 9x - 4.$$

Решение

Находим выражение для производной, приравниваем его нулю и, решая полученное уравнение, находим критические точки:

$$y' = 3x^2 - 12x + 9; \quad y' = 0; \quad 3x^2 - 12x + 9 = 0; \quad x^2 - 4x + 3 = 0;$$

$$D = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 4; \quad \sqrt{D} = \pm 2; \quad x_1 = \frac{4-2}{2 \cdot 1} = 1; \quad x_2 = \frac{4+2}{2 \cdot 1} = 3.$$

Разложим производную на множители:

$$3(x-1) \cdot (x-3) = 0.$$

Строим «змейку».



Из рисунка следует, что:

- область возрастания функции $x \in (-\infty; 1) \cup (3; +\infty)$;
- область убывания функции $x \in (1; 3)$.

Критическая точка $x_1 = 1$ — точка максимума, так как при переходе через эту точку y' изменяет знак с «+» на «-».

$$y_{\max} = 1^3 - 6 \cdot 1^2 + 9 \cdot 1 - 4 = 1 - 6 + 9 - 4 = 0.$$

Критическая точка $x_2 = 3$ — точка минимума, так как при переходе через эту точку y' изменяет знак с «-» на «+».

$$y_{\min} = 3^3 - 6 \cdot 3^2 + 9 \cdot 3 - 4 = 27 - 54 + 27 - 4 = -4.$$

Можно исследовать критические точки, применив второе достаточное условие экстремума $y'' = 6x - 12$:

$$a) \quad x_1 = 1; \quad y'' = 6 \cdot 1 - 12 = -6 \Rightarrow \text{точка максимума.}$$

$$б) \quad x_2 = 3; \quad y'' = 6 \cdot 3 - 12 = 6 \Rightarrow \text{точка минимума.} \quad \blacktriangleright$$

Пример 11.20. Найти интервалы монотонности и экстремумы функции

$$y = \frac{2x}{1+x^2}.$$

Решение

$$y' = \frac{2 \cdot (1+x^2) - 2x \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{2+2x^2-4x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{2-2x^2}{(1+x^2)^2};$$

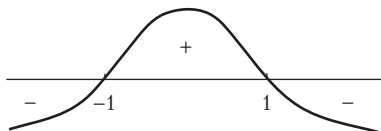
$$y' = 0; \quad \frac{2-2x^2}{(1+x^2)^2} = 0; \quad 2-2x^2 = 0; \quad 2 \cdot (1-x^2) = 0;$$

$$2 \cdot (1+x) \cdot (1-x) = 0; \quad x_1 = -1; \quad x_2 = 1.$$

$$y' > 0 \text{ и } y' < 0; \quad \frac{2-2x^2}{(1+x^2)^2} (><) 0.$$

Так как $(1+x^2)^2 > 0$ при любых x , то это выражение можно не рассматривать. Получим

$$2-2x^2 (><) 0; \quad 2 \cdot (1+x) \cdot (1-x) (><) 0; \quad -2 \cdot (x+1) \cdot (x-1) (><) 0.$$



Область возрастания функции $x \in (-1; 1)$.

Область убывания функции $x \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$.

Критическая точка $x_1 = -1$ — точка минимума, так как при переходе через эту точку y' изменяет знак с «-» на «+».

$$y_{\min} = \frac{2 \cdot (-1)}{1+(-1)^2} = \frac{-2}{2} = -1.$$

Критическая точка $x_2 = 1$ — точка максимума, так как при переходе через эту точку y' изменяет знак с «+» на «-».

$$y_{\max} = \frac{2 \cdot 1}{1+1^2} = \frac{2}{2} = 1. \quad \blacktriangleright$$

Пример 11.21. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = x^2 - 4x + 6$ на отрезке $[-2; 5]$.

Решение

$y' = 2x - 4$; $y' = 0$; $2x - 4 = 0$; $x = 2$ — критическая точка. Ясно, что она принадлежит отрезку $[-2; 5]$.

а) $x = 2$; $y = 2^2 - 4 \cdot 2 + 6 = 2$;

б) $x = -2$; $y = (-2)^2 - 4 \cdot (-2) + 6 = 18$;

в) $x = 5$; $y = 5^2 - 4 \cdot 5 + 6 = 11$.

Отсюда следует, что наибольшее значение функции на отрезке равно 18, а наименьшее 2. $\blacktriangleright$

11.7. Выпуклость и вогнутость графика функции и точки перегиба

График функции $y = f(x)$ называется **выпуклым** (в некоторых книгах — выпуклым вверх) на интервале (a, b) , если на этом интервале он лежит *ниже* любой своей касательной, и **вогнутым** (выпуклым вниз), если *выше* (рис. 11.8).

Часто саму функцию при этом также называют выпуклой или вогнутой на рассматриваемом интервале.

Точка, разделяющая интервал выпуклости и интервал вогнутости графика функции, называется **точкой перегиба** (графика) функции.

Можно доказать, что если $f''(x)$ — вторая производная дважды дифференцируемой функции $y = f(x)$ положительна на интервале (a, b) , то график функции вогнутый, а если $f''(x) < 0$, то выпуклый на этом интервале. Это условие является **достаточным условием** выпуклости и вогнутости графика функции на рассматриваемом интервале.

Необходимое условие точки перегиба можно сформулировать следующим образом.

Пусть x_0 — точка перегиба графика функции $y = f(x)$. В этой точке вторая производная $f''(x)$ равна нулю или не существует.

Точки, в которых выполняется необходимое условие точки перегиба, называются **критическими точками второго рода** функции $y = f(x)$.

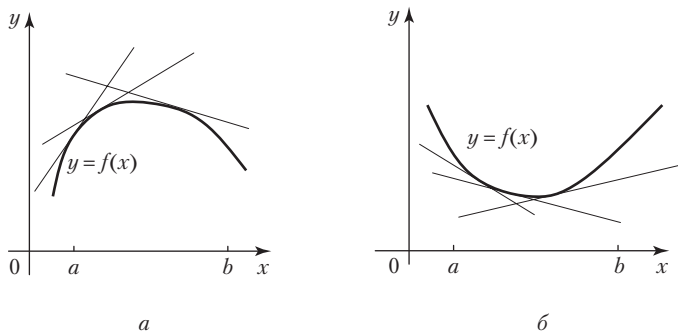


Рис. 11.8. График функции $y = f(x)$:

а — выпуклый (выпуклый вверх); б — вогнутый (выпуклый вниз)

Достаточное условие точки перегиба формулируется следующим образом.

Пусть x_0 — критическая точка второго рода функции $y = f(x)$. Тогда если при переходе через эту точку $f''(x)$ *изменяет знак* на противоположный, то x_0 — точка перегиба, а если не изменяет знак, то перегиба графика функции $y = f(x)$ в точке x_0 нет.

Изложим **схему исследования** функции $y = f(x)$ на **выпуклость** и **точки перегиба** графика.

1. Найти выражение для $y'' = f''(x)$.
2. Найти критические точки второго рода функции, решив уравнение $f''(x) = 0$.

3. Решить два неравенства $f''(x) > 0$ и $f''(x) < 0$. При этом область решения неравенства $f''(x) > 0$ является областью вогнутости графика функции $y = f(x)$, а область решения неравенства $f''(x) < 0$ — областью выпуклости.

4. Определить, изменяет ли знак вторая производная функции при переходе через критические точки второго рода, и сделать вывод о наличии или отсутствии перегиба графика функции в этих точках. Найти значение функции в точке перегиба.

Пример 11.22. Исследовать на выпуклость и найти точки перегиба графика функции

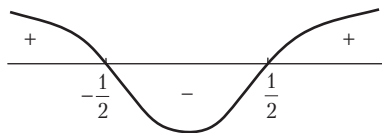
$$y = 2x^4 - 3x^2 + x - 1.$$

Решение

$$y' = 8x^3 - 6x + 1; \quad y'' = 24x^2 - 6; \quad y'' = 0; \quad 24x^2 - 6 = 0;$$

$$4x^2 - 1 = 0; \quad x_1 = -\frac{1}{2}; \quad x_2 = \frac{1}{2}.$$

Тогда $y'' = 24 \cdot (x + \frac{1}{2}) \cdot (x - \frac{1}{2})$. Строим схему изменения знака y'' .



Из рисунка очевидно, что:

— область выпуклости графика функции: $x \in \left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$;

— область вогнутости графика функции:

$$x \in \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}; +\infty\right);$$

— точки $x_1 = -\frac{1}{2}$; $x_2 = \frac{1}{2}$ — точки перегиба графика функции.

Подставляя эти значения в исходную функцию, получим координаты точек перегиба $\left(-\frac{1}{2}; -\frac{17}{8}\right)$ и $\left(\frac{1}{2}; -\frac{9}{8}\right)$. ►

Замечание. Очень часто студенты принимают схему изменения знака первой и второй производных функции за график функции. Это не так.

11.8. Исследование функции одной переменной и построение ее графика

При исследовании функции необходимо определить следующее.

1. Область определения функции.
2. Четность и периодичность.
3. Непрерывность, точки разрыва и их классификацию.
4. Асимптоты графика функции.
5. Интервалы монотонности и экстремумы.
6. Выпуклость и точки перегиба.
7. Некоторые дополнительные точки, уточняющие график (например, точки пересечения графика с осями координат и т.п.).

После этого выполнить построение графика.

Пример 11.23. Провести исследование функции $y = \frac{x^3}{x^2 - 4}$ и построить ее график.

Решение

1. Область определения.

Функция не существует, если $x^2 - 4 = 0$ или $x = \pm 2$. То есть

$$x \in (-\infty; -2) \cup (-2; 2) \cup (2; +\infty).$$

2. Четность и периодичность.

$$y(-x) = \frac{(-x)^3}{(-x)^2 - 4} = -\frac{x^3}{x^2 - 4} = -y(x) \Rightarrow \text{функция нечетная.}$$

Из элементарных функций периодическими могут быть только функции, содержащие тригонометрические выражения, $\Rightarrow$ функция неперiodическая.

3. Непрерывность, точки разрыва.

Из п. 1 $\Rightarrow$ функция не существует в точках $x_1 = -2$; $x_2 = 2$. Так как в этих точках знаменатель обращается в нуль $\Rightarrow$ они являются точками разрыва.

Вычисляем односторонние пределы в точках разрыва.

$$\lim_{x \rightarrow -2-0} \frac{x^3}{x^2 - 4} = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow -2+0} \frac{x^3}{x^2 - 4} = +\infty;$$

$$\lim_{x \rightarrow 2-0} \frac{x^3}{x^2 - 4} = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow 2+0} \frac{x^3}{x^2 - 4} = +\infty.$$

Обе точки являются по определению точками разрыва второго рода.

4. Асимптоты:

а) вертикальные. Обычно определяются точками разрыва второго рода.

Из п. 3 по определению прямые $x = -2$ и $x = 2$ являются вертикальными асимптотами графика заданной функции;

б) горизонтальные. Так как предел бесконечен

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{x^2 - 4} = \infty,$$

то горизонтальных асимптот справа нет.

Аналогично, так как

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{x^2 - 4} = -\infty,$$

то горизонтальные асимптоты слева также отсутствуют;

в) наклонные. Для наклонной асимптоты справа ищем коэффициенты прямой $y = kx + b$.

По определению

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^3}{x^2 - 4}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{x^3 - 4x} = 1;$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - kx] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3}{x^2 - 4} - 1 \cdot x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - x^3 + 4x}{x^2 - 4} = 0.$$

Отсюда следует, что прямая $y = 1 \cdot x + 0$, т.е. $y = x$ — наклонная асимптота справа графика функции.

Для наклонной асимптоты слева также

$$k = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = 1 \text{ и } b = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - kx) = 0,$$

т.е. значения условного коэффициента и свободного члена такие же, что и для наклонной асимптоты справа.

Тогда прямая $y = x$ является одновременно наклонной асимптотой справа и слева.

5. Экстремумы.

а) применение выполнения необходимого условия:

$$y' = \frac{3x^2 \cdot (x^2 - 4) - x^3 \cdot 2x}{(x^2 - 4)^2} = \frac{3x^4 - 12x^2 - 2x^4}{(x^2 - 4)^2} = \frac{x^4 - 12x^2}{(x^2 - 4)^2}.$$

Определим точки, в которых производная равна нулю:

$$y' = 0; \frac{x^4 - 12x^2}{(x^2 - 4)^2} = 0; x^4 - 12x^2 = 0; x^2 \cdot (x^2 - 12) = 0.$$

Откуда

$$x_{1,2} = 0; x_3 = -2\sqrt{3}; x_4 = 2\sqrt{3}.$$

Найдем точки, в которых производная не существует. Имеем

$$(x^2 - 4)^2 = 0 \Rightarrow x_5 = -2; x_6 = 2.$$

Таким образом, получили множество критических точек

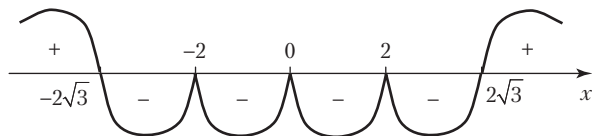
$$X = \{-2\sqrt{3}; -2; 0; 2; 2\sqrt{3}\},$$

которые делят числовую ось x на интервалы;

б) применение достаточного условия.

Решаем двойное неравенство по схеме изменения знака производной

$$\begin{aligned} y' > 0 \text{ и } y' < 0 &\Rightarrow \frac{x^4 - 12x^2}{(x^2 - 4)^2} (><) 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{x^2 \cdot (x + 2\sqrt{3}) \cdot (x - 2\sqrt{3})}{(x + 2)^2 \cdot (x - 2)^2} (><) 0. \end{aligned}$$



Из рисунка очевидно, что:

- области возрастания функции: $x \in (-\infty; -2\sqrt{3}) \cup (2\sqrt{3}; +\infty)$;
- области убывания: $x \in (-2\sqrt{3}; -2) \cup (-2; 0) \cup (0; 2) \cup (2; 2\sqrt{3})$.

Только две точки $-2\sqrt{3}$ и $2\sqrt{3}$ являются точками экстремума, так как при переходе через эти точки производная меняет знак:

$$x_2 = -2\sqrt{3} - \text{точка max} \Rightarrow y_{\max} = \frac{(2\sqrt{3})^3}{(2\sqrt{3})^2 - 4} = -3\sqrt{3};$$

$$x_3 = 2\sqrt{3} - \text{точка min} \Rightarrow y_{\min} = \frac{(-2\sqrt{3})^3}{(-2\sqrt{3})^2 - 4} = 3\sqrt{3}.$$

6. Выпуклость, вогнутость и точки перегиба.

а) проверка необходимого условия

$$\begin{aligned} y'' &= \frac{(4x^3 - 24x) \cdot (x^2 - 4)^2 - (x^4 - 12x^2) \cdot 2 \cdot (x^2 - 4) \cdot 2x}{(x^2 - 4)^4} = \\ &= \frac{(x^2 - 4) \cdot (4x^3 - 24x) \cdot (x^2 - 4) - (x^4 - 12x^2) \cdot 2 \cdot 2x}{(x^2 - 4)^4} = \\ &= \frac{(4x^3 - 24x) \cdot (x^2 - 4) - (x^4 - 12x^2) \cdot 4x}{(x^2 - 4)^3} = \\ &= \frac{4x^5 - 24x^3 - 16x^3 + 96x - 4x^5 + 48x^3}{(x^2 - 4)^3} = \frac{8x^3 + 96x}{(x^2 - 4)^3}. \end{aligned}$$

$$y'' = 0; \frac{8x^3 + 96x}{(x^2 - 4)^3} = 0; x^3 + 96x = 0; 8x \cdot (x^2 + 12) = 0; x_1 = 0.$$

$$(x^2 - 4)^3 = 0 \Rightarrow x_2 = -2; x_3 = 2;$$

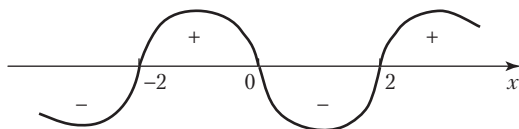
б) проверка достаточного условия

Рассмотрим знаки вторых производных на этих интервалах.

Перепишем вторую производную в виде

$$y'' = \frac{8x \cdot (x^2 + 12)}{(x + 2)^3 \cdot (x - 2)^3}$$

и решим двойное неравенство $y''(><)0$ методом «змейки». Имеем



Области выпуклости (выпуклости вверх): $x \in (-2; 0) \cup (2; +\infty)$.

Области вогнутости (выпуклости вниз): $x \in (-\infty; -2) \cup (0; 2)$.

$x = 0$ — точка перегиба, для которой $y = 0$.

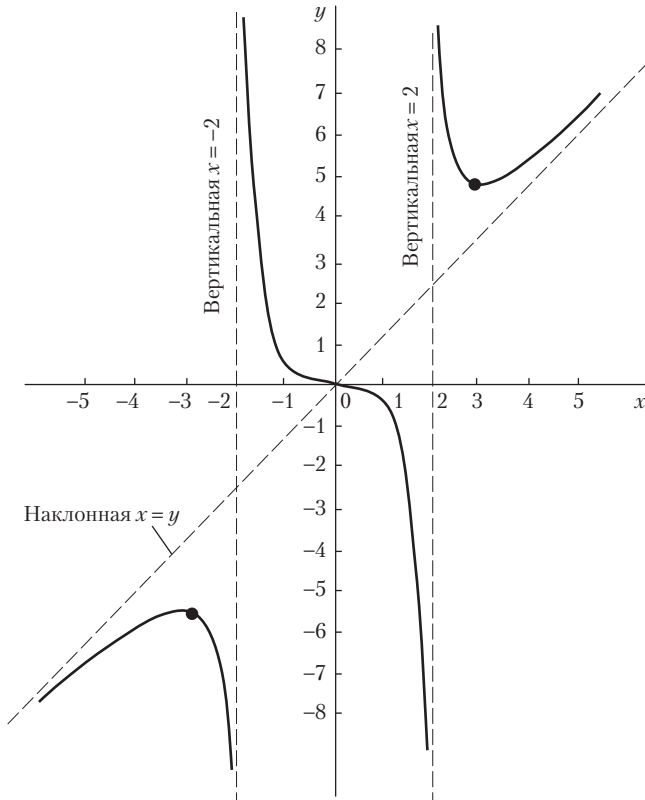
Хотя в точках $x_2 = -2$; $x_3 = 2$ вторая производная меняет свой знак (выполнено достаточное условие), они не являются точками перегиба, так как не входят в область определения функции (см. п. 1).

7. Точка пересечения графика с осями координат: $x = 0 \Rightarrow y = 0$; $y = 0 \Rightarrow x = 0$. Следовательно, существует только одна точка пересечения осей координат $(0; 0)$.

Прежде чем строить график, целесообразно основные данные, полученные при исследовании функции, свести в таблицу.

Значения и интервалы x	Значения функции y	Асимптоты	Возрастание, убывание, экстремумы y	Выпуклость, точки перегиба
$(-\infty; 2\sqrt{3})$		Наклонная $y = x$	$\uparrow$	$\cap$
$-2\sqrt{3}$	$-3\sqrt{3}$		max	
$(-2\sqrt{3}; -2)$		$-\infty$	$\downarrow$	$\cap$
-2	Не существует	Вертикальная		
$(-2; 0)$		$+\infty$	$\downarrow$	$\cup$
0	0			Точка перегиба
$(0; 2)$		$-\infty$	$\downarrow$	$\cap$
2	Не существует	Вертикальная		
$(2; 2\sqrt{3})$		$+\infty$	$\downarrow$	$\cap$
$2\sqrt{3}$	$3\sqrt{3}$		min	
$(2\sqrt{3}; +\infty)$		Наклонная $y = x$	$\uparrow$	$\cup$

По данным таблицы строим график. ►

**Вопросы для самоконтроля**

1. Дайте определение производной функции одной переменной.
2. Что представляет собой производная функции в точке и в области определения функции?
3. Как называется нахождение производной функции?
4. В чем состоит геометрический смысл производной?
5. Приведите примеры непосредственного нахождения производной (из ее определения) для некоторых простейших элементарных функций.
6. Запишите таблицу производных простейших элементарных функций.
7. Сформулируйте правила нахождения производных суммы, разности, произведения, частного, производной сложной функции.
8. Что называется дифференциалом функции одной переменной? Запишите формулу для нахождения дифференциала.

9. В чем состоит геометрический смысл дифференциала?
10. В чем заключается инвариантность формы записи дифференциала?
11. Что называется второй производной функции; третьей производной; производной n -го порядка?
12. Как обозначаются и находятся производные высших порядков?
13. Что называется дифференциалом второго порядка; третьего порядка; n -го порядка?
14. Обладают ли дифференциалы второго и более высоких порядков свойством инвариантности формы записи?
15. Сформулируйте правило Лопиталю. Для чего и в каких случаях оно применяется?
16. Что называется интервалом монотонности функции?
17. Сформулируйте достаточное условие возрастания (убывания) функции на интервале.
18. Что называется точкой и значением максимума (минимума) функции? Какое общее название имеют максимум и минимум?
19. Сформулируйте необходимое условие экстремума функции.
20. Как называются точки, в которых выполнено необходимое условие экстремума функции?
21. Является ли необходимое условие экстремума функции достаточным условием?
22. Сформулируйте первое и второе достаточные условия экстремума.
23. Изложите порядок действий при нахождении интервалов монотонности и экстремумов функции.
24. Какой график функции является выпуклым (выпуклым вверх), а какой вогнутым (выпуклым вниз) на интервале?
25. Какая точка называется точкой перегиба графика?
26. Сформулируйте достаточное условие выпуклости (вогнутости) графика функции на интервале.
27. Сформулируйте необходимое и достаточное условия точки перегиба.
28. Изложите порядок действий при нахождении интервалов выпуклости и вогнутости, а также точек перегиба графика функции.

Задачи для самостоятельного решения

Найти производные функций

$$11.1. \quad y = \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 + x + 7}.$$

$$11.2. \quad y = \sqrt{1 - 3x^2}.$$

$$11.3. y = x \cdot \arccos \frac{x}{2} - \sqrt{4 - x^2}.$$

$$11.4. y = \left(\sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2} \right)^2.$$

$$11.5. y = \sqrt{x} \cdot \arcsin \sqrt{x} + \sqrt{1 - x}.$$

$$11.6. y = \cos^3 \frac{x}{3}.$$

$$11.7. y = x^3 \cdot \ln^2 x.$$

$$11.8. y = \cos^2 x + \ln \left(\operatorname{tg} \frac{x}{2} \right).$$

$$11.9. y = (x^2 + 2x + 2) \cdot e^{-x}.$$

$$11.10. y = \ln \left(\sqrt{\frac{1 + \sin x}{1 - \sin x}} \right).$$

11.11. Найти значение производной функции

$$y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 12})$$

в точке $x = 2$.

11.12. Найти значение производной функции $y = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 1}$ в точке $x = 9$.

11.13. Составить общие уравнения касательной и нормали к графику функции $y = \frac{x - 5}{x + 3}$ в точке $x = -1$.

11.14. Вычислить приближенно $(1,015)^8$.

11.15. Найти вторую производную функции $y = \frac{3x + 2}{x^2 - 2x + 5}$.

11.16. Найти вторую производную функции $y = x \cdot \sqrt[3]{(x - 5)^2}$.

11.17. Найти четвертую производную функции $y = x \cdot \cos x$.

Найти пределы функций, используя правило Лопиталя.

$$11.18. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 3x^2 - 2}{x^3 - 4x^2 + 5}.$$

$$11.19. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 + 2x^2}{\sin^2 x}.$$

$$11.20. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - x - 1}{\sin^2 3x}.$$

$$11.21. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^5 - 8x^2}{x^3 + x^2 - 5x - 2}.$$

$$11.22. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin 5x}.$$

$$11.23. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 + 5x - 18}{\sin \pi x}.$$

$$11.24. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin[\ln(1+x)] + 5x}{\sin 3x}.$$

$$11.25. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{x - \sin x}.$$

$$11.26. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right).$$

Найти интервалы монотонности и экстремумы функций.

$$11.27. y = x^3 + 3x^2 - 9x + 12.$$

$$11.28. y = \frac{4x}{(x+1)^2}.$$

$$11.29. y = \frac{x^2 - 4x + 1}{x - 4}.$$

11.30. Найти интервалы выпуклости и вогнутости, а также точки перегиба графика функции $y = x^4 + 2x^3 - 12x^2 - 5x + 2$.

Провести полное исследование функций и построить графики.

$$11.31. y = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1}.$$

$$11.32. y = \frac{3x - 2}{x^3}.$$

$$11.33. y = -\left(\frac{x}{x+2} \right)^2.$$

Глава 12

ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

12.1. Понятие функции нескольких переменных. График функции двух переменных. Линии уровня

Пусть имеется n независимых упорядоченных переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$. При этом каждому набору их значений из некоторого множества X по определенному правилу поставлено в соответствие единственное значение переменной z . Тогда говорят, что задана функция нескольких переменных

$$z = f(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

где $x_1, x_2, \dots, x_n$ — аргументы функции.

Можно утверждать, что функция нескольких переменных определена на n -мерном векторном пространстве или какой-то его части. При этом n -мерные векторы $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ часто называют **точками**.

Рассмотрим случай двух независимых переменных. При необходимости рассматриваемые далее понятия могут быть обобщены на случай большего числа аргументов.

В случае функции двух переменных аргументы обычно обозначают не x_1 и x_2 , а x и y , т.е. пишут $z = f(x, y)$. Тогда область определения функции X можно графически интерпретировать как некоторое подмножество координатной плоскости xy .

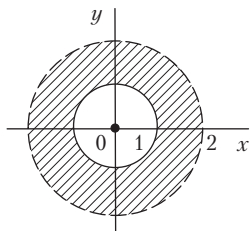
Так как чаще всего функция $z = f(x, y)$ задается с помощью формулы, то считается, что область определения функции включает все точки с координатами (x, y) , для которых эта формула имеет смысл.

Пример 12.1. Найти область определения функции

$$z = \sqrt{x^2 + y^2 - 1} + \ln(4 - x^2 - y^2).$$

Решение

Так как выражение под знаком квадратного корня должно быть неотрицательным, а под знаком натурального логарифма — положительным, то имеют место следующие ограничения на область определения функции:



$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 1 \geq 0, \\ 4 - x^2 - y^2 > 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x^2 + y^2 \geq 1, \\ x^2 + y^2 < 4. \end{cases}$$

Ясно, что частью плоскости xy , удовлетворяющей системе этих двух неравенств, является кольцо, заключенное между окружностями радиусами 1 и 2 с центром в начале координат, причем наружная граница кольца в область определения функции не входит. ►

График функции двух переменных $z = f(x, y)$ — это множество всех тех и только тех точек трехмерного пространства с координатными осями x, y, z , для которых $z = f(x, y)$. Такой график представляет собой какую-либо поверхность (рис. 12.1).

Пространственный график часто бывает недостаточно нагляден. Поэтому во многих случаях вместо него используют линии уровня.

Линия уровня функции $z = f(x, y)$ представляет собой множество точек на плоскости xy таких, что во всех точках значение функции постоянно (рис. 12.2). То есть координаты каждой точки, находящейся на линии уровня, удовлетворяют равенству $f(x, y) = C$.

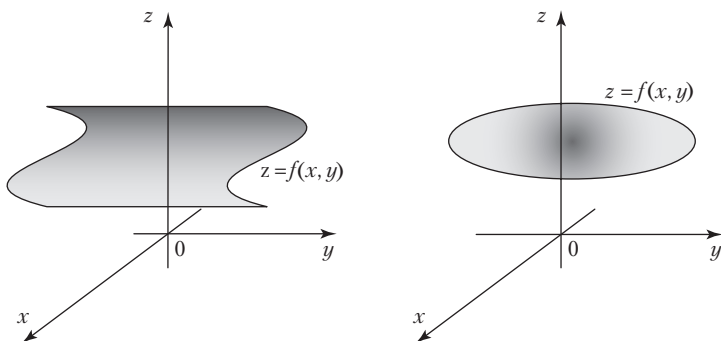


Рис. 12.1. График функции двух переменных $z = f(x, y)$

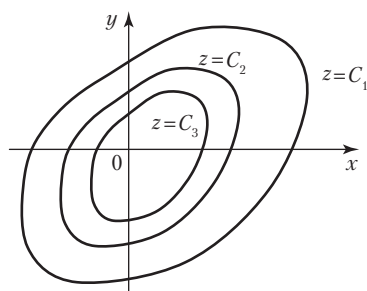


Рис. 12.2. Линии уровня

Пример 12.2. Выполнить построение линий уровня для значений $C_1 = 1$ и $C_2 = 9$ функции

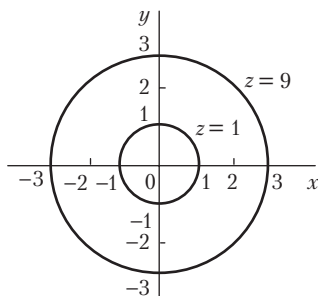
$$z = x^2 + y^2.$$

Решение

Линии уровня

$$x^2 + y^2 = 1 \text{ и } x^2 + y^2 = 9$$

приведены на рисунке.



12.2. Частные производные и полный дифференциал

Дадим аргументу x приращение Δx , а аргументу y — приращение Δy . Тогда функция $z = f(x, y)$ получит приращение Δz :

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y).$$

Δz называется **полным приращением** функции $z = f(x, y)$ в точке (x, y) .

Так как x и y — независимые переменные, то можно рассматривать приращение функции при приращении только одного аргумента при неизменном (фиксированном) значении другого аргумента. Эти приращения, называемые **частными приращениями**, можно записать в виде

$$\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y); \Delta_y z = f(x, y + \Delta y) - f(x, y).$$

Предел отношения частного приращения функции к приращению соответствующей переменной при стремлении последнего к нулю, если этот предел существует, называется

частной производной функции $z = f(x, y)$ по этой переменной и обозначается:

$$\begin{aligned} f'_x &= z'_x = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}; \\ f'_y &= z'_y = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = \\ &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}. \end{aligned}$$

При вычислении частных производных можно использовать обычные правила и табличные производные функции одной переменной, считая другую переменную **постоянной** величиной.

Так как частные производные z'_x и z'_y сами являются функциями независимых переменных x и y , то они также могут иметь частные производные, которые называются вторыми частными производными или **частными производными второго порядка** от функции $z = f(x, y)$:

$$z''_{xx} = (z'_x)'_x; \quad z''_{xy} = (z'_x)'_y; \quad z''_{yx} = (z'_y)'_x; \quad z''_{yy} = (z'_y)'_y.$$

z''_{xy} и z''_{yx} называют вторыми **смешанными частными производными**. Для элементарных функций можно показать, что если z''_{xy} и z''_{yx} существуют в точке (x, y) , то $z''_{xy} = z''_{yx}$.

Пример 12.3. Найти первые и вторые частные и смешанные производные функции

$$z = \frac{x^2}{y^2} - \frac{y}{x}.$$

Решение

$$\begin{aligned} z'_x &= \frac{2x}{y^2} + \frac{y}{x^2}; \quad z'_y = -\frac{2x^2}{y^3} - \frac{1}{x}. \\ z''_{xx} &= \frac{2}{y^2} - \frac{2y}{x^3}; \quad z''_{xy} = -\frac{4x}{y^3} + \frac{1}{x^2}; \quad z''_{yx} = -\frac{4x}{y^3} + \frac{1}{x^2}; \quad z''_{yy} = \frac{6x^2}{y^4}. \end{aligned} \quad \blacktriangleright$$

Дифференциал dz функции двух переменных $z = f(x, y)$ определяется по формуле

$$dz = z'_x \cdot \Delta x + z'_y \cdot \Delta y.$$

dz называется **полным дифференциалом**, в отличие от частных дифференциалов

$$d_x z = z'_x \cdot \Delta x \quad \text{и} \quad d_y z = z'_y \cdot \Delta y.$$

Учитывая, что любое приращение независимой переменной является ее дифференциалом, выражение для dz можно записать в виде

$$dz = z'_x \cdot dx + z'_y \cdot dy \quad \text{или} \quad dz = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot dy.$$

Пример 12.4. Записать выражение для дифференциала функции

$$z = \frac{x^2}{y^2} - \frac{y}{x}.$$

Решение

Учитывая выражения для частных производных этой функции, полученные в предыдущем примере, записываем

$$dz = \left(\frac{2x}{y^2} + \frac{y}{x^2} \right) \cdot dx + \left(-\frac{2x^2}{y^3} - \frac{1}{x} \right) \cdot dy. \quad \blacktriangleright$$

Функция $z = f(x, y)$ называется **дифференцируемой** в точке (x, y) , если ее полное приращение Δz в этой точке может быть представлено в виде

$$\Delta z = dz + \mu(\Delta x) \cdot \Delta x + \nu(\Delta y) \cdot \Delta y$$

или

$$\Delta z = z'_x \cdot \Delta x + z'_y \cdot \Delta y + \mu(\Delta x) \cdot \Delta x + \nu(\Delta y) \cdot \Delta y,$$

где $\mu(\Delta x)$ и $\nu(\Delta y)$ таковы, что

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \mu(\Delta x) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \nu(\Delta y) = 0.$$

Из этой формулы очевидно, что, как и в случае функции одной переменной, дифференциал dz — это главная линейная относительно Δx и Δy часть приращения функции Δz .

12.3. Производная по направлению и градиент

Пусть функция $z = f(x, y)$ определена в некоторой окрестности точки $M(x, y)$ и пусть $\vec{l}$ — некоторое направление, задаваемое на плоскости xy (рис. 12.3) единичным вектором

$$\vec{e} = (\cos \alpha, \cos \beta).$$

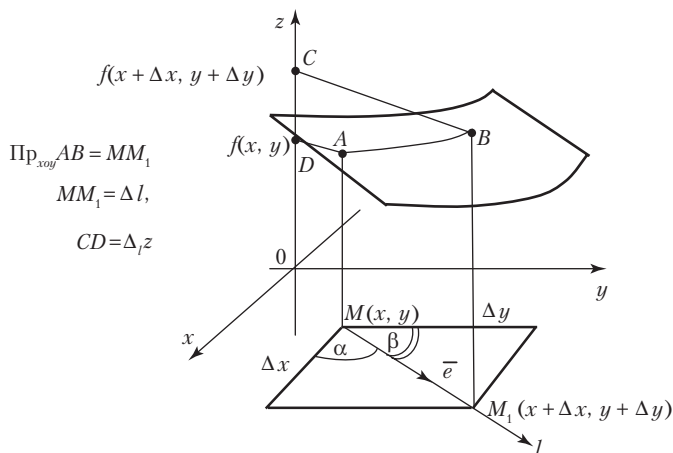


Рис. 12.3. Производная по направлению

Ясно, что для единичного вектора должно выполняться

$$|\bar{e}| = \sqrt{\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta} = 1.$$

Действительно, в соответствии с рис. 12.3 $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$ и, следовательно, $\cos \beta = \sin \alpha$.

Так как единичный вектор $\bar{e}$ определяет направление l , то функции $\cos \alpha$ и $\cos \beta$ (как координаты единичного вектора), называются **направляющими косинусами** для направления l .

При перемещении точки $M(x, y)$ в направлении l на расстояние Δl в точку $M_1(x + \Delta x, y + \Delta y)$ переменные x и y приобретают приращения Δx и Δy соответственно. Из рис. 12.3 очевидно, что

$$\Delta x = \Delta l \cdot \cos \alpha; \quad \Delta y = \Delta l \cdot \cos \beta \quad \text{и} \quad \cos \alpha = \frac{\Delta x}{\Delta l}; \quad \cos \beta = \frac{\Delta y}{\Delta l}.$$

Такое перемещение соответствует перемещению точки A в точку B на поверхности графика функции $z = f(x, y)$. Тогда говорят, что функция $z = f(x, y)$ получает в направлении l приращение

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y).$$

Производной z'_l по направлению l функции двух переменных $z = f(x, y)$ называется предел отношения приращения

функции Δz в этом направлении к величине перемещения Δl при стремлении последнего к нулю. Запишем

$$z'_l = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta z}{\Delta l}.$$

Производная по направлению z'_l характеризует **скорость изменения функции** в этом направлении.

Предположим, что функция $z = f(x, y)$ дифференцируема в точке $M(x, y)$. Тогда ее приращение в этой точке в направлении l можно записать в виде

$$\Delta_l z = dz + \mu \cdot \Delta x + \nu \cdot \Delta y,$$

где μ, ν — бесконечно малые при $\Delta x \rightarrow 0$ и $\Delta y \rightarrow 0$ соответственно. То есть $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \mu = 0$ и $\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \nu = 0$. Следовательно,

$$\Delta_l z = z'_x \cdot \Delta x + z'_y \cdot \Delta y + \mu \cdot \Delta x + \nu \cdot \Delta y;$$

$$\begin{aligned} \frac{\Delta_l z}{\Delta l} &= z'_x \cdot \frac{\Delta x}{\Delta l} + z'_y \cdot \frac{\Delta y}{\Delta l} + \mu \cdot \frac{\Delta x}{\Delta l} + \nu \cdot \frac{\Delta y}{\Delta l} = \\ &= z'_x \cdot \cos \alpha + z'_y \cdot \cos \beta + \mu \cdot \cos \alpha + \nu \cdot \cos \beta. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} z'_l = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta_l z}{\Delta l} &= \lim_{\Delta l \rightarrow 0} (z'_x \cdot \cos \alpha + z'_y \cdot \cos \beta + \mu \cdot \cos \alpha + \nu \cdot \cos \beta) = \\ &= z'_x \cdot \cos \alpha + z'_y \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \mu + \cos \beta \cdot \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \nu. \end{aligned}$$

И окончательно получаем

$$z'_l = z'_x \cdot \cos \alpha + z'_y \cdot \cos \beta. \quad (12.1)$$

Введем понятие **градиента** функции $z = f(x, y)$, под которым будем понимать вектор

$$\nabla z = (z'_x, z'_y).$$

Рассмотрим скалярное произведение двух векторов: вектора ∇z и единичного вектора, задающего направление l . Очевидно, что правая часть равенства

$$\langle \nabla z, e \rangle = z'_x \cdot \cos \alpha + z'_y \cdot \cos \beta$$

совпадает с правой частью равенства (12.1). Следовательно, $z'_l = \langle \nabla z, e \rangle$.

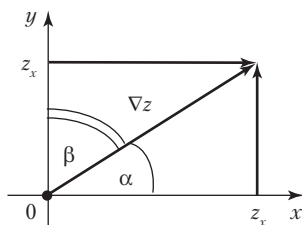


Рис. 12.4. Направление градиента функции

Скалярное произведение двух векторов максимально, когда векторы одинаково направлены (угол между ними равен нулю).

Следовательно, градиент ∇z функции $z = f(x, y)$ в данной точке показывает **направление максимальной скорости** возрастания функции в этой точке (рис. 12.4).

Найдем выражение для значения производной функции в направлении градиента.

Из рис. 12.4 очевидно, что

$$|\nabla z| = \sqrt{(z'_x)^2 + (z'_y)^2}.$$

$$\text{Но} \quad \cos \alpha = \frac{z'_x}{|\nabla z|}; \quad \cos \beta = \frac{z'_y}{|\nabla z|}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} z'_{\nabla z} &= z'_x \cdot \cos \alpha + z'_y \cdot \cos \beta = z'_x \cdot \frac{z'_x}{|\nabla z|} + z'_y \cdot \frac{z'_y}{|\nabla z|} = \\ &= \frac{(z'_x)^2 + (z'_y)^2}{\sqrt{(z'_x)^2 + (z'_y)^2}} = \sqrt{(z'_x)^2 + (z'_y)^2}, \end{aligned}$$

или $z'_{\nabla z} = |\nabla z|$.

Итак, производная функции $z = f(x, y)$ в направлении градиента равна длине вектора градиента.

Можно доказать, что градиент ∇z функции $z = f(x, y)$ в точке $M(x, y)$ перпендикулярен к касательной к линии уровня, проходящей через эту точку.

Пример 12.5. Найти производную функции $z = x + xy - 2y + 3$ в точке $M(-2; 1)$ в направлении, параллельном биссектрисе 1-го координатного угла. Найти также направление наибольшей скорости возрастания функции в этой точке и величину производной в этом направлении.

Решение

Находим частные производные в заданной точке

на плоскости xu такая, что для любой точки $M(x, y)$, принадлежащей этой окрестности, выполняется неравенство

$$f(x, y) < f(x_0, y_0) \text{ [} f(x, y) > f(x_0, y_0) \text{]}.$$

Общее название максимума и минимума, как и для функции одной переменной, — экстремум.

Необходимое условие экстремума функции двух переменных.

Пусть в точке $M_0(x_0, y_0)$ функция $z = f(x, y)$ имеет экстремум. Тогда если в этой точке имеются частные производные z'_x и z'_y , то они обе равны нулю или не существуют.

Точки, в которых обе частные производные равны нулю или не существуют, называются **критическими точками** функции $z = f(x, y)$. Эти точки являются «подозрительными» на экстремум.

Однако необходимое условие экстремума не является достаточным. Может быть так, что в точке $M_0(x_0, y_0)$ обе частные производные равны нулю или не существуют, но, тем не менее, экстремума в этой точке нет.

Достаточное условие экстремума функции двух переменных.

Пусть точка $M_0(x_0, y_0)$ является критической для функции $z = f(x, y)$, т.е. в этой точке выполняется равенство

$$z'_x(x_0, y_0) = z'_y(x_0, y_0) = 0.$$

Кроме того, функция имеет вторые частные и смешанные производные в точке M_0 . Подставим координаты этой точки во вторые частные производные и обозначим

$$A = z''_{xx}(x_0, y_0); B = z''_{xy}(x_0, y_0) = z''_{yx}(x_0, y_0); C = z''_{yy}(x_0, y_0).$$

Вычислим определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2.$$

Если $\Delta > 0$, то функция $z = f(x, y)$ имеет в точке $M_0(x_0, y_0)$ **экстремум**, причем если при этом $A > 0$, то **минимум**, а если $A < 0$, то **максимум**.

Если $\Delta < 0$, то экстремума в этой точке нет. Если $\Delta = 0$, то экстремум может быть, а может и не быть. То есть в этом случае данное правило не дает ответа на вопрос о существовании экстремума.

Таким образом, проверяется каждая критическая точка на экстремум.

Пример 12.6. Найти экстремумы функции

$$z = \frac{1}{3}x^3 - 10xy - 10y^2 + 14x + 40y.$$

Решение

Находим частные производные, приравниваем их нулю. Решая полученную систему уравнений, находим критические точки функции:

$$\begin{cases} z'_x = x^2 - 10y + 14, \\ z'_y = -10x - 20y + 40. \end{cases} \begin{cases} x^2 - 10y + 14 = 0, \\ -10x - 20y + 40 = 0. \end{cases}$$

Из второго уравнения получаем $x + 2y = 4$ и $y = \frac{4-x}{2}$, подставляем в первое уравнение

$$x^2 - 10 \cdot \frac{4-x}{2} + 14 = 0 \Rightarrow x^2 + 5x - 6 = 0; \quad x_1 = 1; \quad x_2 = -6.$$

После подстановки этих значений в любое уравнение системы получим

$$y_1 = \frac{3}{2}; \quad y_2 = 5.$$

Следовательно, критическими точками являются $M_1\left(1; \frac{3}{2}\right)$, $M_2(-6; 5)$.

Находим выражения для вторых частных и смешанных производных:

$$z''_{xx} = 2x; \quad z''_{xy} = z''_{yx} = -10; \quad z''_{yy} = -20.$$

Подставим полученные критические точки во вторые производные.

$$1) \quad M_1\left(1; \frac{3}{2}\right) \Rightarrow A = 2; \quad B = -10; \quad C = -20.$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -10 \\ -10 & -20 \end{vmatrix} = -40 - 100 = -140.$$

Следовательно, экстремума в точке M_1 нет.

$$2) \quad M_2(-6; 5) \Rightarrow A = -12; \quad B = -10; \quad C = -20.$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} -12 & -10 \\ -10 & -20 \end{vmatrix} = 240 - 100 = 140.$$

Экстремум существует и, так как $A < 0$, то в точке M_2 — максимум.

Вычислим значение функции в этой точке

$$z_{\max} = \frac{1}{3} \cdot (-6)^3 - 10 \cdot (-6) \cdot 5 - 10 \cdot 5^2 + 14 \cdot (-6) + 40 \cdot 5 = 94.$$

Тогда точкой максимума является точка с координатами $(-6; 5; 94)$. ►

12.5. Условный экстремум. Метод множителей Лагранжа

Пусть задана функция $z = f(x, y)$, причем аргументы x и y должны удовлетворять условию $g(x, y) = C$, называемому **уравнением связи**. Уравнение связи иногда называют **ограничением**.

Точка $M_0(x_0, y_0)$, удовлетворяющая уравнению связи $g(x, y) = C$, называется точкой **условного максимума (минимума)** функции $z = f(x, y)$, если существует окрестность этой точки, такая, что для всех точек $M(x, y)$, принадлежащих этой окрестности и удовлетворяющих уравнению связи, выполняется неравенство

$$f(x, y) < f(x_0, y_0) \text{ [} f(x, y) > f(x_0, y_0) \text{]}.$$

Само значение функции в этой точке называется **условным максимумом (минимумом)** функции $z = f(x, y)$. Условные максимум и минимум носят общее название **условный экстремум** (рис. 12.5).

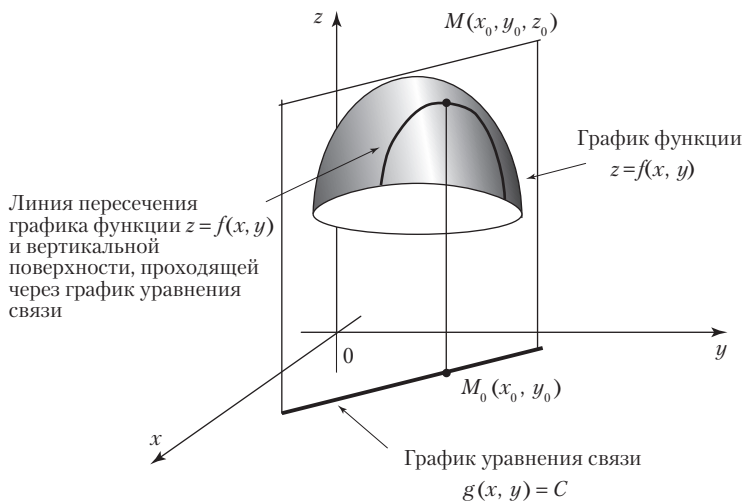


Рис. 12.5. Условный максимум функции $z = f(x, y)$

Если уравнение связи $g(x, y) = C$ можно разрешить относительно одной из переменных, например $y = \varphi(x)$, то функция $z = f(x, y)$ превращается в функцию одной переменной x

$$z = f[x, \varphi(x)]$$

и условный экстремум можно найти так же, как экстремум обычной функции одной переменной.

Пример 12.7. Найти условные экстремумы функции $z = x^2 + 2y^2$ при условии

$$3x + 2y = 11.$$

Решение

Из уравнения связи $3x + 2y = 11$ находим

$$y = \frac{11 - 3x}{2}$$

и подставляем в исходную функцию

$$z = x^2 + 2 \cdot \left(\frac{11 - 3x}{2} \right)^2 = \frac{11}{2}x^2 - 33x + \frac{121}{2}.$$

Найдем производную и критическую точку. Имеем

$$z' = 11x - 33 = 0; \quad x = 3.$$

Очевидно, что $z'' = 11 > 0$, следовательно, точка $x = 3$ является точкой минимума функции

$$z = \frac{11}{2}x^2 - 33x + \frac{121}{2}.$$

Из уравнения связи вычислим

$$y = \frac{11 - 3x}{2} = \frac{11 - 3 \cdot 3}{2} = 1.$$

Следовательно, точка $(3; 1)$ является точкой условного минимума функции $z = x^2 + 2y^2$ при условии $3x + 2y = 11$.

Значение условного минимума функции:

$$z_{\min} = 3^2 + 2 \cdot 1^2 = 11. \quad \blacktriangleright$$

Если уравнение связи нельзя разрешить относительно одной из переменных x или y , то для отыскания точек, подозрительных на условный экстремум, используют **метод множителей Лагранжа**.

Строят функцию Лагранжа L , зависящую от трех переменных: x , y и новой переменной λ , называемой множителем Лагранжа

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda \cdot [g(x, y) - C].$$

Таких функций строят столько, сколько задано ограничений.

Можно доказать, что если точка (x_0, y_0) является **точкой условного экстремума** функции $z = f(x, y)$ при условии $g(x, y) = C$, то найдется число λ_0 такое, что точка (x_0, y_0, λ_0) является точкой **экстремума** функции $L(x, y, \lambda)$.

Поэтому для нахождения точек, «подозрительных» на условный экстремум, находят и приравнивают нулю частные производные функции $L(x, y, \lambda)$ по x , y и λ .

Запишем

$$\begin{cases} L'_x = 0, & f'_x(x, y) + \lambda \cdot g'_x(x, y) = 0, \\ L'_y = 0, & f'_y(x, y) + \lambda \cdot g'_y(x, y) = 0, \\ L'_\lambda = 0, & g(x, y) - C = 0. \end{cases}$$

Решая полученную систему уравнений, можно найти критические точки.

Заметим, что в этой задаче не рассматриваются достаточные условия условного экстремума. Отметим только, что во многих экономических задачах критическая точка функции Лагранжа является единственной и соответствует условному экстремуму.

Пример 12.8. Методом множителей Лагранжа найти точки, «подозрительные» на условный экстремум, уже рассмотренной ранее функции $z = x^2 + 2y^2$ при наличии уравнения связи $3x + 2y = 11$.

Решение

Строим функцию Лагранжа

$$L(x, y, \lambda) = x^2 + 2y^2 + \lambda \cdot (3x + 2y - 11).$$

Найдя частные производные, запишем

$$\begin{cases} L'_x = 2x + 3\lambda = 0, \\ L'_y = 4y + 2\lambda = 0, \\ L'_\lambda = 3x + 2y - 11 = 0. \end{cases}$$

Исключая λ из первых двух уравнений, получаем $2x - 6y = 0$.

Решая совместно это уравнение с третьим уравнением системы, находим $x = 3$, $y = 1$, т.е. точка $(3; 1)$ является «подозрительной» на условный экстремум. ►

Вопросы для самоконтроля

1. Что такое функция нескольких переменных?
2. Что является областью определения функции двух переменных?

3. Что представляет собой график функции двух переменных и в чем его главный недостаток?
4. Дайте определение линии уровня функции двух переменных.
5. Что такое частная производная?
6. Чем следует руководствоваться при нахождении частных производных?
7. Как найти вторые частные и смешанные производные функции двух переменных?
8. Что можно сказать о вторых смешанных производных?
9. Запишите выражения для полного и частных дифференциалов функции двух переменных. Что представляет собой полный дифференциал?
10. Что такое направляющие косинусы и производная по направлению?
11. Запишите формулу, по которой вычисляется производная по направлению.
12. Что такое градиент функции двух переменных? Что показывает градиент? Чему равна производная функции двух переменных в направлении градиента?
13. Какая точка называется точкой экстремума функции двух переменных?
14. Сформулируйте необходимое и достаточное условия экстремума.
15. Что такое уравнение связи?
16. Определите понятие условного экстремума. Как найти условный экстремум, если уравнение связи разрешимо относительно одной из переменных?
17. Изложите сущность метода множителей Лагранжа.

Задачи для самостоятельного решения

12.1. Построить на координатной плоскости область определения функции $z = \sqrt{x+y} \cdot \ln(y^2 - x^2)$.

12.2. Записать уравнения и выполнить построение линий уровня функции $z = 2x + 3y$ при значениях $z = 0; 3; 6$.

Найти первые и вторые частные и смешанные производные функций двух переменных.

12.3. $z = x^3 y^2 - 2xy^3$.

12.4. $z = \frac{xy}{x+y}$.

12.5. $z = e^{3x^2 + 2y^2 - xy}$.

Найти экстремумы функций двух переменных.

12.6. $z = -x^2 + xy - y^2 - 9x + 3y - 20$.

12.7. $z = x^3 - y^3 - 3xy$.

Глава 13

НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ И ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛЫ

13.1. Первообразная функция и неопределенный интеграл

Пусть функция $F(x)$ определена и имеет производную

$$F'(x) = f(x)$$

на некотором промежутке. Тогда функция $F(x)$ называется **первообразной** для функции $f(x)$ на этом промежутке.

Пример 13.1.

Функция $F(x) = x^2$ является первообразной для функции $f(x) = 2x$ на всей числовой оси, так для любого x выполняется $(x^2)' = 2x$.

Функция $F_1(x) = x^2 - 3$ также первообразная для функции $f(x) = 2x$, так как $(x^2 - 3)' = 2x$.

Функция $F(x) = \sin x$ является первообразной для функции $f(x) = \cos x$, так как $(\sin x)' = \cos x$. Но функция $F_1(x) = \sin x + 5$ также является первообразной для $f(x) = \cos x$, так как $(\sin x + 5)' = \cos x$. ►

Из примеров очевидно, что если задана функция $f(x)$, то ее первообразная не может быть определена однозначно, т.е. $f(x)$ имеет *не одну первообразную*.

Теорема. Пусть функция $F(x)$ является первообразной для функции $f(x)$. Тогда и функция

$$F(x) + C,$$

в которой C — постоянная величина, также является *первообразной* для функции $f(x)$.

Обратно, если $F_1(x)$ и $F_2(x)$ — две различные первообразные для функции $f(x)$, то они отличаются на постоянную величину C , т.е.

$$F_1(x) = F_2(x) + C.$$

Доказательство:

а) так как

$$(F(x) + C)' = F'(x) + C' = f(x) + 0 = f(x),$$

то по определению первообразной функции $F(x) + C$ является первообразной для функции $f(x)$;

б) пусть у функции $f(x)$ существуют две первообразные $F_1(x)$ и $F_2(x)$. Найдем их разность, которая тоже является функцией,

$$\Phi(x) = F_1(x) - F_2(x).$$

Найдем ее производную.

$$\Phi'(x) = [F_1(x) - F_2(x)]' = F_1'(x) - F_2'(x) = f(x) - f(x) = 0.$$

Так как производная функции $\Phi(x)$ равна нулю, то функции $\Phi(x)$ представляет собой некоторую постоянную величину C . Поэтому

$$\Phi(x) = C, F_1(x) - F_2(x) = C \Rightarrow F_1(x) = F_2(x) + C.$$

Совокупность всех первообразных для функции $f(x)$ называется **неопределенным интегралом** от функции $f(x)$ в области определения первообразных.

Неопределенный интеграл обозначается

$$\int f(x)dx,$$

где $\int$ — знак интеграла; $f(x)$ — подынтегральная функция; $f(x)dx$ — подынтегральное выражение, а переменная x называется переменной интегрирования.

Так как все первообразные для $f(x)$ отличаются друг от друга на постоянную величину, то ясно, что

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

т.е. неопределенный интеграл **определяет семейство функций**.

Процесс нахождения неопределенного интеграла от функции $f(x)$ называется **интегрированием** этой функции.

Для нахождения конкретной первообразной необходимо задать координаты точки, через которую будет проходить график первообразной.

Свойства неопределенного интеграла

1. Производная от неопределенного интеграла равна подынтегральной функции

$$\left[\int f(x) dx \right]' = f(x).$$

Действительно,

$$\left[\int f(x) dx \right]' = [F(x) + C]' = F'(x) + C' = f(x) + 0 = f(x).$$

2. Дифференциал от неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению

$$d \left[\int f(x) dx \right] = f(x) dx.$$

По определению дифференциала

$$d \left[\int f(x) dx \right] = \left[\int f(x) dx \right]' dx = f(x) dx.$$

3. Неопределенный интеграл от дифференциала функции равен этой функции плюс произвольная постоянная

$$\int dF(x) = F(x) + C.$$

Так как было определено, что $F'(x) = f(x)$, то

$$\int dF(x) = \int F'(x) dx = \int f(x) dx = F(x) + C.$$

4. Постоянный множитель можно вынести за знак интеграла

$$\int af(x) dx = a \int f(x) dx.$$

Доказательство:

$$\begin{aligned} \int af(x) dx &= \int aF'(x) dx = \int [aF(x)]' dx = \int d[aF(x)] = \\ &= aF(x) + C_1 = a \left[F(x) + \frac{C_1}{a} \right] = a[F(x) + C] = a \int f(x) dx. \end{aligned}$$

5. Интеграл от алгебраической суммы конечного числа функций равен соответствующей алгебраической сумме интегралов от этих функций

$$\begin{aligned} \int [f_1(x) \pm f_2(x) \pm \dots \pm f_n(x)] dx = \\ = \int f_1(x) dx \pm \int f_2(x) dx \pm \dots \pm \int f_n(x) dx. \end{aligned}$$

Рассмотрим *интегралы от основных элементарных функций* в виде таблицы, которая получается путем простого

подбора первообразной так, чтобы производная первообразной была бы равна подынтегральной функции.

Таблица неопределенных интегралов

$$1. \int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C \quad (a \neq -1).$$

$$2. \int x^{-1} dx = \int \frac{dx}{x} = \ln |x| + C.$$

$$3. \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C.$$

$$4. \int e^x dx = e^x + C.$$

$$5. \int \cos x dx = \sin x + C.$$

$$6. \int \sin x dx = -\cos x + C.$$

$$7. \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C.$$

$$8. \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C;$$

$$9. \int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C.$$

$$10. \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C;$$

$$11. \int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C;$$

$$12. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a} \right| + C.$$

Интегралы, входящие в эту таблицу, обычно называют **табличными**.

Пример 13.2.

$$1. \int x^6 dx = \frac{x^7}{7} + C.$$

$$2. \int \frac{dx}{\sqrt{4 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{2} + C.$$

$$3. \int \frac{dx}{x^2 + 9} = \frac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{x}{3} + C.$$

$$4. \int \frac{dx}{x^2 - 9} = \frac{1}{6} \ln \left| \frac{x-3}{x+3} \right| + C.$$

$$5. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 5}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 + 5} \right| + C. \quad \blacktriangleright$$

Нахождение неопределенных интегралов путем обращения к таблице интегралов часто называют **непосредственным интегрированием**.

13.2. Методы вычисления неопределенных интегралов

Одним из методов нахождения интегралов, отличных от табличных, является преобразование подынтегральной функции таким образом, чтобы осуществить переход от произведения или частного функций к их сумме и в конечном счете на основе свойств интеграла 4 и 5 свести эти интегралы к табличным.

Такой метод интегрирования называют **методом разложения**.

Часто при этом успех достигается путем применения формул сокращенного умножения, а также тригонометрических формул перехода от произведения (или степени) к сумме.

Пример 13.3.

$$\int 2^{3x-1} dx = \int (2^3)^x \cdot 2^{-1} dx = \int \frac{1}{2} \cdot 8^x dx = \frac{1}{2} \int 8^x dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{8^x}{\ln 8} + C. \quad \blacktriangleright$$

Пример 13.4.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2 + 1}} = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{4}}} = \frac{1}{2} \ln \left| x + \sqrt{x^2 + \frac{1}{4}} \right| + C. \quad \blacktriangleright$$

Пример 13.5.

$$\begin{aligned} & \int \frac{(2\sqrt{x} + 1)^3}{x\sqrt{x}} dx = \int \frac{8x\sqrt{x} + 12x + 6\sqrt{x} + 1}{x\sqrt{x}} dx = \\ & = 8 \int dx + 12 \int \frac{dx}{\sqrt{x}} + 6 \int \frac{dx}{x} + \int \frac{dx}{x\sqrt{x}} = 8x + 12 \int x^{-1/2} dx + 6 \ln|x| + \int x^{-3/2} dx = \end{aligned}$$

$$= 8x + 12 \frac{x^{1/2}}{1/2} + 6 \ln|x| + \frac{x^{-1/2}}{-1/2} + C = 8x + 24\sqrt{x} + 6 \ln|x| - \frac{2}{\sqrt{x}} + C. \quad \blacktriangleright$$

Пример 13.6.

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2 - 16}{\sqrt{x} + 2} dx &= \int \frac{(x+4)(x-4)}{\sqrt{x} + 2} dx = \int \frac{(x+4)(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)}{\sqrt{x} + 2} dx = \\ &= \int (x+4)(\sqrt{x}-2) dx = \int (x\sqrt{x} - 2x + 4\sqrt{x} - 8) dx = \\ &= \int x^{3/2} dx - 2 \int x dx + 4 \int x^{1/2} dx - 8 \int dx = \frac{x^{5/2}}{5/2} - 2 \frac{x^2}{2} + 4 \frac{x^{3/2}}{3/2} - 8x + C = \\ &= \frac{2}{5} x^2 \sqrt{x} - x^2 + \frac{8}{3} x \sqrt{x} - 8x + C. \quad \blacktriangleright \end{aligned}$$

Пример 13.7.

$$\begin{aligned} \int \left(\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2} \right)^2 dx &= \int \left(\sin^2 \frac{x}{2} + 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2} \right) dx = \\ &= \int (1 + \sin x) dx = \int dx + \int \sin x dx = x - \cos x + C. \quad \blacktriangleright \end{aligned}$$

Пример 13.8.

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2}{x^2 + 4} dx &= \int \frac{(x^2 + 4) - 4}{x^2 + 4} dx = \int dx - 4 \int \frac{dx}{x^2 + 4} = \\ &= x - 4 \cdot \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x}{2} + C = x - 2 \operatorname{arctg} \frac{x}{2} + C. \quad \blacktriangleright \end{aligned}$$

Метод замены переменной. Если подынтегральное выражение можно представить в виде

$$df(x)dx = \varphi[u(x)]u'(x)dx = \varphi[u(x)]d[u(x)],$$

а интеграл $\int \varphi(t)dt$ является табличным, то для нахождения интеграла $\int f(x)dx$ производится замена переменной (подстановка)

$$t = u(x).$$

Тогда

$$u'(x)dx = d[u(x)] = dt$$

и легко находится выражение для интеграла через переменную интегрирования t . В заключение необходимо выполнить обратную подстановку, вернувшись к переменной x .

Такая замена переменной позволяет свести сложный интеграл к табличному. Нахождение $u'(x)dx$ в подынтегральной функции часто называют **выделением дифференциала**.

Наиболее просто осуществить подстановку, когда $u(x)$ является *линейной* функцией вида

$$u(x) = kx + b,$$

т.е. если интеграл имеет вид

$$\int f(kx + b)dx.$$

Действительно, пусть $F(x)$ — первообразная для $f(x)$. Тогда

$$u'(x) = k, \quad d[u(x)] = kdx \text{ и } dx = 1/k \cdot du.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \int f(kx + b)dx &= \int f(u) \cdot \frac{1}{k} du = \\ &= \frac{1}{k} \int f(u)du = \frac{1}{k} F(u) + C = \frac{1}{k} F(kx + b) + C. \end{aligned}$$

Пример 13.9. Найти неопределенный интеграл

$$\int \cos(3x + 2)dx.$$

Решение

Используя последнюю формулу, можно сразу записать ответ

$$\int \cos(3x + 2)dx = \frac{1}{3} \sin(3x + 2) + C.$$

Рассмотрим этот пример подробнее, используя выделение дифференциала:

$$d(3x + 2) = 3dx \Rightarrow dx = \frac{1}{3}d(3x + 2).$$

Следовательно, нужно сделать замену переменной (подстановку) $u = 3x + 2$. Запишем

$$\begin{aligned} \int \cos(3x + 2)dx &= \int \cos(3x + 2) \cdot \frac{1}{3}d(3x + 2) = \frac{1}{3} \int \cos u du = \\ &= \frac{1}{3} \sin u + C = \frac{1}{3} \sin(3x + 2) + C. \end{aligned}$$

►

Пример 13.10.

$$\begin{aligned} \int \frac{\operatorname{tg} x}{\cos x} dx &= \int \frac{\sin x / \cos x}{\cos x} dx = \int \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx = \\ &= \int \frac{-(\cos x)' dx}{\cos^2 x} = - \int \frac{(\cos x)' dx}{\cos^2 x} = - \int \frac{d(\cos x)}{\cos^2 x}. \end{aligned}$$

Обозначим $t = \cos x$. Тогда

$$-\int \frac{dt}{t^2} = -\int t^{-2} dt = -\frac{t^{-1}}{-1} + C = \frac{1}{t} + C = \frac{1}{\cos x} + C. \quad \blacktriangleright$$

Пример 13.11.

$$\begin{aligned} \int \frac{x dx}{x^2 + 5} &= \frac{1}{2} \int \frac{2x dx}{x^2 + 5} = \frac{1}{2} \int \frac{(x^2)' dx}{x^2 + 5} = \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{(x^2 + 5)' dx}{x^2 + 5} = \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2 + 5)}{x^2 + 5} = \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t} = \frac{1}{2} \ln|t| + C = \frac{1}{2} \ln|x^2 + 5| + C = \frac{1}{2} \ln(x^2 + 5) + C. \end{aligned}$$

В примере использовалось обозначение $t = x^2 + 5$. $\blacktriangleright$

Необходимо уточнить, что во многих случаях выделить дифференциал достаточно трудно. Поэтому часто метод замены переменной используют, просто пробуя различные подстановки.

Пример 13.12. Рассмотрим последний пример, в котором использовалась подстановка

$$t = x^2 + 5.$$

Тогда

$$x^2 = t - 5; \quad x = \sqrt{t - 5}; \quad dx = \frac{dt}{2\sqrt{t - 5}}$$

и, подставляя в исходный интеграл, имеем

$$\int \frac{x dx}{x^2 + 5} = \int \frac{\sqrt{t - 5} \cdot dt}{t \cdot 2\sqrt{t - 5}} = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t} = \frac{1}{2} \ln|t| + C = \frac{1}{2} \ln(x^2 + 5) + C. \quad \blacktriangleright$$

Существует несколько **типовых приемов** при интегрировании методом замены переменной. Рассмотрим некоторые из них.

1. Если нужно найти интеграл от *алгебраической дроби*, причем в знаменателе дроби находится квадратный трехчлен $ax^2 + bx + c$, а в числителе — многочлен от x не выше первой степени, то в знаменателе выделяется полный квадрат и новая переменная приравнивается к выражению, возводимому в квадрат.

Тот же прием применяется, если квадратный трехчлен находится под знаком квадратного корня.

Пример 13.13.

$$\int \frac{x + 1}{4x^2 + 4x - 3} dx = \int \frac{x + 1}{4x^2 + 4x + 1 - 1 - 3} dx =$$

$$\begin{aligned}
 &= \int \frac{x+1}{(2x+1)^2-4} dx = \int \frac{\frac{1}{2}t - \frac{1}{2} + 1}{t^2-4} \cdot \frac{1}{2} dt = \\
 &= \frac{1}{4} \int \frac{t+1}{t^2-4} dt = \frac{1}{4} \left(\int \frac{t dt}{t^2-4} + \int \frac{dt}{t^2-4} \right) = \\
 &= \frac{1}{8} \ln |t^2-4| + \frac{1}{16} \ln \left| \frac{t-2}{t+2} \right| + C = \\
 &= \frac{1}{8} \ln |(2x+1)^2-4| + \frac{1}{16} \ln \left| \frac{2x-1}{2x+3} \right| + C = \\
 &= \frac{1}{8} \ln |4x^2+4x-3| + \frac{1}{16} \ln \left| \frac{2x-1}{2x+3} \right| + C.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 t &= 2x+1; \\
 x &= \frac{1}{2}t - \frac{1}{2}; \\
 dx &= \frac{1}{2}dt.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 u &= t^2-4; \\
 du &= 2t dt; \\
 t dt &= \frac{1}{2} du.
 \end{aligned}$$

Пример 13.14.

$$\begin{aligned}
 &\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+9}} = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+4+5}} = \\
 &= \int \frac{dx}{\sqrt{(x+2)^2+5}} = \int \frac{dt}{\sqrt{t^2+5}} = \ln |t + \sqrt{t^2+5}| + C = \\
 &= \ln |x+2 + \sqrt{(x+2)^2+5}| + C = \\
 &= \ln |x+2 + \sqrt{x^2+4x+9}| + C.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 t &= x+2; \\
 x &= t-2; \\
 dx &= dt.
 \end{aligned}$$

2. Если в знаменателе *дробь* подынтегральной функции находится квадратный трехчлен, а в числителе — многочлен от x степени выше первой, то следует провести деление, например, уголком числителя на знаменатель, после чего интеграл сводится к уже рассмотренным случаям.

Пример 13.15.

$$\begin{aligned}
 &\int \frac{x^2-5x+9}{x^2-5x+6} dx = \int \left(1 + \frac{3}{x^2-5x+6} \right) dx = \\
 &= \int dx + \int \frac{3}{x^2-5x+6} dx = \\
 &= x + \int \frac{3}{x^2-5x+\frac{25}{4}-\frac{25}{4}+6} dx =
 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r|l}
 x^2-5x+9 & x^2-5x+6 \\
 \hline
 x^2-5x+6 & 1 \\
 \hline
 3 &
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 &= x + \int \frac{3}{\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}} dx = \\
 &= x + 3 \int \frac{dt}{t^2 - \frac{1}{4}} = x + 3 \ln \left| \frac{t - \frac{1}{2}}{t + \frac{1}{2}} \right| + C = \\
 &= x + 3 \ln \left| \frac{x - 3}{x - 2} \right| + C.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 t &= x - \frac{5}{2}; \\
 x &= t + \frac{5}{2}; \\
 dx &= dt.
 \end{aligned}$$



3. Если в подынтегральной функции имеются *корни* различной степени из x , то часто к успеху приводит замена переменной $t = \sqrt[n]{x}$, где n — наименьшее общее кратное показателей степени всех корней.

Пример 13.16.

$$\begin{aligned}
 \int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}} &= \int \frac{6t^5 dt}{t^3 + t^2} = 6 \int \frac{t^3 dt}{t + 1} = \\
 &= 6 \int \frac{(t^3 + 1 - 1)dt}{t + 1} = \\
 &= 6 \int \frac{t^3 + 1}{t + 1} dt - 6 \int \frac{dt}{t + 1} = \\
 &= 6 \int (t^2 - t + 1) dt - 6 \int \frac{d(t + 1)}{t + 1} = \\
 &= 6 \cdot \left(\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + t \right) - 6 \ln |t + 1| + C = \\
 &= 2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} - 6 \ln |\sqrt[6]{x} + 1| + C.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 t &= \sqrt[6]{x}; \\
 x &= t^6; \\
 dx &= 6t^5 dt; \\
 \sqrt{x} &= t^3; \\
 \sqrt[3]{x} &= t^2.
 \end{aligned}$$



4. Если подынтегральная функция представляет собой *тригонометрическое выражение*, то часто используют замену переменной $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$. Тогда тригонометрические функции запишутся в виде

$$\sin x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{2t}{1 + t^2}; \quad \cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{1 - t^2}{1 + t^2};$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{2\operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{2t}{1 - t^2}.$$

Найдем dx . Для этого выразим переменную x

$$\frac{x}{2} = \operatorname{arctg} t \Rightarrow x = 2\operatorname{arctg} t.$$

И окончательно

$$dx = (2\operatorname{arctg} t)' dt = \frac{2dt}{1 + t^2}.$$

Пример 13.17.

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C. \quad \blacktriangleright$$

Очень часто на практике является полезным использование следующих формул

$$\begin{aligned} \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx &= \ln|f(x)| + C; \\ \int \frac{f'(x)dx}{\sqrt{f(x)}} &= 2\sqrt{f(x)} + C. \end{aligned}$$

Пример 13.18.

$$\int \frac{dx}{x \cdot \ln x} = \int \frac{\frac{1}{x}}{\ln x} dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{здесь } f(x) = \ln x, \\ f'(x) = \frac{1}{x} \end{array} \right\} = \ln|\ln x| + C \quad \blacktriangleright$$

Пример 13.19.

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{2+x^3}} dx = \frac{1}{3} \int \frac{3x^2}{\sqrt{2+x^3}} = \left\{ \begin{array}{l} \text{здесь } f(x) = 2+x^3, \\ f'(x) = 3x^2 \end{array} \right\} = \frac{2}{3} \sqrt{2+x^3} + C. \quad \blacktriangleright$$

Интегрирование по частям. В некоторых случаях интеграл можно представить в виде

$$\int f(x) dx = \int u(x) \cdot v'(x) dx = \int u(x) \cdot dv(x) = \int u dv.$$

Если при этом легко вычисляется интеграл $\int v du$, то следует воспользоваться формулой, называемой формулой *интегрирования по частям*

$$\int u dv = uv - \int v du.$$

Эта формула легко получается при интегрировании дифференциала произведения двух функций. Действительно,

$$d(uv) = (uv)' dx = (u'v + uv') dx = u'v dx + v u' dx = u dv + v du.$$

Интегрируя, получаем

$$\begin{aligned} \int d(uv) &= \int u dv + \int v du; \\ uv &= \int u dv + \int v du \Rightarrow \int u dv = uv - \int v du. \end{aligned}$$

Интегрирование по частям обычно используют тогда, когда подынтегральная функция представляет собой произведение двух функций разного типа (степенной и тригонометрической; степенной и показательной; степенной и логарифмической; тригонометрической и показательной и т.п.).

Если в подынтегральном выражении имеется логарифмическая функция, то ее следует принять за u , а если логарифмической функции в подынтегральном выражении нет, то за u принимают степенную функцию. Все, что остается под интегралом, принимают за dv .

Пример 13.20.

$$\begin{aligned} \int x \sin x dx &= -x \cos x - \int (-\cos x) dx = \\ &= -x \cos x + \int \cos x dx = -x \cos x + \sin x + C. \end{aligned}$$

$u = x;$ $dv = \sin x dx;$ $du = dx;$ $v = -\cos x.$

Пример 13.21.

$$\begin{aligned} \int \ln x dx &= \\ &= x \ln x - \int x \frac{dx}{x} = \\ &= x \ln x - \int dx = \\ &= x \ln x - x + C. \end{aligned}$$

$u = \ln x;$ $dv = dx;$ $du = \frac{dx}{x};$ $v = x.$
--

Не все интегралы могут быть выражены через элементарные функции. Эти интегралы имеют вид

$$\begin{aligned} \int e^{-x^2} dx; \int \sin x^2 dx; \int \cos x^2 dx; \\ \int \frac{dx}{\ln x}; \int \frac{e^x}{x} dx; \int \frac{\sin x}{x} dx; \int \frac{\cos x}{x} dx. \end{aligned}$$

Для вычисления таких интегралов (иногда их называют неберущимися) используются специальные методы.

13.3. Понятие определенного интеграла, его геометрический и экономический смысл

Пусть на отрезке $[a, b]$ определена некоторая функция $y = f(x)$ (рис. 13.1). Разобьем отрезок $[a, b]$ на n частей точками $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$. Для унификации обозначений положим $a = x_0$; $b = x_n$.

Отрезок $[x_{k-1}, x_k]$ назовем k -м частичным отрезком. Длина k -го частичного отрезка равна

$$\Delta x_k = x_k - x_{k-1}.$$

Число d , равное наибольшей длине k -го частичного отрезка, называется **диаметром** или **мелкостью разбиения**

$$d = \max_{k=1, \dots, n} \Delta x_k.$$

Выберем на каждом частичном отрезке $[x_{k-1}, x_k]$ произвольную точку ξ_k , найдем $f(\xi_k)$ и составим сумму

$$\sigma_n = f(\xi_1) \cdot \Delta x_1 + f(\xi_2) \cdot \Delta x_2 + \dots + f(\xi_n) \cdot \Delta x_n = \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \cdot \Delta x_k.$$

Функция σ_n называется **интегральной суммой** для функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$. Ясно, что таких интегральных сумм можно составить бесконечное множество.

Если существует предел интегральных сумм при $d \rightarrow 0$ (при этом $n \rightarrow \infty$), то он называется **определенным интегралом** от функции $f(x)$ в пределах от a до b , а функция $f(x)$ называется интегрируемой на отрезке $[a, b]$.

Эту формулу можно записать в виде

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{d \rightarrow 0} \sigma_n = \lim_{d \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \cdot \Delta x_k.$$

Числа a и b называются соответственно **нижним** и **верхним** пределами интегрирования, а функция $f(x)$, как и в случае неопределенного интеграла, называется **подынтегральной** функцией.

Отметим, что в отличие от неопределенного интеграла, представляющего собой множество функций, определенный интеграл — это вполне определенное число.

Геометрический смысл определенного интеграла. Как очевидно из рис. 13.1, интегральная сумма

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \cdot \Delta x_k$$

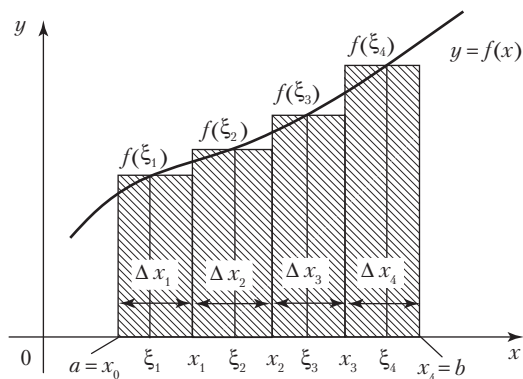


Рис. 13.1. Разбиение площади под кривой функции $y = f(x)$

численно равна площади заштрихованной ступенчатой фигуры.

При переходе к пределу при $d \rightarrow 0$ интегральная сумма σ_n по определению будет равна интегралу $\int_a^b f(x)dx$,

а ступенчатая линия, ограничивающая сверху заштрихованные прямоугольники, совпадет с графиком функции $y = f(x)$ на отрезке $[a, b]$.

Следовательно, **геометрический смысл** определенного интеграла $\int_a^b f(x)dx$ состоит в том, что он по абсолютной величине численно равен *площади* фигуры (криволинейной трапеции), ограниченной графиком функции $y = f(x)$, осью x и прямыми $x = a$ и $x = b$ (рис. 13.2).

Символ абсолютной величины здесь используется потому, что площадь фигуры является величиной положительной,

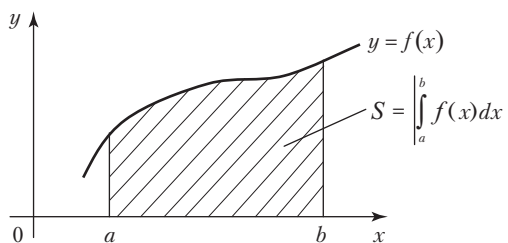


Рис. 13.2. Геометрический смысл определенного интеграла

а определенный интеграл может быть отрицательным числом, если, например, $f(x) < 0$ на отрезке $[a, b]$ или если при положительной $f(x)$ верхний предел интегрирования меньше нижнего.

Экономический смысл определенного интеграла состоит в том, что если подынтегральная функция является предельной величиной (т.е. производной) какого-либо экономического показателя, то определенный интеграл представляет собой соответствующую этому показателю суммарную величину.

Например, пусть известна производительность труда как функция времени $f(t)$. Из курса экономики известно, что производительность труда представляет собой предельный объем произведенной продукции (т.е. производную объема произведенной продукции по времени). Тогда объем V продукции, произведенной от момента времени t_1 до момента t_2 , равен определенному интегралу

$$V = \int_{t_1}^{t_2} f(t) dt.$$

Свойства определенного интеграла.

1. Определенный интеграл является числом, не зависящим от выбора обозначения переменной интегрирования, т.е.

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt = \int_a^b f(\xi) d\xi.$$

2. Если функция $f(x)$ определена в точке a , то

$$\int_a^a f(x) dx = 0.$$

3. Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b]$, то при замене пределов интегрирования меняется знак.

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx.$$

4. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на отрезке $[a, b]$, α и β — постоянные множители, то функция $\alpha f(x) \pm \beta g(x)$ тоже интегрируема на этом отрезке, причем

$$\int_a^b [\alpha f(x) \pm \beta g(x)] dx = \alpha \int_a^b f(x) dx \pm \beta \int_a^b g(x) dx.$$

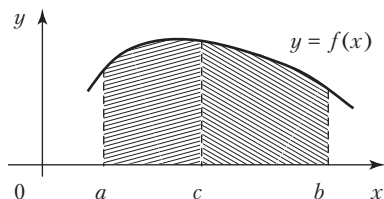


Рис. 13.3. Разбиение площади под кривой на две фигуры

5. Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезках $[a, c]$ и $[c, b]$, то она интегрируема и на отрезке $[a, b]$, причем

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Геометрически этот факт иллюстрируется рис. 13.3.

Можно утверждать обратное. Если функция интегрируема на отрезке $[a, b]$, то она интегрируема и на любой части этого отрезка.

6. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она интегрируема на этом отрезке, причем существует точка $c \in [a, b]$ такая, что справедливо равенство

$$\int_a^b f(x)dx = f(c) \cdot (b - a).$$

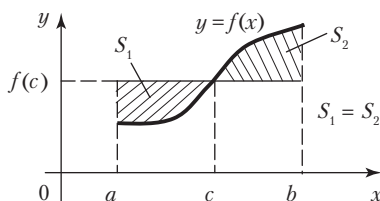


Рис. 13.4. Пояснение теоремы о среднем

Это свойство, иллюстрируемое рис. 13.4, часто называют теоремой о среднем значении или просто **теоремой о среднем**.

13.4. Формула Ньютона — Лейбница

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, следовательно, по свойству 6 она интегрируема на этом отрезке. Выберем произвольную точку $x \in [a, b]$. Тогда $f(x)$ также интегрируема на отрезке $[a, x]$ по свойству 5.

Рассмотрим функцию

$$F_1(x) = \int_a^x f(t)dt,$$

которая называется **интегралом с переменным верхним пределом**. Докажем, что функция $F_1(x)$ является первообразной для функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$.

Дадим переменной x приращение Δx так, что $x + \Delta x \in [a, b]$. Тогда приращение функции

$$\begin{aligned} F_1(x) &= F_1(x + \Delta x) - F_1(x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt = \\ &= \int_a^x f(t)dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt = \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt. \end{aligned}$$

Воспользуемся теоремой о среднем

$$\Delta F_1(x) = \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt = f(c) \cdot (x + \Delta x - x) = f(c) \cdot \Delta x,$$

$$c \in [x, x + \Delta x].$$

По определению производной

$$F_1'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta F_1(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(c) \cdot \Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(c) = f(x).$$

Таким образом, доказано, что функция $F_1(x)$ является первообразной для функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$.

Возьмем какую-либо другую первообразную $F(x)$ для $f(x)$. По теореме о первообразных функциях

$$F(x) = F_1(x) + C,$$

т.е. $F(x) = \int_a^x f(t)dt + C$ на отрезке $[a, b]$.

Рассмотрим значения $F(x)$ на концах отрезка $[a, b]$.

$$\begin{aligned} F(a) &= \int_a^a f(t)dt + C = C \Rightarrow C = F(a); \\ F(b) &= \int_a^b f(t)dt + C = \int_a^b f(t)dt + F(a). \end{aligned}$$

Отсюда

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a).$$

Перейдя по свойству 1 к переменной интегрирования x и вводя обозначение, называемое символом двойной подстановки, имеем

$$F(b) - F(a) = F(x) \Big|_a^b,$$

окончательно запишем **основную формулу** интегрального исчисления — **формулу Ньютона — Лейбница**:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Формула Ньютона — Лейбница позволяет вычислять определенный интеграл, если существует первообразная $F(x)$ подынтегральной функции $f(x)$.

Следует помнить, что эта формула была получена в предположении, что $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$. Поэтому если на этом отрезке есть точка разрыва подынтегральной функции, то формула Ньютона — Лейбница в общем случае неприменима.

Пример 13.22. Вычислить определенные интегралы.

$$1. \int_1^2 x^3 dx = \frac{x^4}{4} \Big|_1^2 = \frac{2^4}{4} - \frac{1^4}{4} = 4 - \frac{1}{4} = \frac{15}{4} = 3\frac{3}{4}.$$

$$2. \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} = \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} - \operatorname{tg} \frac{\pi}{6} = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{3 - \sqrt{3}}{3}.$$

$$3. \int_e^{e^2} \frac{dx}{x} = \ln x \Big|_e^{e^2} = \ln e^2 - \ln e = 2 - 1 = 1.$$

$$4. \int_0^1 (x^4 + 5x^2 - 1)dx = \left(\frac{x^5}{5} + 5 \cdot \frac{x^3}{3} - x \right) \Big|_0^1 = \left(\frac{1^5}{5} + 5 \cdot \frac{1^3}{3} - 1 \right) - 0 =$$

$$= \frac{1}{5} + \frac{5}{3} - 1 = \frac{13}{15}. \quad \blacktriangleright$$

13.5. Вычисление площадей плоских фигур и объемов тел вращения

Площади плоских фигур. Пусть функция $y = f(x)$ неотрицательна и непрерывна на отрезке $[a, b]$. Тогда по геометрическому смыслу определенного интеграла площадь S под кривой $y = f(x)$ на отрезке $[a, b]$ численно равна определенному интегралу

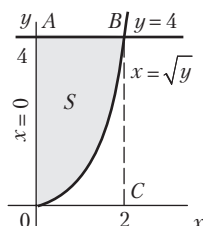
$$S = \int_a^b f(x) dx.$$

Заметим, что перед производством вычислений всегда строят качественный вид фигуры, площадь которой необходимо вычислить.

Пример 13.23. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $x = \sqrt{y}$, $x = 0$, $y = 4$.

Решение

Из чертежа очевидно, что искомая площадь S криволинейного треугольника OAB равна разности двух площадей:



$$S = S_{OABC} - S_{OBC'}$$

каждая из которых находится по геометрическому смыслу определенного интеграла.

Решая систему

$$\begin{cases} y = 4, \\ x = \sqrt{y}, \end{cases}$$

получаем, что точка B пересечения прямой $y = 4$ и кривой $x = \sqrt{y}$ имеет координаты $(2; 4)$.

Тогда

$$S_{OABC} = \int_0^2 4 dx = 4 \int_0^2 dx = 4x \Big|_0^2 = 8,$$

$$S_{OBC'} = \int_0^2 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_0^2 = \frac{8}{3}.$$

$$\text{Окончательно } S = 8 - \frac{8}{3} = \frac{16}{3} \text{ (ед.}^2\text{)}.$$

Отметим, что данная задача может быть также решена другим способом, если рассматривать площадь под кривой $x = \sqrt{y}$ до оси y .

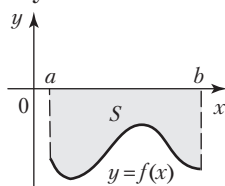
Тогда пределы интегрирования необходимо заменить на отрезок $[0; 4]$, на котором переменная y меняет свои значения:

$$S = \int_0^4 \sqrt{y} dy = \frac{2}{3} y^{3/2} \Big|_0^4 = \frac{2}{3} (4^{3/2} - 0^{3/2}) = \frac{16}{3} \text{ (ед.}^2\text{)}. \quad \blacktriangleright$$

Пусть функция $y = f(x)$ неположительная и непрерывна на отрезке $[a, b]$.

Тогда площадь под осью x вычисляется с учетом неположительности функции $y = f(x)$:

$$S = \int_a^b [-f(x) dx], \text{ т.е. } S = - \int_a^b f(x) dx.$$



Таким образом, если функция $y = f(x)$ неположительная на отрезке $[a, b]$, то площадь S над кривой $y = f(x)$ на отрезке $[a, b]$ отличается знаком определенного интеграла $\int_a^b f(x) dx$.

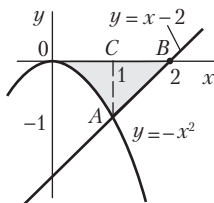
Пример 13.24. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = -x^2$, $y = x - 2$, $y = 0$.

Решение

Из рисунка очевидно, что искомая площадь S криволинейного треугольника OAB может рассматриваться как площадь над ломанной кривой OAB на отрезке $[0; 2]$. Однако указанная кривая не задается одним уравнением.

Поэтому для нахождения $S = S_{OAB}$ разобьем криволинейный треугольник OAB на части, проецируя точку излома A на ось абсцисс. Тогда $S = S_{OAC} + S_{ABC}$.

Абсцисса точки A легко определяется, как точка пересечения линий $y = -x^2$ и $y = x - 2$. Ее значение равно 1. Тогда можно записать



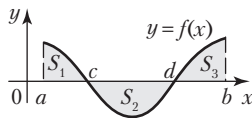
$$S_{OAC} = - \int_0^1 (-x^2) dx = \int_0^1 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{1}{3};$$

$$S_{ABC} = - \int_1^2 (x - 2) dx = \left(-\frac{x^2}{2} + 2x \right) \Big|_1^2 = \frac{1}{2}.$$

Окончательно $S = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6} \text{ (ед.}^2\text{)}. \quad \blacktriangleright$

Пусть на отрезке $[a, b]$ задана непрерывная функция $y = f(x)$ общего вида. Предположим также, что исходный отрезок можно разбить точками на конечное число интервалов так, что на каждом из них функция $y = f(x)$ будет знакопостоянна или равна нулю.

В этом случае площадь заштрихованной фигуры равна алгебраической сумме $S = S_1 + S_2 + S_3$ соответствующих определенных интегралов:



$$S = \int_a^c f(x)dx - \int_c^d f(x)dx + \int_d^b f(x)dx.$$

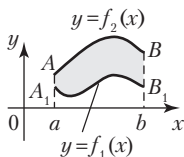
Рассмотрим **теорему**, применение которой часто упрощает решение задач на вычисление площадей плоских фигур.

Пусть на отрезке $[a, b]$ заданы непрерывные функции $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$ такие, что $f_2(x) \geq f_1(x)$. Тогда площадь S фигуры, заключенной между кривыми $y = f_2(x)$ и $y = f_1(x)$, на отрезке $[a, b]$ вычисляется по формуле

$$S = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)]dx. \quad (13.1)$$

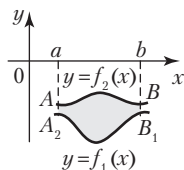
Проиллюстрируем теорему графически. Возможны несколько случаев расположения кривых на отрезке $[a, b]$.

1. $f_2(x) \geq f_1(x) \geq 0$.



$$S = S_{aABb} - S_{aA_1B_1b} = \int_a^b f_2(x)dx - \int_a^b f_1(x)dx.$$

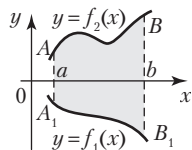
2. $0 \geq f_2(x) \geq f_1(x)$.



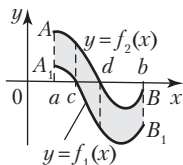
$$S = S_{aA_1B_1b} - S_{aABb} = -\int_a^b f_1(x)dx - \left(-\int_a^b f_2(x)dx \right).$$

3. $f_2(x) \geq 0, f_1(x) \leq 0$.

$$S = S_{aABb} + S_{aA_1B_1b} = \int_a^b f_2(x) dx + \left(- \int_a^b f_1(x) dx \right).$$



4. Общий случай сводится к частным случаям, рассмотренным выше, если разбить отрезок $[a, b]$ на отдельные отрезки $[a, c]$, $[c, d]$, $[d, b]$.

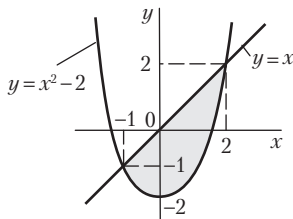


Пример 13.25. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 - 2, y = x$.

Решение

Найдем координаты точек пересечения параболы $y = x^2 - 2$ и прямой $y = x$. Решая систему из этих уравнений, получим точки $(-1; -1)$ и $(2; 2)$.

На интегрируемом отрезке $[-1; 2]$ выполняется $x \geq x^2 - 2$. Тогда по формуле (13.1) имеем

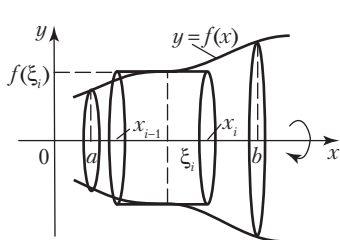


$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^2 [x - (x^2 - 2)] dx = \left. \frac{x^2}{2} \right|_{-1}^2 - \left. \frac{x^3}{3} \right|_{-1}^2 + 2x \Big|_{-1}^2 = \\ &= \frac{1}{2} [4 - (-1)^2] - \frac{1}{3} [2^3 - (-1)^3] + 2[2 - (-1)] = 4,5 \text{ (ед.}^2\text{)}. \end{aligned} \quad \blacktriangleright$$

Объемы тел вращения. Пусть на отрезке $[a, b]$ задана непрерывная знакопостоянная функция $y = f(x)$. Необходимо найти объем V_x тела, образованного при вращении вокруг оси абсцисс криволинейной трапеции, ограниченной линиями $y = f(x), y = 0, x = a, x = b$ (см. рисунок).

Для решения задачи применим тот же подход, который был использован выше для нахождения площади криволинейной трапеции.

Разобьем отрезок $[a, b]$ на элементарные отрезки точками: $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ и на каждом из отрезков разбиения $[x_{i-1}, x_i]$ выберем точку ξ_i , где $i = 1, 2, \dots, n$. Тогда приближение для искомого объема даст следующая сумма:



$$\sum_{i=1}^n \pi f^2(\xi_i) \Delta x_i,$$

i -е слагаемое которой — это объем цилиндра с высотой $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ и радиусом основания $f(\xi_i)$.

Очевидно, что приближение для искомого объема V_x будет тем лучше, чем меньше длина отрезков разбиения Δx_i , поэтому за искомый объем V_x естественно взять следующий предел:

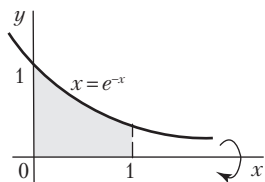
$$V_x = \lim_{\max_i \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \pi f^2(\xi_i) \Delta x_i,$$

где $\max_i \Delta x_i$ — максимальная из длин отрезков разбиения.

Но выражение, стоящее в правой части, не что иное, как предел интегральной суммы для функции $\varphi(x) = \pi f^2(x)$, поэтому окончательно запишем

$$V_x = \pi \int_a^b f^2(x) dx. \quad (13.2)$$

Пример 13.26. Вычислить объем тела, полученного от вращения фигуры, ограниченной линиями $y = e^{-x}$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 1$ вокруг оси Ox .



Решение

Построим данную фигуру.

По формуле (13.2) искомый объем

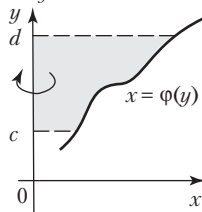
$$V_x = \pi \int_0^1 (e^{-x})^2 dx = \pi \left(-\frac{1}{2} e^{-2x} \right) \Big|_0^1 =$$

$$= \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{1}{e^2} \right) \approx 1,36 \text{ (ед.}^3 \text{)}.$$

►

Формально заменяя в формуле (13.2) переменную x на y , получаем формулу для вычисления объема V_y тела, полученного от вращения криволинейной трапеции вокруг оси ординат (см. рисунок):

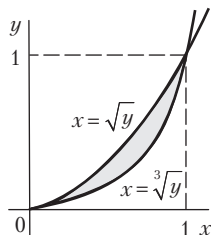
$$V_y = \pi \int_c^d \varphi^2(y) dy. \quad (13.3)$$



Пример 13.27. Найти объем тела, полученного от вращения вокруг оси ординат плоской фигуры, ограниченной линиями $y = x^2$, $y = x^3$.

Решение

Проецируя вращаемую фигуру на ось ординат, убеждаемся, что искомый V равен разности двух объемов: объема V_{y1} , полученного от вращения вокруг оси ординат фигуры, ограниченной линиями $x = \sqrt[3]{y}$, $x = 0$, $y = 1$, и объема V_{y2} , для которого вращаемая фигура ограничена линиями $x = \sqrt{y}$, $x = 0$, $y = 1$.



С учетом предстоящего применения формулы (13.3) уравнения кривых записаны в виде $x = p(y)$, предполагающем переменную y независимой.

Применяя формулу (13.3), получаем

$$V_{y1} = \pi \int_0^1 \left(\sqrt[3]{y} \right)^2 dy = \pi \int_0^1 y^{2/3} dy = \pi \frac{3y^{5/3}}{5} \Big|_0^1 = \frac{3}{5} \pi;$$

$$V_{y2} = \pi \int_0^1 \left(\sqrt{y} \right)^2 dy = \pi \int_0^1 y dy = \pi \frac{y^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{\pi}{2}.$$

Окончательно

$$V = V_{y1} - V_{y2} = \frac{3}{5} \pi - \frac{1}{2} \pi = 0,1 \pi \text{ (ед.}^3\text{)}.$$

Пример 13.28. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 4 - x^2$, $y = x^2 - 2x$.

Решение

Координаты точек пересечения кривых $y = 4 - x^2$ и $y = x^2 - 2x$ найдем из системы их уравнений: $(-1; 3)$ и $(2; 0)$.

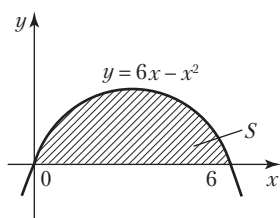
Проецируя фигуру на ось абсцисс, получаем, что интегрируемый отрезок составляет $[-1; 2]$. На этом на отрезке выполняется $f_2(x) = 4 - x^2 \geq f_1(x) = x^2 - 2x$.

Применяя формулу (13.1), получаем

$$\begin{aligned}
 S &= \int_{-1}^2 [4 - x^2 - (x^2 - 2x)] dx = \int_{-1}^2 (4 - 2x^2 + 2x) dx = 4x \Big|_{-1}^2 - \frac{2}{3} x^3 \Big|_{-1}^2 + x^2 \Big|_{-1}^2 = \\
 &= 4[2 - (-1)] - \frac{2}{3}[2^3 - (-1)^3] + 2^2 - (-1)^2 = 9 \text{ (ед.}^2\text{)}. \quad \blacktriangleright
 \end{aligned}$$

Пример 13.29. Вычислить площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y = 6x - x^2$ и осью Ox .

Решение

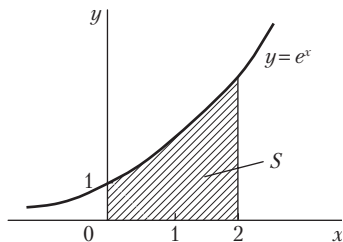


Графиком функции $y = 6x - x^2$ является квадратичная парабола, повернутая ветвями вниз. Абсциссы точек пересечения графика с осью x находятся из решения уравнения $6x - x^2 = 0$, т.е. $x_1 = 0$; $x_2 = 6$. Следовательно, фигура, площадь которой нужно найти, имеет вид, изображенный на рисунке.

Из геометрического смысла определенного интеграла очевидно, что площадь равна

$$\begin{aligned}
 S &= \int_0^6 (6x - x^2) dx = \left(3x^2 - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^6 = \left(3 \cdot 6^2 - \frac{6^3}{3} \right) - 0 = \\
 &= 108 - 72 = 36 \text{ (ед.}^2\text{)}. \quad \blacktriangleright
 \end{aligned}$$

Пример 13.30. Вычислить площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции $y = e^x$, осью x , осью y и прямой $x = 2$.



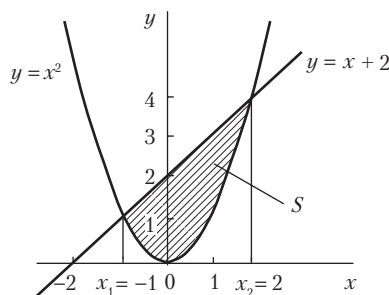
Решение

Из рисунка следует, что

$$\begin{aligned}
 S &= \int_0^2 e^x dx = e^x \Big|_0^2 = \\
 &= e^2 - e^0 = e^2 - 1 \text{ (ед.}^2\text{)}. \quad \blacktriangleright
 \end{aligned}$$

Пример 13.34. Вычислить площадь фигуры, ограниченной графиками функций $y = x^2$ и $y = x + 2$.

Решение



Из рисунка очевидно, что искомая заштрихованная площадь S равна разности площадей двух криволинейных трапеций, ограниченных с боков линиями $x = x_1$ и $x = x_2$. Значения x_1 и x_2 представляют собой абсциссы точек пересечения графиков, которые находим, решая уравнение:

$$x^2 = x + 2; \quad x^2 - x - 2 = 0;$$

$$D = 9; \quad \sqrt{D} = 3; \quad x_1 = \frac{1-3}{2} = -1; \quad x_2 = \frac{1+3}{2} = 2.$$

Искомая площадь S равна

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^2 (x+2)dx - \int_{-1}^2 x^2 dx = \int_{-1}^2 (x+2-x^2)dx = \left(\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-1}^2 = \\ &= \left(\frac{2^2}{2} + 2 \cdot 2 - \frac{2^3}{3} \right) - \left[\frac{(-1)^2}{2} + 2 \cdot (-1) - \frac{(-1)^3}{3} \right] = \\ &= 2 + 4 - \frac{8}{3} - \frac{1}{2} + 2 - \frac{1}{3} = \frac{9}{2} \text{ (ед.}^2\text{)}. \end{aligned} \quad \blacktriangleright$$

13.6. Методы вычисления определенного интеграла

Необходимо заметить, что вычисление определенного интеграла производится в два этапа.

На первом этапе вычисляется первообразная, а затем (на втором этапе) в нее подставляются пределы интегрирования по формуле Ньютона — Лейбница.

Методы вычисления первообразной определенного интеграла совершенно аналогичны неопределенному интегрированию.

Однако при использовании методов замены переменной и интегрирования по частям в определенном интеграле имеются свои **особенности**.

Действительно, если необходимо вычислить

$$\int_a^b f(x)dx,$$

в котором $f(x)dx$ можно представить в виде

$$f(x)dx = \varphi[u(x)] \cdot u'(x)dx = \varphi[u(x)]d[u(x)],$$

то используется замена переменной $t = u(x)$.

При этом

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} \varphi(t)dt = \Phi(t) \Big|_{\alpha}^{\beta},$$

где $\alpha = u(a)$; $\beta = u(b)$.

Также аналогично вычислению неопределенного интеграла, используя формулу Ньютона — Лейбница, можно получить следующую формулу интегрирования по частям

$$\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du.$$

Пример 13.32.

$$\int_1^e \frac{\ln^2 x}{x} dx = \int_0^1 t^2 dt = \frac{t^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}.$$

$$\begin{aligned} t &= \ln x; \\ dt &= \frac{1}{x} dx = \frac{dx}{x}; \\ \alpha &= \ln 1 = 0; \\ \beta &= \ln e = 1. \end{aligned}$$

Пример 13.33.

$$\begin{aligned} \int_0^4 \frac{x dx}{\sqrt{2x+1}} &= \int_1^3 \frac{t^2-1}{2t} t dt = \\ &= \frac{1}{2} \int_1^3 (t^2-1) dt = \frac{1}{2} \left(\frac{t^3}{3} - t \right) \Big|_1^3 = \\ &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{3^3}{3} - 3 \right) - \left(\frac{1^3}{3} - 1 \right) \right] = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} t &= \sqrt{2x+1}; \\ t^2 &= 2x+1; \\ x &= \frac{t^2-1}{2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} dx &= t dt; \\ 2t dt &= 2 dx; \\ \alpha &= \sqrt{2 \cdot 0 + 1} = 1; \\ \beta &= \sqrt{2 \cdot 4 + 1} = 3. \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} \left[6 - \left(-\frac{2}{3} \right) \right] = \frac{10}{3}. \quad \blacktriangleright$$

Пример 13.34.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx = (-x \cos x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\cos x) dx =$$

$$\begin{aligned} u &= x; \\ dv &= \sin x \, dx; \\ du &= dx; \\ v &= -\cos x. \end{aligned}$$

$$= \left(-\frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{2} \right) - (0 \cdot \cos 0) + \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin \frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1. \quad \blacktriangleright$$

13.7. Несобственные интегралы

Пусть функция $y = f(x)$ определена и интегрируема на любом отрезке $[a, t]$, $t > a$. Тогда **несобственным интегралом с бесконечным верхним пределом** называется предел

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_a^t f(x) dx.$$

Если этот предел существует и конечен, то указанный несобственный интеграл называется **сходящимся** и равен этому пределу.

Если предел не существует или бесконечен, то несобственный интеграл называется **расходящимся** и его вычисление невозможно.

Аналогично вводится понятие **несобственного интеграла с бесконечным нижним пределом**:

$$\int_{-\infty}^a f(x) dx = \lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^a f(x) dx.$$

Несобственный интеграл с бесконечными пределами

$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ можно представить как сумму

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^a f(x)dx + \int_a^{+\infty} f(x)dx.$$

Если оба интеграла в правой части этого равенства являются сходящимися, то и интеграл в левой части сходящийся и равен сумме этих интегралов. Если хотя бы один из интегралов в правой части расходится, то и результирующий интеграл тоже расходится.

Введем понятие **несобственного интеграла с конечными пределами**, при приближении к которым функция стремится к бесконечности.

Рассмотрим функцию, неограниченную на отрезке интегрирования.

Пусть $\lim_{x \rightarrow b-0} f(x) = \infty$, как показано на рис. 13.5.

Тогда несобственный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ определяется как

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\delta \rightarrow +0} \int_a^{b-\delta} f(x)dx,$$

где δ — бесконечно малая величина.

Если предел существует и конечен, то несобственный интеграл сходящийся и он равен этому пределу. Если предел не существует или бесконечен, то несобственный интеграл расходящийся.

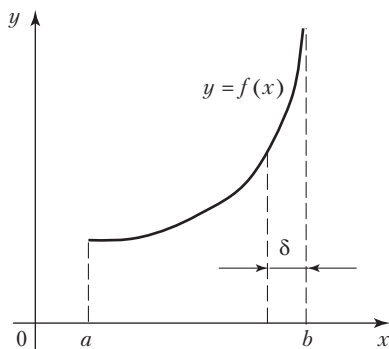


Рис. 13.5. К вычислению несобственного интеграла

Аналогично вводится несобственный интеграл, если $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \infty$:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\delta \rightarrow +0} \int_{a+\delta}^b f(x) dx.$$

Пример 13.35.

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_1^t \frac{dx}{x^2} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{x} \right) \Big|_1^t = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{t} + 1 \right) = 1. \quad \blacktriangleright$$

Пример 13.36.

$$\int_{-\infty}^2 e^x dx = \lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^2 e^x dx = \lim_{t \rightarrow -\infty} \left(e^x \right) \Big|_t^2 = \lim_{t \rightarrow -\infty} (e^2 - e^t) = e^2. \quad \blacktriangleright$$

Пример 13.37.

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} &= \int_{-\infty}^1 \frac{dx}{1+x^2} + \int_1^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{t \rightarrow -\infty} (\arctg x) \Big|_t^1 + \lim_{t \rightarrow +\infty} (\arctg x) \Big|_1^t = \\ &= \lim_{t \rightarrow -\infty} (\arctg 1 - \arctg t) + \lim_{t \rightarrow +\infty} (\arctg t - \arctg 1) = \frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{2} \right) + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \pi. \quad \blacktriangleright \end{aligned}$$

Пример 13.38.

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} &= \lim_{\delta \rightarrow +0} \int_{0+\delta}^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\delta \rightarrow +0} \int_{\delta}^1 x^{-\frac{1}{2}} dx = \lim_{\delta \rightarrow +0} \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} \Big|_{\delta}^1 = \lim_{\delta \rightarrow +0} (2\sqrt{x}) \Big|_{\delta}^1 = \\ &= \lim_{\delta \rightarrow +0} (2\sqrt{1} - 2\sqrt{\delta}) = 2. \quad \blacktriangleright \end{aligned}$$

13.8. Вычисление двойных интегралов

Пусть функция $f(x, y)$ непрерывна внутри ограниченной области S (рис. 13.6). Разобьем область S прямыми линиями, параллельными осям координат, на элементарные площади.

Произведение $dx \cdot dy$ образует элементарную площадь dS . При неограниченном возрастании числа элементарных площадей сумма произведений значения функции $f(x, y)$ в какой-либо точке, принадлежащей этой площади, на величину элементарной площади стремится

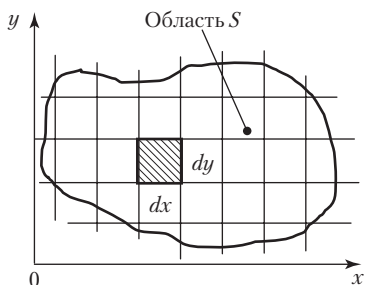


Рис. 13.6. Разбиение области S на элементарные площади

к некоторому пределу, который называется **двойным интегралом** от функции $f(x, y)$ по области S

$$\iint_{(S)} f(x, y) dx dy.$$

Пусть функция $f(x, y)$ принимает в области S только положительные значения. Тогда двойной интеграл численно равен объему цилиндрической фигуры (рис. 13.7), построенной на основании S и ограниченной сверху частью поверхности $z = f(x, y)$. В этом заключается **геометрический смысл** двойного интеграла.

Основные свойства двойного интеграла.

1. Если область S разбить на две части S_1 и S_2 , то

$$\iint_{(S)} f(x, y) dx dy = \iint_{(S_1)} f(x, y) dx dy + \iint_{(S_2)} f(x, y) dx dy.$$

2. Двойной интеграл алгебраической суммы нескольких функций равен алгебраической сумме двойных интегралов

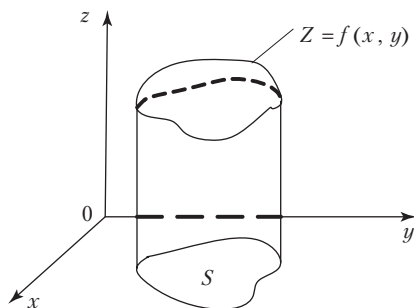


Рис. 13.7. Геометрический смысл двойного интеграла

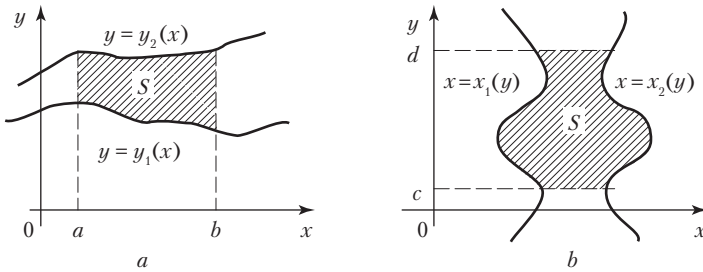


Рис. 13.8. К вычислению двойного интеграла

$$\iint_{(S)} [f(x, y) \pm g(x, y)] dx dy = \iint_{(S)} f(x, y) dx dy \pm \iint_{(S)} g(x, y) dx dy.$$

3. Постоянный множитель α можно вынести за знак двойного интеграла

$$\iint_{(S)} \alpha f(x, y) dx dy = \alpha \iint_{(S)} f(x, y) dx dy.$$

Вычисление двойного интеграла имеет свои **особенности**:

а) если область S представляет собой криволинейную трапецию с основаниями, параллельными оси y , то область S задается неравенствами (рис. 13.8, а)

$$a \leq x \leq b, \quad y_1(x) \leq y \leq y_2(x).$$

В этом случае двойной интеграл вычисляется по формуле

$$\iint_{(S)} f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy; \quad (13.4)$$

б) если область S представляет собой криволинейную трапецию с основаниями, параллельными оси x , имеем аналогично (рис. 13.8, б)

$$\iint_{(S)} f(x, y) dx dy = \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y) dx; \quad (13.5)$$

в) значение площади S вычисляется по формулам (13.4), (13.5), в которых необходимо принять $f(x, y) = 1$.

Пример 13.39. Вычислить двойной интеграл $\int_1^2 \int_3^4 \frac{dx dy}{(x+y)^2}$.

Решение

Область интегрирования определяется неравенствами

$$3 \leq x \leq 4; \quad 1 \leq y \leq 2$$

и представляет прямоугольник со сторонами, параллельными осям Ox , Oy .

Сначала вычисляем определенный интеграл $\int_3^4 \frac{dx}{(x+y)^2}$. При интегрировании y рассматривается как постоянная величина.

$$\int_3^4 \frac{dx}{(x+y)^2} = \frac{1}{y+3} - \frac{1}{y+4}.$$

Теперь вычисляем второй интеграл

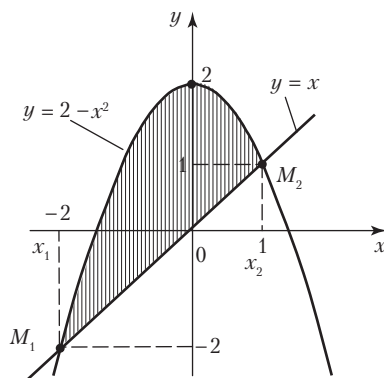
$$\int_1^2 \int_3^4 \frac{dx dy}{(x+y)^2} = \int_1^2 \left(\frac{1}{y+3} - \frac{1}{y+4} \right) dy = \ln \frac{25}{24}.$$

Пример 13.40.

$$\int_{12}^{35} (5x^2y - 2y^3) dx dy = \int_1^3 dy \int_2^5 (5x^2y - 2y^3) dx = \int_1^3 (195y - 6y^3) dy = 660. \quad \blacktriangleright$$

Пример 13.41. Вычислить площадь области, ограниченной кривыми $y = 2 - x^2$, $y = x$.

Определим точки пересечения данных кривых. В точке пересечения ординаты равны, т.е. $x = 2 - x^2$, откуда $x^2 + x = 2$, $x_1 = -2$, $x_2 = 1$. Получили две точки пересечения $M_1(-2; -2)$, $M_2(1; 1)$.



Следовательно, искомая площадь

$$S = \int_{-2}^1 \left(\int_x^{2-x^2} dy \right) dx = \int_{-2}^1 (2 - x^2 - x) dx = \left(2x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_{-2}^1 = \frac{9}{2}. \quad \blacktriangleright$$

Пример 13.42. Вычислить объем фигуры, ограниченной поверхностями $x = 0$, $y = 0$, $x + y + z = 1$, $z = 0$.

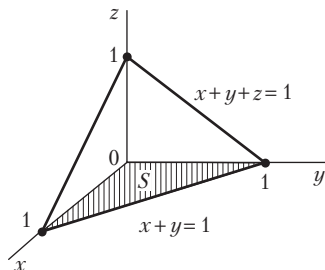
Решение

$$V = \iint_{(S)} (1 - x - y) dx dy,$$

где S — заштрихованный треугольник на плоскости xy , ограниченный прямыми $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 1$.

Расставляя пределы в двойном интеграле, вычислим объем

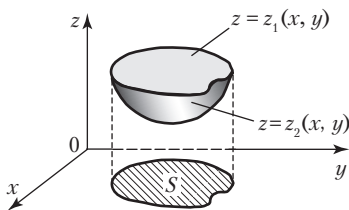
$$\begin{aligned} V &= \int_0^1 \int_0^{1-x} (1 - x - y) dx dy = \\ &= \int_0^1 \left[(1-x)y - \frac{y^2}{2} \right] \Big|_0^{1-x} dx = \int_0^1 \frac{1}{2} (1-x)^2 dx = \frac{1}{6} \text{ (ед.}^3\text{)}. \quad \blacktriangleright \end{aligned}$$



Для производства вычислений объема сделаем несколько **замечаний**.

Замечание 1. Если тело, объем которого ищется, ограничено сверху поверхностью $z = z_2(x, y) \geq 0$, а снизу — поверхностью $z = z_1(x, y) \geq 0$, причем проекцией обеих поверхностей на плоскость xy является область S , то объем V этого тела равен разности объемов двух «цилиндрических» тел.

Первое из этих цилиндрических тел имеет нижним основанием область S , а верхним — поверхность $z = z_2(x, y)$; второе тело имеет нижним основанием также область S , а верхним — поверхность $z = z_1(x, y)$.



Поэтому объем V равен разности двух двойных интегралов

$$V = \iint_{(S)} z_2(x, y) dS - \iint_{(S)} z_1(x, y) dS$$

или

$$V = \iint_{(S)} [z_2(x, y) - z_1(x, y)] dS.$$

Можно доказать, что последняя формула верна не только в том случае, когда $z_1(x, y)$ и $z_2(x, y)$ неотрицательны, но и тогда, когда $z_1(x, y)$ и $z_2(x, y)$ — любые непрерывные функции, удовлетворяющие соотношению

$$z_2(x, y) \geq z_1(x, y).$$

Замечание 2. Если в области S функция $f(x, y)$ меняет знак, то разбиваем область на две части: 1) область S_1 , где $f(x, y) \geq 0$; 2) область S_2 , где $f(x, y) \leq 0$.

Предположим, что области S_1 и S_2 таковы, что двойные интегралы по этим областям существуют. Тогда интеграл по области S_1 будет положителен и равен объему тела, лежащего выше плоскости xy .

Интеграл по области S_2 будет отрицателен и по абсолютной величине равен объему тела, лежащего ниже плоскости xy . Следовательно, интеграл по области S_2 будет выражать разность соответствующих объемов.

Вопросы для самоконтроля

1. Какая функция называется первообразной для данной функции?
2. Сформулируйте и докажите теорему о первообразных функциях.
3. Что называется неопределенным интегралом?
4. Как можно записать выражение для неопределенного интеграла, если известна какая-либо первообразная для подынтегральной функции?
5. Сформулируйте основные свойства неопределенного интеграла.
6. Запишите таблицу неопределенных интегралов от основных элементарных функций.
7. Всякий ли неопределенный интеграл можно выразить через элементарные функции?
8. Что нужно выполнить для непосредственного нахождения неопределенного интеграла, не относящегося к категории табличных?
9. Изложите сущность метода замены переменной.
10. Как осуществить замену переменной при наличии в знаменателе подынтегральной функции квадратного трехчлена под знаком квадратного корня или без корня?
11. Как поступить при интегрировании алгебраической дроби, если показатель степени переменной интегрирования в числителе выше, чем в знаменателе?

12. Какую подстановку целесообразно провести, если подынтегральная функция содержит корни различной степени из переменной интегрирования?

13. Какая подстановка часто приводит к успеху при интегрировании тригонометрических выражений?

14. Напишите формулу интегрирования по частям. В каких случаях она применяется?

15. Какую функцию следует принимать за $u(x)$ при интегрировании по частям?

16. Что называется определенным интегралом?

17. Изложите геометрический и экономический смысл определенного интеграла.

18. Сформулируйте основные свойства определенного интеграла.

19. Запишите формулу Ньютона — Лейбница. В каких случаях она применяется?

20. Как выполняется замена переменной в определенном интеграле?

21. Как выполняется интегрирование по частям в определенном интеграле?

22. Как вычисляются площади плоских фигур и объемы фигур вращения с использованием определенного интеграла?

23. Как определяется и как вычисляется несобственный интеграл с одним и двумя бесконечными пределами?

24. Как определяется и как вычисляется несобственный интеграл от неограниченных на отрезке интегрирования функций?

25. Что называется двойным интегралом?

26. В чем заключается геометрический смысл двойного интеграла?

27. Изложите основные свойства двойного интеграла.

28. Как вычисляется двойной интеграл?

Задачи для самостоятельного решения

Найти неопределенные интегралы.

$$13.1. \int \left(\sqrt[3]{x} + \frac{1}{x^3} \right) dx.$$

$$13.2. \int \frac{(1-x)^3}{x\sqrt[3]{x}} dx.$$

$$13.3. \int \frac{3 + \sqrt{4-x^2}}{\sqrt{4-x^2}} dx.$$

$$13.4. \int \frac{dx}{3x^2 - 25}.$$

$$13.5. \int \frac{\sin x}{\cos x + 1} dx.$$

$$13.6. \int \frac{x dx}{\sqrt{1-x}}.$$

$$13.7. \int \frac{\ln^5 x}{x} dx.$$

$$13.8. \int \frac{dx}{x^2 - 10x + 29}.$$

$$13.9. \int \frac{(x+6)}{x^2 - 2x + 17} dx.$$

$$13.10. \int \sin^5 x dx.$$

$$13.11. \int \frac{x^2 + 1}{x + 2} dx.$$

$$13.12. \int \frac{1 + \sqrt[4]{x}}{x + \sqrt{x}} dx.$$

$$13.13. \int \frac{2x^4 + 5x^3 + 4x^2 + 5x + 3}{2x^2 + 3x + 1} dx.$$

$$13.14. \int \frac{dx}{\sin x + \cos x}.$$

$$13.15. \int (3x + 2) \cdot \cos 5x dx.$$

$$13.16. \int \ln^2 x dx.$$

$$13.17. \int x^2 \ln x dx.$$

$$13.18. \int x^2 \sin x dx.$$

$$13.19. \int x \cdot e^{3x} dx.$$

$$13.20. \int \frac{x dx}{\sin^2 x}.$$

Вычислить определенные интегралы.

$$13.21. \int_1^2 \left(x^2 + \frac{1}{x^4} \right) dx.$$

$$13.22. \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}.$$

$$13.23. \int_0^8 (\sqrt{2x} + \sqrt[3]{x}) dx.$$

$$13.24. \int_1^5 \frac{x dx}{1+x^2}.$$

$$13.25. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x dx.$$

$$13.26. \int_0^5 \frac{x dx}{\sqrt{1+3x}}.$$

$$13.27. \int_2^5 \frac{dx}{2x-3}.$$

$$13.28. \int_1^e \frac{1+\ln x}{x} dx.$$

$$13.29. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{3+2\cos x}.$$

$$13.30. \int_1^2 x^2 \ln x dx.$$

$$13.31. \int_0^{e-1} \ln(x+1) dx.$$

$$13.32. \int_0^1 x e^{-x} dx.$$

$$13.33. \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{x dx}{\cos^2 x}.$$

13.34. Вычислить площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y = -2 + 3x - x^2$ и осью x .

13.35. Вычислить площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y = x^2 + 6x + 5$, осью x и осью y .

13.36. Вычислить площадь фигуры, ограниченной графиками функций $y = -x^2 + 2$ и $x + y = 0$.

13.37. Вычислить площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y = \sin x$, осью x и прямыми $x = -\frac{7\pi}{6}$ и $x = \frac{\pi}{4}$.

13.38. Вычислить площадь фигуры, ограниченной графиками функций $y = x^2 + 4x$ и $y = x + 4$.

13.39. Вычислить площадь фигуры, ограниченной графиками функций $y = -x^2$, $y = x - 2$ и осью x .

13.40. Вычислить двойной интеграл $\iint_S \frac{dx dy}{x}$, где область S ограничена линиями $y = \ln x$, $y = -\frac{x}{e} + 2$ и $y = 0$.

13.41. Вычислить двойной интеграл $\iint_S (x - y) dx dy$, если область S ограничена линиями $y = 0$, $y = x^2$ и $x = 2$.

13.42. Вычислить двойной интеграл $\iint_S (3x^2 - 2xy + y) dx dy$, если область интегрирования S ограничена линиями $x = 0$, $x = y^2$ и $y = 2$.

13.43. Вычислить двойной интеграл $\iint_S y \ln x dx dy$, если область интегрирования S ограничена линиями $xy = 1$, $y = \sqrt{x}$ и $x = 2$.

13.44. Вычислить двойной интеграл $\iint_S (x + y) dx dy$ по области S , ограниченной линиями $y = x$ и $y = x^2$.

Глава 14

ЧИСЛОВЫЕ И СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ

14.1. Понятие числового ряда. Сходимость ряда

Рассмотрим числовую последовательность $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ и образуем из членов этой последовательности сложением бесконечную сумму в виде

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Эта сумма называется **числовым рядом**. Член a_n называется **общим членом ряда**.

Сумма n первых членов числового ряда называется **n -й частичной суммой ряда** и обозначается S_n :

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n.$$

Различают ряды двух видов: сходящиеся и расходящиеся.

Числовой ряд называется **сходящимся**, если последовательность его частичных сумм $\{S_n\}$ имеет предел, равный некоторому числу S при $n \rightarrow \infty$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S.$$

В этом случае обычно говорят, что ряд *сходится*, а число S называется **суммой ряда**

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S.$$

Если последовательность $\{S_n\}$ предела не имеет или имеет бесконечный предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty,$$

то числовой ряд называется **расходящимся**.

Пример 14.1. Рассмотрим числовой ряд, составленный из членов *геометрической прогрессии* (геометрический ряд). Запишем

$$a_1 = a; a_2 = aq; a_3 = aq^2; \dots a_n = aq^{n-1}; \dots$$

Тогда сумма ряда

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} a_n &= a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots = \\ &= a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}. \end{aligned}$$

Запишем выражение для S_n :

$$S_n = a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1}.$$

Умножим это равенство на знаменатель геометрической прогрессии q

$$qS_n = aq + aq^2 + aq^3 + \dots + aq^n.$$

Вычтем из этого равенства предыдущее и получим

$$qS_n - S_n = aq^n - a \quad \text{или} \quad S_n = a \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

В зависимости от величины q могут быть четыре случая. Здесь и далее будем считать, что $a \neq 0$:

1) $|q| < 1$. Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0.$$

Вычислим

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a \frac{q^n - 1}{q - 1} = \frac{a}{q - 1} \lim_{n \rightarrow \infty} (q^n - 1) = -\frac{a}{q - 1} = \frac{a}{1 - q}.$$

Ряд по определению сходится;

2) $|q| > 1$. Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = \infty.$$

Аналогично

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty.$$

Ряд по определению расходится.

3) $q = 1$. Тогда в соответствии с формулой общего члена геометрического ряда $a_n = a$. Поэтому

$$S_n = na; \quad S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty.$$

Ряд по определению также расходится.

4) $q = -1$. Тогда

$$S_n = \begin{cases} a & \text{при нечетном } n, \\ 0 & \text{при четном } n. \end{cases}$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ не существует. Ряд расходится.

Итак, показано, что при $|q| < 1$ геометрический ряд *сходится*, а при $|q| \geq 1$ — *расходится*. ►

Пример 14.2. Найти сумму числового ряда

$$2 + \frac{2}{5^2} + \frac{2}{5^4} + \frac{2}{5^6} + \dots$$

Решение

Это геометрический ряд, в котором $a = 2$; $q = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25}$. Так как $|q| < 1$, то ряд сходится и его сумма равна

$$S = \frac{a}{1-q} = \frac{2}{1-\frac{1}{25}} = \frac{2}{\frac{24}{25}} = \frac{25}{12}. \quad \blacktriangleright$$

Пример 14.3. Найти сумму числового ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)} = \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{4 \cdot 6} + \dots$$

Решение

Для решения представим общий член a_n в виде разности двух дробей

$$a_n = \frac{1}{n(n+2)} = \frac{A}{n} - \frac{B}{n+2} = \frac{An+2A-Bn}{n(n+2)} = \frac{(A-B)n+2A}{n(n+2)}.$$

Сравнивая полученные дроби, запишем $A - B = 0$ и $2A = 1$. То есть $A = B = \frac{1}{2}$. Тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+4} \right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{6} - \frac{1}{10} + \frac{1}{8} - \frac{1}{12} + \dots$$

Ясно, что при суммировании все члены ряда, кроме $\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{4}$, встречаются один раз со знаком плюс, а другой раз — со знаком минус и таким образом взаимно уничтожаются. Поэтому сумма ряда равна

$$S = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$$



Дадим еще несколько **определений**.

1. Если в числовом ряде $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ отбросить *первые n членов*, то получится ряд

$$r_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+k} + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} a_{n+k},$$

который называется **n -м остатком** исходного ряда.

2. **Произведением** числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **на число c** называется ряд

$$ca_1 + ca_2 + \dots + ca_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} ca_n.$$

3. **Алгебраической суммой** ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ называется числовой ряд

$$(a_1 \pm b_1) + (a_2 \pm b_2) + \dots + (a_n \pm b_n) + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n).$$

Запишем **основные свойства** сходящихся рядов.

1. Ряд и любой его n -й остаток r_n либо одновременно сходятся, либо одновременно расходятся.

2. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится и сумма его равна S , то и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n$ тоже сходится и сумма его равна cS .

3. Если ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходятся и их суммы равны соответственно S и R , то и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n)$ тоже сходится и сумма его равна $S \pm R$.

Таким образом, сходящиеся ряды можно умножать на числа, складывать и вычитать так же, как это делается с конечными суммами.

Для определения *сходимости ряда* нужно проверить необходимое и достаточное условия сходимости.

Необходимое условие сходимости ряда записывается в виде равенства

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

Это условие является необходимым условием сходимости ряда, но не является достаточным. То есть если выполняется необходимое условие, то это еще не значит, что ряд сходится. Он может и расходиться.

Заметим, что из необходимого условия сходимости ряда следует **достаточное условие** его **расходимости**. Если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0,$$

то ряд расходится.

Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$$

В нем общий член $a_n = \frac{1}{n}$. Такой ряд называется **гармоническим рядом**. Хотя необходимое условие сходимости для гармонического ряда выполняется

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0,$$

тем не менее, **гармонический ряд расходится**.

Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} = 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \dots + \frac{1}{n^\alpha} + \dots$$

называется **обобщенным гармоническим рядом**. Можно доказать, что при $\alpha > 1$ обобщенный гармонический ряд сходится, а при $\alpha \leq 1$ — расходится.

Пример 14.4. Проверить, выполняется ли необходимое условие, и сделать вывод о сходимости числового ряда

$$\frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{5}{6} + \frac{7}{8} + \dots$$

Решение

Общий член этого числового ряда можно выразить формулой

$$a_n = \frac{2n-1}{2n}, \text{ т.е. это ряд } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2n}.$$

Тогда $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-1}{2n} = 1$.

Необходимое условие сходимости ряда не выполняется. Ряд расходится. ►

Пример 14.5. Проверить, выполняется ли необходимое условие, и сделать вывод о сходимости числового ряда.

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \dots$$

Решение

Легко увидеть, что

$$a_n = \frac{1}{2n-1} \text{ и } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n-1} = 0.$$

Необходимое условие сходимости ряда выполняется. Следовательно, ряд может сходиться, а может расходиться. ►

14.2. Признаки сходимости рядов с положительными членами

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, у которого при любом n все значения членов $a_n > 0$, называется **положительным рядом** или рядом с положительными членами.

Если при любом n имеет место $a_n \geq 0$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ называется **неотрицательным рядом** или рядом с неотрицательными членами.

Очень часто можно установить, сходится ли данный ряд с положительными членами на основании его сравнения с другим рядом, заведомо сходящимся или расходящимся, который называется **эталонным рядом**.

В качестве эталонного ряда чаще всего используют:

— геометрический ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1},$$

который сходится при $|q| < 1$ и расходится при $|q| \geq 1$;

— обобщенный гармонический ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}},$$

который сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \leq 1$.

Рассмотрим наиболее часто используемые *признаки сходимости рядов с положительными членами*, которые являются **достаточными условиями сходимости**.

Признак сравнения. Пусть $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ — ряды с положительными членами и при любом n выполняется неравенство

$$a_n \leq b_n.$$

Тогда если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится, то и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.

Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится, то и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ расходится.

Пример 14.6. Исследовать сходимость числового ряда

$$1 + \frac{1}{2 \cdot 5} + \frac{1}{3 \cdot 5^2} + \frac{1}{4 \cdot 5^3} + \dots$$

Решение

Общий член этого ряда можно записать следующим образом:

$$a_n = \frac{1}{n \cdot 5^{n-1}}.$$

То есть исследуемый ряд — это ряд вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 5^{n-1}}.$$

Необходимое условие сходимости

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n \cdot 5^{n-1}} = 0$$

выполняется. Переходим к проверке достаточного условия. Для этого проведем сравнения исследуемого ряда с каким-нибудь эталонным рядом или с рядом, который сходится.

В качестве эталонного ряда возьмем ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^{n-1}}.$$

Это геометрический ряд, у которого $a = 1$ и $q = \frac{1}{5}$. Так как $|q| < 1$, то эталонный ряд сходится. При этом очевидно, что для каждого n выполняется неравенство

$$\frac{1}{n \cdot 5^{n-1}} \leq \frac{1}{5^{n-1}},$$

поскольку знаменатель первой дроби не меньше, чем знаменатель второй. То есть для любого n выполнено условие $a_n \leq b_n$. Отсюда по признаку сравнения следует, что и исследуемый ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 5^{n-1}}$$

сходится. ►

Пример 14.7. Исследовать сходимость числового ряда

$$\frac{1}{0,5} + \frac{1}{1,5} + \frac{1}{2,5} + \frac{1}{3,5} \dots$$

Решение

Выпишем формулу общего члена

$$a_n = \frac{1}{n - 0,5}.$$

Тогда исследованию подлежит ряд, записанный в общем виде,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n - 0,5}.$$

Проверим необходимое условие сходимости. Имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n - 0,5} = 0.$$

Условие выполнено.

Для сравнения в качестве эталонного ряда выберем ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

Это гармонический ряд, который расходится. При этом очевидно, что для каждого n выполняется неравенство

$$\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n - 0,5},$$

поскольку знаменатель первой дроби больше, чем знаменатель второй. То есть для любого n выполняется условие $a_n \geq b_n$. Отсюда по признаку сравнения следует, что и исследуемый ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n-0,5}$$

расходится. ►

Предельный признак сравнения. Пусть $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ — ряды с положительными членами и существует конечный, не равный нулю, предел отношения их общих членов, т.е.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = k \neq 0.$$

Тогда эти ряды либо одновременно сходятся, либо одновременно расходятся.

Пример 14.8. Исследовать сходимость числового ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{5n^2+2}.$$

Решение

Обозначим этот ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, тогда его общий член равен

$$a_n = \frac{n+1}{5n^2+2}.$$

Необходимое условие

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{5n^2+2} = 0$$

выполнено.

Для проверки достаточного условия в качестве эталонного возьмем гармонический ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

с общим членом $b_n = \frac{1}{n}$, который, как известно, расходится. Найдем предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n+1}{5n^2+2}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1) \cdot n}{(5n^2+2) \cdot 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+n}{5n^2+2} = \frac{1}{5} \neq 0.$$

Отсюда по предельному признаку сравнения следует, что оба ряда либо одновременно сходятся, либо одновременно

расходятся. Но так как выбранный в примере эталонный гармонический ряд расходится, то и исследуемый ряд расходится. ►

Пример 14.9. Исследовать сходимость числового ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}.$$

Решение

Общий член ряда равен

$$a_n = \frac{1}{n(n+2)}.$$

Формула общего члена показывает, что в качестве эталонного целесообразно взять обобщенный гармонический ряд со значением $\alpha = 2$. То есть

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

с общим членом $b_n = \frac{1}{n^2}$. Найдем предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n(n+2)}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot n^2}{n(n+2) \cdot 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n^2 + 2n} = 1 \neq 0.$$

Итак, оба ряда либо одновременно сходятся, либо одновременно расходятся. Но так как эталонный обобщенный гармонический ряд при $\alpha = 2$ сходится, то и исследуемый ряд сходится. ►

Как следует из приведенных примеров, в признаке сравнения существует одна трудность: как правильно подобрать эталонный ряд?

В случае исследования ряда сначала нужно проверить выполнение необходимого условия сходимости ряда. Если необходимое условие выполняется, тогда в качестве эталонного подбирается такой сходящийся ряд, у которого значения членов не меньше значений членов исследуемого ряда.

То есть эталонный ряд как бы «покрывает» исследуемый ряд. В противном случае отыскивается расходящийся ряд, у которого значения членов не превышают значения членов исследуемого ряда.

Признак Даламбера. Пусть дан ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ с положительными членами и существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = t.$$

Тогда при $t < 1$ ряд сходится, при $t > 1$ ряд расходится. Если $t = 1$, то ряд может сходиться, а может расходиться.

Пример 14.10. Исследовать сходимость ряда

$$\frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \frac{6}{27} + \frac{8}{81} + \dots$$

Решение

Очевидно, что это ряд вида $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{3^n}$.

Проверка необходимого условия сходимости

$$\lim_{n \rightarrow 0} \frac{2n}{3^n} = 0$$

дает положительный результат.

Выпишем

$$a_n = \frac{2n}{3^n}; \quad a_{n+1} = \frac{2(n+1)}{3^{n+1}}.$$

Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2(n+1)}{3^{n+1}}}{\frac{2n}{3^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+2) \cdot 3^n}{2n \cdot 3^{n+1}} = \frac{1}{3} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+2}{2n} = \frac{1}{3} < 1.$$

Следовательно, ряд сходится. ►

Пример 14.11. Исследовать сходимость ряда

$$1 + \frac{3}{2 \cdot 3} + \frac{3^2}{2^2 \cdot 5} + \frac{3^3}{2^3 \cdot 7} + \dots$$

Выясняем, что это ряд вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n-1}}{2^{n-1} \cdot (2n-1)}.$$

Подставим формулы общих членов

$$a_n = \frac{3^{n-1}}{2^{n-1} \cdot (2n-1)}; \quad a_{n+1} = \frac{3^n}{2^n \cdot (2n+1)}$$

в условие признака Даламбера. Получим

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{3^n}{2^n \cdot (2n+1)}}{\frac{3^{n-1}}{2^{n-1} \cdot (2n-1)}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n \cdot 2^{n-1} \cdot (2n-1)}{3^{n-1} \cdot 2^n \cdot (2n+1)} =$$

$$= \frac{3}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-1}{2n+1} = \frac{3}{2} > 1.$$

Таким образом, ряд расходится по признаку Даламбера. ►

Пример 14.12. Исследовать сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)! \cdot 2^n}{(2n)!}.$$

Решение

После проверки необходимого условия сходимости выписываем формулу общего члена

$$a_n = \frac{(n+1)! \cdot 2^n}{(2n)!}; \quad a_{n+1} = \frac{[(n+1)+1]! \cdot 2^{n+1}}{[2(n+1)]!} = \frac{(n+2)! \cdot 2^{n+1}}{(2n+2)!}.$$

Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(n+2)! \cdot 2^{n+1}}{(2n+2)!}}{\frac{(n+1)! \cdot 2^n}{(2n)!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)!(2n)! \cdot 2^{n+1}}{(n+1)!(2n+2)! \cdot 2^n} =$$

$$= 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2}{(2n+1)(2n+2)} = 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2}{4n^2 + 6n + 2} = 0 < 1.$$

Следовательно, ряд сходится. ►

Следует заметить, что при вычислении факториалов вида $(cn)!$ имеет место равенство

$$(cn)! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (cn-2) \cdot (cn-1) \cdot cn,$$

где c — постоянная величина.

Пример 14.13. Вычислить

$$\frac{(n+2)! \cdot (2n)!}{(n+1)! \cdot (2n+2)!} =$$

$$= \frac{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot \cancel{n} \cdot \cancel{(n+1)} \cdot (n+2) \cdot 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot \cancel{(2n-1)} \cdot 2n}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot \cancel{n} \cdot \cancel{(n+1)} \cdot 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot \cancel{(2n+2-3)} \cdot \cancel{(2n+2-2)} \cdot (2n+2-1) \cdot (2n+2)} =$$

$$= \frac{n+2}{(2n+2-1)(2n+2)}.$$

14.3. Знакопеременные и знакочередующиеся ряды

Пусть дан числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, где среди членов a_n имеются как положительные, так и отрицательные числа. Такой ряд называется *знакопеременным*.

Можно составить ряд, состоящий из абсолютных величин членов данного числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$. Естественно, этот ряд будет положительным рядом.

Если *сходится* ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ называется *абсолютно сходящимся*. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ *расходится*, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ называется *условно* (или неабсолютно) *сходящимся*.

Можно доказать, что если знакопеременный ряд абсолютно сходится, то он сходится. Этот признак можно использовать при исследовании сходимости знакопеременных рядов.

Частным случаем знакопеременных рядов являются *знакочередующиеся* ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, т.е. ряды, знаки членов у которых чередуются. Будем считать, не нарушая общности рассуждений, что член ряда a_1 положителен. Тогда знакочередующийся ряд можно записать в виде

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - \dots + (-1)^n \cdot a_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot a_n,$$

где $a_n > 0$.

Очень часто в литературе можно встретить несколько иные виды записи знакочередующегося ряда. Например, $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$. Если оговорить, что имеется в виду под первым членом ряда, то можно легко убедиться, что эти записи формально эквивалентны.

Для знакочередующихся рядов справедлив *признак сходимости Лейбница*. Если для ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot a_n,$$

где $a_n > 0$,

для членов выполняются следующие условия:

$$1) a_1 > a_2 > a_3 > a_4 > \dots > a_n > a_{n+1} > \dots;$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0,$$

то ряд сходится, причем его сумма S не превосходит первого члена, т.е. $S \leq a_1$.

Пример 14.14. Исследовать сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{2n+1}{n(n+1)}$$

с помощью признака Лейбница. Если ряд сходится, то определить, абсолютно или условно.

Решение

Запишем

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{2n+1}{n(n+1)}.$$

Тогда общий член ряда

$$a_n = \frac{2n+1}{n(n+1)}.$$

Докажем, что для любого n выполняется неравенство $a_n > a_{n+1}$. Для этого достаточно доказать, что

$$a_n - a_{n+1} > 0.$$

Вычислим

$$a_{n+1} = \frac{2(n+1)+1}{(n+1)[(n+1)+1]} = \frac{2n+3}{(n+1)(n+2)}.$$

Найдем разность

$$\begin{aligned} a_n - a_{n+1} &= \frac{(2n+1)}{n(n+1)} - \frac{2n+3}{(n+1)(n+2)} = \frac{2n^2 + 4n + n + 2 - 2n^2 - 3n}{n(n+1)(n+2)} = \\ &= \frac{2n+2}{n(n+1)(n+2)} = \frac{2(n+1)}{n(n+1)(n+2)} = \frac{2}{n(n+2)}. \end{aligned}$$

Очевидно, что последняя дробь положительна при любых натуральных n . То есть первое условие признака Лейбница выполнено.

В пределе

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{n(n+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{n^2+n} = 0$$

второе условие выполнено. Следовательно, ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{2n+1}{n(n+1)}$$

сходится.

Составим ряд, состоящий из абсолютных величин, и исследуем его сходимость с помощью предельного признака сравнения. В качестве эталонного возьмем гармонический ряд b_n , который расходится.

$$\sum_{n=1}^{\infty} |(-1)^{n-1} \cdot a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)}; \quad a_n = \frac{(2n+1)}{n(n+1)}; \quad b_n = \frac{1}{n}.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2n+1}{n(n+1)}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1) \cdot n}{n(n+1) \cdot 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + n}{n^2 + n} = 2 \neq 0.$$

Следовательно, ряд, составленный из абсолютных величин, расходится. Поэтому исходный ряд сходится условно. ►

14.4. Степенные ряды и их область сходимости

Функциональной последовательностью называется последовательность, элементами которой являются функции

$$u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x), \dots$$

одной и той же независимой переменной x из области определения X .

При подстановке вместо переменной x ее конкретного числового значения функциональная последовательность превращается в числовую, которая может иметь предел. Пусть для каждого $x \in X$ образующаяся числовая последовательность имеет предел. Тогда можно записать функцию

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x),$$

которая называется **предельной функцией** для данной функциональной последовательности.

Рассмотрим теперь ряд, составленный из функций

$$u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x).$$

Этот ряд называется **функциональным рядом**, который обращается в числовой ряд при подстановке конкретного значения x .

Пусть этот ряд сходится при каждом значении $x \in X$. Тогда его сумма является некоторой функцией $S(x)$, которая называется **предельной функцией** для данного функционального ряда.

Однако функциональный ряд может сходиться не при всех значениях $x \in X$.

Областью сходимости функционального ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$$

называется **совокупность** значений переменной x , при которых данный функциональный ряд сходится.

Функциональный ряд вида

$$c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots + c_nx^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} c_nx^n$$

называется **степенным рядом**. Числа $c_0, c_1, c_2, \dots, c_n, \dots$ называются **коэффициентами** степенного ряда.

Степенным рядом называется также ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x - x_0)^n,$$

где x_0 — некоторое число, обычно называемое точкой.

Ясно, что степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_nx^n$ является *частным случаем* степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x - x_0)^n$ при $x_0 = 0$.

Для вычисления области сходимости степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} c_nx^n$ используется **теорема Абеля**.

Если степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_nx^n$ сходится в точке $x_0 \neq 0$, то он сходится, и притом абсолютно, в интервале $(-|x_0|, |x_0|)$, т.е. при всяком x , удовлетворяющем условию $|x| < |x_0|$.

Если степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ расходится при $x = x_1$, то он расходится и при всяком x , большем по абсолютной величине, чем x_1 , т.е. при $|x| > |x_1|$.

Из теоремы Абеля вытекает, что все точки сходимости расположены от начала координат не дальше, чем любая из точек расходимости. Совершенно ясно, что точки сходимости будут целиком заполнять некоторый числовой интервал с центром в начале координат.

Таким образом, область сходимости степенного ряда можно охарактеризовать одним числом R , называемым **радиусом сходимости**.

Радиус сходимости степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ — это число $R > 0$ такое, что при $|x| < R$ ряд сходится, а при $|x| > R$ — расходится.

В точке $x = \pm R$ ряд может как сходиться, так и расходиться.

Интервалом сходимости степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ называется интервал $(-R, R)$.

Если применить признак Даламбера, то можно получить следующую формулу для определения радиуса сходимости:

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right|.$$

Пример 14.15. Найти область сходимости степенного ряда

$$1 + \frac{x}{3 \cdot 2} + \frac{x^2}{3^2 \cdot 3} + \frac{x^3}{3^3 \cdot 4} + \dots + \frac{x^n}{3^n \cdot (n+1)} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{3^n \cdot (n+1)}.$$

Решение

Запишем формулы для членов:

$$c_n = \frac{1}{3^n(n+1)}; \quad c_{n+1} = \frac{1}{3^{n+1}(n+2)}.$$

Тогда радиус сходимости

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{1}{3^n(n+1)}}{\frac{1}{3^{n+1}(n+2)}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{3^{n+1}(n+2)}{3^n(n+1)} \right| = 3.$$

Итак, интервал сходимости равен $(-3; 3)$.

Исследуем сходимость ряда в граничных точках.

1) $x = 3$. При подстановке этого значения в исходный степенной ряд последний будет иметь вид

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{3^n \cdot (n+1)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

То есть при $x = 3$ получаем гармонический ряд, который расходится. Следовательно, эта точка не входит в область сходимости степенного ряда;

2) $x = -3$. При подстановке этого значения в исходный степенной ряд последний будет иметь вид

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^n}{3^n \cdot (n+1)} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[(-1) \cdot 3]^n}{3^n \cdot (n+1)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 3^n}{3^n \cdot (n+1)} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Это знакочередующийся ряд, в котором

$$a_n = \frac{1}{n}; \quad a_{n+1} = \frac{1}{n+1}.$$

Очевидно, что при любом натуральном n выполняется $a_n > a_{n+1}$, так как при одинаковом числителе знаменатель второй дроби больше. Также ясно, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0.$$

То есть условия признака Лейбница выполнены и, следовательно, ряд сходится. Поэтому точка $x = -3$ входит в область сходимости степенного ряда.

Таким образом, область сходимости заданного степенного ряда имеет вид

$$x \in [-3; 3). \quad \blacktriangleright$$

14.5. Разложение элементарных функций в степенные ряды

Пусть функция $f(x)$ в некоторой окрестности точки x_0 имеет производные любых порядков. Тогда степенной ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$$

называется **рядом Тэйлора** функции $f(x)$ в точке x_0 .

При $x_0 = 0$ ряд Тэйлора имеет вид

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \cdot x^n$$

и часто называется **рядом Маклорена** функции $f(x)$.

Можно показать, что если производные любых порядков $f(x)$ ограничены в некоторой окрестности точки x_0 одним и тем же числом C (т.е. $|f^{(n)}(x)| < C$ для любого n и для любого x из этой окрестности), то ряд Тэйлора в этой окрестности сходится к $f(x)$.

Запишем

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n.$$

Рассмотрим **разложения в ряд Маклорена** некоторых элементарных функций.

1. $f(x) = e^x$.

Очевидно, что

$$f'(x) = f''(x) = \dots = f^{(n)}(x) = \dots = e^x.$$

Отсюда

$$f'(0) = f''(0) = \dots = f^{(n)}(0) = \dots = e^0 = 1$$

и ряд Маклорена функции $f(x) = e^x$ имеет вид

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \cdot x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

Найдем радиус сходимости этого ряда:

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n!}}{\frac{1}{(n+1)!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) = \infty.$$

То есть ряд сходится на всей числовой прямой. Этот ряд сходится к функции e^x , поскольку на любом интервале $(-a, a)$ все производные этой функции ограничены одним и тем же числом e^a . Таким образом, при любом x выполняется равенство

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

$$2. f(x) = \sin x.$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots$$

при $x \in (-\infty; +\infty)$.

$$3. f(x) = \cos x.$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots$$

при $x \in (-\infty; +\infty)$.

$$4. f(x) = \ln(1+x).$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + \dots$$

при $x \in (-1; 1]$.

$$5. f(x) = (1+x)^\alpha.$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} x^3 + \dots$$

$$\dots + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + \dots$$

при $x \in (-1; 1)$.

Эти степенные ряды могут использоваться для вычисления значений указанных функций с любой заданной точностью.

Пример 14.16. Вычислить приближенно $\cos 10^\circ$ с точностью до 0,0001.

Решение

Перед вычислением необходимо перевести градусы в радианы. При этом целесообразно округлить значение до пятого знака после запятой, чтобы при вычислениях сохранить требуемую точность. Запишем

$$10^\circ = \frac{10}{180} \cdot \pi = \frac{10}{180} \cdot 3,14159 = 0,17453.$$

Используем разложение функции $\cos x$ в ряд Маклорена

$$\begin{aligned} \cos 10^\circ = \cos 0,17453 &= 1 - \frac{0,17453^2}{2!} + \frac{0,17453^4}{4!} - \frac{0,17453^6}{6!} + \dots = \\ &= 1 - 0,01523 + 0,00004 - 0,00000 = 0,98481. \end{aligned}$$

Округляя до требуемой точности, получаем

$$\cos 10^\circ = 0,9848.$$



Пример 14.17. Разложить в ряд Маклорена функцию

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{x}.$$

Решение

Используем разложение функции e^x :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots;$$

$$e^x - 1 = x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots;$$

$$\frac{e^x - 1}{x} = 1 + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \dots + \frac{x^{n-1}}{n!} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n!}.$$



Вопросы для самоконтроля

1. Что называется числовым рядом?
2. Что такое n -я частичная сумма ряда?
3. Когда числовой ряд называется сходящимся, а когда — расходящимся?
4. Какой ряд называется геометрическим рядом? Назовите условие его сходимости.
5. Какой ряд называется гармоническим, а какой — обобщенным гармоническим?
6. Является гармонический ряд сходящимся или расходящимся?
7. Назовите условие сходимости обобщенного гармонического ряда.
8. Сформулируйте основные свойства сходящихся числовых рядов.
9. Назовите необходимое условие сходимости и достаточное условие расходимости ряда.
10. Сформулируйте признак сравнения и предельный признак сравнения для исследования сходимости рядов с положительными членами. Какие ряды чаще всего используются в качестве эталонных?
11. Сформулируйте признак сходимости Даламбера.
12. Какой ряд называется знакопеременным; знакочередующимся?
13. Что такое абсолютная сходимость знакопеременного ряда?
14. Сформулируйте признак сходимости Лейбница.
15. Какие ряды называются функциональными; степенными?
16. Сформулируйте теорему Абеля.

17. Каким образом определить радиус сходимости и интервал сходимости степенного ряда?

18. Что нужно сделать кроме вычисления радиуса сходимости, чтобы найти область сходимости степенного ряда?

19. Что называется рядом Тэйлора и рядом Маклорена? К чему сходятся эти ряды в области их сходимости?

20. Запишите разложения в степенные ряды функций e^x , $\sin x$, $\cos x$.

Задачи для самостоятельного решения

Исследовать сходимость числовых рядов.

$$14.1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{7n+4}{2n+3}.$$

$$14.2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{n^3+1}.$$

$$14.3. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n+3}.$$

$$14.4. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n\sqrt{n}}{n^3+2}.$$

$$14.5. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+2)}{(n+1)(n+3)(n+4)}.$$

$$14.6. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{2^n}.$$

$$14.7. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{(n+1)!}.$$

$$14.8. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(2n-1)!}.$$

$$14.9. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3\sqrt{2} \cdot n}{5^n}.$$

Исследовать сходимость и абсолютную сходимость знакочередующихся числовых рядов.

$$14.10. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2n+1}{n(n+1)}.$$

$$14.11. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2n}{3^n}.$$

$$14.12. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2n+1}{3n^3}.$$

Найти область сходимости степенных рядов.

14.13. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 5^n}.$

14.14. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}.$

14.15. Вычислить приближенно $\sin 5^\circ$ с точностью до 0,00001.

14.16. Вычислить приближенно $e^{0,3}$ с точностью до 0,00001.

Глава 15

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

15.1. Понятие дифференциального уравнения

Дифференциальным уравнением (ДУ) называется уравнение, содержащее производные (или дифференциалы) неизвестных функций одной или нескольких независимых переменных.

Кроме того, ДУ может содержать сами неизвестные функции и независимые переменные.

Если в ДУ неизвестная функция зависит только от одной переменной (например, $y(x)$), то ДУ называется **обыкновенным**. Если эта функция нескольких переменных $y(x_1, x_2, \dots, x_n)$, то ДУ называется **дифференциальным уравнением в частных производных**. Далее будем рассматривать только ДУ, содержащие одну неизвестную функцию y .

Обыкновенное ДУ имеет общий вид

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0.$$

Порядком дифференциального уравнения называется наивысший порядок входящих в него производных. Производную $y^{(n)}$, определяющую порядок ДУ, называют **старшей производной**.

Пример 15.1. $y' = xy$ — ДУ первого порядка;

$(y')^2 = x^3 - 2x$ — ДУ первого порядка;

$y''' - \sqrt{1 - y''} = 0$ — ДУ третьего порядка и т.д. ►

Если ДУ n -го порядка удастся записать в виде

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}),$$

то оно называется дифференциальным уравнением, **разрешенным** относительно старшей производной.

Решением ДУ называется функция $y = \varphi(x)$, которая при подстановке ее в ДУ обращает последнее в *тождество*, т.е. равенство, верное при всех значениях x из области определения данной функции.

Пример 15.2. Функция $y = e^x$ является решением ДУ вида

$$y' - y = 0,$$

так как при подстановке ее в уравнение получается тождество $e^x - e^x = 0$. ►

Заметим, что в примере 15.2 функция Ce^x , где C — любое число, также является решением данного ДУ. Следовательно, ДУ может иметь бесконечное множество решений.

Совокупность всех решений ДУ называется его **общим решением**, а каждое отдельное решение — **частным решением**.

Как правило, общее решение ДУ n -го порядка можно записать в виде одной формулы, содержащей n независимых постоянных величин $C_1, C_2, \dots, C_n$, при подстановке вместо каждой из которых произвольного числа получается то или иное частное решение.

Таким образом, общее решение ДУ n -го порядка может быть записано в виде

$$y = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n).$$

Часто в результате решения ДУ получается уравнение следующего вида:

$$\Phi(x, y, C_1, C_2, \dots, C_n) = 0 \text{ или } \Phi_1(y) = \Phi_2(x, C_1, C_2, \dots, C_n),$$

которое не удастся разрешить относительно y . Такое уравнение также считают общим решением ДУ, но его часто называют **общим интегралом** ДУ.

На практике после нахождения общего решения необходимо выделить из него конкретное *частное* решение, описывающее рассматриваемый процесс. Для этого необходимо задать дополнительные условия для нахождения частного решения.

Рассмотрим сначала дифференциальные уравнения **первого порядка**. Общий вид такого ДУ

$$F(x, y, y') = 0.$$

Дифференциальное уравнение, разрешенное относительно производной, имеет вид

$$y' = f(x, y).$$

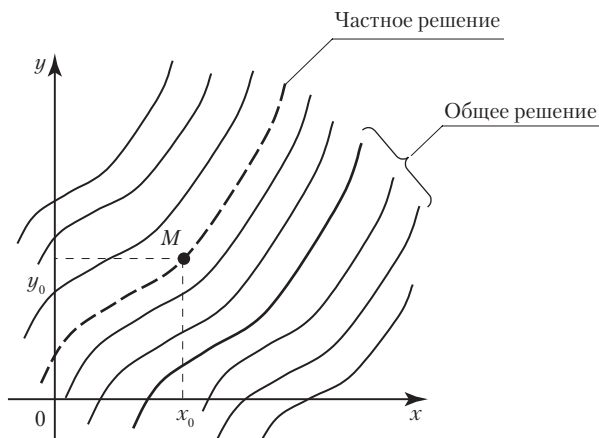


Рис. 15.1. Семейство интегральных кривых

Общее решение и общий интеграл ДУ первого порядка можно записать следующим образом:

$$y = \Phi(x, C) \text{ и } \Phi(x, y, C) = 0 \text{ или } \Phi_1(y) = F_2(x, C).$$

Конкретное частное решение, описывающее исследуемый процесс, чаще всего *выделяется* из *общего* решения с помощью задания значения искомой функции в какой-либо точке $M(x_0, y_0)$. Таким образом, ищется решение, удовлетворяющее условию $y(x_0) = y_0$, называемому *начальным условием*.

Выделение частного решения из общего с помощью начального условия называют **решением задачи Коши**.

График $y = y(x)$ какого-либо частного решения называется **интегральной кривой** данного ДУ. **Общее решение** на координатной плоскости представляется семейством интегральных кривых.

На рис. 15.1 показан пример семейства интегральных кривых некоторого ДУ и графическая иллюстрация выделения частного решения из общего по начальному условию.

15.2. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными

Дифференциальное уравнение первого порядка называется дифференциальным уравнением **с разделяющимися переменными**, если оно может быть представлено в виде

$$y' = f(x) \cdot g(y)$$

или в виде

$$A(x) \cdot B(y)dx + C(x) \cdot D(y)dy = 0,$$

где функции $f(x)$, $A(x)$, $C(x)$ не содержат переменную y , а $g(y)$, $B(y)$, $D(y)$ не содержат переменную x .

Для решения такого уравнения его следует преобразовать (разделить переменные), а затем выполнить интегрирование.

Если ДУ записано в виде

$$y' = f(x) \cdot g(y),$$

то для разделения переменных нужно представить производную y' как отношение дифференциалов $\frac{dy}{dx}$ и расположить дифференциалы слева и справа равенства так, чтобы они находились в числителе.

Далее перевести влево-вправо функции переменных x , y так, чтобы они оказались в той стороне, где находится дифференциал от соответствующей переменной. После этого найти интегралы от обеих частей равенства. Получаем

$$y' = f(x) \cdot g(y); \quad \frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(y); \quad \frac{dy}{g(y)} = f(x)dx;$$

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx.$$

Если ДУ записано в виде

$$A(x) \cdot B(y)dx + C(x) \cdot D(y)dy = 0,$$

то для разделения переменных нужно первое слагаемое перенести в правую часть с противоположным знаком и по аналогии с вышесказанным преобразовать.

Имеем

$$C(x) \cdot D(y)dy = -A(x) \cdot B(y)dx;$$

$$\frac{D(y)}{B(y)}dy = -\frac{A(x)}{C(x)}dx; \quad \int \frac{D(y)}{B(y)}dy = -\int \frac{A(x)}{C(x)}dx.$$

Уравнение, получаемое после выполнения интегрирования, является **общим интегралом** исходного ДУ. Если общий интеграл может быть разрешен относительно y , то получают **общее решение** ДУ.

Если задано начальное условие, то решают задачу Коши и получают нужное **частное решение**. Иногда невозможно выделить общее решение в виде $y = y(x)$, но можно его записать в виде $x = x(y)$.

Если нужно вычислять не общее решение, а только частное, удовлетворяющее начальному условию $y(x_0) = y_0$, то после разделения переменных можно найти определенный интеграл. При этом левая часть интегрируется в пределах от y_0 до y , а правая — от x_0 до x .

Запишем

$$\int_{y_0}^y \frac{du}{g(u)} = \int_{x_0}^x f(t)dt \quad \text{или} \quad \int_{y_0}^y \frac{D(u)}{B(u)} du = - \int_{x_0}^x \frac{A(t)}{C(t)} dt.$$

Переменные интегрирования формально обозначены другими буквами, поскольку y и x являются верхними пределами интегралов.

Пример 15.3. Найти общее решение дифференциального уравнения $yy' + x = 0$ и частное решение при начальном условии $y(1) = 2$.

Решение

$$yy' + x = 0; \quad y' = -\frac{x}{y}; \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}; \quad ydy = -xdx;$$

$$\int ydy = -\int xdx; \quad \frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + C_1.$$

Последнее уравнение является общим интегралом исходного ДУ и, по сути, решение ДУ на этом закончено. Однако если возможно явно выразить функцию $y(x, C)$, то это целесообразно сделать. Выполняем

$$y^2 = C - x^2; \quad y = \pm\sqrt{C - x^2},$$

здесь новая постоянная $C = 2C_1$.

Обычно при решении дифференциальных уравнений не изменяют обозначение постоянной интегрирования C при умножении или делении ее на числа, возведении в постоянную степень либо при возведении постоянного числа в степень $\bar{C}$, поскольку все указанные операции над произвольной постоянной величиной (т.е. любым числом) дают в результате также произвольную постоянную величину.

Для нахождения частного решения подставляем начальное условие в общее решение. При этом корень берем только с плюсом, так как значение $y_0 = 2$ в начальном условии положительно:

$$2 = \sqrt{C-1^2}; \quad 4 = C-1; \quad C = 5; \quad y = \sqrt{5-x^2}.$$

Последнее равенство является частным решением ДУ при заданном начальном условии. Если бы в задании не требовалось найти общее решение, то, перейдя формально в исходном ДУ к другим обозначениям $y = u$, $x = t$, частное решение сразу можно было бы найти следующим образом:

$$\int_2^y u du = -\int_1^x t dt; \quad \left. \frac{u^2}{2} \right|_2^y = -\left. \frac{t^2}{2} \right|_1^x; \quad \frac{y^2}{2} - \frac{4}{2} = -\left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} \right);$$

$$y^2 - 4 = -x^2 + 1; \quad y^2 = 5 - x^2; \quad y = \sqrt{5 - x^2}.$$

В последнем равенстве перед корнем берем только знак «плюс», так как в начальном условии значение $y(1) = 2$ положительно. ►

Пример 15.4. Найти общее решение дифференциального уравнения $2y'\sqrt{x} = y$ и частное решение при начальном условии $y(4) = 1$.

Решение

$$2y'\sqrt{x} = y; \quad y' = \frac{y}{2\sqrt{x}}; \quad \frac{dy}{dx} = \frac{y}{2\sqrt{x}}; \quad \frac{dy}{y} = \frac{dx}{2\sqrt{x}}.$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{2\sqrt{x}}; \quad \ln |y| = \sqrt{x} + C.$$

После потенцирования полученного общего интеграла имеем

$$|y| = e^{\sqrt{x}+C}; \quad y = \pm e^C \cdot e^{\sqrt{x}}.$$

Так как выражение $\pm e^C$ при различных C также является константой (кроме нуля), то, формально обозначив ее опять как C , запишем общее решение ДУ

$$y = Ce^{\sqrt{x}}.$$

Подставляем начальное условие в общее решение

$$1 = Ce^{\sqrt{4}}; \quad C = e^{-2}; \quad y = e^{-2} \cdot e^{\sqrt{x}}.$$

И окончательно получаем частное решение

$$y = e^{\sqrt{x}-2}. \quad \blacktriangleright$$

Пример 15.5. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y' = (2y + 1) \operatorname{ctg} x$$

и частное решение при начальном условии $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$.

Решение

$$y' = (2y + 1) \operatorname{ctg} x; \quad \frac{dy}{dx} = (2y + 1) \operatorname{ctg} x; \quad \frac{dy}{2y + 1} = \operatorname{ctg} x dx;$$

$$\int \frac{dy}{2y + 1} = \int \operatorname{ctg} x dx; \quad \frac{1}{2} \int \frac{2dy}{2y + 1} = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx;$$

$$\int \frac{du}{u} = 2 \int \frac{dt}{t}; \quad \ln|u| = 2 \ln|t| + C;$$

$\begin{aligned} u &= 2y + 1; \\ du &= 2dy; \\ t &= \sin x; \\ dt &= \cos x dx. \end{aligned}$
--

$$\ln|2y + 1| = 2 \ln|\sin x| + C.$$

Получен общий интеграл исходного ДУ. Прежде чем его потенцировать, целесообразно представить постоянную C как $\ln|C|$.

Так как область значений натурального логарифма лежит в диапазоне от $-\infty$ до $+\infty$, то $\ln|C|$ может быть любым числом, а значит, это произвольная постоянная (т.е. не зависящая от x) величина.

$$\ln|2y + 1| = 2 \ln|\sin x| + \ln|C|; \quad \ln|2y + 1| = \ln|C \sin^2 x|;$$

$$|2y + 1| = |C \sin^2 x|; \quad 2y + 1 = \pm C \sin^2 x.$$

Так как C — произвольная постоянная величина, то знак $\pm$ перед ней является излишним. Окончательно получаем общее решение ДУ

$$2y + 1 = C \sin^2 x; \quad y = C \sin^2 x - \frac{1}{2}.$$

Подставляем начальное условие в общее решение:

$$\frac{1}{2} = C \sin^2 \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}; \quad \frac{1}{2} = \frac{1}{2} C - \frac{1}{2}; \quad C = 2$$

и окончательно получаем

$$y = 2 \sin^2 x - \frac{1}{2}. \quad \blacktriangleright$$

15.3. Однородные дифференциальные уравнения первого порядка

Прежде чем рассматривать однородные ДУ, рассмотрим понятие однородной функции.

Функция двух переменных $f(x, y)$ называется **однородной функцией** степени k , если для любого числа t выполняется равенство

$$f(tx, ty) = t^k f(x, y).$$

В частности, для однородной функции нулевой степени

$$f(tx, ty) = f(x, y).$$

Такая функция может быть представлена как функция одной переменной. Пусть $t = 1/x$. Тогда получаем

$$f(x, y) = f(tx, ty) = f\left(\frac{1}{x}x, \frac{1}{x}y\right) = f\left(1, \frac{y}{x}\right) = \varphi\left(\frac{y}{x}\right).$$

Очевидно, что такая функция зависит только от отношения $\frac{y}{x}$, а не от каждой переменной по отдельности.

Дифференциальное уравнение, которое можно представить в виде

$$y' = f(x, y),$$

где $f(x, y)$ — однородная функция нулевой степени, называется **однородным дифференциальным уравнением первого порядка**.

Исходя из вышеизложенного, его можно записать в виде

$$y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right).$$

Проще всего решать такое уравнение путем замены переменной. Имеем

$$y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right); \quad u = \frac{y}{x}; \quad y = ux; \quad y' = u'x + u.$$

Подставляя и разделяя переменные, получаем общий интеграл исходного ДУ:

$$u'x + u = \varphi(u); \quad u'x = \varphi(u) - u; \quad \frac{du}{dx}x = \varphi(u) - u;$$

$$\frac{du}{\varphi(u) - u} = \frac{dx}{x}; \quad \int \frac{du}{\varphi(u) - u} = \int \frac{dx}{x}.$$

И окончательно,

$$\int \frac{du}{\varphi(u) - u} = \ln |Cx|.$$

Пример 15.6. Найти общее решение ДУ $x^2 y' = y^2 + xy$.

Решение

$$x^2 y' = y^2 + xy; \quad y' = \frac{y^2 + xy}{x^2}; \quad y' = \frac{y^2}{x^2} + \frac{y}{x}.$$

Очевидно, что функция в правой части уравнения — однородная нулевой степени. Она зависит только от отношения $\frac{y}{x}$, т.е. данное уравнение является однородным ДУ первого порядка.

Пусть

$$u = \frac{y}{x}; \quad y = ux; \quad y' = u'x + u.$$

Тогда, подставляя u и y' в исходное уравнение, запишем

$$\frac{du}{u^2} = \frac{dx}{x}; \quad \int \frac{du}{u^2} = \int \frac{dx}{x}.$$

После интегрирования получаем

$$-\frac{1}{u} = \ln |x| + C;$$

$$u = \frac{1}{C - \ln |x|}; \quad \frac{y}{x} = \frac{1}{C - \ln |x|}; \quad y = \frac{x}{C - \ln |x|}. \quad \blacktriangleright$$

15.4. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка

Линейные ДУ первого порядка имеют вид

$$y' + p(x) \cdot y = q(x), \quad (15.1)$$

где $p(x)$ и $q(x)$ — некоторые функции независимой переменной x и не содержат переменной y .

Если в уравнении (15.1) $q(x) \equiv 0$ (тождественно равна нулю, т.е. равна нулю при любом значении x), то ДУ имеет вид

$$y' + p(x) \cdot y = 0$$

и называется **линейным однородным** ДУ первого порядка (не путать с однородным ДУ первого порядка).

Чтобы избежать путаницы в терминологии, в некоторых книгах такие ДУ называют линейными ДУ первого порядка без правой части.

Линейные однородные ДУ первого порядка — это ДУ с разделяющимися переменными и решаются обычным способом

$$y' + p(x) \cdot y = 0; \quad y' = -p(x) \cdot y; \quad \frac{dy}{dx} = -p(x) \cdot y;$$

$$\frac{dy}{y} = -p(x)dx; \quad \int \frac{dy}{y} = -\int p(x)dx.$$

Пусть $F(x)$ — какая-либо первообразная от $p(x)$. Тогда общее решение линейного однородного ДУ первого порядка имеет вид

$$\ln |y| = -F(x) + \ln |C|; \quad y = Ce^{-F(x)}.$$

Пусть теперь $q(x) \neq 0$. Тогда ДУ, имеющее вид

$$y' + p(x) \cdot y = q(x),$$

называется **линейным неоднородным** ДУ первого порядка (или линейным ДУ первого порядка с правой частью).

Для решения таких ДУ чаще всего применяется один из двух следующих методов.

1. Метод подстановки двух функций. Решение ищется в виде произведения двух пока неизвестных функций $u(x)$ и $v(x)$

$$y = uv.$$

Тогда

$$y' = u'v + uv'.$$

Подставив эти выражения в исходное уравнение, получаем

$$u'v + uv' + p(x) \cdot uv = q(x).$$

Сгруппируем второе и третье слагаемые и вынесем за скобку u

$$u'v + u[v' + p(x) \cdot v] = q(x). \quad (15.2)$$

Поскольку в исходное уравнение введены две функции u и v , то в процессе решения одной из них распорядимся так, чтобы было удобнее искать решение задачи. Подберем функцию $v = v(x)$, чтобы выражение в скобках в левой части уравнения (15.2) обращалось в нуль при всех значениях x . Тогда ДУ сведется к уравнению с разделяющимися переменными. Имеем

$$v' + p(x) \cdot v = 0.$$

Это ДУ отличается от рассмотренного выше линейного однородного ДУ первого порядка только формальным обозначением неизвестной функции. Поэтому его общее решение имеет вид

$$v = Ce^{-F(x)}.$$

Так как необходимо найти только какое-либо одно частное решение, то, положив для простоты $C = 1$, получаем функцию v , обращающую в нуль выражение в скобках в уравнении (15.2)

$$v = e^{-F(x)}.$$

Подставив эту функцию в уравнение (15.2), получаем

$$u' \cdot e^{-F(x)} = q(x); \quad \frac{du}{dx} = q(x) \cdot e^{F(x)}; \quad du = q(x) \cdot e^{F(x)} dx;$$

$$\int du = \int q(x) \cdot e^{F(x)} dx; \quad u = \int q(x) \cdot e^{F(x)} dx.$$

Окончательно запишем

$$y = uv = e^{-F(x)} \cdot \int q(x) \cdot e^{F(x)} dx.$$

Пример 15.7. Найти общее решение ДУ $y' - \frac{2}{x}y = -\frac{3}{x^2}$ и решить задачу Коши при начальном условии $y(-1) = 1$.

Решение

Представим y в виде произведения двух функций:

$$y = uv; \quad y' = u'v + uv'.$$

Тогда исходное уравнение имеет вид

$$\begin{aligned} u'v + uv' - \frac{2}{x}uv &= -\frac{3}{x^2}; \\ u'v + u\left(v' - \frac{2}{x}v\right) &= -\frac{3}{x^2}. \end{aligned} \quad (*)$$

Потребуем, чтобы выражение в скобках (*) было равно нулю.

$$v' - \frac{2}{x}v = 0.$$

Тогда

$$\frac{dv}{dx} = \frac{2}{x}v; \quad \frac{dv}{v} = 2\frac{dx}{x}; \quad \int \frac{dv}{v} = 2 \int \frac{dx}{x};$$

$$\ln |v| = 2 \ln |x| + \ln |C|.$$

Получили решение для первой функции

$$v = Cx^2.$$

Так как в начале решения вместо неизвестной функции y были введены две новые, то для удобства одну из них подберем произвольно из полученного свойства функций. Разумно принять $C = 1$.

Тогда

$$v = x^2.$$

Подставим полученную функцию v в уравнение (*). Выражение в скобках обратиться в нуль. Остается

$$v' = 2x; \quad u'x^2 + u \cdot 2x - \frac{2}{x}u \cdot x^2 = -\frac{3}{x^2}; \quad u'x^2 = -\frac{3}{x^2};$$

$$\frac{du}{dx} = -\frac{3}{x^4}; \quad du = -3\frac{dx}{x^4}; \quad \int du = -3 \int \frac{dx}{x^4}.$$

После интегрирования получим вторую функцию

$$u = \frac{1}{x^3} + C.$$

Заметим, что для второй функции присутствие постоянной интегрирования обязательно.

Тогда

$$y = uv = \left(\frac{1}{x^3} + C \right) \cdot x^2 = \frac{1}{x} + Cx^2 - \text{общее решение.}$$

Для нахождения частного решения подставим начальное условие в общее решение:

$$1 = \frac{1}{-1} + C \cdot (-1)^2; \quad C = 2.$$

Окончательно запишем

$$y = \frac{1}{x} + 2x^2 - \text{частное решение.} \quad \blacktriangleright$$

2. Метод вариации постоянной.

Сначала решается линейное однородное дифференциальное уравнение (15.1), в котором принимается $q(x) = 0$:

$$y' + p(x) \cdot y = 0.$$

Как было показано выше, его общее решение имеет вид

$$y = Ce^{-F(x)},$$

где $F(x)$ — по-прежнему какая-либо первообразная от $p(x)$.

Далее считаем, что постоянная C является функцией $C(x)$. Найдём эту функцию. Так как

$$y = C(x) \cdot e^{-F(x)},$$

то

$$y' = C'(x) \cdot e^{-F(x)} - C(x) \cdot p(x) \cdot e^{-F(x)}.$$

Подставляя выражения для y и y' в исходное уравнение (15.1), запишем

$$C'(x) \cdot e^{-F(x)} - C(x) \cdot p(x) \cdot e^{-F(x)} + p(x) \cdot C(x) \cdot e^{-F(x)} = q(x).$$

Второе и третье слагаемые в левой части последнего ДУ взаимно уничтожаются, и получаем ДУ с разделяющимися переменными. Решая полученную зависимость

$$C'(x) \cdot e^{-F(x)} = q(x); \quad \frac{dC(x)}{dx} = q(x) \cdot e^{F(x)};$$

$$dC(x) = q(x) \cdot e^{F(x)} dx; \quad \int dC(x) = \int q(x) \cdot e^{F(x)} dx;$$

$$C(x) = \int q(x) \cdot e^{F(x)} dx,$$

получим

$$y = C(x) \cdot e^{-F(x)} = e^{-F(x)} \cdot \int q(x) \cdot e^{F(x)} dx.$$

Пример 15.8. Решить методом вариации постоянной ДУ.

Решение

$$y' + \frac{2}{x}y = \frac{1}{x^2}.$$

Сначала решаем линейное однородное ДУ

$$y' + \frac{2}{x}y = 0; \quad \frac{dy}{dx} = -2\frac{y}{x}; \quad \frac{dy}{y} = -2\frac{dx}{x}; \quad \int \frac{dy}{y} = -2 \int \frac{dx}{x};$$

$$\ln |y| = -2\ln |x| + \ln |C|; \quad \ln |y| = \ln \left| \frac{C}{x^2} \right|.$$

Получим

$$y = \frac{C}{x^2}.$$

Полагаем, что в последнем уравнении $C = C(x)$. Тогда

$$y = \frac{C(x)}{x^2}; \quad y' = \frac{C'(x)x^2 - C(x) \cdot 2x}{x^4} = \frac{C'(x)}{x^2} - \frac{2C(x)}{x^3}.$$

Подставляя y и y' в исходное уравнение, имеем

$$\frac{C'(x)}{x^2} - \frac{2C(x)}{x^3} + \frac{2}{x} \cdot \frac{C(x)}{x^2} = \frac{1}{x^2}; \quad \frac{C'(x)}{x^2} = \frac{1}{x^2};$$

$$C'(x) = 1; \quad C(x) = x + \tilde{C}.$$

Временно обозначаем постоянную интегрирования $\tilde{C}$, чтобы не путать с функцией $C(x)$. Тогда

$$y = \frac{C(x)}{x^2} = \frac{x + \tilde{C}}{x^2} = \frac{1}{x} + \frac{\tilde{C}}{x^2}.$$

Избавившись от функции $C(x)$, формально заменим постоянную $\tilde{C}$ на C . Окончательно получаем общее решение ДУ

$$y = \frac{1}{x} + \frac{C}{x^2}. \quad \blacktriangleright$$

15.5. Дифференциальные уравнения второго порядка, допускающие понижение порядка

Дифференциальное уравнение второго порядка имеет следующий общий вид:

$$F(x, y, y', y'') = 0.$$

Запишем ДУ, разрешенное относительно второй производной:

$$y'' = f(x, y, y').$$

Общий интеграл и общее решение ДУ второго порядка выглядят, соответственно, как функции

$$\Phi(x, y, C_1, C_2) = 0; \quad y = \varphi(x, C_1, C_2).$$

Дополнительную информацию, необходимую для выделения частного решения из общего для ДУ второго порядка, обычно задают либо в виде *начальных* условий (задача Коши), либо в виде *граничных* условий (краевая задача).

Запишем начальные условия для задачи Коши

$$y(x_0) = y_0; \quad y'(x_0) = y'_0.$$

Граничные условия для краевой задачи записываются в виде

$$y(x_1) = y_1; \quad y(x_2) = y_2.$$

В ряде случаев оказывается возможным свести решение ДУ второго порядка к последовательным решениям двух ДУ первого порядка. Такие ДУ называются дифференциальными уравнениями, допускающими **понижение порядка**. Рассмотрим два таких случая.

Пусть **уравнение явно не содержит неизвестную функцию y** , т.е. имеет вид

$$F(x, y', y'') = 0.$$

Обозначим $u = y'$. Тогда

$$y'' = (y')' = u'.$$

Получаем ДУ первого порядка

$$F(x, u, u') = 0,$$

решая которое, находим $u = u(x)$. Затем решаем еще одно ДУ первого порядка $y' = u(x)$ и находим y . Если при этом заданы начальные или граничные условия, то подставляем их в общее решение и находим частное решение.

Пример 15.9. Найти общее решение ДУ $xy'' + y' = 0$, а также:

1) найти решение задачи Коши при начальных условиях:

$$y(1) = 2; \quad y'(1) = 3;$$

2) найти решение краевой задачи при граничных условиях:

$$y(1) = 2; \quad y(e) = 3.$$

Решение

Обозначим $u = y'$. Тогда исходное ДУ принимает вид

$$xu' + u = 0.$$

Решая относительно u и проводя элементарные преобразования

$$u' = -\frac{u}{x}; \quad \frac{du}{dx} = -\frac{u}{x}; \quad \frac{du}{u} = -\frac{dx}{x};$$

$$\int \frac{du}{u} = -\int \frac{dx}{x}; \quad \ln |u| = -\ln |x| + \ln |C_1|;$$

$$\ln |u| = \ln \left| \frac{C_1}{x} \right|,$$

получим

$$u = \frac{C_1}{x}.$$

Так как $u = y'$, то

$$y' = \frac{C_1}{x}; \quad \frac{dy}{dx} = \frac{C_1}{x};$$

$$dy = C_1 \frac{dx}{x}; \quad \int dy = C_1 \int \frac{dx}{x}.$$

Запишем общее решение

$$y = C_1 \ln |x| + C_2.$$

1) Задача Коши. Подставляем начальные условия в общее решение и его производную, выражение для которой получено ранее:

$$2 = C_1 \ln 1 + C_2;$$

$$3 = \frac{C_1}{1}.$$

Так как $\ln 1 = 0$, то из первого равенства получаем $C_2 = 2$, а из второго — $C_1 = 3$. Частное решение имеет вид

$$y = 3 \ln |x| + 2.$$

2) Краевая задача. Подставляем граничные условия в общее решение.

$$2 = C_1 \ln 1 + C_2;$$

$$3 = C_1 \ln e + C_2.$$

Аналогично предыдущему случаю имеем из первого равенства $C_2 = 2$. Так как $\ln e = 1$, то из второго равенства получаем

$$3 = C_1 + 2; \quad C_1 = 1; \quad y = \ln |x| + 2 \text{ — частное решение.} \quad \blacktriangleright$$

Уравнение явно не содержит независимую переменную x , т.е. имеет вид

$$F(y, y', y'') = 0.$$

Обозначим

$$u = y' = \frac{dy}{dx}.$$

Тогда

$$y'' = (y')' = u' = \frac{du}{dx} = \frac{du}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{du}{dy} \cdot u.$$

Получаем ДУ первого порядка

$$F\left(y, u, \frac{du}{dy}\right) = 0,$$

которое может быть формально решено относительно функции u независимой переменной y , т.е. $u = u(y)$. После этого решается ДУ первого порядка

$$\frac{dy}{dx} = u(y)$$

и находится искомая функция $y(x)$.

Пример 15.10. Найти общее решение ДУ

$$yy'' + (y')^2 = 0.$$

Решение

Обозначим

$$u = y' = \frac{dy}{dx}. \quad (*)$$

Тогда

$$y'' = (y')' = u' = \frac{du}{dx} = \frac{du}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{du}{dy} \cdot u. \quad (**)$$

Получаем ДУ первого порядка, роль независимой переменной в котором играет y :

$$y \cdot \frac{du}{dy} \cdot u + u^2 = 0; \quad u \cdot \left(y \cdot \frac{du}{dy} + u \right) = 0.$$

1. Пусть первый сомножитель $u = 0$, тогда $y' = 0$ и $y = C$. То есть любая постоянная является решением данного ДУ.

2. Приравниваем нулю выражение в скобках:

$$y \cdot \frac{du}{dy} + u = 0; \quad \frac{du}{dy} = -\frac{u}{y};$$

$$\frac{du}{u} = -\frac{dy}{y}; \quad \int \frac{du}{u} = -\int \frac{dy}{y}; \quad \ln |u| = -\ln |y| + \ln |C_1|;$$

$$\ln |u| = \ln \left| \frac{C_1}{y} \right|; \quad u = \frac{C_1}{y}.$$

Так как $u = y'$ в силу введенных обозначений, то

$$\frac{dy}{dx} = \frac{C_1}{y}; \quad ydy = C_1 dx; \quad \int ydy = C_1 \int dx.$$

Окончательно

$$\frac{y^2}{2} = C_1 x + C_2.$$

Перепишем

$$y^2 = C_1 x + C_2; \quad y = \pm \sqrt{C_1 x + C_2}.$$

Таким образом, получены два решения в явном виде, отличающиеся знаками. ►

15.6. Линейные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Они имеют следующий общий вид:

$$y'' + py' + qy = r(x),$$

где p, q — числа; $r(x)$ — некоторая функция независимой переменной x .

Если $r(x) \equiv 0$, то ДУ называется **линейным однородным** дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами (или линейным ДУ с постоянными коэффициентами без правой части). В противном случае ДУ называется **линейным неоднородным** (с правой частью).

Рассмотрим сначала решение *линейного однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами*

$$y'' + py' + qy = 0.$$

Будем искать решение в виде $y = e^{\lambda x}$. Подставляем решение в исходное уравнение, учитывая, что

$$y' = \lambda \cdot e^{\lambda x}; \quad y'' = \lambda^2 \cdot e^{\lambda x}.$$

Запишем

$$\lambda^2 \cdot e^{\lambda x} + p\lambda \cdot e^{\lambda x} + q \cdot e^{\lambda x} = 0; \quad e^{\lambda x} \cdot (\lambda^2 + p\lambda + q) = 0.$$

Так как $e^{\lambda x}$ не равно нулю ни при каких λ , то в последней формуле должно выполняться равенство

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0.$$

Таким образом, функция $y = e^{\lambda x}$ является решением исходного ДУ тогда и только тогда, когда λ является корнем полученного квадратного уравнения. Это уравнение называется **характеристическим уравнением** для исходного ДУ и легко получается из последнего формальной заменой y'' на λ^2 , y' на λ и y на 1.

При решении характеристического уравнения возможны **три случая**.

1. Дискриминант $D = p^2 - 4q > 0$.

В этом случае характеристическое уравнение имеет два корня

$$\lambda_1 = \frac{-p + \sqrt{D}}{2} \text{ и } \lambda_2 = \frac{-p - \sqrt{D}}{2}.$$

То есть решением ДУ являются функции

$$y = e^{\lambda_1 x} \text{ и } y = e^{\lambda_2 x}.$$

Простой подстановкой в исходное ДУ нетрудно убедиться, что если эти две функции являются решением ДУ, то решением также является любая их линейная комбинация. Таким образом, **общее решение** ДУ можно записать в виде

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}.$$

2. Пусть $D = p^2 - 4q = 0$.

В этом случае характеристическое уравнение имеет два одинаковых корня

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda = -\frac{p}{2}$$

и говорят, что кратность корня равно 2.

Простой постановкой в исходное ДУ можно доказать, что при этом общее решение исходного ДУ имеет следующий вид:

$$y = (C_1 + C_2 x) e^{\lambda x}.$$

3. И наконец, $D = p^2 - 4q < 0$.

В этом случае характеристическое уравнение имеет только комплексные корни

$$\lambda_1 = \frac{-p + \sqrt{D}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{-p - \sqrt{D}}{2},$$

в которых $D < 0$.

В выражении $\lambda = \alpha \pm i\beta$ обозначим

$$\alpha = -\frac{p}{2}; \quad \beta = \frac{\sqrt{|-D|}}{2} = \frac{\sqrt{|p^2 - 4q|}}{2}.$$

Тогда общее решение ДУ записывается в виде

$$y = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x).$$

Таким образом, запишем **общее правило** нахождения решения *линейного однородного* дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами:

1) составляем характеристическое уравнение и находим его корни.

2) находим частные решения дифференциального уравнения, причем:

а) каждому действительному корню λ соответствует решение $e^{\lambda x}$,

б) каждому действительному корню λ кратности m ставится в соответствие m решений:

$$e^{\lambda x}; \quad x \cdot e^{\lambda x}; \quad \dots; \quad x^{m-1} \cdot e^{\lambda x},$$

в) каждой паре комплексно-сопряженных корней $\alpha \pm i\beta$ характеристического уравнения λx ставится в соответствие два решения:

$$e^{\alpha x} \cos \beta x \quad \text{и} \quad e^{\alpha x} \sin \beta x,$$

г) каждой паре m — кратных комплексно-сопряженных корней $\alpha \pm i\beta$ характеристического уравнения ставится в соответствие $2m$ решений:

$$\begin{aligned} &e^{\alpha x} \cos \beta x, \quad x e^{\alpha x} \cos \beta x, \quad \dots \quad x^{m-1} e^{\alpha x} \cos \beta x, \\ &e^{\alpha x} \sin \beta x, \quad x e^{\alpha x} \sin \beta x, \quad \dots \quad x^{m-1} e^{\alpha x} \sin \beta x; \end{aligned}$$

3) с учетом постоянных интегрирования в каждом решении составляем линейную комбинацию найденных решений.

Линейная комбинация решений будет являться общим решением исходного линейного однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами.

Пример 15.11. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y'' - 4y' + 3y = 0.$$

Решение

Выпишем характеристическое уравнение и найдем его корни

$$\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0; \quad D = 4^2 - 4 \cdot 3 = 4 > 0; \quad \sqrt{D} = 2;$$

$$\lambda_1 = \frac{4+2}{2} = 3; \quad \lambda_2 = \frac{4-2}{2} = 1.$$

Общее решение ДУ имеет вид

$$y = C_1 e^{3x} + C_2 e^x. \quad \blacktriangleright$$

Пример 15.12. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y'' - 4y' + 4y = 0.$$

Решение

Характеристическое уравнение

$$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$$

дает

$$D = 4^2 - 4 \cdot 4 = 0; \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda = \frac{4}{2} = 2.$$

Общее решение ДУ запишется в виде

$$y = (C_1 + C_2 x) e^{2x}. \quad \blacktriangleright$$

Пример 15.13. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y'' - 4y' + 13y = 0.$$

Решение

Решая характеристическое уравнение

$$\lambda^2 - 4\lambda + 13 = 0,$$

получим

$$D = 4^2 - 4 \cdot 13 = -36 < 0; \quad \sqrt{|-D|} = 6;$$

$$\alpha = -\frac{p}{2} = \frac{4}{2} = 2; \quad \beta = \frac{\sqrt{|-D|}}{2} = \frac{6}{2} = 3.$$

Тогда общее решение ДУ имеет вид

$$y = e^{2x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x). \quad \blacktriangleright$$

Перейдем теперь к решению *линейных неоднородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами*

$$y'' + py' + qy = r(x).$$

В теории дифференциальных уравнений доказывается, что общее решение неоднородного ДУ $y_{\text{он}}$ равно сумме общего решения однородного ДУ $y_{\text{оо}}$ и какого-либо частного решения неоднородного уравнения $y_{\text{чн}}$, т.е.

$$y_{\text{он}} = y_{\text{оо}} + y_{\text{чн}}.$$

Порядок вычисления $y_{\text{оо}}$ рассмотрен выше для случая, когда

$$y'' + py' + qy = 0.$$

Первоначально проект частного решения $y_{\text{чн}}$ неоднородного уравнения устанавливается по виду $r(x)$.

Рассмотрим наиболее часто встречающиеся типы правой части неоднородного ДУ, которые имеют **специальный вид**.

1. Если $r(x)$ имеет вид

$$r(x) = e^{kx}(A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \dots + A_{n-1}x + A_n), \quad (15.3)$$

то пользуются следующим правилом:

а) если k в степени показательной функции $r(x)$, не является корнем λ характеристического уравнения

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0$$

однородного ДУ, т.е.

$$k \neq \lambda_1, \quad k \neq \lambda_2,$$

то частное решение неоднородного ДУ ищут в виде

$$y_{\text{чн}} = e^{kx}(B_0 x^n + B_1 x^{n-1} + \dots + B_{n-1}x + B_n). \quad (15.4)$$

Коэффициенты B_i находят путем подстановки $y_{\text{чн}}$, $y'_{\text{чн}}$, $y''_{\text{чн}}$ в исходное ДУ и приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях x в левой и правой частях полученного после подстановки уравнения;

б) если k является одним из двух различных корней λ_1 , λ_2 характеристического уравнения, то $y_{\text{чн}}$ ищут в виде

$$y_{\text{чн}} = e^{kx} \cdot (B_0 x^n + B_1 x^{n-1} + \dots + B_{n-1} x + B_n); \quad (15.5)$$

в) если значение k равно единственному корню характеристического уравнения кратности 2, то $y_{\text{чн}}$ ищут в виде

$$y_{\text{чн}} = e^{kx} x^2 \cdot (B_0 x^n + B_1 x^{n-1} + \dots + B_{n-1} x + B_n).$$

Если в правой части исходного ДУ записан только многочлен от x , то в этом случае в формуле (15.3) принимают $k = 0$. Заметим, что далее решение отыскивается аналогично приведенным случаям: а), б), в).

2. Вид правой части является частным случаем функции

$$r(x) = e^{kx} [P_n(x) \cdot \cos \gamma x + Q_m(x) \cdot \sin \gamma x], \quad (15.6)$$

где $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ — многочлены от x степени соответственно n и m , а γ — число.

Частное решение ДУ с такой правой частью следует искать в виде

$$y_{\text{чн}} = e^{kx} x^s \cdot [\tilde{P}_l(x) \cos \gamma x + \tilde{Q}_l(x) \sin \gamma x],$$

где $\tilde{P}_l(x)$ и $\tilde{Q}_l(x)$ — многочлены степени l , причем $l = \max(n, m)$; s равно кратности корня $k + i\gamma$ характеристического уравнения.

Если одновременно $k = 0$, $p = 0$, $q > 0$, $\gamma = \sqrt{q}$, то $s = 1$. В остальных случаях $s = 0$.

3. Когда $r(x)$ представляет собой сумму нескольких функций

$$r(x) = r_1(x) + r_2(x) + \dots + r_n(x) = \sum_{i=1}^n r_i(x),$$

то $y_{\text{чн}}$ ищется в виде

$$y_{\text{чн}} = y_{\text{чн}(1)} + y_{\text{чн}(2)} + \dots + y_{\text{чн}(n)} = \sum_{i=1}^n y_{\text{чн}(i)},$$

где $y_{\text{чн}(i)}$ — частное решение ДУ:

$$y'' + py' + qy = r_i(x).$$

Пример 15.14. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y'' + 4y' + 13y = 7x^2.$$

Решение

а) Находим общее решение однородного уравнения

$$y'' + 4y' + 13y = 0.$$

Его характеристическое уравнение имеет вид

$$\lambda^2 + 4\lambda + 13 = 0.$$

Решим это уравнение. Найдем дискриминант

$$D = 4^2 - 4 \cdot 13 = -36 < 0.$$

Тогда

$$\alpha = -\frac{4}{2} = -2; \quad \beta = \frac{\sqrt{-36}}{2} = 3.$$

Таким образом, общее решение однородного дифференциального уравнения запишется в виде

$$y_{\text{оо}} = e^{-2x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x).$$

б) Найдем частное решение неоднородного ДУ.

В правой части исходного ДУ стоит квадратный член. При сравнении стандартного вида уравнения (15.3) и правой части исходного уравнения очевидно, что множитель с показательной функцией отсутствует. Следовательно, принимаем $k = 0$. Данное значение k не является корнем характеристического уравнения, так как последнее вообще не имеет действительных корней.

Таким образом, проект частного решения неоднородного ДУ нужно искать в виде формулы (15.4)

$$y_{\text{чн}} = B_0 x^2 + B_1 x + B_2.$$

Несмотря на то, что в правой части исходного ДУ линейный и свободный члены отсутствуют, в выражении для $y_{\text{чн}}$ они должны обязательно присутствовать. В общем случае если многочлен в правой части имеет наивысшую степень x , равную n , то все члены с меньшими степенями необходимо включить в выражение для $y_{\text{чн}}$.

Находим производные $y_{\text{чн}}$ и подставляем частное решение и его производные в исходное ДУ:

$$y'_{\text{чн}} = 2B_0 x + B_1; \quad y''_{\text{чн}} = 2B_0;$$

$$2B_0 + 4 \cdot (2B_0 x + B_1) + 13 \cdot (B_0 x^2 + B_1 x + B_2) = 7x^2;$$

$$2B_0 + 8B_0 x + 4B_1 + 13B_0 x^2 + 13B_1 x + 13B_2 = 7x^2;$$

$$13B_0 x^2 + (8B_0 + 13B_1)x + 2B_0 + 4B_1 + 13B_2 = 7x^2.$$

Так как последнее равенство должно выполняться при любых значениях x , то необходимо, чтобы коэффициенты при степенях x в левой части были равны коэффициентам при соответствующих степенях x в правой части. Отсюда следует, что

$$\begin{cases} 13B_0 = 7, \\ 8B_0 + 13B_1 = 0, \\ 2B_0 + 4B_1 + 13B_2 = 0. \end{cases}$$

Получили систему линейных алгебраических уравнений, решая которую находим коэффициенты B_i . Получим

$$B_0 = \frac{7}{13}; \quad B_1 = -\frac{56}{169}; \quad B_2 = \frac{42}{2197}.$$

Следовательно, частное решение неоднородного уравнения имеет вид

$$y_{\text{чн}} = \frac{7}{13}x^2 - \frac{56}{169}x + \frac{42}{2197}.$$

Таким образом, запишем общее решение неоднородного ДУ:

$$y_{\text{он}} = y_{\text{оо}} + y_{\text{чн}} = e^{-2x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x) + \frac{7}{13}x^2 - \frac{56}{169}x + \frac{42}{2197}. \quad \blacktriangleright$$

Пример 15.15. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y'' - y' - 2y = xe^{3x}.$$

Решение

а) Решаем характеристическое уравнение однородного ДУ:

$$\lambda^2 - \lambda - 2 = 0; \quad D = 1^2 + 4 \cdot 2 = 9; \quad \sqrt{D} = 3;$$

$$\lambda_1 = \frac{1+3}{2} = 2; \quad \lambda_2 = \frac{1-3}{2} = -1; \quad y_{\text{оо}} = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x}.$$

б) Так как $k = 3$ не является корнем характеристического уравнения, то $y_{\text{чн}}$ ищем в виде

$$y_{\text{чн}} = e^{3x} \cdot (B_0 x + B_1);$$

$$y'_{\text{чн}} = 3e^{3x} \cdot (B_0 x + B_1) + e^{3x} \cdot B_0 = e^{3x} \cdot (3B_0 x + 3B_1 + B_0);$$

$$y''_{\text{чн}} = 3e^{3x} \cdot (3B_0 x + 3B_1 + B_0) + e^{3x} \cdot 3B_0 = e^{3x} \cdot (9B_0 x + 9B_1 + 6B_0).$$

Подставляем в исходное уравнение:

$$e^{3x} \cdot (9B_0 x + 9B_1 + 6B_0) - e^{3x} \cdot (3B_0 x + 3B_1 + B_0) - 2e^{3x} (B_0 x + B_1) = xe^{3x}.$$

Сокращая полученное равенство на e^{3x} и раскрывая скобки, получаем

$$9B_0 x + 9B_1 + 6B_0 - 3B_0 x - 3B_1 - B_0 - 2B_0 x - 2B_1 = x;$$

$$4B_0 x + 4B_1 + 5B_0 = x.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x , получаем

$$\begin{aligned} 4B_0 &= 1; \\ 4B_1 + 5B_0 &= 0. \end{aligned}$$

Решая систему, имеем

$$B_0 = \frac{1}{4}; \quad B_1 = -\frac{5}{16}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} y_{\text{чн}} &= e^{3x} \cdot \left(\frac{1}{4}x - \frac{5}{16} \right); \\ y_{\text{он}} = y_{\text{оо}} + y_{\text{чн}} &= C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x} + e^{3x} \left(\frac{1}{4}x - \frac{5}{16} \right). \end{aligned} \quad \blacktriangleright$$

Пример 15.16. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y'' - y' - 2y = xe^{2x}.$$

Решение

а) Так как левая часть данного ДУ совпадает с левой частью примера 15.15, то для однородного ДУ, опуская выводы, запишем

$$y_{\text{оо}} = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x}.$$

б) Так как $k=2$ — один из двух различных корней характеристического уравнения, то $y_{\text{чн}}$ ищем в виде формулы (15.5)

$$y_{\text{чн}} = e^{2x} \cdot x \cdot (B_0 x + B_1) = e^{2x} \cdot (B_0 x^2 + B_1 x).$$

Найдем производные:

$$\begin{aligned} y'_{\text{чн}} &= 2e^{2x} \cdot (B_0 x^2 + B_1 x) + e^{2x} \cdot (2B_0 x + B_1) = \\ &= e^{2x} \cdot (2B_0 x^2 + 2B_1 x + 2B_0 x + B_1); \\ y''_{\text{чн}} &= 2e^{2x} \cdot (2B_0 x^2 + 2B_1 x + 2B_0 x + B_1) + e^{2x} \cdot (4B_0 x + 2B_1 + 2B_0) = \\ &= e^{2x} \cdot (4B_0 x^2 + 4B_1 x + 8B_0 x + 4B_1 + 2B_0). \end{aligned}$$

Подставляя в исходное уравнение полученные выражения после сокращения на e^{2x} , получим

$$\begin{aligned} 4B_0 x^2 + 4B_1 x + 8B_0 x + 4B_1 + 2B_0 - (2B_0 x^2 + 2B_1 x + 2B_0 x + B_1) - \\ - 2(B_0 x^2 + B_1 x) = x. \end{aligned}$$

Приведя подобные члены, имеем

$$6B_0 x + 3B_1 + 2B_0 = x.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x , получаем

$$\begin{aligned} 6B_0 &= 1; \\ 3B_1 + 2B_0 &= 0. \end{aligned}$$

Откуда

$$B_0 = \frac{1}{6}; \quad B_1 = -\frac{1}{9}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} y_{\text{чн}} &= e^{2x} \cdot \left(\frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{9}x \right); \\ y_{\text{он}} = y_{\text{оо}} + y_{\text{чн}} &= C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x} + e^{2x} \left(\frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{9}x \right). \quad \blacktriangleright \end{aligned}$$

Пример 15.17. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y' + 9y = 9\cos 3x + 16\sin 3x.$$

Решение

а) Так как $\lambda^2 + 9 = 0$, то $\lambda = \pm 3i$. Здесь $\alpha = 0$; $\beta = 3$. Тогда общее решение однородного уравнения имеет вид

$$y_{\text{оо}} = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x.$$

б) Так как $p = 0$ и $q = 9 > 0$, то в формуле (15.6) принимаем $s = 1$. Следовательно, частное решение неоднородного уравнения ищем в виде

$$y_{\text{чн}} = x(A\cos 3x + B\sin 3x).$$

Вычислим $y'_{\text{чн}}$, $y''_{\text{чн}}$:

$$\begin{aligned} y'_{\text{чн}} &= A\cos 3x + B\sin 3x + x(-3A\sin 3x + 3B\cos 3x); \\ y''_{\text{чн}} &= -6A\sin 3x + 6B\cos 3x + x(-9A\cos 3x - 9B\sin 3x). \end{aligned}$$

Подставляя $y_{\text{чн}}$, $y''_{\text{чн}}$ в исходное неоднородное уравнение, после приведения подобных членов получаем

$$-6A\sin 3x + 6B\cos 3x = 9\cos 3x + 16\sin 3x.$$

Откуда: $A = -\frac{8}{3}$, $B = \frac{3}{2}$.

Значит,

$$y_{\text{чн}} = x \left(-\frac{8}{3}\cos 3x + \frac{3}{2}\sin 3x \right).$$

Общее уравнение неоднородного уравнения имеет вид

$$y_{\text{он}} = y_{\text{оо}} + y_{\text{чн}} = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x - \frac{8}{3}x \cos 3x + \frac{3}{2}x \sin 3x. \quad \blacktriangleright$$

Вопросы для самоконтроля

1. Какое уравнение называется дифференциальным? На какие классы делятся дифференциальные уравнения?
2. Что называется порядком дифференциального уравнения? Запишите общий вид дифференциального уравнения n -го порядка.
3. Что называется решением дифференциального уравнения? Чем отличаются общее и частное решения?
4. Сколько независимых постоянных величин содержит общее решение дифференциального уравнения n -го порядка?
5. Каким образом из общего решения выделить нужное частное решение?
6. Запишите общий вид дифференциального уравнения первого порядка и его общее решение.
7. Что называется решением задачи Коши?
8. Что представляет собой графическая интерпретация общего и частного решения дифференциального уравнения первого порядка?
9. Какое дифференциальное уравнение первого порядка называется уравнением с разделяющимися переменными? Как найти его общее решение?
10. Запишите общий вид однородного дифференциального уравнения первого порядка. Как найти его общее решение?
11. Запишите общий вид линейного дифференциального уравнения первого порядка. Как найти его общее решение при отсутствии и наличии правой части?
12. Какие дифференциальные уравнения второго порядка допускают понижение порядка? Как решать такие уравнения?
13. Какое уравнение называется линейным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами?
14. Что называется характеристическим уравнением линейного однородного (без правой части) дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами? Запишите общее решение такого дифференциального уравнения при различных знаках дискриминанта характеристического уравнения.
15. Сумме каких решений равно общее решение линейного неоднородного (с правой частью) дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами?
16. Сформулируйте правило нахождения частного решения линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами, если правая часть представляет собой произведение показательной функции на многочлен.

Задачи для самостоятельного решения

Найти общее решение дифференциального уравнения и частное решение при заданном начальном условии.

15.1. $y' = (5x^3 + 2x) \cdot y$; $y(0) = 3$.

15.2. $y' \cdot (x^2 + 4) = y^2$; $y(2) = \frac{8}{\pi}$.

15.3. $(x^3 - 19) \cdot y' = x^2 y$; $y(3) = 4$.

15.4. $(x^2 + x) \cdot y' = 2y + 1$; $y(1) = \frac{1}{2}$.

15.5. $y' \cdot \operatorname{tg} x + y = 2$; $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$.

Найти общее решение дифференциального уравнения.

15.6. $3y' = \frac{y^2}{x^2} + 10\frac{y}{x} + 10$.

15.7. $y' = \frac{y^2 - x^2}{xy}$.

15.8. $xy' = y \cdot (1 + \ln y - \ln x)$.

15.9. $x^2 y' = x^2 + 3xy + y^2$.

15.10. $xy' - y = x^2 \cdot \cos x$.

15.11. $y' - \frac{3y}{x} = x^4 \cdot e^{-x^2}$.

15.12. $(x^2 + 1)y' - xy = x^3 + x$.

15.13. $(xy' - 1) \cdot \ln x = 2y$.

15.14. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$x^3 y'' + x^2 y' = 1.$$

15.15. Найти общий интеграл дифференциального уравнения

$$y'' + 2y \cdot (y')^3 = 0.$$

Найти общее решение линейных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами.

15.16. $y'' - 5y' + 6y = 0$.

15.17. $y'' + 2y' + y = 0$.

$$15.18. \quad y'' - 2y' + 17y = 0.$$

$$15.19. \quad y'' + 2y' - 15y = 3e^{2x}.$$

$$15.20. \quad y'' + 2y' - 15y = 3e^{3x}.$$

$$15.21. \quad y'' + 4y' - 12y = 3x^2 + 7.$$

$$15.22. \quad y'' + 4y' + 8y = e^{3x} \cdot (2x + 5).$$

$$15.23. \quad y'' + 2y' - 3y = x^2 e^{-x}.$$

Глава 16

ВЕКТОРНЫЙ АНАЛИЗ И ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ПОЛЯ

16.1. Векторная функция скалярного аргумента

Пусть некоторая кривая в пространстве описана параметрически:

$$x = \varphi(t); y = \psi(t); z = f(t).$$

Произвольную точку кривой зададим радиусом-вектором (рис. 16.1)

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k},$$

где x, y, z — координаты произвольной точки A ; $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ — ортонормированные векторы.

Подставляя в последнее выражение значения x, y, z , получим

$$\vec{r} = \varphi(t)\vec{i} + \psi(t)\vec{j} + f(t)\vec{k}.$$

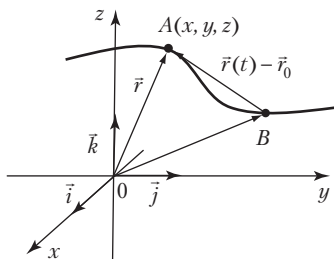


Рис. 16.1. Кривая, заданная параметрически

Таким образом, радиус-вектор любой точки кривой может рассматриваться как некоторая векторная функция скалярного аргумента t . При изменении параметра t изменяется величина и направление вектора $\vec{r}$.

Пусть при начальном $t = t_0$ существуют пределы

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \varphi(t) = \varphi_0; \quad \lim_{t \rightarrow t_0} \psi(t) = \psi_0; \quad \lim_{t \rightarrow t_0} f(t) = f_0.$$

Тогда вектор $\vec{r}_0 = \varphi_0 \vec{i} + \psi_0 \vec{j} + f_0 \vec{k}$ будет пределом функции $\vec{r}(t)$, т.е.

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \vec{r}(t) = \vec{r}_0.$$

Вычислим предел модуля разности векторов $\vec{r}(t) - \vec{r}_0$.

Очевидно, что

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow t_0} |\vec{r}(t) - \vec{r}_0| &= \lim_{t \rightarrow t_0} \sqrt{[\varphi(t) - \varphi_0]^2 + [\psi(t) - \psi_0]^2 + [f(t) - f_0]^2} = \\ &= \sqrt{\left[\lim_{t \rightarrow t_0} \varphi(t) - \varphi_0 \right]^2 + \left[\lim_{t \rightarrow t_0} \psi(t) - \psi_0 \right]^2 + \left[\lim_{t \rightarrow t_0} f(t) - f_0 \right]^2} = 0, \end{aligned}$$

откуда

$$\lim_{t \rightarrow t_0} |\vec{r}(t)| = |\vec{r}_0|.$$

Чтобы найти производную векторной функции скалярного аргумента, рассмотрим приращение радиуса-вектора при некотором приращении параметра t (рис. 16.2).

В соответствии с принятыми выше обозначениями запишем

$$\vec{r}(t + \Delta t) = \varphi(t + \Delta t) \vec{i} + \psi(t + \Delta t) \vec{j} + f(t + \Delta t) \vec{k};$$

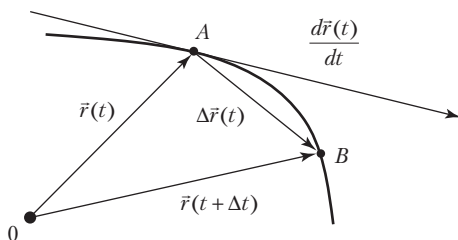


Рис. 16.2. Элемент кривой

$$\Delta \vec{r} = \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t);$$

$$\Delta \vec{r} = [\varphi(t + \Delta t) - \varphi(t)]\vec{i} + [\psi(t + \Delta t) - \psi(t)]\vec{j} + [f(t + \Delta t) - f(t)]\vec{k}.$$

Разделим левую и правую части на Δt

$$\frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{\varphi(t + \Delta t) - \varphi(t)}{\Delta t} \vec{i} + \frac{\psi(t + \Delta t) - \psi(t)}{\Delta t} \vec{j} + \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t} \vec{k}.$$

Из последнего равенства, если существуют производные $\varphi'(t)$, $\psi'(t)$, $f'(t)$, то

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \varphi'(t)\vec{i} + \psi'(t)\vec{j} + f'(t)\vec{k} = \vec{r}'.$$

Это выражение — производная вектора $\vec{r}$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt} \vec{i} + \frac{dy}{dt} \vec{j} + \frac{dz}{dt} \vec{k},$$

модуль которого равен

$$\left| \frac{d\vec{r}}{dt} \right| = \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2 + [f'(t)]^2}.$$

Если уравнение кривой записано в виде

$$x = \varphi(t); y = \psi(t); z = f(t),$$

то в произвольной точке кривой $A(x_A, y_A, z_A)$ с радиусом-вектором

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = \varphi(t)\vec{i} + \psi(t)\vec{j} + f(t)\vec{k}$$

можно провести **касательную прямую**, описываемую уравнениями

$$\frac{x - x_A}{m} = \frac{y - y_A}{n} = \frac{z - z_A}{p},$$

где m, n, p — координаты вектора $\frac{d\vec{r}}{dt}$, параллельного плоскости.

Так как производная $\frac{d\vec{r}}{dt}$ — вектор, направленный по касательной к кривой, то

$$\frac{x - x_A}{\frac{dx_A}{dt}} = \frac{y - y_A}{\frac{dy_A}{dt}} = \frac{z - z_A}{\frac{dz_A}{dt}}. \quad (16.1)$$

Тогда уравнение **нормальной плоскости** к кривой имеет вид

$$\frac{dx_A}{dt}(x - x_A) + \frac{dy_A}{dt}(y - y_A) + \frac{dz_A}{dt}(z - z_A) = 0. \quad (16.2)$$

Свойства производной векторной функции скалярного аргумента.

1. $\frac{d}{dt}(\vec{r}_1 + \vec{r}_2 - \vec{r}_3) = \frac{d\vec{r}_1}{dt} + \frac{d\vec{r}_2}{dt} - \frac{d\vec{r}_3}{dt}.$
2. $\frac{d(\lambda\vec{r})}{dt} = \lambda \frac{d\vec{r}}{dt},$ где $\lambda = \lambda(t)$ — скалярная функция.
3. $\frac{d(\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2)}{dt} = \frac{d\vec{r}_1}{dt} \cdot \vec{r}_2 + \vec{r}_1 \cdot \frac{d\vec{r}_2}{dt}.$
4. $\frac{d(\vec{r}_1 \times \vec{r}_2)}{dt} = \frac{d\vec{r}_1}{dt} \times \vec{r}_2 + \vec{r}_1 \times \frac{d\vec{r}_2}{dt}.$

Пример 16.1. Составить уравнения касательной и нормальной плоскостей к линии, заданной уравнением $\vec{r} = \vec{i} \cos t + \vec{j} \sin t + \vec{k} \sqrt{3}t$ при $t = \pi/2$.

Решение

Уравнения, описывающие кривую, по осям координат имеют вид.

$$x(t) = \cos t; y(t) = \sin t; z(t) = \sqrt{3}t.$$

В формуле (16.1) находим значения функций и их производных в заданной точке:

$$x_A = x(\pi/2) = 0; y_A = y(\pi/2) = 1; z = z(\pi/2) = \pi\sqrt{3}/2;$$

$$x'(t) = -\sin t; y'(t) = \cos t; z'(t) = \sqrt{3};$$

$$\frac{dx_A}{dt} = x'(\pi/2) = -1; \frac{dy_A}{dt} = y'(\pi/2) = 0; \frac{dz_A}{dt} = z'(\pi/2) = \sqrt{3}.$$

Подставляя эти данные в уравнение (16.1), получим уравнение касательной плоскости

$$\frac{x-0}{-1} = \frac{y-1}{0} = \frac{z - \frac{\pi\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{3}}.$$

Нулевое значение в знаменателе для y показывает, что y может принимать любые значения, т.е. плоскость проходит параллельно оси y .

В соответствии с уравнением (16.2) нормальную плоскость запишем как

$$-1 \cdot (x - 0) + 0 + \sqrt{3} \left(z - \frac{\pi\sqrt{3}}{2} \right) = 0; \quad -x + \sqrt{3}z - \frac{3\pi}{2} = 0. \quad \blacktriangleright$$

16.2. Параметрическое задание функции

Иногда в исследованиях графиков, особенно сложного вида, более удобным является параметрическое задание функции.

Рассмотрим производную функции, заданной параметрически.

Пусть функция задана в виде
$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}, \quad t_0 \leq t \leq T.$$

Предположим, что эти зависимости имеют производные и функция $x = \varphi(t)$ имеет обратную функцию $t = \Phi(x)$.

Тогда функция $y = \psi(t)$ может быть рассмотрена как сложная функция $y = \psi[\Phi(x)]$. Вычислим производную этой функции

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{d\psi(t)}{dt} \cdot \frac{d\Phi(x)}{dx}.$$

Так как $\Phi(x)$ — обратная функция, то
$$\frac{d\Phi(x)}{dx} = \frac{1}{\frac{d\varphi(t)}{dt}}.$$

Окончательно получаем:
$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{d\psi(t)}{dt}}{\frac{d\varphi(t)}{dt}} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}.$$

Таким образом, можно вычислить производную функции, заданной параметрически, не находя непосредственной зависимости y от x .

Исследование и функции, которая задана параметрической системой уравнений вида

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases}$$

производится аналогично исследованию функции от одной переменной $y = f(x)$.

В этом случае для поиска экстремальных значений функции находим производные

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \varphi'(t), \\ \frac{dy}{dt} = \psi'(t). \end{cases}$$

Теперь можно найти производную $\frac{dy}{dx} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$.

Далее вычисляются значения параметра t , при которых хотя бы одна из производных $\varphi'(t)$ или $\psi'(t)$ равна нулю или не существует. Такие значения параметра t называются **критическими**.

Пусть таких точек будет k . Эти точки делят числовую ось $0t$ на интервалы (t_1, t_2) , (t_2, t_3) , ..., (t_{k-1}, t_k) . Для них на числовой оси $0x$ находим соответствующие им интервалы (x_1, x_2) , (x_2, x_3) , ..., (x_{k-1}, x_k) .

На каждом из полученных интервалов вычисляем знак производной $\frac{dy}{dx}$, тем самым определяя промежутки возрастания и убывания функции. Принимаем решение об экстремальных точках.

Далее находим вторые производные функции $\varphi''(t)$ и $\psi''(t)$. Приравнявая их к нулю (или не существуют), вычисляем критические значения t . Находим интервалы с положительным или отрицательным значением второй производной, по которым определяем направление выпуклости кривой на каждом интервале. Вычисляем точки перегиба.

Определение асимптот производится обычным способом отдельно для x и y при различных значениях t .

В остальном исследование производится так же, как и исследование функции, заданной в виде $y = f(x)$.

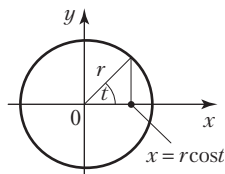
Ниже рассмотрим некоторые известные **типы параметрически** заданных кривых.

Элементарные кривые в параметрической форме

Окружность

Если центр окружности находится в начале координат, то координаты любой ее точки могут быть найдены по формулам:

$$\begin{cases} x = r \cos t, \\ y = r \sin t, \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$



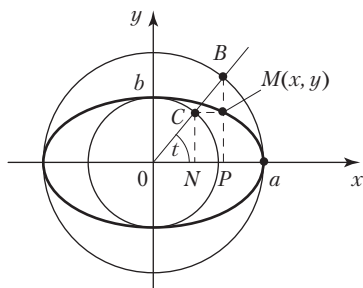
Если исключить параметр t , то получим каноническое уравнение окружности:

$$x^2 + y^2 = r^2(\cos 2t + \sin 2t) = r^2 \text{ или } \frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2} = 1.$$

Эллипс

Как известно, каноническое уравнение эллипса имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$



Для произвольной точки эллипса $M(x, y)$ из геометрических соображений можно записать:

$$\text{из } \triangle OBP: |OB| = a = \frac{|OP|}{\cos t} = \frac{x}{\cos t};$$

$$\text{из } \triangle OCN: |OC| = b = \frac{|CN|}{\sin t} = \frac{y}{\sin t},$$

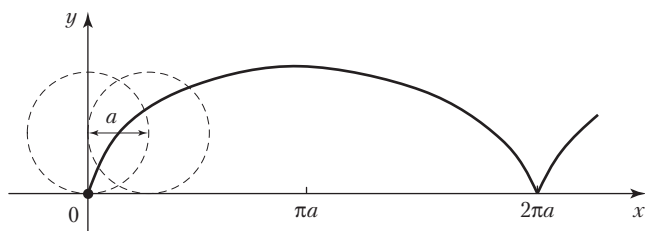
где a — большая полуось эллипса; b — малая полуось эллипса; x и y — координаты точки M .

Тогда получаем параметрические уравнения эллипса:

$$\begin{cases} x = a \cos t \\ y = b \sin t \end{cases}, \text{ где } 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Угол t называется эксцентрическим углом.

Циклоида



Циклоидой называется кривая, которую описывает некоторая точка O , лежащая на окружности, когда окружность без скольжения катится по прямой.

Пусть окружность радиуса a перемещается без скольжения вдоль оси x , x, y — текущие координаты точки O . Параметрическое уравнение циклоиды имеет вид

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}, 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Если исключить параметр t , то получаем

$$x = 2\pi a - \left(a \cdot \arccos \frac{a-y}{a} - \sqrt{2ay - y^2} \right), \pi a \leq x \leq 2\pi a \text{ или}$$

$$x = a \cdot \arccos \frac{a-y}{a} - \sqrt{2ay - y^2}, 0 \leq x \leq \pi a.$$

Как очевидно, параметрическое уравнение циклоиды намного удобнее в использовании, чем уравнение, непосредственно выражающее одну координату через другую.

Астроида

Данная кривая представляет собой траекторию точки окружности радиуса $R/4$, вращающейся без скольжения по внутренней стороне окружности радиуса R .

Параметрические уравнения, задающие изображенную выше кривую:

$$\begin{cases} x = a \cos^3 t \\ y = a \sin^3 t \end{cases}, 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Преобразовав их, получим

$$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}(\cos^2 t + \sin^2 t) = a^{2/3}.$$

Пример 16.2. Найти производную функции $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Решение

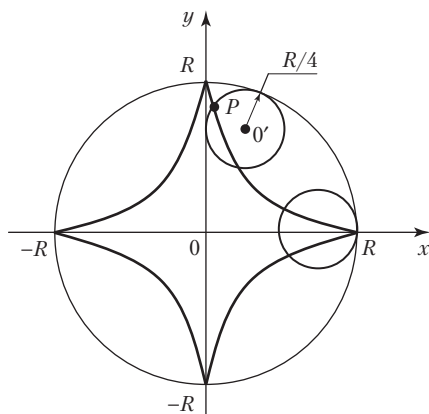
Способ 1: Выразим одну переменную через другую

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2},$$

тогда

$$\frac{dy}{dx} = \pm \frac{b(-2x)}{2a\sqrt{a^2 - x^2}} = \pm \frac{bx}{a\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

Способ 2: Применим параметрическое задание данной окружности

$$\begin{cases} x = a \cos t, \\ y = b \sin t; \end{cases}$$


$$\frac{dy}{dx} = \frac{b \cos t}{-a \sin t} = -\frac{b}{a \operatorname{tg} t}.$$

Так как

$$x^2 = a^2 \cos^2 t; \quad \cos^2 t = \frac{x^2}{a^2},$$

то

$$\frac{1}{\cos^2 t} = 1 + \operatorname{tg}^2 t \Rightarrow \operatorname{tg}^2 t = -1 + \frac{a^2}{x^2} = \frac{a^2 - x^2}{x^2}; \quad \operatorname{tg} t = \pm \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x};$$

$$\frac{dy}{dx} = \pm \frac{bx}{a\sqrt{a^2 - x^2}}. \quad \blacktriangleright$$

16.3. Кривизна плоской кривой

Рассмотрим текущую точку A на плоской кривой.

Угол α поворота касательной к кривой при переходе от точки A к точке B называется **углом смежности** (рис. 16.3).

Соответственно, более изогнута та кривая, у которой при одинаковой длине больше угол смежности α .

Средней кривизной $K_{\text{ср}}$ дуги $\overset{\cup}{AB}$ называется отношение соответствующего угла смежности α к длине дуги $\overset{\cup}{AB}$

$$K_{\text{ср}} = \frac{\alpha}{\overset{\cup}{AB}}.$$

Отметим, что для одной кривой средняя кривизна ее различных частей может быть разной, т.е. данная величина характеризует не кривую целиком, а некоторый ее участок.

Кривизной дуги в точке A называется предел средней кривизны при стремлении длины дуги $\overset{\cup}{AB} \rightarrow 0$, т.е.

$$K_A = \lim_{A \rightarrow B} K_{\text{ср}} = \lim_{\overset{\cup}{AB} \rightarrow 0} \frac{\alpha}{\overset{\cup}{AB}}.$$

Легко видеть, что если обозначить $\overset{\cup}{AB} = S$, то при условии, что угол α — функция, которая зависит от S и дифференцируема, то

$$K_A = \frac{d\alpha}{dS}.$$

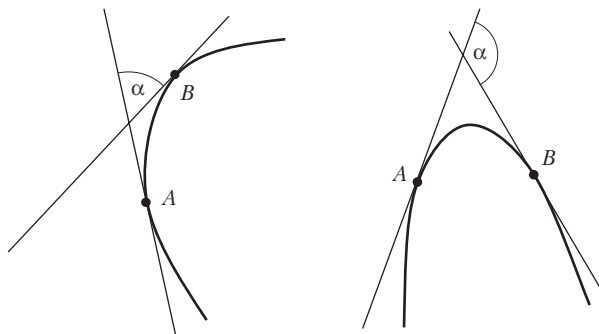


Рис. 16.3. Кривизна линии

Радиусом кривизны кривой называется величина

$$R = \left| \frac{1}{K_A} \right|.$$

Пусть кривая задана уравнением $y = f(x)$. Тогда в соответствии с рис. 16.4

$$K_{\text{cp}} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta S} \text{ и } \lim_{\Delta S \rightarrow 0} K_{\text{cp}} = \frac{d\varphi}{dS}.$$

Если $\varphi = \varphi(x)$ и $S = S(x)$, то $\frac{d\varphi}{dS} = \frac{\frac{d\varphi}{dx}}{\frac{dS}{dx}}.$

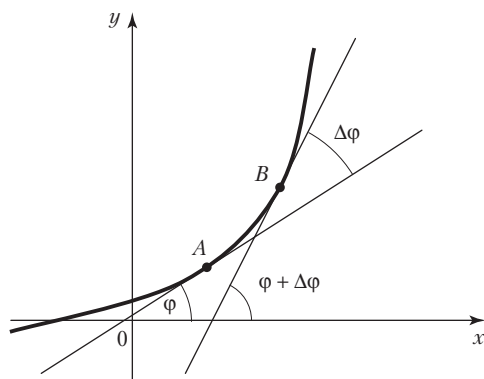


Рис. 16.4. График кривой

В то же время

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \varphi \Rightarrow \varphi = \operatorname{arctg} \frac{dy}{dx} \Rightarrow \frac{d\varphi}{dx} = \frac{\frac{d^2 y}{dx^2}}{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

Для дифференциала дуги выполняется равенство $\frac{dS}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$, тогда

$$\frac{d\varphi}{dS} = \frac{\frac{d\varphi}{dx}}{\frac{dS}{dx}} = \frac{\frac{\frac{d^2 y}{dx^2}}{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}} = \frac{\frac{d^2 y}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}.$$

Окончательно можно записать

$$|K_A| = \left| \frac{d\varphi}{dS} \right| = \frac{\left| \frac{d^2 y}{dx^2} \right|}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right]^{3/2}}.$$

В других обозначениях

$$|K_A| = \frac{y''}{\left[1 + (y')^2 \right]^{3/2}}.$$

Рассмотрим кривую, заданную уравнением $y = f(x)$.

Если построить в точке A кривой нормаль, направленную в сторону выпуклости, то можно отложить отрезок $AC = R$, где R — радиус кривизны кривой в точке A (рис. 16.5). Тогда точка $C(a, b)$ называется **центром кривизны** кривой в точке A .

Круг радиуса R с центром в точке C называется **кругом кривизны**.

Очевидно, что в точке A кривизна кривой и кривизна окружности равны.

Можно показать, что координаты центра кривизны могут быть найдены по формулам:

$$a = x - \frac{y'(1 + y'^2)}{y''}; \quad b = y + \frac{1 + y'^2}{y''}.$$

Совокупность всех центров кривизны кривой образуют новую линию, которая называется **эволютой** по отношению к данной кривой.

По отношению к эволюте исходная кривая называется **эвольвентой**.

Приведенные выше уравнения для вычисления координат центров кривизны кривой определяют уравнение эволюты.

Свойства эволюты (в соответствии с рис. 16.6).

1. Нормаль к данной кривой является касательной к ее эволюте.

2. Модуль разности радиусов кривизны в любых точках кривой равен модулю длины соответствующей эволюты.

Как показано на рис. 16.6, какой-либо эволюте соответствует бесконечное число эвольвент.

Указанные выше свойства можно проиллюстрировать следующим образом: если на эволюту натянута нить, то эвольвента получается как траекторная линия конца

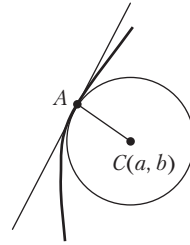


Рис. 16.5. Центр кривизны

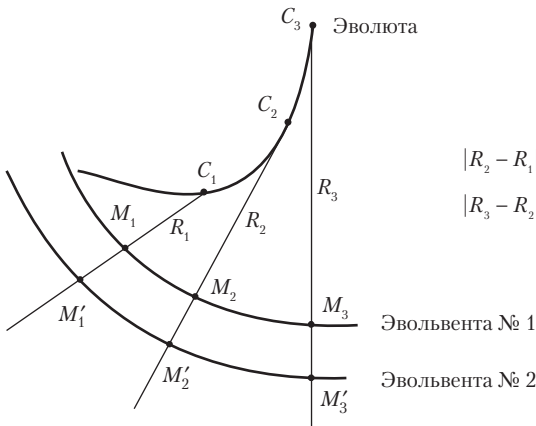


Рис. 16.6. Эволюта и эвольвента

нити при ее сматывании или разматывании при условии, что нить находится в натянутом состоянии.

16.4. Элементы теории поля

Если каждой точке P пространства M ставится в соответствие некоторая скалярная величина U , то задается **скалярное поле** $U(M)$.

Если каждой точке P пространства M ставится в соответствие вектор $\vec{F}$, то задается **векторное поле** $\vec{F}(M)$.

Пусть в пространстве M задана поверхность Δ . Будем считать, что в каждой точке P поверхности определяется положительное направление нормали единичным вектором $\vec{n}(P)$ (рис. 16.7).

В пространстве M зададим векторное поле, поставив в соответствие каждой точке пространства вектор, определенный координатами:

$$\vec{F} = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}.$$

Если разбить каким-либо образом рассматриваемую поверхность на частичные участки Δ_i и составить сумму

$$\sum_i [\vec{F}(P_i)\vec{n}(P_i)]\Delta_i,$$

где $\vec{F}\vec{n}$ — скалярное произведение, то предел этой суммы при стремлении к нулю площадей частичных участков разбиения (если этот предел существует) будет **поверхностным интегралом**

$$\lim_{\Delta_i \rightarrow 0} \sum_i [\vec{F}(P_i)\vec{n}(P_i)]\Delta_i = \iint_{\Delta} \vec{F}\vec{n}d\Delta.$$

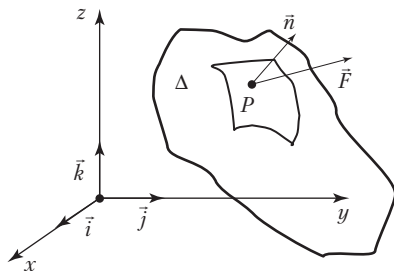


Рис. 16.7. Поверхность пространства

Поверхностный интеграл $\iint_{\Delta} \vec{F} \vec{n} d\Delta$ называется **поток** **векторного поля** $\vec{F}$ *через поверхность* Δ .

Если поверхность разбита на конечное число частичных поверхностей, то поток векторного поля через всю поверхность будет равен сумме потоков через частичные поверхности.

Если преобразовать скалярное произведение в координатную форму, то получаем соотношение

$$\begin{aligned} \iint_{\Delta} \vec{F} \vec{n} d\Delta &= \iint_{\Delta} [P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma] d\Delta = \\ &= \iint_{\Delta} P dydz + Q dzdx + R dxdy. \end{aligned}$$

Если на области Δ существует функция $f(x, y, z)$, имеющая непрерывные частные производные, для которых выполняются свойства

$$\frac{\partial f}{\partial x} = P; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = Q; \quad \frac{\partial f}{\partial z} = R,$$

то такую функцию называют **потенциальной функцией** или **потенциалом** вектора $\vec{F}$.

Тогда вектор $\vec{F}$ является **градиентом** функции f

$$\vec{F} = \text{grad } f = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{k}.$$

Вектор $\vec{B}$, компоненты которого соответственно равны

$$B_x = \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}; \quad B_y = \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}; \quad B_z = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y},$$

называется **вихрем** или **ротором** вектора $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ и обозначается

$$\text{rot } \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}.$$

Выражение

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

называется **дивергенцией вектора** (дивергенцией векторной функции) $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ и обозначается

$$\operatorname{div} \vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}.$$

Если компоненты вихря B равны нулю, т.е.

$$\frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}; \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}; \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y},$$

то поле является **потенциальным** (безвихревым).

Пример 16.3. Найти $\operatorname{rot}(\vec{r} \cdot \vec{a}) \cdot \vec{r}$, если

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}; \quad \vec{a} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}.$$

Решение

Найдем скалярные произведения: $\vec{r} \cdot \vec{a} = x + y + z$;

$$(\vec{r} \cdot \vec{a}) \cdot \vec{r} = \{P, Q, R\} = \{x^2 + xy + xz, yx + y^2 + yx, xz + yz + z^2\}.$$

Заметим, что последнее скалярное произведение является уже вектором. Тогда

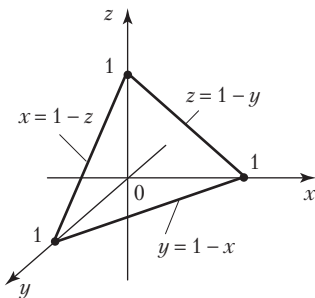
$$\begin{aligned} \operatorname{rot}(\vec{r} \cdot \vec{a}) \cdot \vec{r} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \vec{i} \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) - \vec{j} \left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z} \right) + \vec{k} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) = \\ &= \vec{i}(z - y) - \vec{j}(z - x) + \vec{k}(y - x). \end{aligned}$$

Пример 16.4. Найти поток Π векторного поля $\vec{F} = (y - x)\vec{i} + (x + y)\vec{j} + y\vec{k}$ через сторону треугольника S , вырезанного на рисунке из плоскости $x + y + z - 1 = 0$ координатными плоскостями.

Решение

По определению

$$\begin{aligned} \Pi &= \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} ds = \\ &= \iint_S (y - x) dy dz + (x + y) dx dz + y dx dy = \\ &= \int_0^1 dy \int_0^{1-y} (y + y + z - 1) dz + \\ &+ \int_0^1 dz \int_0^{1-z} (x + 1 - z - x) dx + \int_0^1 dx \int_0^{1-x} y dy = \end{aligned}$$



$$= \int_0^1 \left[2yz + \frac{z^2}{2} - z \right]_0^{1-y} dy + \int_0^1 [x - zx]_0^{1-z} dz + \int_0^1 \frac{y^2}{2} \Big|_0^{1-x} dx.$$

Применим под интегралами формулу Ньютона — Лейбница

$$\begin{aligned} \Pi &= \int_0^1 \left[2y - 2y^2 + \frac{1}{2} - y + \frac{y^2}{2} - 1 + y \right] dy + \int_0^1 [1 - z - z + z^2] dz + \\ &\quad + \int_0^1 \left[\frac{1}{2} - x + \frac{x^2}{2} \right] dx = \\ &= \int_0^1 \left[-\frac{3y^2}{2} + 2y - \frac{1}{2} \right] dy + \left[z - z^2 + \frac{z^3}{3} \right]_0^1 + \left[\frac{x}{2} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} \right]_0^1 = \\ &= \left[-\frac{y^3}{2} + y^2 - \frac{y}{2} \right]_0^1 + 1 - 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = -\frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{2} + \frac{3}{6} = \frac{1}{2}. \quad \blacktriangleright \end{aligned}$$

Пример 16.5. Найти $\operatorname{div}(\operatorname{grad} f)$, если $f = e^{x+y+z}$.

Решение

Выпишем компоненты $\operatorname{grad} f$:

$$P = \frac{\partial f}{\partial x} = e^{x+y+z} \cdot (x + y + z) \cdot x = e^{x+y+z};$$

$$Q = \frac{\partial f}{\partial y} = e^{x+y+z};$$

$$R = \frac{\partial f}{\partial z} = e^{x+y+z}.$$

Тогда

$$\operatorname{grad} f = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{k} = e^{x+y+z} [\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}].$$

Компоненты дивергенции градиента функции

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{\partial R}{\partial z} = e^{x+y+z}.$$

Таким образом

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad} f) = e^{x+y+z} + e^{x+y+z} + e^{x+y+z} = 3e^{x+y+z} = 3f. \quad \blacktriangleright$$

Пример 16.6. Определить, является ли векторное поле потенциальным

$$\vec{F} = (5x + 6yz; 5y + 6xz; 5z + 6xy),$$

и найти его потенциал.

Решение

Вычислим компоненты градиента.

Так как

$$\text{grad } f = \left\{ \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right\},$$

то обозначим

$$P = \frac{\partial f}{\partial x} = 5x + 6yz; \quad Q = \frac{\partial f}{\partial y} = 5y + 6xz; \quad R = \frac{\partial f}{\partial z} = 5z + 6xy.$$

Если поле потенциальное, следовательно, должны выполняться следующие равенства:

$$1) \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}; \quad 6z = 6z;$$

$$2) \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}; \quad 6x = 6x;$$

$$3) \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}; \quad 6y = 6y.$$

Эти условия эквивалентны условию равенства нулю ротора векторного поля. Справедливость этого утверждения следует из формулы ротора.

Таким образом, поле потенциальное. Потенциал находится по формуле

$$\begin{aligned} u &= \int_0^x P dx + \int_0^y Q dy + \int_0^z R dz = \\ &= \int_0^x (5x + 6yz) dx + \int_0^y (5y + 6xz) dy + \int_0^z (5z + 6xy) dz = \\ &= \frac{5}{2} x^2 + \frac{5}{2} y^2 + \frac{5}{2} z^2 + 18xyz. \end{aligned}$$

►

Вопросы для самоконтроля

1. Что называется векторной функцией скалярного аргумента?
2. Запишите выражение для производной вектора.
3. Укажите основные свойства векторной функции скалярного аргумента.

4. Запишите параметрические уравнения окружности, эллипса, астроиды.
5. Что называется средней кривизной дуги; кривизной дуги в точке; радиусом кривизны; центром кривизны?
6. Что называется векторным полем?
7. Что называется потоком векторного поля?
8. Что называется ротором (вихрем) векторной функции, дивергенцией?
9. Запишите выражения для определения ротора и дивергенции.
10. Как называется поле, у которого компоненты вихря равны нулю?

Ответы к задачам

Глава 1

$$1.1. \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & -4 & 0 \\ 4 & -3 & 2 \\ -3 & 2 & 0 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}, 1.2. \begin{pmatrix} -2 & -9 & 16 & 5 \\ 3 & 0 & -8 & -7 \end{pmatrix}.$$

$$1.3. A \cdot B = \begin{pmatrix} 20 & 8 & -23 \\ -3 & 4 & 16 \\ 2 & -3 & -7 \end{pmatrix}; B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 11 & 0 \\ 1 & 17 & 3 \\ 13 & -14 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$1.4. (A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C) = \begin{pmatrix} 33 \\ -18 \\ -31 \\ 32 \end{pmatrix}, 1.5. \begin{pmatrix} 61 & 33 & 2 \\ -16 & 6 & 36 \\ -9 & -6 & 25 \end{pmatrix}.$$

$$1.6. -40. 1.7. 268. 1.8. \begin{pmatrix} \frac{16}{59} & \frac{6}{59} & -\frac{1}{59} \\ \frac{1}{59} & -\frac{7}{59} & \frac{11}{59} \\ -\frac{10}{59} & \frac{11}{59} & \frac{8}{59} \end{pmatrix}, 1.9. 2.$$

Глава 2

$$2.1. x_1 = -1; x_2 = 4; x_3 = 1. 2.2. x_1 = 2; x_2 = -1; x_3 = 3.$$

$$2.3. \begin{pmatrix} -\frac{5}{41} & -\frac{6}{41} & \frac{19}{41} \\ \frac{4}{41} & \frac{13}{41} & -\frac{7}{41} \\ \frac{11}{41} & \frac{5}{41} & -\frac{9}{41} \end{pmatrix}, 2.4. 4. 2.5. x_1 = 3; x_2 = 2; x_3 = -3.$$

$$2.6. \text{ Несовместна.}$$

2.7. Общее решение:

$$x = \left(1 - \frac{2}{3}t + \frac{1}{6}s; 1 + \frac{1}{7}t - \frac{11}{14}s; 1 - \frac{13}{21}t - \frac{2}{21}s; t; s \right);$$

базисное решение: $(1; 1; 1; 0; 0)$.

2.8. Общее решение: $x = \left(\frac{19}{5} - \frac{4}{5}t; -\frac{12}{5} + \frac{7}{5}t; t \right);$

базисное решение: $\left(\frac{19}{5}; -\frac{12}{5}; 0 \right)$.

2.9. Имеет. Общее решение: $x = \left(-\frac{7}{16}t; \frac{11}{16}t; t \right)$. Частное ненулевое решение, например, $\left(-\frac{7}{16}; \frac{11}{16}; 1 \right)$.

Глава 3

3.1. $3\sqrt{5}$. 3.2. а) $\sqrt{290}$; б) -112 ; в) $-\frac{11}{3\sqrt{406}}$. 3.3. a и c ; b и c .

3.4. Да. $c = \frac{1}{7}a + \frac{5}{7}b$. 3.5. Да. $d = \frac{3}{2}a - \frac{3}{2}b - c$. 3.6. -44 .

3.7. Да. $c = \frac{3-2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}a + \frac{3\sqrt{2}+2}{\sqrt{3}}b$. 3.8. $\sqrt{6} + \sqrt{74}$. 3.9. $(-5; -1; 7)$.

3.10. 14.

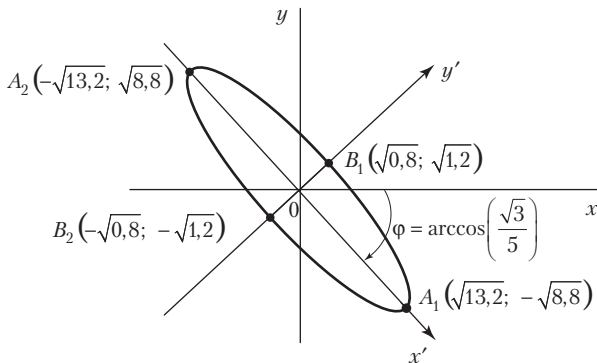
Глава 4

4.1. $\lambda = 3, x = (\beta, \beta)$ и $\lambda = 2, x = (2\beta, \beta)$.

4.2. $\lambda = 7, x = (\beta, 5\beta)$ и $\lambda = 1, x = (-\beta, \beta)$.

4.3. $\lambda = 5, x = (\beta, \beta)$ и $\lambda = 3, x = (\beta, 3\beta)$.

4.4.



Глава 5

5.1. а) $-2 + 10i$; б) $5 - i$; в) $2 + i$; г) $2i$.

$$5.2. z_1 = \sqrt{3} \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right); z_1 = 3 \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right);$$

$$z_1 z_2 = 3\sqrt{3} \left(\cos \frac{5\pi}{12} + i \sin \frac{5\pi}{12} \right); \frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{3}}{3} \left[\cos \left(-\frac{\pi}{12} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{12} \right) \right].$$

5.3. $243i$. 5.4. $\sqrt{3} + i$; $-1 + i\sqrt{3}$; $-\sqrt{3} - i$; $1 - i\sqrt{3}$.

$$5.5. \sqrt{13} \cdot e^{i \arccos \left(\frac{2}{\sqrt{13}} \right)}; \sqrt{2} \cdot e^{\frac{i\pi}{4}}; 2 \cdot e^{\frac{i\pi}{6}}.$$

Глава 6

6.1. а) $4x - 7y - 14 = 0$; б) $3x - y + 5 = 0$; в) $x + 2y - 5 = 0$; г) $5x - 4y - 20 = 0$.

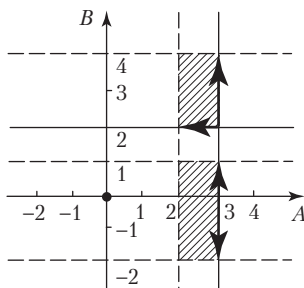
$$6.2. k = 3,5; b = -3. 6.3. k = \frac{2}{3}; b = \frac{5}{3}. 6.4. \frac{\pi}{4}.$$

6.5. а) $x - 3y - 11 = 0$; б) $3x + y - 3 = 0$. 6.6. $\sqrt{5}$.

6.7. $O(-3; 2)$; $R = 3$. 6.8. $F_1(0; 3)$; $F_2(0; -3)$. 6.9. $(2; 3)$.

Глава 8

8.1. $\{4, 6, 10, 12\}$. 8.2. $\{(3, 1); (3, 4); (4, 1); (4, 4); (6, 1); (6, 4)\}$.
8.3.



8.4. $\{(5, 3); (10, 3)\}$. 8.5. $\{(9, 3); (12, 2); (15, 5)\}$.

Глава 9

$$9.1. 1274. 9.2. 3 \ 145 \ 725. 9.3. 0. 9.4. \frac{6}{19}. 9.5. \frac{7}{4}. 9.6. \frac{1}{2}.$$

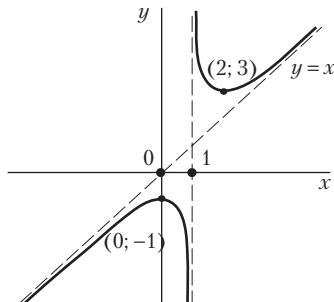
Глава 10

$$10.1. [3; 5). 10.2. \frac{5}{13}. 10.3. 2. 10.4. 2. 10.5. -\frac{1}{2}. 10.6. \frac{8}{3}. 10.7. -1.$$

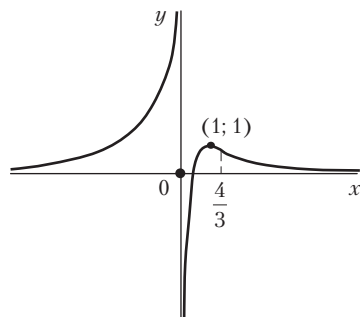
- 10.8. $\frac{1}{5}$. 10.9. $-\frac{3}{7}$. 10.10. e^5 . 10.11. Точка устранимого разрыва $x = \frac{1}{2}$; точка разрыва второго рода $x = -2$. 10.12. $x = \frac{3}{2}$; $y = \frac{3}{2}x + \frac{9}{4}$.

Глава 11

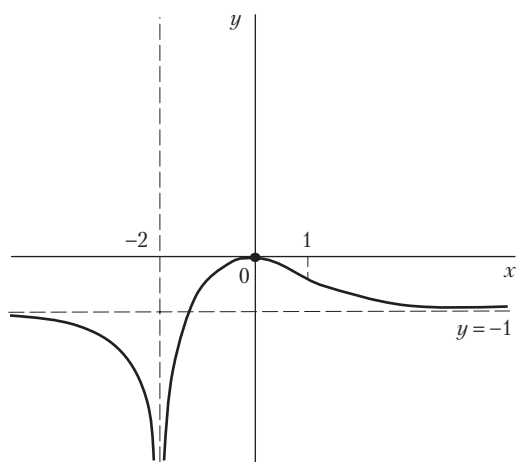
- 11.1. $\frac{6x^2 + 2x - 41}{(x^2 + x + 7)^2}$. 11.2. $-\frac{3x}{\sqrt{1-3x^2}}$. 11.3. $\arccos \frac{x}{2}$. 11.4. $-\cos x$.
 11.5. $\frac{1}{2\sqrt{x}} \arcsin \sqrt{x}$. 11.6. $-\cos^2 \frac{x}{3} \cdot \sin \frac{x}{3}$. 11.7. $x^2 \ln x \cdot (3 \ln x + 2)$.
 11.8. $\frac{1}{\sin x} - \sin 2x$. 11.9. $-x^2 e^{-x}$. 11.10. $\frac{1}{\cos x}$. 11.11. 0,25.
 11.12. $\frac{1}{96}$. 11.13. Касательная $2x - y - 1 = 0$; нормаль $x + 2y + 7 = 0$.
 11.14. 1,12. 11.15. $\frac{6x^3 + 12x^2 - 114x + 56}{(x^2 - 2x + 5)^3}$. 11.16. $\frac{10}{9} \cdot \frac{x-6}{\sqrt[3]{(x-5)^4}}$.
 11.17. $4 \sin x + x \cos x$. 11.18. $-\frac{3}{11}$. 11.19. 2. 11.20. $\frac{1}{18}$. 11.21. $\frac{48}{11}$.
 11.22. $\frac{2}{5}$. 11.23. $\frac{17}{\pi}$. 11.24. 2. 11.25. 6. 11.26. $\frac{1}{2}$.
 11.27. Возрастание $x \in (-\infty; -3) \cup (1; +\infty)$, убывание $x \in (-3; 1)$,
 $x_{\max} = -3$; $y_{\max} = 39$, $x_{\min} = 1$; $y_{\min} = 7$.
 11.28. Возрастание $x \in (-1; 1)$, убывание $x \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$,
 $x_{\max} = 1$; $y_{\max} = 1$.
 11.29. Возрастание $x \in (-\infty; 3) \cup (5; +\infty)$, убывание $x \in (3; 4) \cup (4; 5)$,
 $x_{\max} = 3$; $y_{\max} = 2$, $x_{\min} = 5$; $y_{\min} = 6$.
 11.30. Выпуклость $x \in (-2; 1)$, вогнутость $x \in (-\infty; -2) \cup (1; +\infty)$,
 $x = -2$ и $x = 1$ — точки перегиба.
 11.31.



11.32.

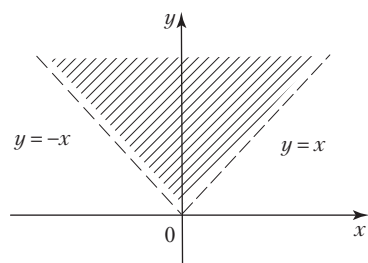


11.33.

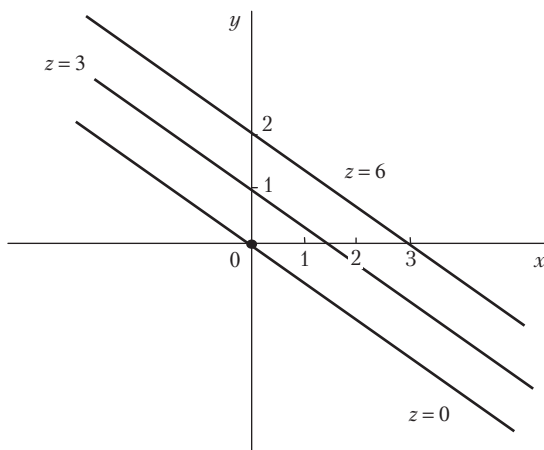


Глава 12

12.1.



12.2. $y = -\frac{2}{3}x$ ($z = 0$); $y = -\frac{2}{3}x + 1$ ($z = 3$); $y = -\frac{2}{3}x + 2$ ($z = 6$).



12.3. $z'_x = 3x^2y^2 - 2y^3$; $z'_y = 2x^3y - 6xy^2$; $z''_{xx} = 6xy^2$;

$z''_{xy} = z''_{yx} = 6x^2y - 6y^2$; $z''_{yy} = 2x^3 - 12xy$.

12.4. $z'_x = \frac{y^2}{(x+y)^2}$; $z'_y = \frac{x^2}{(x+y)^2}$; $z''_{xx} = -\frac{2y^2}{(x+y)^3}$;

$z''_{xy} = z''_{yx} = \frac{2xy}{(x+y)^3}$; $z''_{yy} = -\frac{2x^2}{(x+y)^3}$.

12.5. $z'_x = (6x - y) \cdot e^{3x^2+2y^2-xy}$;

$z'_x = (4y - x) \cdot e^{3x^2+2y^2-xy}$; $z'_{xx} = (36x^2 - 12xy + y^2 + 6) \cdot e^{3x^2+2y^2-xy}$;

$z''_{xy} = z''_{yx} = (25xy - 6x^2 - 4y^2 - 1) \cdot e^{3x^2+2y^2-xy}$;

$z'_{yy} = (x^2 - 8xy + 16y^2 + 4) \cdot e^{3x^2+2y^2-xy}$.

12.6. max в точке $(-5; -1)$, $z_{\max} = 1$.

12.7. max в точке $(-1; 1)$, $z_{\max} = 1$.

Глава 13

13.1. $\frac{3}{4}x\sqrt[3]{x} - \frac{1}{2x^2} + C$.

13.2. $-\frac{3}{\sqrt[3]{x}} - \frac{9}{2}\sqrt[3]{x^2} + \frac{9}{5}x \cdot \sqrt[3]{x^2} - \frac{3}{8}x^2 \cdot \sqrt[3]{x^2} + C$.

- 13.3. $x + 3\arcsin \frac{x}{2} + C$. 13.4. $\frac{1}{10\sqrt{3}} \ln \left| \frac{\sqrt{3}x-5}{\sqrt{3}x+5} \right| + C$.
- 13.5. $-\ln |\cos x + 1| + C$. 13.6. $-\frac{2}{3}(x+2)\sqrt{1-x} + C$. 13.7. $\frac{1}{6} \ln^6 x + C$.
- 13.8. $\frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x-5}{2} + C$. 13.9. $\frac{1}{2} \ln(x^2 - 2x + 17) + \frac{7}{4} \operatorname{arctg} \frac{x-1}{4} + C$.
- 13.10. $-\cos x + \frac{2}{3} \cos^3 x - \frac{1}{5} \cos^5 x + C$.
- 13.11. $\frac{(x^2+2)^2}{2} - 4(x+2) + 5 \ln |x+2| + C$.
- 13.12. $4\sqrt[4]{x} - 4 \operatorname{arctg} \sqrt[4]{x} + 2 \ln(\sqrt{x} + 1) + C$.
- 13.13. $\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + \ln |2x^2 + 3x + 1| + C$. 13.14. $-\frac{1}{2} \ln \left| \frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2} - 1 - \sqrt{2}}{\operatorname{tg} \frac{x}{2} - 1 + \sqrt{2}} \right| + C$.
- 13.15. $\frac{1}{5}(3x+2) \cdot \sin 5x + \frac{3}{25} \cos 5x + C$.
- 13.16. $x \ln^2 x - 2x \ln x + 2x + C$.
- 13.17. $\frac{x^3}{3} \ln x - \frac{x^3}{9} + C$. 13.18. $-x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + C$.
- 13.19. $\frac{1}{3} x e^{3x} - \frac{1}{9} e^{3x} + C$. 13.20. $-x \operatorname{ctg} x + \ln |\sin x| + C$.
- 13.21. $\frac{21}{8}$. 13.22. $\frac{\pi}{6}$. 13.23. $\frac{100}{3}$. 13.24. $\ln \sqrt{13}$. 13.25. $\frac{2}{3}$.
- 13.26. 4. 13.27. $\ln \sqrt{7}$. 13.28. $\frac{3}{2}$. 13.29. $\frac{2}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{5}}$.
- 13.30. $\frac{8}{3} \ln 2 - \frac{7}{9}$. 13.31. 1. 13.32. $1 - \frac{2}{e}$. 13.33. $\frac{(4\sqrt{3}-3) \cdot \pi}{12} - \ln \sqrt{2}$.
- 13.34. $\frac{1}{6}$. 13.35. $\frac{7}{3}$. 13.36. 4,5. 13.37. $\frac{8-\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}$. 13.38. $\frac{125}{6}$.
- 13.39. $\frac{5}{6}$.
- 13.40. $\iint_S \frac{dx dy}{x} = \int_0^1 dy \int_{e'}^{(2-y)e} \frac{dx}{x} = \frac{1}{2} - 2 \ln 2$.

$$\begin{aligned}
 13.41. \iint_S f(x, y) dx dy &= \int_0^2 dx \int_0^{x^2} (x - y) dy = \int_0^2 \left(xy - \frac{y^2}{2} \right) \Big|_{y=0}^{y=x^2} = \\
 &= \int_0^2 \left(x^3 - \frac{x^4}{2} \right) dx = \left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{10} \right) \Big|_0^2 = 0,8.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 13.42. \iint_S (3x^2 - 2xy + y) dx dy &= \int_0^2 dy \int_0^{y^2} (3x^2 - 2xy + y) dx = \\
 &= \int_0^2 (x^3 - yx^2 + yx) \Big|_0^{y^2} dy = \int_0^2 (y^6 - y^5 + y^3) dy = \left(\frac{y^7}{7} - \frac{y^6}{6} + \frac{y^4}{4} \right) \Big|_0^2 = \frac{244}{21}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 13.43. \iint_S y \ln x dx dy &= \int_1^2 dx \int_{1/x}^{\sqrt{x}} y \ln x dy = \int_1^2 \frac{y^2}{2} \ln x \Big|_{1/x}^{\sqrt{x}} dx = \\
 &= \int_1^2 \left[\frac{x \ln x}{2} - \frac{\ln x}{2x^2} \right] dx = \frac{5 \ln 2}{4} - \frac{5}{8}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 13.44. \iint_D f(x + y) dx dy &= \int_0^1 dx \int_{x^2}^x (x + y) dy = \int_0^1 \left[xy + \frac{y^2}{2} \right]_{x^2}^x dx = \\
 &= \int_0^1 \left(x^2 + \frac{x^2}{2} - x^3 - \frac{x^4}{4} \right) dx = \left(\frac{x^3}{2} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{10} \right) \Big|_0^1 = \frac{3}{20}.
 \end{aligned}$$

Или

$$\begin{aligned}
 \iint_D f(x + y) dx dy &= \int_0^1 dy \int_y^{\sqrt{y}} (x + y) dx = \int_0^1 \left[\frac{x^2}{2} + xy \right]_{y}^{\sqrt{y}} dy = \\
 &= \int_0^1 \left(\frac{y}{2} + y\sqrt{y} - \frac{y^2}{2} - y^2 \right) dy = \left(\frac{y^2}{4} + \frac{2y^{\frac{5}{2}}}{5} - \frac{y^3}{2} \right) \Big|_0^1 = \frac{3}{20}.
 \end{aligned}$$

Глава 14

14.1. Расходится. **14.2.** Расходится. **14.3.** Сходится. **14.4.** Сходится. **14.5.** Расходится. **14.6.** Сходится. **14.7** Сходится. **14.8.** Сходится. **14.9.** Сходится. **14.10.** Сходится условно. **14.11.** Сходится абсолютно. **14.12.** Сходится абсолютно. **14.13.** $[-5; 5)$. **14.14.** $[-1; 1]$. **14.15.** 0,08716. **14.16.** 1,34986.

Глава 15

- 15.1. $Ce^{\frac{5}{4}x^4+x^2}$; $C = 3$. 15.2. $\frac{1}{C - \frac{1}{2}\arctg \frac{x}{2}}$; $C = \frac{\pi}{4}$.
- 15.3. $C\sqrt[3]{x^3-19}$; $C = 2$. 15.4. $\frac{Cx^2}{(x+1)^2} - \frac{1}{2}$; $C = 4$.
- 15.5. $2 - \frac{2}{\sin x}$; $C = 3$. 15.6. $\frac{5Cx^2-2x}{1-Cx}$.
- 15.7. $\pm x\sqrt{C-2\ln|x|}$. 15.8. xe^{Cx} . 15.9. $x \cdot \left(\frac{1}{C - \ln|x|} - 1 \right)$.
- 15.10. $x \sin x + Cx$. 15.11. $Cx^3 - \frac{1}{2}x^3e^{-x^2}$. 15.12. $x^2 + 1 + C\sqrt{x^2+1}$.
- 15.13. $C \ln^2 x - \ln x$. 15.14. $C_1 \ln|x| + \frac{1}{x} + C_2$.
- 15.15. $\begin{cases} \frac{y^3}{3} + C_1 y = x + C_2, \\ y = C. \end{cases}$ 15.16. $C_1 e^{3x} + C_2 e^{2x}$.
- 15.17. $(C_1 + C_2 x) \cdot e^{-x}$. 15.18. $e^x (C_1 \cos 4x + C_2 \sin 4x)$.
- 15.19. $C_1 e^{3x} + C_2 e^{-5x} - \frac{3}{7}e^{2x}$. 15.20. $C_1 e^{3x} + C_2 e^{-5x} + \frac{3}{8}xe^{3x}$.
- 15.21. $C_1 e^{2x} + C_2 e^{-6x} - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{6}x - \frac{49}{72}$.
- 15.22. $e^{-2x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x) + e^{3x} \left(\frac{2}{29}x + \frac{125}{841} \right)$.
- 15.23. $C_1 e^x + C_2 e^{-3x} - e^{-x} \cdot \left(\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{8} \right)$.

Раздел III

Тесты



Целью сборника тестов является оказание помощи студентам в подготовке к аттестационной проверке их **остаточных** знаний, проводимой в **форме тестирования по дисциплине «Математика»** для экономических специальностей, специальностям «Менеджмент организаций» и «Государственное и муниципальное управление».

В сборнике тестов представлены около 770 вопросов, разбитых на два **раздела и 15 частей**. В **конце сборника** приводятся правильные ответы.

Тесты составлены в соответствии с госстандартами изучения дисциплины студентами экономических специальностей на основе рекомендаций Национального аккредитационного агентства в сфере образования.

Распределение тестов по частям и разделам представлено в таблице.

Название раздела	Название части	Число тестов в части	Число тестов в разделе
Раздел 1. Линейная алгебра	1. Матрицы и определители	129	339
	2. Системы линейных уравнений	34	
	3. Векторы	55	
	4. Собственные векторы и квадратичные формы	11	
	5. Комплексные числа	19	
	6. Элементы аналитической геометрии	91	
Раздел 2. Математический анализ	7. Элементы теории множеств	24	
	8. Числовые последовательности	9	
	9. Предел и непрерывность функции	54	
	10. Элементы дифференциального исчисления	90	

Название раздела	Название части	Число тестов в части	Число тестов в разделе
Раздел 2. Математический анализ	11. Функции нескольких переменных	34	438
	12. Неопределенный и определенный интегралы	91	
	13. Числовые и степенные ряды	51	
	14. Дифференциальные уравнения	80	
	15. Элементы теории поля	5	

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
Раздел 1. Линейная алгебра	
1. Матрицы и определители	
1.1. При каком значении x матрицы A и B равны? $A = \begin{pmatrix} x^2 + 4x + 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$	1) -2 ☐ 2) -1 ☐ 3) 0 ☐ 4) 1 ☐
1.2. При каком значении y матрицы A и B равны? $A = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 6 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} y^2 - 6y + 15 & 5 & 6 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$	1) 5 ☐ 2) 3 ☐ 3) 2 ☐ 4) 1 ☐
1.3. При каком значении z матрицы A и B равны? $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} z^2 - 4z + 7 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$	1) 5 ☐ 2) 3 ☐ 3) 2 ☐ 4) 1 ☐
1.4. При каких значениях x и y матрицы A и B равны? $A = \begin{pmatrix} 5 & -3 & -1 \\ 4 & 0 & 7 \end{pmatrix};$ $B = \begin{pmatrix} 2x + y & -3 & -1 \\ 4 & 0 & 2x - y \end{pmatrix}$	1) $x = 3; y = 1$ ☐ 2) $x = 1; y = 2$ ☐ 3) $x = -3; y = 2$ ☐ 4) $x = 3; y = -1$ ☐
1.5. При каких значениях x и y матрицы A и B равны? $A = \begin{pmatrix} 8 & -2 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} x + y & -2 \\ 5 & 4x - 2y \end{pmatrix}$	1) $x = 3; y = 5$ ☐ 2) $x = 4; y = 5$ ☐ 3) $x = 4; y = 4$ ☐ 4) $x = 4; y = 2$ ☐
1.6. При каких значениях x и y матрицы A и B равны? $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 5x - 3y & -2 \\ 5 & x + 3y \end{pmatrix}$	1) $x = 1; y = 1$ ☐ 2) $x = 1; y = -1$ ☐ 3) $x = 1; y = 2$ ☐ 4) $x = 1; y = -2$ ☐

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
1.7. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & 5 \\ -8 & -5 & 4 \end{pmatrix}$. Тогда сумма элементов $a_{13} + a_{22} + a_{31}$ этой матрицы равна...	1) 4 ☐ 2) -3 ☐ 3) 7 ☐ 4) -7 ☐
1.8. Заданы матрицы $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 1 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}$. Найти матрицу $4A - B^T$, где B^T — транспонированная матрица B	1) $\begin{pmatrix} 8 & -1 \\ 17 & -5 \\ -15 & 0 \end{pmatrix}$ ☐ 2) $\begin{pmatrix} 13 & 18 & -1 \\ 8 & 7 & 11 \end{pmatrix}$ ☐ 3) $\begin{pmatrix} 15 & 24 & -9 \\ 6 & 3 & 9 \end{pmatrix}$ ☐ 4) $\begin{pmatrix} 33 & 30 \\ 36 & 33 \\ -21 & 39 \end{pmatrix}$ ☐
1.9. Заданы матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$. Найти матрицу $3A + 2B^T$, где B^T — транспонированная матрица B	1) $\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 11 & -5 \\ -12 & 1 \end{pmatrix}$ ☐ 2) $\begin{pmatrix} 10 & 20 & -5 \\ 7 & 5 & 12 \end{pmatrix}$ ☐ 3) $\begin{pmatrix} 10 & -5 & 9 \\ 20 & 10 & 11 \end{pmatrix}$ ☐ 4) $\begin{pmatrix} 16 & 20 \\ 6 & 13 \\ -11 & 9 \end{pmatrix}$ ☐

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
1.10. Если $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, то $B - 2A = \dots$	1) 2 ☐ 2) -15 ☐ 3) $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ ☐ 4) $\begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$ ☐ 5) $\begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ ☐
1.11. Если $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, то $3A + 4B = \dots$	1) 3 ☐ 2) $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ ☐ 3) -2 ☐ 4) $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 9 & 11 \end{pmatrix}$ ☐ 5) $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 11 & 9 \end{pmatrix}$ ☐
1.12. Если $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, то $A + 3B = \dots$	1) $\begin{pmatrix} 0 & 7 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$ ☐ 2) 1 ☐ 3) $\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$ ☐ 4) -22 ☐ 5) $\begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$ ☐

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
1.13. Если $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$ то $2A - B = \dots$	1) $\begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$ ☐ 2) 3 ☐ 3) $\begin{pmatrix} 5 & -4 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$ ☐ 4) -10 ☐ 5) $\begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$ ☐
1.14. Если $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix},$ то $A + 3B = \dots$	1) $\begin{pmatrix} -2 & 5 \\ -3 & 7 \end{pmatrix}$ ☐ 2) 1 ☐ 3) $\begin{pmatrix} -4 & 4 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$ ☐ 4) -22 ☐ 5) $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ ☐
1.15. Чему равен элемент c_{23} матрицы $C = 5A - 3B$, если $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 1 & 5 & -4 \\ 4 & -1 & 1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ -3 & 1 & -3 \\ 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$	1) -9 ☐ 2) -12 ☐ 3) -11 ☐ 4) 6 ☐
1.16. Найти элемент c_{21} матрицы $C = 2B + 5A$, если $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 1 & 4 & -4 \\ -3 & 1 & 3 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 5 & 2 \\ -4 & 1 & -5 \end{pmatrix}$	1) 11 ☐ 2) 12 ☐ 3) 16 ☐ 4) 17 ☐

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
1.17. Вычислить сумму элементов первого столбца матрицы $C = 2 \cdot A - 3 \cdot B$, если $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -6 & 2 \\ 12 & -4 & 3 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} -4 & 5 & 12 \\ 7 & -12 & 8 \\ 4 & -5 & 6 \end{pmatrix}$	1) 11 ☐ 2) 12 ☐ 3) 13 ☐ 4) 14 ☐
1.18. Вычислить сумму элементов первого столбца матрицы $C = 2 \cdot A - 3 \cdot B, \text{ если } A = \begin{pmatrix} -4 & 2 & -3 \\ 5 & -6 & 7 \\ -3 & 6 & 5 \end{pmatrix};$ $B = \begin{pmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 0 & 11 & 12 \\ -3 & -4 & -5 \end{pmatrix}$	1) -13 ☐ 2) -14 ☐ 3) -15 ☐ 4) -16 ☐
1.19. Вычислить сумму элементов первого столбца матрицы $C = 2 \cdot A - 3 \cdot B$, если $A = \begin{pmatrix} -3 & 9 & -78 \\ 5 & 12 & -45 \\ -4 & 7 & 6 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 11 & 5 & -4 \\ -1 & 4 & 5 \\ 0 & 7 & 34 \end{pmatrix}$	1) -33 ☐ 2) -34 ☐ 3) -35 ☐ 4) -36 ☐
1.20. Если матрица $A = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$ Тогда матрица $C = A - 2B$ имеет вид...	1) $\begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -5 & -7 \end{pmatrix}$ ☐ 2) $\begin{pmatrix} 4 & -5 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ ☐ 3) $\begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 7 & -7 \end{pmatrix}$ ☐ 4) $\begin{pmatrix} 4 & -5 \\ -5 & -5 \end{pmatrix}$ ☐

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
1.21. Если матрица $A = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Тогда матрица $C = A + 2B$ имеет вид...	1) $\begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 7 & 11 \end{pmatrix}$ ☐ 2) $\begin{pmatrix} 0 & -5 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$ ☐ 3) $\begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 7 & 11 \end{pmatrix}$ ☐ 4) $\begin{pmatrix} 0 & -5 \\ 7 & 11 \end{pmatrix}$ ☐
1.22. Если все элементы квадратной матрицы, расположенные ниже главной диагонали, равны нулю, то эта матрица...	1) вырожденная ☐ 2) треугольная ☐ 3) симметрическая ☐ 4) диагональная ☐
1.23. Какие существуют произведения матриц $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}$?	1) Только AB ☐ 2) Только BA ☐ 3) И то и другое ☐ 4) Ни то ни другое ☐
1.24. Какие существуют произведения матриц $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -5 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$?	1) Только AB ☐ 2) Только BA ☐ 3) И то и другое ☐ 4) Ни то ни другое ☐
1.25. Какие существуют произведения матриц $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$?	1) И AB, и BA ☐ 3) Только AB ☐ 3) Только BA ☐ 4) Ни AB, ни BA ☐

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
1.26. Какие существуют произведения матриц $A = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}?$	1) Только AB ☐ 2) Только BA ☐ 3) И то, и другое ☐ 4) Ни то, ни другое ☐
1.27. Какие существуют произведения матриц $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ -2 & 2 & -5 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}?$	1) И AB , и BA ☐ 2) Только AB ☐ 3) Только BA ☐ 4) Ни AB , ни BA ☐
1.28. Какие существуют произведения матриц $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 4 \\ 1 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}?$	1) И AB , и BA ☐ 2) Только AB ☐ 3) Только BA ☐ 4) Ни AB , ни BA ☐
1.29. Даны матрицы A размерностью 3×5 и B размерностью 5×3 . Произведение $A \cdot B$ существует и имеет размерность...	1) 5×5 ☐ 2) 3×5 ☐ 3) 3×3 ☐ 4) 5×3 ☐
1.30. Даны матрицы A размерностью 4×6 и B размерностью 6×4 . Произведение $A \cdot B$ существует и имеет размерность...	1) 6×6 ☐ 2) 4×6 ☐ 3) 4×4 ☐ 4) 6×4 ☐
1.31. Для матриц A и B найдено произведение $A \cdot B$, причем $A = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 5 \end{pmatrix}$. Тогда матрицей B может быть матрица...	1) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 0 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$ ☐ 2) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ ☐ 3) $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ ☐ 4) $\begin{pmatrix} 5 & 6 & 1 \end{pmatrix}$ ☐

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
1.32. Для матриц A и B найдено произведение $A \cdot B$, причем $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 6 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}.$ Тогда матрицей B может быть матрица...	1) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$ ☐ 2) $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ☐ 3) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 6 \\ 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ ☐ 4) $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ ☐
1.33. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}.$ Найти матрицу $A \cdot B$.	1) $\begin{pmatrix} 27 & 16 \\ 15 & 6 \end{pmatrix}$ ☐ 2) $\begin{pmatrix} 22 & 1 \\ 11 & -6 \end{pmatrix}$ ☐ 3) $\begin{pmatrix} 23 & -4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ ☐ 4) $\begin{pmatrix} 8 & 23 \\ 9 & 8 \end{pmatrix}$ ☐ 5) $\begin{pmatrix} 41 & -10 \\ 25 & -8 \end{pmatrix}$ ☐

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
1.34. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ и $C = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$. Найти матрицу $A \cdot C$.	1) $\begin{pmatrix} 27 & 16 \\ 15 & 6 \end{pmatrix}$ ☐ 2) $\begin{pmatrix} 22 & 1 \\ 11 & -6 \end{pmatrix}$ ☐ 3) $\begin{pmatrix} 23 & -4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ ☐ 4) $\begin{pmatrix} 8 & 23 \\ 9 & 8 \end{pmatrix}$ ☐ 5) $\begin{pmatrix} 41 & -10 \\ 25 & -8 \end{pmatrix}$ ☐
1.35. Даны матрицы $B = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$ и $C = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$. Найти матрицу $B \cdot C$.	1) $\begin{pmatrix} 27 & 16 \\ 15 & 6 \end{pmatrix}$ ☐ 2) $\begin{pmatrix} 22 & 1 \\ 11 & -6 \end{pmatrix}$ ☐ 3) $\begin{pmatrix} 23 & -4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ ☐ 4) $\begin{pmatrix} 8 & 23 \\ 9 & 8 \end{pmatrix}$ ☐ 5) $\begin{pmatrix} 41 & -10 \\ 25 & -8 \end{pmatrix}$ ☐
1.36. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Тогда произведение $A \cdot B$ равно...	1) $\begin{pmatrix} -6 & 3 \\ 20 & 0 \end{pmatrix}$ ☐ 2) $\begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ☐ 3) $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$ ☐ 4) $\begin{pmatrix} -6 & 12 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$ ☐

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа	
1.37. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$. Тогда произведение $A \cdot B$ равно...	1) $\begin{pmatrix} -8 & 12 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$ ☐ 2) $\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ ☐ 3) $\begin{pmatrix} -8 & 20 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ ☐ 4) $\begin{pmatrix} -8 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ☐	
1.38. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. Сумма элементов матрицы $A \cdot B$ равна...	1) 6 ☐ 2) 14 ☐ 3) 0 ☐ 4) 18 ☐	
1.39. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$. Сумма элементов матрицы $B \cdot A$, расположенных на ее главной диагонали, равна...	1) 8 ☐ 2) 10 ☐ 3) 12 ☐ 4) 14 ☐	
1.40. Чему равен элемент c_{23} матрицы $C = AB$, если $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 4 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$?	1) 0 ☐ 2) 1 ☐ 3) 3 ☐ 4) 6 ☐	
1.41. Чему равен элемент c_{21} матрицы $C = AB$, если $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & -3 \\ 5 & -3 & 1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -6 \\ -2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$?	1) -11 ☐ 2) -13 ☐ 3) -15 ☐ 4) -17 ☐	

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
1.42. Чему равен элемент c_{31} матрицы $C = AB$, если $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 4 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 5 \\ 2 & 7 & 8 \end{pmatrix} ?$	1) 5 ☐ 2) 4 ☐ 3) 3 ☐ 4) 2 ☐
1.43. Чему равен элемент c_{32} матрицы $C = AB$, если $A = \begin{pmatrix} -2 & 5 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -3 \\ 1 & -1 & 4 \\ 5 & 1 & 2 \end{pmatrix} ?$	1) -3 ☐ 2) 0 ☐ 3) 2 ☐ 4) 24 ☐
1.44. Чему равен элемент c_{21} матрицы $C = AB$, если $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & 4 & -2 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -5 \\ -3 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} ?$	1) -11 ☐ 2) -13 ☐ 3) -15 ☐ 4) -17 ☐
1.45. Чему равен элемент c_{31} матрицы $C = AB$, если $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 7 & -1 & 3 \\ -2 & -3 & 1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} ?$	1) 5 ☐ 2) 4 ☐ 3) 3 ☐ 4) 2 ☐
1.46. Чему равен элемент c_{32} матрицы $C = AB$, если $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 5 \\ 2 & -4 & 1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 5 & 4 & 2 \end{pmatrix} ?$	1) -4 ☐ 2) 0 ☐ 3) 18 ☐ 4) 24 ☐

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
1.47. Произведением матриц $\begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 3 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ является...	1) $\begin{pmatrix} -5 & 25 & -4 \\ -10 & 3 & 5 \\ 2 & 8 & 12 \end{pmatrix}$ ☐ 2) $\begin{pmatrix} 5 & 17 \\ -10 & 9 \end{pmatrix}$ ☐ 3) $\begin{pmatrix} 15 & 21 & 5 \\ 18 & 12 & 11 \\ -2 & 9 & 9 \end{pmatrix}$ ☐ 4) $\begin{pmatrix} 6 & 12 \\ 10 & 0 \end{pmatrix}$ ☐
1.48. Заданы матрицы $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$. Тогда решением матричного уравнения $A + X = B$ является...	1) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ ☐ 2) $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ ☐ 3) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ ☐ 4) $\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ ☐
1.49. Заданы матрицы $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Тогда решением матричного уравнения $A + X = B$ является...	1) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$ ☐ 2) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ ☐ 3) $\begin{pmatrix} -4 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ ☐ 4) $\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ ☐

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа	
1.50. Заданы матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -6 \\ -4 & -6 & 9 \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -4 \end{pmatrix}.$ Тогда решением матричного уравнения $2A + X = B$ является...	1) $\begin{pmatrix} 0 & -3 & 7 \\ 6 & 9 & -13 \end{pmatrix}$	☐
	2) $\begin{pmatrix} -2 & -5 & 5 \\ 4 & 7 & -15 \end{pmatrix}$	☐
	3) $\begin{pmatrix} -1 & -7 & -11 \\ -6 & -9 & -22 \end{pmatrix}$	☐
	4) $\begin{pmatrix} -1 & -7 & 13 \\ 10 & 15 & -22 \end{pmatrix}$	☐
1.51. Определитель $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}$ равен...	1) 7	☐
	2) -7	☐
	3) -1	☐
	4) 3	☐
1.52. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 7 \end{vmatrix}$.	1) 43	☐
	2) 19	☐
	3) 16	☐
	4) 13	☐
1.53. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} -3 & -6 \\ -2 & 4 \end{vmatrix}$.	1) 0	☐
	2) -11	☐
	3) -24	☐
	4) -28	☐
1.54. Определитель $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ \alpha & 5 \end{vmatrix}$ равен нулю при $\alpha = \dots$	1) 1	☐
	2) 10	☐
	3) -10	☐
	4) 0	☐
1.55. Определитель $\begin{vmatrix} \alpha & 2 \\ 6 & 3 \end{vmatrix}$ равен нулю при $\alpha = \dots$	1) -4	☐
	2) 3	☐
	3) 0	☐
	4) 4	☐
1.56. Определитель $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 6 & \alpha \end{vmatrix}$ равен нулю при $\alpha = \dots$	1) -3	☐
	2) 2	☐
	3) 3	☐
	4) 0	☐

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
1.57. Установить соответствие между α и значениями определителей $\Delta = \begin{vmatrix} 4 & -5 \\ \alpha & 1 \end{vmatrix};$ А) $\alpha = 1$; Б) $\alpha = -4$; В) $\alpha = 2$; Г) $\alpha = 3$. а) $\Delta = -4$; б) $\Delta = 14$; в) $\Delta = 9$; г) $\Delta = 24$; д) $\Delta = 19$; е) $\Delta = -16$	1) А – в; Б – е; В – б; Г – д ☐ 2) А – г; Б – б; В – в; Г – а ☐ 3) А – в; Б – д; В – г; Г – а ☐ 4) А – г; Б – а; В – б; Г – в ☐ 5) А – в; Б – д; В – а; Г – г ☐
1.58. Установить соответствие между матрицей и ее определителем: А) $\begin{pmatrix} 12 & 10 \\ 10 & 12 \end{pmatrix}$; Б) $\begin{pmatrix} 10 & 12 \\ 12 & 10 \end{pmatrix}$; В) $\begin{pmatrix} 12 & 12 \\ 10 & 10 \end{pmatrix}$. а) 44; б) 240; в) -44; г) 120; д) 0	1) А – в; Б – б; В – д ☐ 2) А – а; Б – д; В – б ☐ 3) А – д; Б – в; В – б ☐ 4) А – а; Б – в; В – д ☐ 5) А – в; Б – д; В – б ☐
1.59. Установить соответствие между матрицей и ее определителем: А) $\begin{pmatrix} -9 & 8 \\ 8 & -9 \end{pmatrix}$; Б) $\begin{pmatrix} 9 & 8 \\ -8 & -9 \end{pmatrix}$; В) $\begin{pmatrix} -8 & 9 \\ 9 & 8 \end{pmatrix}$. а) -145; б) 155; в) 145; г) 17; д) -17	1) А – в; Б – б; В – д ☐ 2) А – г; Б – д; В – б ☐ 3) А – д; Б – в; В – б ☐ 4) А – г; Б – д; В – а ☐ 5) А – в; Б – д; В – б ☐
1.60. Если все элементы определителя второго порядка умножить на 5, то новый определитель будет больше исходного...	1) в 25 раз ☐ 2) на 20 ☐ 3) в 5 раз ☐ 4) на 5 ☐
1.61. Формула вычисления определителя 3-го порядка $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{vmatrix}$ содержит следующие произведения:	1) bdk и ade ☐ 2) ade и cdg ☐ 3) cdg и afh ☐ 4) afh и bdk ☐
1.62. Формула вычисления определителя 3-го порядка $\begin{vmatrix} i & j & k \\ l & m & n \\ o & p & r \end{vmatrix}$ содержит следующие произведения:	1) $jl r$ и jno ☐ 2) jno и njl ☐ 3) njl и $jl p$ ☐ 4) $jl p$ и $jl r$ ☐

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
1.63. Формула вычисления определителя 3-го порядка $\begin{vmatrix} x & y & z \\ k & l & m \\ n & o & p \end{vmatrix}$ содержит следующие произведения:	1) ykn и ymn ☐ 2) ymn и ukp ☐ 3) ukp и yzp ☐ 4) yzp и ykn ☐
1.64. Определитель $\begin{vmatrix} 2 & -5 & 7 \\ 7 & 5 & 2 \\ -4 & 10 & -14 \end{vmatrix}$ равен...	1) -140 ☐ 2) -280 ☐ 3) 560 ☐ 4) 0 ☐
1.65. Определитель $\begin{vmatrix} 0 & a_2 & 0 \\ b_1 & 0 & b_2 \\ 4 & 2 & -5 \end{vmatrix}$ равен...	1) $-4a_2b_2 + 5a_2b_1$ ☐ 2) $-4a_2b_2 - 5a_2b_1$ ☐ 3) $4a_2b_2 - 5a_2b_1$ ☐ 4) $4a_2b_2 + 5a_2b_1$ ☐
1.66. Определитель $\begin{vmatrix} 0 & a_2 & a_3 \\ b_1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 3 \end{vmatrix}$ равен...	1) $-2a_3b_1 - 3a_2b_1$ ☐ 2) $2a_3b_1 + 3a_2b_1$ ☐ 3) $-2a_3b_1 + 3a_2b_1$ ☐ 4) $2a_3b_1 - 3a_2b_1$ ☐
1.67. Определитель $\begin{vmatrix} -5 & 10 & 5 \\ 0 & 5 & 10 \\ 50 & -100 & -50 \end{vmatrix}$ равен...	1) 2500 ☐ 2) 7500 ☐ 3) 0 ☐ 4) -7500 ☐
1.68. Определитель $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 5 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ равен...	1) 18 ☐ 2) -74 ☐ 3) 74 ☐ 4) 0 ☐
1.69. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 5 & 0 & -8 \\ -3 & 0 & 7 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix}$	1) -22 ☐ 2) -11 ☐ 3) 11 ☐ 4) 9 ☐

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа	
1.70. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 6 \end{vmatrix}$	1) -12 ☐ 2) 54 ☐ 3) -28 ☐ 4) 24 ☐	
1.71. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 5 \end{vmatrix}$	1) 0 ☐ 2) -20 ☐ 3) -25 ☐ 4) -35 ☐	
1.72. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -3 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & 3 \end{vmatrix}$	1) 5 ☐ 2) 13 ☐ 3) 17 ☐ 4) 49 ☐	
1.73. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 3 & -2 & -4 \\ 5 & -5 & 1 \\ -1 & 2 & 6 \end{vmatrix}$	1) -40 ☐ 2) -54 ☐ 3) 38 ☐ 4) 40 ☐	
1.74. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -3 & 1 & 3 \\ 4 & 5 & -1 \end{vmatrix}$	1) -14 ☐ 2) -15 ☐ 3) 14 ☐ 4) 15 ☐	
1.75. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 3 & 2 & -5 \\ -1 & -1 & 4 \\ 4 & -3 & -2 \end{vmatrix}$	1) 31 ☐ 2) 35 ☐ 3) 37 ☐ 4) 39 ☐	

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа	
1.76. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 2 & -1 & -4 \\ -3 & -2 & 1 \\ 6 & 1 & 3 \end{vmatrix}$	1) -44 ☐ 2) -50 ☐ 3) -60 ☐ 4) -65 ☐	
1.77. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 1 & -1 & -3 \\ -4 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 2 \end{vmatrix}$	1) 46 ☐ 2) 48 ☐ 3) 52 ☐ 4) 56 ☐	
1.78. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 3 \\ 0 & -2 & -4 \end{vmatrix}$	1) 3 ☐ 2) 4 ☐ 3) -3 ☐ 4) -4 ☐ 5) -6 ☐	
1.79. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 22 & -14 & 6 \\ 2 & 1 & 0 \\ -5 & 10 & -3 \end{vmatrix}$	1) 22 ☐ 2) -42 ☐ 3) 0 ☐ 4) 1 ☐ 5) 15 ☐	
1.80. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 5 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix}$	1) 8 ☐ 2) 4 ☐ 3) -3 ☐ 4) 12 ☐ 5) 0 ☐	
1.81. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} -2 & 4 & -6 \\ 5 & -2 & 4 \\ 4 & 0 & 1 \end{vmatrix}$	1) -4 ☐ 2) 0 ☐ 3) 1 ☐ 4) 2 ☐ 5) -3 ☐	
1.82. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 5 \end{vmatrix}$	1) -2 ☐ 2) 0 ☐ 3) -1 ☐ 4) -3 ☐ 5) 4 ☐	

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа	
1.83. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 3 & 5 & -3 \\ 2 & 2 & -2 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$	1) 0	☐
	2) -2	☐
	3) 4	☐
	4) 5	☐
	5) -7	☐
1.84. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 0 & 7 & -5 \\ 1 & -3 & 4 \\ -2 & -1 & -3 \end{vmatrix}$	1) 12	☐
	2) 4	☐
	3) 2	☐
	4) 7	☐
	5) 0	☐
1.85. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} -5 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}$	1) 0	☐
	2) -5	☐
	3) -7	☐
	4) -9	☐
	5) -11	☐
1.86. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 6 & 0 & 0 \end{vmatrix}$	1) 13	☐
	2) 0	☐
	3) 11	☐
	4) 4	☐
	5) 12	☐
1.87. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 5 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & -2 \end{vmatrix}$	1) 13	☐
	2) 0	☐
	3) 25	☐
	4) 30	☐
	5) 35	☐
1.88. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} -1 & 7 & -3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}$	1) 5	☐
	2) 10	☐
	3) 25	☐
	4) 30	☐
	5) 35	☐
1.89. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 3 & 6 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$	1) 3	☐
	2) 0	☐
	3) 5	☐
	4) 7	☐
	5) 8	☐

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
1.90. Алгебраическое дополнение элемента a_{23} определителя $A = \begin{vmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix}$ имеет вид...	1) $A_{23} = - \begin{vmatrix} -5 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}$ ☐ 2) $A_{23} = \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$ ☐ 3) $A_{23} = - \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$ ☐ 4) $A_{23} = - \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$ ☐
1.91. Алгебраическое дополнение элемента a_{31} определителя $A = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix}$ имеет вид...	1) $A_{31} = - \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}$ ☐ 2) $A_{31} = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$ ☐ 3) $A_{31} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$ ☐ 4) $A_{31} = - \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$ ☐
1.92. Найти алгебраическое дополнение A_{32} определителя $\begin{vmatrix} -5 & 1 & -3 \\ -1 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & -2 \end{vmatrix}$	1) -20 ☐ 2) -17 ☐ 3) 12 ☐ 4) 23 ☐
1.93. Найти алгебраическое дополнение A_{12} определителя $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & -3 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix}$	1) -9 ☐ 2) -10 ☐ 3) 10 ☐ 4) 16 ☐

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа	
1.94. Найти алгебраическое дополнение A_{23} определителя $\begin{vmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 6 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & -3 \end{vmatrix}$	1) -3 ☐ 2) -5 ☐ 3) -6 ☐ 4) -7 ☐	
1.95. Найти алгебраическое дополнение A_{31} определителя $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -4 & 1 & 5 \\ 5 & -2 & -2 \end{vmatrix}$	1) 4 ☐ 2) 11 ☐ 3) 12 ☐ 4) 19 ☐	
1.96. Найти алгебраическое дополнение A_{23} определителя $\begin{vmatrix} 5 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & -3 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix}$	1) 14 ☐ 2) 12 ☐ 3) 10 ☐ 4) 6 ☐	
1.97. Найти алгебраическое дополнение A_{21} определителя $\begin{vmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & -3 \end{vmatrix}$	1) -3 ☐ 2) -4 ☐ 3) -5 ☐ 4) -6 ☐	
1.98. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & 0 & 0 \\ 4 & 11 & -4 & 0 \\ 5 & 4 & 3 & 2 \end{vmatrix}$	1) -3 ☐ 2) 0 ☐ 3) 48 ☐ 4) 32 ☐	
1.99. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} -3 & 18 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$	1) -8 ☐ 2) -16 ☐ 3) -24 ☐ 4) -32 ☐	

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
1.100. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ -3 & 4 & -5 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & -2 \end{vmatrix}$	1) -4 ☐ 2) -10 ☐ 3) 10 ☐ 4) 20 ☐
1.101. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 0 & 3 \\ -3 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -5 \end{vmatrix}$	1) -10 ☐ 2) -5 ☐ 3) -20 ☐ 4) -30 ☐
1.102. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 5 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & -3 \end{vmatrix}$	1) 10 ☐ 2) 12 ☐ 3) 16 ☐ 4) 0 ☐
1.103. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 3 \\ -3 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 6 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & -3 \end{vmatrix}$	1) -7 ☐ 2) -2 ☐ 3) -1 ☐ 4) 12 ☐ 5) 0 ☐
1.104. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} -2 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -2 \\ 3 & 3 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}$	1) 0 ☐ 2) -2 ☐ 3) -32 ☐ 4) -48 ☐ 5) -56 ☐
1.105. Определитель равен... $\begin{vmatrix} 2 & 0 & -3 & 3 \\ 1 & 2 & 4 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 5 & 0 \end{vmatrix}$	1) -24 ☐ 2) -38 ☐ 3) -66 ☐ 4) 0 ☐ 5) -88 ☐

Задание		Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа	
1.106. Определитель равен...	$\begin{vmatrix} 5 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 6 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$	1) 5	☐
		2) 2	☐
		3) 1	☐
		4) 0	☐
		5) 3	☐
1.107. Определитель равен...	$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 5 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 0 & -2 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$	1) 0	☐
		2) 20	☐
		3) 10	☐
		4) -10	☐
		5) -20	☐
1.108. Определитель равен...	$\begin{vmatrix} 5 & -2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$	1) -5	☐
		2) -2	☐
		3) -8	☐
		4) 2	☐
		5) 3	☐
1.109. Определитель равен...	$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 5 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 0 & -9 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$	1) 0	☐
		2) 20	☐
		3) 40	☐
		4) -10	☐
		5) -20	☐
1.110. Обратной к матрице $\begin{pmatrix} 11 & 4 \\ 8 & 3 \end{pmatrix}$ является...		1) $\begin{pmatrix} \frac{1}{11} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$	☐
		2) $\begin{pmatrix} \frac{3}{55} & -\frac{8}{55} \\ -\frac{4}{55} & \frac{11}{55} \end{pmatrix}$	☐
		3) $\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -8 & 11 \end{pmatrix}$	☐
		4) $\begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 4 & 11 \end{pmatrix}$	☐

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
1.111. Обратной к матрице $\begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ является...	1) $\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -3 & 8 \end{pmatrix}$ ☐ 2) $\begin{pmatrix} \frac{1}{8} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ ☐ 3) $\begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 3 & -8 \end{pmatrix}$ ☐ 4) $\begin{pmatrix} \frac{2}{31} & -\frac{5}{31} \\ -\frac{3}{31} & \frac{8}{31} \end{pmatrix}$ ☐
1.112. Обратной к матрице $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 23 & 11 \end{pmatrix}$ является...	1) $\begin{pmatrix} 11 & -1 \\ -23 & 2 \end{pmatrix}$ ☐ 2) $\begin{pmatrix} -11 & -1 \\ -23 & -2 \end{pmatrix}$ ☐ 3) $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{23} & \frac{1}{11} \end{pmatrix}$ ☐ 4) $\begin{pmatrix} -11 & 1 \\ 23 & -2 \end{pmatrix}$ ☐
1.113. Обратной к матрице $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$ является...	1) $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{7} \end{pmatrix}$ ☐ 2) $\begin{pmatrix} -7 & -4 \\ -5 & -3 \end{pmatrix}$ ☐ 3) $\begin{pmatrix} 7 & -5 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$ ☐ 4) $\begin{pmatrix} 7 & -4 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$ ☐

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
1.114. Установить соответствие между двумя множествами: А) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$; Б) $A = \begin{pmatrix} 9 & -2 \\ 7 & -1 \end{pmatrix}$; В) $A = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}$; а) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,1 \\ -0,4 & 0,2 \end{pmatrix}$; б) $A^{-1} = \begin{pmatrix} -0,2 & 0,4 \\ -1,4 & 1,8 \end{pmatrix}$; в) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2,5 & -1,5 \end{pmatrix}$; г) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1,25 & 0,75 \\ -0,75 & -0,25 \end{pmatrix}$; д) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -0,5 \\ 2 & 1,5 \end{pmatrix}$	1) А – в; Б – б; В – д ☐ 2) А – а; Б – д; В – б ☐ 3) А – д; Б – в; В – г ☐ 4) А – а; Б – г; В – д ☐ 5) А – а; Б – б; В – в ☐
1.115. Установить соответствие между двумя множествами: А) $A = \begin{pmatrix} 10 & -3 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$; Б) $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$; В) $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$; а) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1,5 & 2 \end{pmatrix}$; б) $A^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & 2,5 \\ 1 & -0,5 \end{pmatrix}$; в) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1,5 & 1 \end{pmatrix}$; г) $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -5 \\ 3 & 10 \end{pmatrix}$; д) $A^{-1} = \begin{pmatrix} -0,2 & 0,6 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$	1) А – в; Б – б; В – д ☐ 2) А – а; Б – д; В – б ☐ 3) А – д; Б – в; В – г ☐ 4) А – а; Б – г; В – д ☐ 5) А – д; Б – а; В – б ☐

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
1.116. Чему равен ранг матрицы $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} ?$	1) 1 ☐ 2) 2 ☐ 3) 3 ☐ 4) 4 ☐
1.117. Чему равен ранг матрицы $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -20 & 15 \end{pmatrix} ?$	1) 1 ☐ 2) 2 ☐ 3) 3 ☐ 4) 4 ☐
1.118. Чему равен ранг матрицы $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} ?$	1) 1 ☐ 2) 2 ☐ 3) 3 ☐ 4) 4 ☐
1.119. Чему равен ранг матрицы $\begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 7 & 0 & 1 \end{pmatrix} ?$	1) 1 ☐ 2) 2 ☐ 3) 3 ☐ 4) 4 ☐
1.120. Чему равен ранг матрицы $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ?$	1) 1 ☐ 2) 2 ☐ 3) 3 ☐ 4) 4 ☐
1.121. Чему равен ранг матрицы $\begin{pmatrix} 9 & 0 & -3 \\ -18 & 0 & 6 \\ 36 & 0 & -12 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ?$	1) 1 ☐ 2) 2 ☐ 3) 3 ☐ 4) 4 ☐

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа	
1.122. Чему равен ранг матрицы $\begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ -9 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}?$	1) 1 2) 2 3) 3 4) 4	☐ ☐ ☐ ☐
1.123. Ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 4 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & -5 \end{pmatrix}$ равен...	1) 3 2) 0 3) 2 4) 1	☐ ☐ ☐ ☐
1.124. Ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 4 \\ 0 & -3 & -5 \end{pmatrix}$ равен...	1) 3 2) 2 3) 1 4) 0	☐ ☐ ☐ ☐
1.125. Ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} -4 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -3 & -2 & 7 \\ 0 & 0 & 5 & -6 \end{pmatrix}$ равен...	1) 3 2) 2 3) 1 4) 0	☐ ☐ ☐ ☐
1.126. Ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} 6 & -4 & 0 \\ 7 & -5 & 9 \\ -3 & 2 & \lambda \end{pmatrix}$ равен двум при λ , равном...	1) 3 2) 2 3) 1 4) 0	☐ ☐ ☐ ☐
1.127. Ранг квадратной матрицы A четвертого порядка равен $r(A) = 2$. Тогда определитель этой матрицы равен...	1) $\det A = 0$ 2) $\det A = 2$ 3) $\det A = 3$ 4) $\det A = 4$	☐ ☐ ☐ ☐
1.128. Ранг квадратной матрицы A четвертого порядка равен $r(A) = 3$. Тогда определитель этой матрицы равен...	1) $\det A = 4$ 2) $\det A = 0$ 3) $\det A = 3$ 4) $\det A = 1$	☐ ☐ ☐ ☐

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
1.129. Ранг квадратной матрицы A пятого порядка равен $r(A) = 3$. Тогда определитель этой матрицы равен...	1) $\det A = 5$ ☐ 2) $\det A = 2$ ☐ 3) $\det A = 3$ ☐ 4) $\det A = 0$ ☐
2. Системы линейных уравнений	
2.1. Формулы вида $x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta}$ для решения системы линейных уравнений через определители называются формулами...	1) треугольников ☐ 2) Кронекера ☐ 3) Капелли ☐ 4) Крамера ☐ 5) Коши — Буняковского ☐
2.2. Как называется матрица системы линейных уравнений, дополненная столбцом свободных членов?	1) однородная ☐ 2) расширенная ☐ 3) жорданова ☐ 4) классическая ☐ 5) полная ☐
2.3. Для системы линейных уравнений равенство рангов матрицы системы и расширенной матрицы системы является условием ее...	1) определенности ☐ 2) однородности ☐ 3) совместности ☐ 4) несовместности ☐ 5) неопределенности ☐
2.4. Как называется система линейных уравнений, в которой все свободные члены равны нулю?	1) Определенная ☐ 2) Однородная ☐ 3) Жорданова ☐ 4) Классическая ☐ 5) Базисная ☐
2.5. При решении системы уравнений с квадратной матрицей коэффициентов A можно применять правило Крамера, если...	1) определитель матрицы A равен нулю ☐ 2) ранг матрицы A равен числу ее столбцов ☐ 3) матрица A имеет два пропорциональных столбца ☐ 4) одна из строк матрицы является линейной комбинацией остальных ☐

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
2.6. При решении системы уравнений с квадратной матрицей коэффициентов A нельзя применять правило Крамера, если...	1) столбцы матрицы A линейно независимы ☐ 2) ранг матрицы системы не равен числу уравнений ☐ 3) строки матрицы A линейно независимы ☐ 4) определитель матрицы A не равен нулю ☐
2.7. Дана система уравнений $\begin{cases} 3x + 2y = 1, \\ 6x + 5y = 4. \end{cases}$ Для того чтобы найти значение переменной x при решении этой системы по формулам Крамера, достаточно вычислить только определители...	1) $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 5 \end{vmatrix}$ и $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$ ☐ 2) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$ и $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 4 \end{vmatrix}$ ☐ 3) $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 5 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$ и $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 4 \end{vmatrix}$ ☐ 4) $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 5 \end{vmatrix}$ и $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 4 \end{vmatrix}$ ☐
2.8. Дана система уравнений $\begin{cases} 3x + 2y = 1, \\ 6x + 5y = 4. \end{cases}$ Для того чтобы найти значение переменной y при решении этой системы по формулам Крамера, достаточно вычислить только определители...	1) $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 5 \end{vmatrix}$ и $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$ ☐ 2) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$ и $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 4 \end{vmatrix}$ ☐ 3) $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 5 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$ и $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 4 \end{vmatrix}$ ☐ 4) $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 5 \end{vmatrix}$ и $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 4 \end{vmatrix}$ ☐

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
2.9. Дана система уравнений $\begin{cases} x - 2y = 3, \\ 4x + 5y = 6. \end{cases}$ Для того чтобы найти значение переменной x при решении этой системы по формулам Крамера, достаточно вычислить только определители...	1) $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$ и $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}$ ☐ 2) $\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 6 & 5 \end{vmatrix}$ и $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}$ ☐ 3) $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$ и $\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 6 & 5 \end{vmatrix}$ ☐ 4) $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 6 & 5 \end{vmatrix}$ и $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}$ ☐
2.10. Расширенная матрица системы уравнений $\begin{cases} x - 2y - z = 3, \\ 4x + 5y + z = 6 \end{cases}$ имеет размерность...	1) 2×3 ☐ 2) 4×2 ☐ 3) 3×2 ☐ 4) 2×4 ☐
2.11. Дана система линейных уравнений $\begin{cases} x + 7y = 3, \\ -x + ay = 5. \end{cases}$ Система не имеет решений при $a = \dots$	1) -7 ☐ 2) $-1/7$ ☐ 3) $1/7$ ☐ 4) 7 ☐
2.12. Дана система линейных уравнений $\begin{cases} 4x - y = 1, \\ ax - 2y = 3. \end{cases}$ Система не имеет решений при $a = \dots$	1) -8 ☐ 2) -5 ☐ 3) 8 ☐ 4) 5 ☐

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
2.13. Система линейных уравнений решается по правилу Крамера: $\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 = 4, \\ 3x_1 - 3x_2 = 7. \end{cases}$ Установить соответствие между определителями системы и их значениями: А) Δ; Б) Δ_1; В) Δ_2. а) 9; б) -2; в) 23; г) 2	1) А – а; Б – в; В – б ☐ 2) А – а; Б – в; В – г ☐ 3) А – в; Б – а; В – б ☐ 4) А – г; Б – в; В – а ☐ 5) А – в; Б – а; В – г ☐
2.14. Система линейных уравнений решается по правилу Крамера: $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 = 4, \\ 5x_1 + 4x_2 = 1. \end{cases}$ Установить соответствие между определителями системы и их значениями: А) Δ; Б) Δ_1; В) Δ_2. а) -17; б) 17; в) 18; г) 22	1) А – а; Б – в; В – б ☐ 2) А – а; Б – в; В – г ☐ 3) А – г; Б – а; В – б ☐ 4) А – г; Б – в; В – а ☐ 5) А – в; Б – а; В – г ☐
2.15. Система линейных уравнений решается по правилу Крамера: $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 = 0, \\ 2x_1 + 4x_2 = 1. \end{cases}$ Установить соответствие между определителями системы и их значениями: А) Δ; Б) Δ_1; В) Δ_2. а) -3; б) 2; в) 16; г) 3	1) А – а; Б – в; В – б ☐ 2) А – в; Б – б; В – г ☐ 3) А – г; Б – а; В – б ☐ 4) А – г; Б – в; В – а ☐ 5) А – в; Б – а; В – г ☐
2.16. Решением системы уравнений $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 11, \\ 3x_1 - x_2 = 0 \end{cases}$ является...	1) $x_1 = -1; x_2 = -2$ ☐ 2) $x_1 = 1; x_2 = 3$ ☐ 3) $x_1 = 0; x_2 = 1$ ☐ 4) $x_1 = 1,5; x_2 = -0,5$ ☐ 5) $x_1 = 2; x_2 = -1$ ☐
2.17. Решением системы уравнений $\begin{cases} 2x_1 - x_2 = -3, \\ 4x_1 + x_2 = -9 \end{cases}$ является...	1) $x_1 = 1,5; x_2 = 0,5$ ☐ 2) $x_1 = 2; x_2 = -2$ ☐ 3) $x_1 = -2; x_2 = -1$ ☐ 4) $x_1 = 1,1; x_2 = 0,8$ ☐ 5) $x_1 = 0,8; x_2 = -1$ ☐

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
2.18. Решением системы уравнений $\begin{cases} 4x_1 - x_2 = 8, \\ 2x_1 + 3x_2 = -3 \end{cases}$ является...	1) $x_1 = 1,5; x_2 = -2$ ☐ 2) $x_1 = 1; x_2 = -1$ ☐ 3) $x_1 = 2; x_2 = -1$ ☐ 4) $x_1 = 0,5; x_2 = -0,5$ ☐ 5) $x_1 = 0,5; x_2 = 0,5$ ☐
2.19. Основная матрица системы линейных алгебраических уравнений $\begin{cases} x_3 + 2x_2 - x_1 = 1, \\ x_3 - x_2 = 0, \\ x_3 + x_2 = 2 \end{cases}$ имеет вид...	1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ☐ 2) $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ☐ 3) $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ ☐ 4) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ ☐
2.20. Определитель основной матрицы системы линейных уравнений $\begin{cases} -2y + 6 = 0, \\ -y - 2z + 3 = 0, \\ 2x + 4y = 1 \end{cases}$ равен...	1) 10 ☐ 2) 8 ☐ 3) 76 ☐ 4) 80 ☐
2.21. Дана система линейных уравнений $\begin{cases} 3x + \lambda y = 0, \\ -y - 3z = -5, \\ 3x - 2y = -7. \end{cases}$ Эту систему нельзя решить методом Крамера при $\lambda = \dots$	1) 1 ☐ 2) 2 ☐ 3) -2 ☐ 4) -4 ☐

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа	
2.22. Чему равно значение x_1 в решении системы $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = -3, \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 = 6, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0? \end{cases}$	1) 1 2) 2 3) 3 4) 4	☐ ☐ ☐ ☐
2.23. Чему равно значение x_3 в решении системы $\begin{cases} -x_1 + x_2 - 3x_3 = 9, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = -10, \\ x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 8? \end{cases}$	1) -1 2) -2 3) -3 4) -4	☐ ☐ ☐ ☐
2.24. Чему равно значение x_2 в решении системы $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 8, \\ -x_1 + x_2 - 3x_3 = -6, \\ x_1 + x_2 - 5x_3 = 0? \end{cases}$	1) 4 2) 3 3) 2 4) 1	☐ ☐ ☐ ☐
2.25. Чему равно значение x_1 в решении системы $\begin{cases} 3x_1 - x_2 - x_3 = 11, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -4, \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 = -3? \end{cases}$	1) 1 2) 2 3) 3 4) 4	☐ ☐ ☐ ☐
2.26. Чему равно значение x_1 в решении системы $\begin{cases} -x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 8, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 8, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 3? \end{cases}$	1) 5 2) 3 3) 2 4) 1	☐ ☐ ☐ ☐
2.27. Чему равно значение x_2 в решении системы $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 9, \\ 3x_1 + x_2 - 4x_3 = 14, \\ -x_1 - x_2 + 3x_3 = -10? \end{cases}$	1) 3 2) 4 3) 5 4) 6	☐ ☐ ☐ ☐

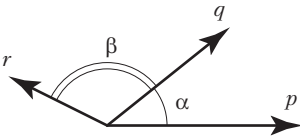
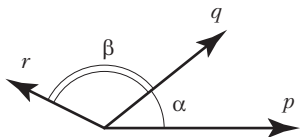
Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
2.28. Чему равно значение x_3 в решении системы $\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 5, \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 = 20, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 7? \end{cases}$	1) 0 ☐ 2) -1 ☐ 3) -2 ☐ 4) -3 ☐
2.29. Сколько решений имеет система уравнений $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 = 0, \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 0? \end{cases}$	1) Ни одного ☐ 2) Одно ☐ 3) Три ☐ 4) Бесконечное множество ☐
2.30. Сколько решений имеет система уравнений $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 0, \\ 5x_1 - x_2 + 3x_3 = 0, \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 = 0? \end{cases}$	1) Ни одного ☐ 2) Одно ☐ 3) Три ☐ 4) Бесконечное множество ☐
2.31. Сколько решений имеет система уравнений $\begin{cases} 4x_1 - x_2 - 2x_3 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 0? \end{cases}$	1) Ни одного ☐ 2) Одно ☐ 3) Три ☐ 4) Бесконечное множество ☐
2.32. При каком значении a_{22} система линейных уравнений $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 = 0, \\ -12x_1 + a_{22}x_2 = 0 \end{cases}$ имеет ненулевые решения?	1) 4 ☐ 2) -4 ☐ 3) -16 ☐ 4) -24 ☐
2.33. В системе уравнений $\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 - 4x_5 = 0, \\ x_2 - 3x_3 - 3x_4 - x_5 = 0, \\ 4x_3 + 2x_4 + 4x_5 = 0 \end{cases}$ в качестве свободных неизвестных можно выбрать...	1) x_4 ☐ 2) x_4, x_5 ☐ 3) x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 ☐ 4) x_1, x_2, x_3 ☐

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
2.34. В системе уравнений $\begin{cases} -x_1 + 3x_2 - 5x_3 + 2x_4 - 2x_5 = 0, \\ x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 0, \\ -3x_3 + x_4 + 3x_5 = 0 \end{cases}$ в качестве свободных неизвестных можно выбрать...	1) x_4, x_5 ☐ 2) x_5 ☐ 3) x_4 ☐ 4) x_1, x_2, x_3 ☐
3. Векторы	
3.1. Скалярное произведение $\langle a, b \rangle$ векторов $a = (a_1, a_2)$ и $b = (b_1, b_2)$ определяется по формуле...	1) $a_1a_2 + b_1b_2$ ☐ 2) $(a_2 - a_1)(b_2 - b_1)$ ☐ 3) $a_1b_1 + a_2b_2$ ☐ 4) $(a_2 + a_1)(b_2 + b_1)$ ☐
3.2. Если α — угол между векторами a и b, то что определяется выражением $\frac{\langle a, b \rangle}{ a \cdot b }$?	1) $\operatorname{tg} \alpha$ ☐ 2) α ☐ 3) $\sin \alpha$ ☐ 4) $\cos \alpha$ ☐
3.3. По какой формуле определяется длина (модуль) вектора a?	1) $a = a \cdot \cos \alpha$ ☐ 2) $a = \sqrt{\langle a, a \rangle}$ ☐ 3) $a = \langle a, a \rangle$ ☐ 4) $a = \sqrt{a \cdot \cos \alpha}$ ☐
3.4. Если скалярное произведение двух векторов равно нулю, то эти векторы...	1) коллинеарны ☐ 2) противоположны ☐ 3) ортогональны ☐ 4) Фробениуса ☐
3.5. Даны три вектора: $a = \vec{i} - 3\vec{j} - \vec{k}$; $b = (1, -3, -1)$; $c = \overline{AB}$, где $A(-1, 1, -3)$, $B(0, -2, -4)$. Какие из этих векторов равны?	1) Только a и b ☐ 2) Только a и c ☐ 3) только b и c ☐ 4) Все равны ☐ 5) Равных нет ☐

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
3.6. Даны три вектора: $a = \vec{i} - 5\vec{j} + 2\vec{k}$; $b = (1, 5, -2)$; $c = \overline{AB}$; где $A(2, -2, 4)$, $B(1, 3, 2)$. Какие из этих векторов коллинеарны?	1) Только a и b ☐ 2) Только a и c ☐ 3) Только b и c ☐ 4) Все коллинеарны ☐ 5) Коллинеарных нет ☐
3.7. Даны три вектора: $a = 3\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$; $b = (-6, -2, -4)$; $c = \overline{AB}$, где $A(2, 0, 2)$, $B(-7, -3, -4)$. Какие из этих векторов коллинеарны?	1) Только a и b ☐ 2) Только a и c ☐ 3) Только b и c ☐ 4) Все коллинеарны ☐ 5) Коллинеарных нет ☐
3.8. Даны три вектора: $a = \vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$; $b = (1, 1, 2)$; $c = \overline{AB}$; где $A(2, 1, -1)$, $B(1, 2, 1)$. Какие из этих векторов коллинеарны?	1) Только a и b ☐ 2) Только a и c ☐ 3) Только b и c ☐ 4) Все коллинеарны ☐ 5) Коллинеарных нет ☐
3.9. Если $\vec{a} = 3 \cdot \vec{i} - 4 \cdot \vec{j} + 12 \cdot \vec{k}$, то $ \vec{a} = \dots$	1) $\sqrt{23}$ ☐ 2) 7 ☐ 3) 13 ☐ 4) $\sqrt{11}$ ☐ 5) 11 ☐
3.10. Если $\vec{a} = 6\vec{i} - 4\vec{j} - 12\vec{k}$, то $ \vec{a} = \dots$	1) 14 ☐ 2) 16 ☐ 3) 22 ☐ 4) 10 ☐ 5) $\sqrt{124}$ ☐
3.11. Если $\vec{a} = -\vec{i} + 3 \cdot \vec{j} - \vec{k}$, то $ \vec{a} = \dots$	1) 11 ☐ 2) 7 ☐ 3) 1 ☐ 4) $\sqrt{11}$ ☐ 5) -7 ☐

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
3.12. Если $\vec{a} = 10\vec{i} - 2\vec{j} + 11\vec{k}$, то $ \vec{a} = \dots$	1) 15 ☐ 2) 17 ☐ 3) $\sqrt{23}$ ☐ 4) 23 ☐ 5) 2 ☐
3.13. Если $\vec{a} = -6 \cdot \vec{i} - 8 \cdot \vec{j} + 24 \cdot \vec{k}$, то $ \vec{a} = \dots$	1) 13 ☐ 2) 15 ☐ 3) 23 ☐ 4) 26 ☐ 5) $\sqrt{46}$ ☐
3.14. Найти длину вектора $d = 3a + 2(b - c)$, если $a = (2, 1, -2)$, $b = (5, -4, 3)$ и $c = (2, -1, 2)$	1) $\sqrt{125}$ ☐ 2) 15 ☐ 3) 13 ☐ 4) $3\sqrt{7}$ ☐
3.15. Заданы векторы $m = (4, 1, -1)$ и $n = (3, -1, 2)$. Длина вектора $4m - 6n$ равна...	1) $6\sqrt{10}$ ☐ 2) $\sqrt{323}$ ☐ 3) 17 ☐ 4) $5\sqrt{12}$ ☐
3.16. Задан вектор $p = (6, 3, 2)$. Длина вектора $4p$ равна...	1) $2\sqrt{154}$ ☐ 2) 28 ☐ 3) 17 ☐ 4) 19 ☐ 5) $5\sqrt{53}$ ☐
3.17. Найти длину вектора $d = a - 2b + 3c$, если $a = (2, -1, -1)$, $b = (1, -1, 2)$, $c = (2, -1, 3)$	1) $6\sqrt{5}$ ☐ 2) 7 ☐ 3) $3\sqrt{10}$ ☐ 4) $5\sqrt{6}$ ☐ 5) $2\sqrt{14}$ ☐

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа	
3.18. Найти скалярное произведение векторов $d = a + 4b$ и $f = 3c - b$, если $a = (2, -1, 4)$, $b = (1, -3, -1)$, $c = (-1, 2, 5)$	1) -94	☐
	2) -116	☐
	3) -141	☐
	4) -154	☐
	5) -173	☐
3.19. Заданы векторы $m = (3, 4, 5)$ и $n = (2, -1, 2)$. Скалярное произведение вектора m на вектор $m - n$ равно...	1) 38	☐
	2) 35	☐
	3) 34	☐
	4) 31	☐
3.20. Заданы векторы $m = (4, 2, 3)$ и $n = (3, 1, 5)$. Скалярное произведение вектора n на вектор $m - n$ равно...	1) 14	☐
	2) 13	☐
	3) 3	☐
	4) -6	☐
3.21. Заданы векторы $m = (1, 2, 3)$ и $n = (2, 2, 4)$. Скалярное произведение вектора n на вектор $m - n$ равно...	1) -6	☐
	2) -4	☐
	3) -8	☐
	4) 8	☐
3.22. Найти скалярное произведение векторов $d = a - b$ и $f = b + c$, если $a = (1, -1, -3)$, $b = (2, 1, 3)$, $c = (1, -1, 2)$	1) -54	☐
	2) -45	☐
	3) -33	☐
	4) -18	☐
3.23. Найти скалярное произведение векторов $d = 2a + 3b + c$ и $f = b - a - 2c$, если $a = (-1, -2, 4)$, $b = (1, 2, -1)$, $c = (3, 1, -1)$	1) -28	☐
	2) -22	☐
	3) -18	☐
	4) -16	☐
3.24. При каком значении x скалярное произведение векторов $a = (3x, -4, 2)$ и $b = (2, 4x, 5)$ равно -10?	1) 1	☐
	2) 2	☐
	3) 3	☐
	4) 4	☐

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
3.25. Расположить пары векторов в порядке увеличения их скалярных произведений $\langle a, b \rangle$: 1) $\begin{cases} a = (1, -2, 1), \\ b = (3, 2, 1); \end{cases}$ 2) $\begin{cases} a = (1, 2, 3), \\ b = (4, -2, 3); \end{cases}$ 3) $\begin{cases} a = (3, 1, 4), \\ b = (-1, 3, 2); \end{cases}$ 4) $\begin{cases} a = (-2, 2, 1), \\ b = (1, 4, 5) \end{cases}$	1) 1, 3, 2, 4 ☐ 2) 4, 2, 3, 1 ☐ 3) 2, 1, 4, 3 ☐ 4) 4, 3, 1, 2 ☐
3.26. Отношение скалярных произведений $\frac{\langle p, q \rangle}{\langle q, r \rangle}$ при $p = 2\sqrt{2}$; $r = 2$; $\alpha = 135^\circ$; $\beta = 60^\circ$ равно... 	1) 2 ☐ 2) -2 ☐ 3) 1 ☐ 4) -1 ☐
3.27. Отношение скалярных произведений $\frac{\langle p, q \rangle}{\langle q, r \rangle}$ при $p = 3\sqrt{2}$; $r = \sqrt{3}$; $\alpha = 45^\circ$; $\beta = 30^\circ$ равно... 	1) 3 ☐ 2) -2 ☐ 3) 1 ☐ 4) 4 ☐ 5) 2 ☐
3.28. Из векторов $a = (1, 0, -2)$, $b = (6, 5, 2)$, $c = (6, -5, 3)$ ортогональными являются...	1) a и b ☐ 2) b и c ☐ 3) a и c ☐ 4) a и b; a и c ☐
3.29. При каком положительном значении x векторы a и b ортогональны, если $a = (x, 2, -2)$, $b = (x, 2x, 6)$?	1) 1 ☐ 2) 2 ☐ 3) 3 ☐ 4) 4 ☐

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
3.30. Длина медианы AM в треугольнике ABC с вершинами $A(1, 2)$, $B(2, 5)$, $C(7, 4)$ равна...	1) $2\sqrt{33}$ ☐ 2) 5 ☐ 3) 4 ☐ 4) $0,5\sqrt{74}$ ☐
3.31. Длина медианы AM в треугольнике ABC с вершинами $A(8, 6)$, $B(10, 12)$, $C(20, 18)$ равна...	1) $6\sqrt{57}$ ☐ 2) $\sqrt{130}$ ☐ 3) 18 ☐ 4) 12 ☐
3.32. В треугольнике ABC , где $A(3, 5)$, $B(11, 9)$, $C(7, 17)$, угол при вершине A равен...	1) $\arccos\left(\frac{3}{4}\right)$ ☐ 2) $\frac{\pi}{4}$ ☐ 3) $\frac{\pi}{3}$ ☐ 4) $\arccos\left(\frac{1}{3}\right)$ ☐
3.33. В треугольнике ABC , две стороны которого образованы векторами $\overrightarrow{AB} = 2\vec{i} + 4\vec{j}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{i} + 2\vec{k}$, косинус угла при вершине A равен...	1) 0,2 ☐ 2) $\frac{\sqrt{2}}{5}$ ☐ 3) $\frac{1}{4}$ ☐ 4) $\frac{4}{9}$ ☐
3.34. В треугольнике ABC , две стороны которого образованы векторами $\overrightarrow{AB} = 2\vec{i} - 4\vec{j} + 2\vec{k}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{i} - \vec{j}$, косинус угла при вершине A равен...	1) 0 ☐ 2) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ☐ 3) $\frac{\sqrt{2}}{3}$ ☐ 4) $\frac{2}{3}$ ☐

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа	
3.35. Две смежные стороны параллелограмма образованы векторами $a = 3\vec{i} - 4\vec{j} + \vec{k}$ и $b = \vec{i} + 3\vec{k}$. Произведение длин диагоналей параллелограмма равно...	1) 40	☐
	2) $3\sqrt{22}$	☐
	3) $24\sqrt{2}$	☐
	4) $20\sqrt{2}$	☐
3.36. Две смежные стороны параллелограмма образованы векторами $a = 2\vec{i} + 4\vec{k}$ и $b = 4\vec{j}$. Сумма длин диагоналей параллелограмма равна...	1) 6	☐
	2) 10	☐
	3) $2\sqrt{14}$	☐
	4) 12	☐
3.37. Как называется максимально возможное число линейно независимых векторов в линейном (векторном) пространстве?	1) Норма	☐
	2) Квадратура	☐
	3) Базис	☐
	4) Надстройка	☐
	5) Размерность	☐
3.38. Как называется набор из n линейно независимых векторов в n -мерном векторном пространстве?	1) Норма	☐
	2) Квадратура	☐
	3) Базис	☐
	4) Надстройка	☐
	5) Размерность	☐
3.39. Даны векторы $a = (3, -2)$, $b = (6, 4)$, $c = (-3, -2)$. Какие пары векторов образуют базис пространства R^2 ?	1) Только a и b	☐
	2) Только a , b и a , c	☐
	3) Только b и c	☐
	4) Только a , b и b , c	☐
	5) Никакие	☐
3.40. Даны векторы $a = (-2, 5)$, $b = (2, -10)$, $c = (-4, 10)$. Какие пары векторов образуют базис пространства R^2 ?	1) Только a и c	☐
	2) Только a , b и a , c	☐
	3) Только b и c	☐
	4) Только a , b и b , c	☐
	5) Никакие	☐

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа	
3.41. Даны векторы $a = (2, 1)$, $b = (4, 2)$, $c = (-2, -1)$. Какие пары векторов образуют базис пространства R^2 ?	1) Только a и b	☐
	2) Только a , b и a , c	☐
	3) Только b и c	☐
	4) Только a , c и b , c	☐
	5) Никакие	☐
3.42. Векторы $a = (3, 1)$ и $b = (-1, 2)$ образуют базис пространства R^2 . Разложить по этому базису вектор $c = (10, 1)$	1) $c = 6a + 7b$	☐
	2) $c = -2a + 3b$	☐
	3) $c = 5a - 3b$	☐
	4) $c = 2a + 5b$	☐
	5) $c = 3a - b$	☐
3.43. Векторы $a = (2, 2)$ и $b = (5, 1)$ образуют базис пространства R^2 . Разложить по этому базису вектор $c = (11, -1)$	1) $c = 6a + 7b$	☐
	2) $c = -2a + 3b$	☐
	3) $c = 5a - 3b$	☐
	4) $c = 2a + 5b$	☐
	5) $c = 3a - b$	☐
3.44. Векторы $a = (4, -1)$ и $b = (3, 2)$ образуют базис пространства R^2 . Разложить по этому базису вектор $c = (11, -11)$	1) $c = 6a + 7b$	☐
	2) $c = -2a + 3b$	☐
	3) $c = 5a - 3b$	☐
	4) $c = 2a + 5b$	☐
	5) $c = 3a - b$	☐
3.45. Векторы $a = (1, 1)$ и $b = (1, 2)$ образуют базис пространства R^2 . Разложить по этому базису вектор $c = (13, 20)$	1) $c = 6a + 7b$	☐
	2) $c = -2a + 3b$	☐
	3) $c = 5a - 3b$	☐
	4) $c = 2a + 5b$	☐
	5) $c = 3a - b$	☐
3.46. Вектор $\bar{c} = \bar{a} \times \bar{b}$, где $\bar{a} = (3, -1, 1)$, $\bar{b} = (1, 2, -3)$, равен...	1) $(5, -10, 5)$	☐
	2) $(1, -10, 5)$	☐
	3) $(1, 10, 7)$	☐
	4) $(5, 10, 7)$	☐
3.47. Вектор $\bar{c} = \bar{a} \times \bar{b}$, где $\bar{a} = (2, 3, 0)$, $\bar{b} = (-1, 1, -1)$, равен...	1) $(-3, 2, 5)$	☐
	2) $(-2, 1, 1)$	☐
	3) $(5, 3, -2)$	☐
	4) $(1, 2, -1)$	☐

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа	
3.48. Вектор $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$, где $\vec{a} = (3, 0, -1)$, $\vec{b} = (-3, 2, -1)$, равен...	1) (0, 0, 9)	☐
	2) (-2, 9, 1)	☐
	3) (2, 6, 6)	☐
	4) (3, 0, 12)	☐
3.49. Вектор $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$, где $\vec{a} = (-4, 0, 2)$, $\vec{b} = (1, 1, 2)$, равен...	1) (2, -2, 1)	☐
	2) (-2, 10, -4)	☐
	3) (5, 2, 5)	☐
	4) (-1, 12, 4)	☐
	5) (4, -5, 3)	☐
3.50. Вектор $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$, где $\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j}$, $\vec{b} = -\vec{j} + 3\vec{k}$, равен...	1) (1, 6, 7)	☐
	2) (2, -10, 0)	☐
	3) (-1, 7, -3)	☐
	4) (6, -3, -1)	☐
3.51. Площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a} = (1, -3, 2)$ и $\vec{b} = (2, -1, 0)$, равна...	1) $3\sqrt{5}$	☐
	2) 7	☐
	3) $\sqrt{12}$	☐
	4) $\sqrt{53}$	☐
	5) 6	☐
3.52. Площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j}$ и $\vec{b} = \vec{i} - \vec{k}$, равна...	1) $\sqrt{5}$	☐
	2) 1	☐
	3) $\sqrt{7}$	☐
	4) $\sqrt{3}$	☐
	5) 2	☐
3.53. Площадь треугольника ABC с координатами вершин $A(0, -1, 2)$, $B(1, 2, -1)$, $C(3, -2, 1)$ равна...	1) 8	☐
	2) $5\sqrt{2}$	☐
	3) $\frac{\sqrt{190}}{2}$	☐
	4) 10	☐
	5) $\frac{\sqrt{210}}{2}$	☐

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа	
3.54. Смешанное произведение $\overline{abc}$, где $\overline{a} = (2, 1, 0)$, $\overline{b} = (0, -1, 1)$, $\overline{c} = (1, 0, 2)$, равно...	1) 3	☐
	2) -3	☐
	3) 1	☐
	4) -1	☐
	5) 0	☐
3.55. Объем параллелепипеда, постро- енного на векторах $\overline{a} = (1, 3, -1)$, $\overline{b} = (0, 2, -2)$, $\overline{c} = (1, -2, 1)$, равен...	1) 6	☐
	2) 7	☐
	3) 8	☐
	4) 9	☐
	5) 10	☐
4. Собственные векторы и квадратичные формы		
4.1. Собственный вектор x и собствен- ное значение λ квадратной матрицы A определяются равенством...	1) $\lambda A^{-1}x = x$	☐
	2) $A = \lambda x$	☐
	3) $\lambda Ax = x$	☐
	4) $Ax = \lambda x$	☐
	5) $x = \lambda A$	☐
4.2. Вектор $x = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ является собст- венным вектором матрицы A , соответ- ствующим собственному значе- нию $\lambda = 2$. Тогда произведение $A \cdot x$ равно...	1) $\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$	☐
	2) $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$	☐
	3) $\begin{pmatrix} 4 \\ -4 \end{pmatrix}$	☐
	4) $\begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix}$	☐
4.3. Вектор $x = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \end{pmatrix}$ является собст- венным вектором матрицы A , соответ- ствующим собственному значе- нию $\lambda = 3$. Тогда произведение $A \cdot x$ равно...	1) $\begin{pmatrix} 18 \\ -3 \end{pmatrix}$	☐
	2) $\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$	☐
	3) $\begin{pmatrix} 2 \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$	☐
	4) $\begin{pmatrix} 9 \\ 2 \end{pmatrix}$	☐

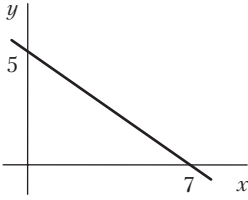
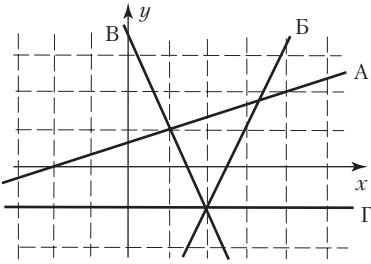
Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа	
4.4. Чему равно наибольшее собственное значение матрицы A $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}?$	1) 1 2) 2 3) 3 4) 6	☐ ☐ ☐ ☐
4.5. Чему равно наибольшее собственное значение матрицы A $A = \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}?$	1) 5 2) 6 3) 7 4) 8	☐ ☐ ☐ ☐
4.6. Чему равно наибольшее собственное значение матрицы A $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}?$	1) 1 2) 3 3) 5 4) 7 5) 9	☐ ☐ ☐ ☐ ☐
4.7. Чему равно наибольшее собственное значение матрицы A $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}?$	1) 6 2) 5 2) 4 3) 2 4) 1	☐ ☐ ☐ ☐ ☐
4.8. Квадратичная форма $4x_1^2 + 2\lambda x_1 x_2 + 2x_2^2$ является положительно определенной при λ , равном...	1) -3 2) -2 3) 3 4) -4	☐ ☐ ☐ ☐
4.9. Квадратичная форма $\lambda x_1^2 + 2\lambda x_1 x_2 + 4x_2^2$ является положительно определенной при λ , равном...	1) 1 2) -1 3) 5 4) -5	☐ ☐ ☐ ☐
4.10. Матрице $\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$ соответствует квадратичная форма...	1) $2x^2 + 8xy + 3y^2$ 2) $2x^2 - 4xy + 3y^2$ 3) $2x^2 - 8xy + 3y^2$ 4) $6x^2 - 16xy + 6y^2$	☐ ☐ ☐ ☐

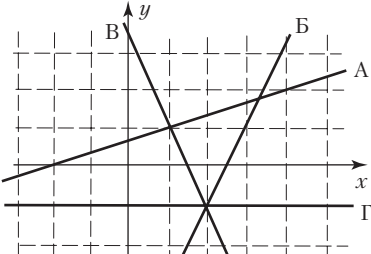
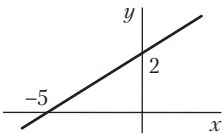
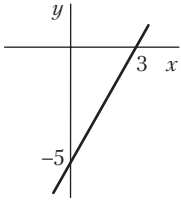
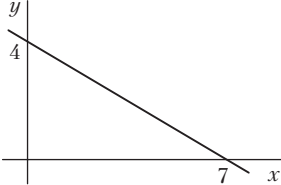
Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
4.11. Матрице $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ соответствует квадратичная форма...	1) $-9x^2 - xy - 9y^2$ ☐ 2) $3x^2 + 2xy - 3y^2$ ☐ 3) $3x^2 + xy - 3y^2$ ☐ 4) $3x^2 - 2xy - 3y^2$ ☐
5. Комплексные числа	
5.1. Модуль комплексного числа $5 + 12i$ равен...	1) 5 ☐ 2) 11 ☐ 3) 12 ☐ 4) 13 ☐
5.2. Модуль комплексного числа $1 + 3i$ равен...	1) 1 ☐ 2) 3 ☐ 3) $\sqrt{10}$ ☐ 4) $\sqrt{15}$ ☐
5.3. Аргумент комплексного числа $5 + 12i$ равен...	1) 0 ☐ 2) $\arccos \frac{5}{12}$ ☐ 3) $\arccos \frac{5}{13}$ ☐ 4) $\frac{\pi}{6}$ ☐ 5) $\frac{\pi}{4}$ ☐
5.4. Аргумент комплексного числа $\sqrt{3} + i$ равен...	1) 0 ☐ 2) $\arccos \frac{3}{5}$ ☐ 3) $\arccos \frac{4}{5}$ ☐ 4) $\frac{\pi}{6}$ ☐ 5) $\frac{\pi}{4}$ ☐

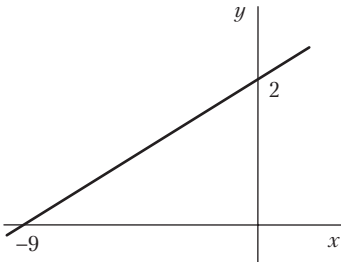
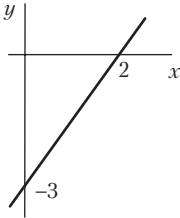
Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
5.5. Преобразовать комплексное число $\sqrt{3} + i$ к тригонометрической форме записи	1) $\sqrt{2} \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right)$ ☐ 2) $2 \left[\cos \left(\frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{6} \right) \right]$ ☐ 3) $2 \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$ ☐ 4) $2 \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right)$ ☐
5.6. Сумма $2z_1 + 7z_2$, если $z_1 = 1 - i$, $z_2 = 5 + 3i$, равна...	1) $37 + 19i$ ☐ 2) $23 + 33i$ ☐ 3) $57 - 2i$ ☐ 4) $43 + 29i$ ☐
5.7. Разность $3z_1 - 2z_2$, если $z_1 = 2 + 3i$, $z_2 = 1 - 2i$, равна...	1) $4 + 21i$ ☐ 2) $10 + 7i$ ☐ 3) $15 + 2i$ ☐ 4) $4 + 13i$ ☐
5.8. Разность $4z_1 - 3z_2$, если $z_1 = 3 + i$, $z_2 = 2 - 3i$, равна...	1) $6 + 13i$ ☐ 2) $21 - 2i$ ☐ 3) $16 + 3i$ ☐ 4) $-2 + 21i$ ☐
5.9. Разность $2z_1 - 5z_2$, если $z_1 = 3 + 3i$, $z_2 = 1 - 2i$, равна...	1) $12 + 5i$ ☐ 2) $16 + i$ ☐ 3) $1 + 16i$ ☐ 4) $16 + 11i$ ☐
5.10. Произведение $z_1 z_2$, если $z_1 = 2 - 3i$, $z_2 = 4 + 5i$, равно...	1) $8 - 15i$ ☐ 2) $23 - 2i$ ☐ 3) $-7 - 2i$ ☐ 4) $20 + 25i$ ☐
5.11. Произведение $z_1 z_2$, если $z_1 = 4 - i$, $z_2 = 4 + i$, равно...	1) $16 - i$ ☐ 2) 5 ☐ 3) 17 ☐ 4) $-17i$ ☐

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа	
5.12. Произведение $z_1 z_2$, если $z_1 = 2 + 5i$, $z_2 = 1 - i$, равно...	1) $2 + 8i$	☐
	2) $12 - 2i$	☐
	3) 10	☐
	4) $7 + 3i$	☐
5.13. Произведение $z_1 z_2$, если $z_1 = 3 + i$, $z_2 = 7 - 2i$, равно...	1) $23 + i$	☐
	2) $28 - 4i$	☐
	3) $15 + 9i$	☐
	4) $6 - 22i$	☐
5.14. Произведение $z_1 z_2$, если $z_1 = 4 + i$, $z_2 = 4 - 2i$, равно...	1) $16 - 2i$	☐
	2) $18 - 4i$	☐
	3) $8 + 6i$	☐
	4) $16 + 12i$	☐
5.15. Действительная часть комплексного выражения $\frac{x^2 - i}{x + 2i}$ равна...	1) $\frac{x - 1}{x + 1}$	☐
	2) $\frac{x^3 - 2}{x^2 + 4}$	☐
	3) $\frac{x^3 + 4}{x^2 + 4}$	☐
	4) $\frac{x^2 - 4}{x^2 + 4}$	☐
	5) $\frac{x^3 + 2}{x^2 + 4}$	☐
5.16. Число, сопряженное комплексному числу $(3 - 5i)^2$, равно...	1) $-16 + 30i$	☐
	2) $-16 - 30i$	☐
	3) $34 + 30i$	☐
	4) $34 - 30i$	☐
	5) $9 - 25i$	☐
5.17. Комплексное число $(1 - i)^2$ равно...	1) $2i$	☐
	2) $1 + i$	☐
	3) $2 - 2i$	☐
	4) 2	☐
	5) $-2i$	☐

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
5.18. Действительная часть комплексного выражения $\frac{x-3i}{x+i}$ равна...	1) $x-2$ ☐ 2) $\frac{x^2-3}{x^2+1}$ ☐ 3) $\frac{x^2-9}{x^2+1}$ ☐ 4) $\frac{x-3}{x+1}$ ☐ 5) $\frac{x^2-2}{x^2+2}$ ☐
5.19. Комплексное выражение $\left[\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{8} + i \sin \frac{\pi}{8} \right) \right]^5$ равно...	1) $\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{20} + i \sin \frac{\pi}{20} \right)$ ☐ 2) $32 \left(\cos \frac{\pi^5}{8} + i \sin \frac{\pi^5}{8} \right)$ ☐ 3) $5\sqrt{2} \left(\cos \frac{5\pi}{8} + i \sin \frac{5\pi}{8} \right)$ ☐ 4) $4\sqrt{2} \left(\cos \frac{5\pi}{8} + i \sin \frac{5\pi}{8} \right)$ ☐
6. Элементы аналитической геометрии	
6.1. Даны уравнения прямых: а) $2x + y = 0$ б) $x + y - 1 = 0$ в) $2x + y + 2 = 0$ г) $y = 2x - 3$. Выберите те, которые проходят через начало координат	1) Только г) ☐ 2) Только в) ☐ 3) Только б) и г) ☐ 4) Только б) ☐ 5) Только а) ☐
6.2. Угловой коэффициент k и величина отрезка b , отсекаемого прямой $2x - 4y + 7 = 0$ на оси Oy , равны...	1) $b = 7; k = 2$ ☐ 2) $b = 3,5; k = 0,5$ ☐ 3) $b = 1,75; k = 0,5$ ☐ 4) $b = -2; k = -3,5$ ☐ 5) $b = -3; k = 2$ ☐

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
6.3. Угловой коэффициент k и величина отрезка b, отсекаемого прямой $5x + y - 6 = 0$ на оси ординат, равны...	1) $b = 6; k = 1$ ☐ 2) $b = -6; k = 5$ ☐ 3) $b = 6/5; k = 1/5$ ☐ 4) $b = 6; k = -5$ ☐
6.4. Угловой коэффициент k прямой равен... 	1) -5 ☐ 2) $-\frac{5}{7}$ ☐ 3) $\frac{5}{7}$ ☐ 4) $-\frac{7}{5}$ ☐ 5) $-3,5$ ☐
6.5. Установить соответствие между уравнениями прямых и их угловыми коэффициентами: А) $x + 3y = 3$; Б) $5y + 1 = 0$; В) $6 - 2x = 0$. а) не существует; б) -2; в) $-\frac{1}{3}$; г) $\frac{1}{3}$; д) 0	1) А — в; Б — д; В — а ☐ 2) А — г; Б — в; В — д ☐ 3) А — в; Б — д; В — г ☐ 4) А — г; Б — а; В — б ☐ 5) А — г; Б — д; В — а ☐
6.6. Даны графики прямых. Установить соответствие между графиками и их угловыми коэффициентами: а) 0; б) 2; в) -2; г) $\frac{1}{3}$; д) $-\frac{1}{3}$. 	1) А — в; Б — д; В — б; Г — а ☐ 2) А — г; Б — б; В — в; Г — а ☐ 3) А — в; Б — д; В — г; Г — а ☐ 4) А — г; Б — а; В — б; Г — в ☐ 5) А — в; Б — д; В — а; Г — г ☐

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
6.7. Даны графики прямых. Расположить обозначения этих прямых в порядке возрастания их угловых коэффициентов 	1) АБВГ ☐ 2) ВГАБ ☐ 3) ГВАБ ☐ 4) ГВБА ☐ 5) БАГВ ☐
6.8. Уравнение линии на рисунке  имеет вид...	1) $2x - 5y + 2 = 0$ ☐ 2) $y = 2x + 5$ ☐ 3) $y = -2,5x + 2$ ☐ 4) $y = 2,5x + 1$ ☐ 5) $2x - 5y + 10 = 0$ ☐
6.9. Уравнение линии на рисунке  имеет вид...	1) $-5x + 3y = -2$ ☐ 2) $5x - 3y - 15 = 0$ ☐ 3) $y = -5x + 3$ ☐ 4) $y^2 = -5x + 3$ ☐ 5) $5x - 3y + 15 = 0$ ☐
6.10. Уравнение линии на рисунке  имеет вид...	1) $(x - 7) + (y - 4) = 0$ ☐ 2) $-7x + 4y = 0$ ☐ 3) $\frac{x}{7} + \frac{y}{4} = -1$ ☐ 4) $\frac{x}{7} + \frac{y}{4} = 1$ ☐ 5) $7x + 4y = -1$ ☐

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
6.11. Уравнение линии на рисунке  имеет вид...	1) $-9xy = 2$ ☐ 2) $(x - 9) + (y + 2) = 0$ ☐ 3) $-\frac{x}{9} + \frac{y}{2} = 1$ ☐ 4) $-9x + 2y = 1$ ☐ 5) $\frac{x}{9} - \frac{y}{2} = 1$ ☐
6.12. Уравнение линии на рисунке  имеет вид...	1) $\frac{x}{2} - \frac{y}{3} = 1$ ☐ 2) $\frac{x}{2} - \frac{y}{3} = 0$ ☐ 3) $-6xy = 1$ ☐ 4) $2x - 3y = 0$ ☐ 5) $2x - 3y = 1$ ☐
6.13. Общее уравнение прямой, проходящей через точки $(2; 3)$ и $(-1; 4)$, имеет вид...	1) $x + 3y - 11 = 0$ ☐ 2) $2x - 5y + 4 = 0$ ☐ 3) $-2x - y + 8 = 0$ ☐ 4) $x - 4y + 8 = 0$ ☐
6.14. Общее уравнение прямой, проходящей через точки $(3; 5)$ и $(4; -1)$, имеет вид...	1) $x - 9y + 19 = 0$ ☐ 2) $2x - 5y + 8 = 0$ ☐ 3) $6x + y - 23 = 0$ ☐ 4) $5x - 2y + 21 = 0$ ☐
6.15. Расстояние между точками $A(1; 0)$ и $B(-2; -4)$ равно...	1) 4 ☐ 2) 5 ☐ 3) 6 ☐ 4) 8 ☐
6.16. Расстояние от точки $(-5; 2)$ до оси Oy равно...	1) 5 ☐ 2) $\sqrt{34}$ ☐ 3) 2 ☐ 4) 3 ☐

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
6.17. Установить соответствие между элементами двух множеств: $\rho(A, B)$ – расстояние между точками A и B : А) $\rho(A(5; 3); B(2; 4))$; Б) $\rho(A(-2; 0); B(-2; \sqrt{5}))$; В) $\rho(A(8; -1); B(0; -1))$. а) $\sqrt{5}$; б) 8 в) 5; г) $\sqrt{10}$; д) 10	1) А – а; Б – б; В – в ☐ 2) А – г; Б – в; В – д ☐ 3) А – в; Б – д; В – г ☐ 4) А – г; Б – а; В – б ☐ 5) А – в; Б – д; В – а ☐
6.18. Установить соответствие между элементами двух множеств: $\rho(A, B)$ – расстояние между точками A и B : А) $\rho(A(1; 3); B(2; -1))$; Б) $\rho(A(-1; 0); B(2; \sqrt{7}))$; В) $\rho(A(3; -1); B(-2; -1))$. а) 4; б) 5 в) $\sqrt{17}$; г) 16; д) 17	1) А – а; Б – б; В – в ☐ 2) А – г; Б – в; В – д ☐ 3) А – в; Б – а; В – б ☐ 4) А – г; Б – а; В – б ☐ 5) А – в; Б – д; В – а ☐
6.19. Точка $(2; -1)$ лежит на прямых: а) $x + 2y - 3 = 0$; б) $3x - y - 7 = 0$; в) $y = -3x - 1$; г) $y = -2x + 3$	1) Только а) и б) ☐ 2) Только б) и г) ☐ 3) Только б) ☐ 4) На всех ☐ 5) Ни на одной ☐
6.20. Точка $(3; 1)$ лежит на прямых: а) $x - 4y + 1 = 0$; б) $y = -2x + 8$; в) $2x - 3y + 2 = 0$; г) $y = -3x + 10$	1) Только а) и б) ☐ 2) Только а) и г) ☐ 3) Только а) ☐ 4) На всех ☐ 5) Ни на одной ☐
6.21. Даны точки $A(-6; 1)$, $B(6; 10)$, $C(6; 1)$. Установить соответствие между отрезком и его длиной: А) $ AB $; Б) $ AC $; В) $ BC $. а) 9; б) 12; в) 15; г) 11; д) 21	1) А – а; Б – б; В – в ☐ 2) А – в; Б – г; В – д ☐ 3) А – б; Б – д; В – г ☐ 4) А – а; Б – в; В – г ☐ 5) А – в; Б – б; В – а ☐
6.22. Даны точки $A(13; 2)$, $B(1; -3)$, $C(13; -3)$. Установить соответствие между отрезком и его длиной: А) $ AB $; Б) $ AC $; В) $ BC $. а) 10; б) 13; в) 11; г) 12; д) 5	1) А – а; Б – б; В – в ☐ 2) А – в; Б – г; В – д ☐ 3) А – б; Б – д; В – г ☐ 4) А – а; Б – в; В – г ☐ 5) А – в; Б – д; В – а ☐

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
6.23. Даны точки $A(-1; 0)$, $B(2; 4)$, $C(2; 0)$. Установить соответствие между отрезком и его длиной: А) $ AB $; Б) $ AC $; В) $ BC $. а) 4; б) 1; в) 8; г) 5; д) 3	1) $A - a$; Б - б; В - в ☐ 2) $A - в$; Б - г; В - д ☐ 3) $A - г$; Б - д; В - б ☐ 4) $A - г$; Б - д; В - а ☐ 5) $A - в$; Б - д; В - а ☐
6.24. Даны точки $A(10; -10)$ и $B(-6; 6)$. Тогда сумма координат середины отрезка AB равна...	1) 2 ☐ 2) -2 ☐ 3) 4 ☐ 4) -4 ☐ 5) 0 ☐
6.25. Расположить по возрастанию длины сторон треугольника ABC , если $A(5; 3)$, $B(0; -3)$, $C(3; 4)$	1) AC, BC, AB ☐ 2) AB, BC, AC ☐ 3) AB, AC, BC ☐ 4) BC, AC, AB ☐
6.26. Расположить по возрастанию длины сторон треугольника ABC , если $A(-1; 5)$, $B(7; 7)$, $C(-5; 7)$	1) AC, BC, AB ☐ 2) AC, AB, BC ☐ 3) AB, AC, BC ☐ 4) BC, AC, AB ☐
6.27. Даны точки $A(3; -1)$ и $B(2; 1)$. Тогда координаты точки M , симметричной точке A относительно точки B , равны...	1) $(-3; 4)$ ☐ 2) $(4; 3)$ ☐ 3) $(3; 1)$ ☐ 4) $(1; -3)$ ☐ 5) $(1; 3)$ ☐
6.28. Угол между прямыми $y - 5x - 3 = 0$ и $2y + 3x + 5 = 0$ равен...	1) 0 ☐ 2) $\frac{\pi}{2}$ ☐ 3) $\frac{\pi}{3}$ ☐ 4) $\frac{\pi}{6}$ ☐ 5) $\frac{\pi}{4}$ ☐
6.29. С увеличением острых углов между ними пары прямых располагаются в порядке... а) $y - x - 7 = 0$ б) $y - 7x - 10 = 0$ $y - 5x + 5 = 0$ $y - 11x + 1 = 0$ в) $y - 2x - 3 = 0$ $y - 6x + 7 = 0$	1) $в - а - б$ ☐ 2) $а - б - в$ ☐ 3) $б - в - а$ ☐ 4) $в - б - а$ ☐

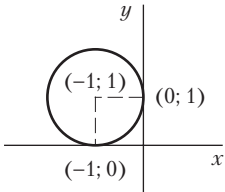
Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
6.30. Прямые $y - 2x - 10 = 0$ и $3y - 6x + 2 = 0...$	1) пересекаются не под 90° ☐ 2) совпадают ☐ 3) перпендикулярны ☐ 4) параллельны ☐
6.31. Прямые $2y - 7x - 4 = 0$ и $14y + 4x - 9 = 0...$	1) пересекаются не под 90° ☐ 2) совпадают ☐ 3) перпендикулярны ☐ 4) параллельны ☐
6.32. Прямые $3y - 15x + 27 = 0$ и $2y - 10x + 18 = 0...$	1) пересекаются не под 90° ☐ 2) совпадают ☐ 3) перпендикулярны ☐ 4) параллельны ☐
6.33. Прямые $2y + 8x - 7 = 0$ и $3y - 5x + 2 = 0...$	1) пересекаются не под 90° ☐ 2) совпадают ☐ 3) перпендикулярны ☐ 4) параллельны ☐
6.34. Уравнение перпендикуляра, опущенного из точки $M(1; 3)$ на прямую $x - 2y + 4 = 0$, имеет вид...	1) $4x - y + 10 = 0$ ☐ 2) $2x + y - 5 = 0$ ☐ 3) $2x - y + 1 = 0$ ☐ 4) $x + 2y - 7 = 0$ ☐
6.35. Уравнение перпендикуляра, опущенного из точки $M(1; 3)$ на прямую $4x - y + 9 = 0$, имеет вид...	1) $6x - y - 10 = 0$ ☐ 2) $x + 4y - 8 = 0$ ☐ 3) $4x - y - 1 = 0$ ☐ 4) $x + 4y - 13 = 0$ ☐
6.36. Уравнение перпендикуляра, опущенного из точки $M(1; 3)$ на прямую $3x + 5y - 8 = 0$, имеет вид...	1) $5x - 3y + 4 = 0$ ☐ 2) $5x + 3y - 8 = 0$ ☐ 3) $3x - 5y - 6 = 0$ ☐ 4) $x + 0,6y - 4 = 0$ ☐
6.37. Уравнение перпендикуляра, опущенного из точки $M(1; 3)$ на прямую $x - 6y + 4 = 0$, имеет вид...	1) $6x - y - 10 = 0$ ☐ 2) $3x + y - 8 = 0$ ☐ 3) $6x + y - 9 = 0$ ☐ 4) $x + 6y - 4 = 0$ ☐

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
6.38. Даны три прямые: а) $5 - 2x + 4y = 0$; б) $7 - 2y - 4x = 0$; в) $-4x + 2y - 4 = 0$. Перпендикулярными являются...	1) а) и в) ☐ 2) перпендикулярных нет ☐ 3) б) и в) ☐ 4) а) и б) ☐
6.39. Прямая, проходящая через точку (3; 2) и параллельная прямой $x + 3y - 4 = 0$, определяется уравнением...	1) $x + 3y - 9 = 0$ ☐ 2) $3x + y - 11 = 0$ ☐ 3) $3x + y = 0$ ☐ 4) $x + 3y - 8 = 0$ ☐
6.40. Прямая, проходящая через точку (3; 2) и параллельная прямой $\frac{x}{-7} = \frac{y}{2}$, определяется уравнением...	1) $2x - 7y = 1$ ☐ 2) $7x - 2y = 7$ ☐ 3) $2x + 7y - 20 = 0$ ☐ 4) $x + 2y = 7$ ☐
6.41. Прямая, проходящая через точку (4; -1) и параллельная прямой $\frac{x}{-3} = \frac{y}{1}$, определяется уравнением...	1) $3x + y + 2 = 0$ ☐ 2) $x - 3y = 0$ ☐ 3) $x + 3y + 2 = 0$ ☐ 4) $x + 3y - 1 = 0$ ☐
6.42. Указать правильное соответствие между характером расположения прямой $L: Ax + By + C = 0$ на декартовой плоскости и значениями коэффициентов A, B, C : А) L параллельна прямой $l: x = -4$; Б) L перпендикулярна прямой $l: x - y + 1 = 0$; В) L совпадает с прямой $l: y + 3 = 0$. а) $A = 0; B \neq 0; C = 3B$; б) $A = 0; B = 0; C = 0$; в) $A \neq 0; B = 0; C$ — любое; г) $A = -B; A \neq 0; C$ — любое; д) $A = B; A \neq 0; C$ — любое	1) А — а; Б — б; В — в ☐ 2) А — в; Б — г; В — д ☐ 3) А — в; Б — д; В — г ☐ 4) А — а; Б — в; В — г ☐ 5) А — в; Б — д; В — а ☐

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
6.43. Указать правильное соответствие между характером расположения прямой $L: Ax + By + C = 0$ на декартовой плоскости и значениями коэффициентов A, B, C: А) L параллельна прямой $l: 3x - y = 0$; Б) L перпендикулярна прямой $l: y = 2x$; В) L совпадает с прямой $l: x = 2y$. а) $A \neq 0; B = -2A; C = 0$; б) $A \neq 0; B = 2A; C$ — любое; в) $A \neq 0; A = -3B; C \neq 0$; г) $A \neq 0; B = 2A; C = 0$; д) $A = 0; B = 0; C = 0$	1) $A - a; B - б; B - в$ ☐ 2) $A - в; B - г; B - д$ ☐ 3) $A - в; B - б; B - а$ ☐ 4) $A - а; B - в; B - г$ ☐ 5) $A - в; B - д; B - а$ ☐
6.44. Уравнение $2x^2 - y^2 + x = 0$ определяет на плоскости...	1) окружность ☐ 2) прямую ☐ 3) гиперболу ☐ 4) параболу ☐ 5) эллипс ☐
6.45. Уравнение $5x^2 + 5y^2 + 2x - 7 = 0$ определяет на плоскости...	1) параболу ☐ 2) прямую ☐ 3) эллипс ☐ 4) окружность ☐ 5) гиперболу ☐
6.46. Уравнение $x^2 + 2y^2 = 4$ определяет на плоскости...	1) прямую ☐ 2) параболу ☐ 3) окружность ☐ 4) эллипс ☐ 5) гиперболу ☐
6.47. Уравнение $6x^2 + 16y - 28x = 19$ определяет на плоскости...	1) прямую ☐ 2) параболу ☐ 3) окружность ☐ 4) эллипс ☐ 5) гиперболу ☐

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
6.48. Уравнение $3x^2 - 5y^2 - 9x + 2y = 0$ определяет на плоскости...	1) прямую ☐ 2) параболу ☐ 3) окружность ☐ 4) эллипс ☐ 5) гиперболу ☐
6.49. Уравнение $4x^2 + y^2 - 12x + y = 20$ определяет на плоскости...	1) прямую ☐ 2) параболу ☐ 3) окружность ☐ 4) эллипс ☐ 5) гиперболу ☐
6.50. Уравнение $28x + y = 26$ определяет на плоскости...	1) прямую ☐ 2) параболу ☐ 3) окружность ☐ 4) эллипс ☐ 5) гиперболу ☐
6.51. Уравнение $x^2 - 9x + y = 2$ определяет на плоскости...	1) прямую ☐ 2) параболу ☐ 3) окружность ☐ 4) эллипс ☐ 5) гиперболу ☐
6.52. Уравнение $3x^2 + 3y^2 - 6x + 3y = 10$ определяет на плоскости...	1) прямую ☐ 2) параболу ☐ 3) окружность ☐ 4) эллипс ☐ 5) гиперболу ☐
6.53. Установить соответствие между кривыми второго порядка и их уравнениями: А) $4y = x^2$; Б) $x^2 + y^2 = 9$; В) $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{5} = 1$; Г) $\frac{4x^2}{9} + \frac{9y^2}{16} = 1$. а) парабола; б) окружность; в) гипербола; г) эллипс	1) А – в; Б – г; В – а; Г – б ☐ 2) А – г; Б – б; В – в; Г – а ☐ 3) А – а; Б – г; В – в; Г – б ☐ 4) А – в; Б – а; В – б; Г – г ☐ 5) А – а; Б – б; В – в; Г – г ☐

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
6.54. Установить соответствие между кривыми второго порядка и их уравнениями: А) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{49} = 1$; Б) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$; В) $(x+3)^2 + y = 1$; Г) $(x+1)^2 + y^2 = 1$. а) парабола; б) окружность; в) гипербола; г) эллипс	1) А – в; Б – г; В – а; Г – б ☐ 2) А – г; Б – б; В – в; Г – а ☐ 3) А – а; Б – г; В – в; Г – б ☐ 4) А – г; Б – а; В – б; Г – в ☐ 5) А – а; Б – б; В – в; Г – г ☐
6.55. Установить соответствие между кривыми второго порядка и их уравнениями А) $y^2 + x = 0$; Б) $\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{49} = 1$; В) $-\frac{x^2}{9} + y^2 = 1$; Г) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$. а) парабола; б) окружность; в) гипербола; г) эллипс	1) А – а; Б – б; В – г; Г – в ☐ 2) А – г; Б – б; В – в; Г – а ☐ 3) А – а; Б – б; В – в; Г – г ☐ 4) А – г; Б – а; В – б; Г – в ☐ 5) А – а; Б – г; В – в; Г – б ☐
6.56. Центр окружности, заданной уравнением $3(x-1)^2 + 3(y+3)^2 = 25$, лежит в точке...	1) $(-3; 9)$ ☐ 2) $(3; -9)$ ☐ 3) $(-1; 3)$ ☐ 4) $(1; -3)$ ☐
6.57. Радиус окружности, заданной уравнением $x^2 + y^2 - 2y = 0$, равен...	1) 1 ☐ 2) 4 ☐ 3) 3 ☐ 4) -1 ☐
6.58. Расстояние между центрами окружностей, заданных уравнениями $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 1 = 0$ и $x^2 + y^2 = 1$, равно...	1) 2 ☐ 2) 4 ☐ 3) $\sqrt{5}$ ☐ 4) $\sqrt{7}$ ☐
6.59. Вершина параболы $x^2 - 6x + 2y + 7 = 0$ имеет координаты...	1) $(1, 3)$ ☐ 2) $(3, 1)$ ☐ 3) $(-1, 3)$ ☐ 4) $(-1, -3)$ ☐ 5) $(3, 3)$ ☐

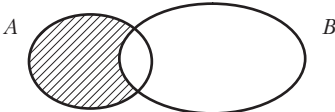
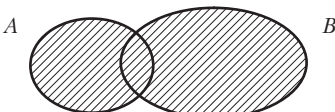
Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
6.60. Вершина параболы $y^2 - 4x + 2y + 9 = 0$ имеет координаты...	1) (2; -2) ☐ 2) (-1; -4) ☐ 3) (-2; 4) ☐ 4) (-1; -2) ☐ 5) (2; -1) ☐
6.61. Вершина параболы $x^2 - 2x + y + 11 = 0$ имеет координаты...	1) (1; -10) ☐ 2) (-2; -4) ☐ 3) (-1; 4) ☐ 4) (10; -2) ☐ 5) (1; 4) ☐
6.62. Ветви параболы $2x - y^2 - 3y + 4 = 0$ направлены...	1) вниз ☐ 2) влево ☐ 3) вверх ☐ 4) вправо ☐
6.63. Каноническое уравнение окружности, показанной на рисунке, имеет вид... 	1) $(x+1)^2 + y^2 = 1$ ☐ 2) $x^2 + (y+1)^2 = 1$ ☐ 3) $(x+1)^2 + (y+1)^2 = 1$ ☐ 4) $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 1$ ☐ 5) $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$ ☐
6.64. Радиус окружности, определяемой уравнением $x^2 + y^2 + 6y - 2x = 6$, равен...	1) 4 ☐ 2) $\sqrt{10}$ ☐ 3) $\sqrt{24}$ ☐ 4) 5 ☐ 5) $\sqrt{20}$ ☐
6.65. Радиус окружности, определяемой уравнением $x^2 + y^2 - 8y + 4x = 4$, равен...	1) 4 ☐ 2) $\sqrt{10}$ ☐ 3) $\sqrt{24}$ ☐ 4) 5 ☐ 5) $\sqrt{20}$ ☐

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
6.66. Радиус окружности, определяемой уравнением $x^2 + y^2 - 4x - 6 = 0$, равен...	1) 4 ☐ 2) $\sqrt{10}$ ☐ 3) $\sqrt{14}$ ☐ 4) 5 ☐ 5) $2\sqrt{5}$ ☐
6.67. Координаты фокусов эллипса $25x^2 + 16y^2 = 400$ равны...	1) $F_1(-5; 0), F_2(5; 0)$ ☐ 2) $F_1(0; -6), F_2(0; 6)$ ☐ 3) $F_1(0; -5), F_2(0; 5)$ ☐ 4) $F_1(0; -3), F_2(0; 3)$ ☐ 5) $F_1(-3; 0), F_2(3; 0)$ ☐
6.68. Расстояние между фокусами эллипса $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1$ равно...	1) 6 ☐ 2) 8 ☐ 3) 12 ☐ 4) 20 ☐
6.69. Расстояние между фокусами эллипса $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ равно...	1) 6 ☐ 2) 8 ☐ 3) 12 ☐ 4) 20 ☐
6.70. Расстояние между фокусами гиперболы $\frac{x^2}{576} - \frac{y^2}{49} = 1$ равно...	1) 20 ☐ 2) 25 ☐ 3) 40 ☐ 4) 50 ☐
6.71. Мнимая полуось гиперболы, заданной уравнением $4x^2 - 9y^2 = 36$, равна...	1) 4 ☐ 2) 3 ☐ 3) 2 ☐ 4) 1 ☐
6.72. Вещественная (действительная) полуось гиперболы, заданной уравнением $16x^2 - 25y^2 = 400$, равна...	1) 3 ☐ 2) 4 ☐ 3) 5 ☐ 4) 20 ☐

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
6.73. Уравнение параболы с вершиной в начале координат, симметричной относительно оси Ox и проходящей через точку $(4; -2)$, имеет вид...	1) $y^2 = 2x$ ☐ 2) $x^2 = 2y$ ☐ 3) $x^2 = y$ ☐ 4) $y^2 = x$ ☐
6.74. Какое из данных уравнений определяет плоскость: а) $x + 3xy - 7 = 0$; б) $y^2 = 2x - 3$; в) $x + 3y = 0$?	1) Только а) ☐ 2) Только а) и в) ☐ 3) Все ☐ 4) Только в) ☐ 5) Ни одно ☐
6.75. Из уравнений: а) $x - 2y + 2z + 4 = 0$; б) $x + 2y - 6 = 0$; в) $x + 3y + 3z = 5$ выберите те, которые определяют плоскость, параллельную оси OZ .	1) Только в) ☐ 2) Только б) ☐ 3) ни одно ☐ 4) Только а) ☐ 5) Только б) и в) ☐
6.76. Из плоскостей: а) $3y - 2z + 4 = 0$; б) $x + z + 5 = 0$; в) $x - 3y + z = 0$ выберите те, которые параллельны оси OX .	1) Только а) ☐ 2) ни одна ☐ 3) Только б) ☐ 4) Только а) и в) ☐ 5) Только в) ☐
6.77. Даны уравнения плоскостей: а) $x + 5y + 2z - 8 = 0$; б) $x - 3y + 4z = 3$; в) $z + 7 = 0$. Через начало координат проходят...	1) только а) и в) ☐ 2) только б) и в) ☐ 3) только б) ☐ 4) ни одна ☐ 5) все ☐
6.78. Общее уравнение плоскости, проходящей через точку $(2; 1; -1)$ и параллельной плоскости $5x - 2y - z - 4 = 0$, имеет вид...	1) $5x + 2y + z - 6 = 0$ ☐ 2) $5x - 2y - z - 9 = 0$ ☐ 3) $5x - 2y - z - 15 = 0$ ☐ 4) $5x - 2y - z - 4 = 0$ ☐
6.79. Даны четыре плоскости: а) $-2y - 2z + 7 = 0$; б) $-8x + 8y - 2 = 0$; в) $-2x + y - 5 = 0$; г) $6x - 12y + 12z + 11 = 0$. Какие из них перпендикулярны плоскости $x - 2y + 2z + 6 = 0$?	1) Только а) и в) ☐ 2) Только б) ☐ 3) Только а) ☐ 4) Ни одна ☐ 5) Все ☐

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
6.80. Общее уравнение плоскости, проходящей через точку $(2; -1; 2)$ и параллельной плоскости $x - 5y + 2z - 5 = 0$, имеет вид...	1) $x - 5y + 2z - 11 = 0$ ☐ 2) $x - 5y + 2z - 14 = 0$ ☐ 3) $5x + y - 2z - 7 = 0$ ☐ 4) $5x - y + 2z - 12 = 0$ ☐
6.81. Даны четыре плоскости: а) $3x - 2y - z + 14 = 0$; б) $-4x + 6y - 1 = 0$; в) $-4x + 2y - 1 = 0$; г) $2x - 4y + 4z + 1 = 0$. Какие из них перпендикулярны плоскости $6x + 4y - 4z + 2 = 0$?	1) Только а) и в) ☐ 2) Только б) ☐ 3) Только а) ☐ 4) Ни одна ☐ 5) Все ☐
6.82. Уравнения прямой, проходящей через точку $A(5; 5; 5)$ перпендикулярно плоскости $5x - y - 10z - 3 = 0$, имеют вид...	1) $\frac{x-5}{5} = \frac{y-5}{-1} = \frac{z-5}{-10}$ ☐ 2) $\frac{x+5}{5} = \frac{y+5}{-1} = \frac{z+5}{-10}$ ☐ 3) $\frac{x+5}{5} = \frac{y+5}{1} = \frac{z+5}{10}$ ☐ 4) $\frac{x-5}{5} = \frac{y-5}{1} = \frac{z-5}{10}$ ☐
6.83. Если точка $P(-1; 2; 3)$ принадлежит плоскости $2x - 4y + Cz - 5 = 0$, то коэффициент C равен...	1) 2 ☐ 2) 3 ☐ 3) 5 ☐ 4) 7 ☐
6.84. Если плоскость $6x + 5y + 4z - 27 = 0$ проходит через точку $T(4; -5; z_0)$, то координата z_0 равна...	1) 2 ☐ 2) 3 ☐ 3) 5 ☐ 4) 7 ☐
6.85. Плоскость, проходящая через начало координат параллельно плоскости $4x + 8y - 12z - 5 = 0$, имеет уравнение...	1) $4x + 8y - 12z + 5 = 0$ ☐ 2) $x - 2y - 3z = 0$ ☐ 3) $x + 2y + 3z = 0$ ☐ 4) $x + 2y - 3z = 0$ ☐

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
6.86. Расстояние от точки $(3; -2; -6)$ до плоскости Oxy равно...	1) 6 ☐ 2) 7 ☐ 3) 2 ☐ 4) 3 ☐
6.87. Прямая $\frac{x-7}{-1} = \frac{y-5}{1} = \frac{z+1}{\alpha}$ пересекает плоскость $4x + 3y - z - 20 = 0$ только в том случае, когда α не равно...	1) -1 ☐ 2) 3 ☐ 3) 4 ☐ 4) $-\frac{1}{4}$ ☐
6.88. Прямая $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z}{-4}$ и плоскость $2x - ky + z + 20 = 0$ параллельны при k , равном...	1) 0 ☐ 2) 3 ☐ 3) 4 ☐ 4) $-\frac{1}{4}$ ☐
6.89. Уравнение плоскости, проходящей через точку $M(3; 3; 3)$ и ось Oy , имеет вид...	1) $x + z = 6$ ☐ 2) $x + y + z - 9 = 0$ ☐ 3) $x + y = 6$ ☐ 4) $x - z = 0$ ☐
6.90. Установить соответствие между уравнениями плоскостей и точками, которые лежат в этих плоскостях: А) $y - 2x + 5z = 0$; Б) $2x - 3y + 7z + 7 = 0$; В) $x - 2y + z - 3 = 0$; Г) $x + 7y - z + 3 = 0$. а) $(0; 0; 0)$; б) $(-1; 3; 1)$; в) $(2; 0; 1)$; г) $(2; 0; 5)$ д) $(3; 2; -1)$	1) А — в; Б — д; В — б; Г — а ☐ 2) А — г; Б — б; В — в; Г — а ☐ 3) А — а; Б — д; В — в; Г — г ☐ 4) А — г; Б — а; В — б; Г — в ☐ 5) А — а; Б — б; В — в; Г — г ☐
6.91. Установить соответствие между уравнениями плоскостей и их положением в пространстве: А) $x - 2y + 11 = 0$; Б) $2z + 3 = 0$; В) $3y - 4 = 0$. а) параллельна оси z ; б) это плоскость yOz ; в) параллельна плоскости xOz ; г) параллельна плоскости xOy .	1) А — а; Б — г; В — в ☐ 2) А — г; Б — б; В — в ☐ 3) А — а; Б — б; В — в ☐ 4) А — г; Б — а; В — б ☐ 5) А — а; Б — б; В — г ☐

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
Раздел 2. Математический анализ	
7. Элементы теории множеств	
7.1. Какой операции над множествами соответствует рисунок? 	1) $A \cap B$ ☐ 2) $A \setminus B$ ☐ 3) $A \cup B$ ☐ 4) $\bar{A}$ ☐
7.2. Какой операции над множествами соответствует рисунок? 	1) $A \cap B$ ☐ 2) $A \setminus B$ ☐ 3) $A \cup B$ ☐ 4) $\bar{A}$ ☐
7.3. Какой операции над множествами соответствует рисунок? 	1) $A \cap B$ ☐ 2) $A \setminus B$ ☐ 3) $A \cup B$ ☐ 4) $\bar{A}$ ☐
7.4. Какой операции над множествами соответствует формальное определение $\{x \mid x \in A \text{ и } x \notin B\}$?	1) $A \cap B$ ☐ 2) $A \setminus B$ ☐ 3) $A \cup B$ ☐ 4) $\bar{A}$ ☐
7.5. Какое числовое множество имеет формальное определение $\{x \mid x = m/n, m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$?	1) $\mathbb{N}$ ☐ 2) $\mathbb{Z}$ ☐ 3) $\mathbb{Q}$ ☐ 4) $\mathbb{R}$ ☐
7.6. Какое подмножество $\mathbb{R}$ имеет формальное определение $\{x \mid a < x < b\}$?	1) Полуинтервал ☐ 2) Отрезок ☐ 3) Интервал ☐ 4) b-окрестность точки a ☐

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
7.7. Какое подмножество R имеет формальное определение $\{x \mid a \leq x \leq b\}$?	1) Полуинтервал ☐ 2) Отрезок ☐ 3) Интервал ☐ 4) b -окрестность точки a ☐
7.8. Какое подмножество R имеет формальное определение $\{x \mid a \leq x < b\}$?	1) Полуинтервал ☐ 2) Отрезок ☐ 3) Интервал ☐ 4) b -окрестность точки a ☐
7.9. $A = \{1, 3, 5, 6\}$; $B = \{2, 5, 6, 7\}$. Какая из указанных пар не входит в $B \times A$: $(6, 2), (6, 3), (5, 1), (5, 6)$?	1) $(6, 2)$ ☐ 2) $(6, 3)$ ☐ 3) $(5, 1)$ ☐ 4) $(5, 6)$ ☐
7.10. $A = \{1, 3, 5, 6\}$; $B = \{2, 5, 6, 7\}$. Какая из указанных пар не входит в $A \times B$: $(3, 2), (3, 5), (6, 3), (6, 7)$?	1) $(3, 2)$ ☐ 2) $(3, 5)$ ☐ 3) $(6, 3)$ ☐ 4) $(6, 7)$ ☐
7.11. $A = \{1, 3, 5, 6\}$; $B = \{2, 5, 6, 7\}$. Какая из указанных пар не входит в $A \times B$: $(1, 3), (1, 6), (5, 5), (6, 6)$?	1) $(1, 3)$ ☐ 2) $(1, 6)$ ☐ 3) $(5, 5)$ ☐ 4) $(6, 6)$ ☐
7.12. $A = \{1, 3, 5, 6\}$; $B = \{2, 5, 6, 7\}$. Какая из указанных пар не входит в $B \times A$: $(2, 1), (3, 1), (5, 1), (6, 1)$?	1) $(2, 1)$ ☐ 2) $(3, 1)$ ☐ 3) $(5, 1)$ ☐ 4) $(6, 1)$ ☐
7.13. Обладает ли отношение порядка «больше» свойствами рефлексивности (р), симметричности (с) и транзитивности (т)?	1) р — да, с — нет, т — нет ☐ 2) р — нет, с — да, т — нет ☐ 3) р — нет, с — нет, т — да ☐ 4) р — нет, с — да, т — да ☐

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
7.14. Обладает ли отношение порядка «больше или равно» свойствами рефлексивности (р), симметричности (с) и транзитивности (т)?	1) р — да, с — нет, т — нет ☐ 2) р — да, с — да, т — нет ☐ 3) р — да, с — нет, т — да ☐ 4) р — нет, с — да, т — да ☐
7.15. Обладает ли отношение эквивалентности свойствами рефлексивности (р), симметричности (с) и транзитивности (т)?	1) р — да, с — нет, т — нет ☐ 2) р — да, с — да, т — да ☐ 3) р — да, с — нет, т — да ☐ 4) р — нет, с — да, т — да ☐
7.16. Обладает ли отношение порядка «меньше» свойствами рефлексивности (р), симметричности (с) и транзитивности (т)?	1) р — да, с — нет, т — нет ☐ 2) р — нет, с — да, т — нет ☐ 3) р — нет, с — нет, т — да ☐ 4) р — нет, с — да, т — да ☐
7.17. Даны универсальное множество $I = \{1, 2, \dots, 10\}$, а также множества $A = \{1, 3, 4, 8\}$, $B = \{2, 3, 5, 8, 9\}$, $C = \{1, 4, 5, 6, 7, 10\}$. Найти множество $D = (A \setminus \bar{B}) \cup (B \setminus \bar{C})$	1) $\{5, 6, 10\}$ ☐ 2) $\{3, 5, 8\}$ ☐ 3) $\{2, 3, 5, 6, 8\}$ ☐ 4) $\{4, 6, 7, 10\}$ ☐ 5) $\{1, 2, 3, 10\}$ ☐
7.18. Даны универсальное множество $I = \{1, 2, \dots, 10\}$, а также множества $A = \{1, 3, 4, 8\}$, $B = \{2, 3, 5, 8, 9\}$, $C = \{1, 4, 5, 6, 7, 10\}$. Найти множество $D = (A \cup \bar{B}) \cap (B \setminus C)$	1) $\{1, 5, 7, 10\}$ ☐ 2) $\{2, 5\}$ ☐ 3) $\{3, 8\}$ ☐ 4) $\{4, 5\}$ ☐ 5) $\{1, 3, 10\}$ ☐
7.19. Даны универсальное множество $I = \{1, 2, \dots, 10\}$, а также множества $A = \{1, 3, 4, 8\}$, $B = \{2, 3, 5, 8, 9\}$, $C = \{1, 4, 5, 6, 7, 10\}$. Найти множество $D = (\bar{A} \cap \bar{C}) \setminus (\bar{B} \cap C)$	1) $\emptyset$ ☐ 2) $\{3, 6\}$ ☐ 3) $\{2, 8\}$ ☐ 4) $\{2, 9\}$ ☐ 5) $\{1, 2, 10\}$ ☐

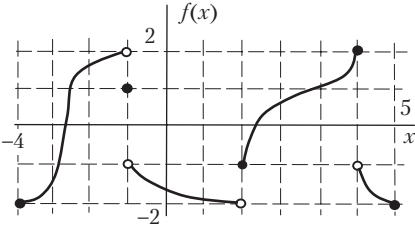
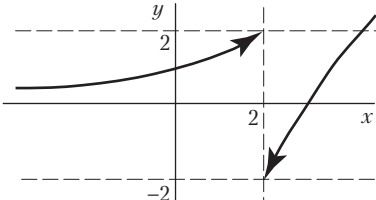
Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
7.20. Дано универсальное множество $I = \{1, 2, \dots, 10\}$, а также множества $A = \{1, 3, 4, 8\}$, $B = \{2, 3, 5, 8, 9\}$, $C = \{1, 4, 5, 6, 7, 10\}$. Найти множество $D = (\bar{A} \cap B) \setminus (B \cap \bar{C})$	1) $\{5\}$ ☐ 2) $\{2\}$ ☐ 3) $\{2, 3, 5\}$ ☐ 4) $\{4, 6\}$ ☐ 5) $\emptyset$ ☐
7.21. Даны множества $A = \{2, 3, 6, 7\}$ и $B = \{3, 4, 10\}$. Составить график Q соответствия $q = (A, B, Q)$, если известно, что элементы B большие, чем 7, соответствуют элементам, делимым на 3, из A	1) $\{(4; 3), (10; 6)\}$ ☐ 2) $\{(3; 10), (6, 10)\}$ ☐ 3) $\{(3; 3), (3; 4), (6; 3), (6, 4)\}$ ☐ 4) $\{(2; 10), (7, 10)\}$ ☐
7.22. Дано множество $A = \{2, 3, 5, 10, 15, 20\}$. Найти график R отношения (A, A, R) , характеризующегося признаком «разность — натуральное число, делящееся на 3»	1) $\{(15; 5), (10; 2)\}$ ☐ 2) $\{(20; 5), (15; 5), (10; 5), (5, 2)\}$ ☐ 3) $\{(20; 2), (15; 3)\}$ ☐ 4) $\{(20; 2), (20; 5), (15; 3), (5, 2)\}$ ☐
7.23. Дано множество $A = \{1, 3, 7, 9, 10\}$. Найти график R отношения (A, A, R) , характеризующегося признаком «разность — натуральное число не больше двух»	1) $\{(1; 3), (9, 10)\}$ ☐ 2) $\{(10; 9)\}$ ☐ 3) $\{(10; 9), (9; 7), (3; 1)\}$ ☐ 4) $\{(10; 3), (9; 1)\}$ ☐
7.24. Дано множество $A = \{2, 3, 10, 15, 17\}$. Найти график R отношения (A, A, R) , характеризующегося признаком «частное — натуральное число»	1) $\{(10; 2), (3; 2)\}$ ☐ 2) $\{(17; 2), (10; 3)\}$ ☐ 3) $\{(15; 3)\}$ ☐ 4) $\{(15; 3), (10; 2)\}$ ☐
8. Числовые последовательности	
8.1. Общий член последовательности $1; \frac{2}{5}; \frac{3}{5^2}; \frac{4}{5^3} \dots$ имеет вид...	1) $a_n = (-1)^n \frac{n}{5^{n-1}}$ ☐ 2) $a_n = \frac{n}{5^{n-1}}$ ☐ 3) $a_n = (-1)^{n+1} \frac{n}{5^n}$ ☐ 4) $a_n = \frac{n}{5^n}$ ☐

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
8.2. Первые три члена числовой последовательности: $\frac{1}{7}; \frac{1}{10}; \frac{1}{13}$. Тогда формула общего члена этой последовательности имеет вид...	1) $a_n = \frac{1}{3n+4}$ ☐ 2) $a_n = \frac{1}{2^n+5}$ ☐ 3) $a_n = \frac{1}{8n-1}$ ☐ 4) $a_n = \frac{1}{(n+5)(n+1)}$ ☐
8.3. Известны первые три члена числовой последовательности: $\frac{1}{4}; \frac{1}{10}; \frac{1}{18}$. Тогда формула общего члена этой последовательности имеет вид...	1) $a_n = \frac{1}{2^n(n+1)}$ ☐ 2) $a_n = \frac{1}{(n+2)(n+1)}$ ☐ 3) $a_n = \frac{1}{6n-2}$ ☐ 4) $a_n = \frac{1}{n \cdot (n+3)}$ ☐
8.4. Известны первые три члена числовой последовательности: $\frac{1}{3}; \frac{1}{9}; \frac{1}{19}$. Тогда формула общего члена этой последовательности имеет вид...	1) $a_n = \frac{1}{2n^2+1}$ ☐ 2) $a_n = \frac{1}{n(n+2)}$ ☐ 3) $a_n = \frac{1}{2^n+1}$ ☐ 4) $a_n = \frac{1}{4n-1}$ ☐

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
8.5. Общий член последовательности $\frac{1}{3}, \frac{3}{9}, \frac{5}{27}, \frac{7}{81}, \dots$ имеет вид...	1) $a_n = \frac{2n+1}{3^n}$ ☐ 2) $a_n = (-1)^n \frac{2n-1}{3^n}$ ☐ 3) $a_n = \frac{2n-1}{3^n}$ ☐ 4) $a_n = (-1)^{n+1} \frac{2n+1}{3^n}$ ☐
8.6. Общий член числовой последовательности $-\frac{1}{4}, \frac{5}{16}, -\frac{9}{64}, \frac{13}{256}, \dots$ имеет вид...	1) $a_n = \frac{(-1)^n(4n-3)}{4^n}$ ☐ 2) $a_n = \frac{(-1)^{n+1}(4n-3)}{4^n}$ ☐ 3) $a_n = \frac{(-1)^n(4n+1)}{4^n}$ ☐ 4) $a_n = \frac{(-1)^n(4n+1)}{4^n}$ ☐
8.7. Установите соответствие между числовой последовательностью и формулой ее общего члена А) $1; \frac{5}{4 \cdot 2!}; \frac{10}{8 \cdot 3!}, \dots$ Б) $\frac{2 \cdot 2}{1!}; \frac{2^2 \cdot 3}{2!}; \frac{2^3 \cdot 4}{3!}, \dots$; В) $\frac{3}{2!}; \frac{9}{4!}; \frac{19}{6!}, \dots$ а) $a_n = \frac{2n^2+1}{(2n)!}$; б) $a_n = \frac{n^2+1}{(2n-1)!}$; в) $a_n = \frac{n^2+1}{2^n \cdot n!}$; г) $a_n = \frac{2^n(n+1)}{n!}$; д) $a_n = \frac{2n^2}{(2n)!}$.	1) А – в; Б – д; В – б ☐ 2) А – г; Б – б; В – в ☐ 3) А – в; Б – г; В – а ☐ 4) А – г; Б – а; В – б ☐ 5) А – а; Б – б; В – в ☐

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
8.8. Пятый член числовой последовательности $\left\{ \frac{5(n-1)}{n!} \right\}$ равен...	1) $\frac{5}{6}$ ☐ 2) 31 ☐ 3) 1 ☐ 4) $\frac{1}{6}$ ☐
8.9. Первый член числовой последовательности $\left\{ \frac{(n+1)(n+9)}{n!} \right\}$ равен...	1) 10 ☐ 2) 30 ☐ 3) 20 ☐ 4) $\frac{2}{60}$ ☐
9. Предел и непрерывность функции	
9.1. Сумма целых значений x из области определения функции $y = \sqrt{3-x} + \lg(x+2) + 7x - 1$ равна...	1) 2 ☐ 2) 5 ☐ 3) 4 ☐ 4) 0 ☐
9.2. Дана функция $y = \sqrt{6x - x^2} + \ln(x-3)$. Тогда областью ее определения является множество...	1) $[3; 6]$ ☐ 2) $[6; +\infty)$ ☐ 3) $(3; 6]$ ☐ 4) $(3; 6)$ ☐
9.3. Установите соответствие между функцией и ее областью определения А) $y = \operatorname{tg} x$; Б) $y = \sqrt[3]{x}$; В) $y = \sqrt{x^2 - 1}$. а) $(-\infty; +\infty)$; б) $x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$; в) $(-1; 1)$; г) $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$; д) $(-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$.	1) А – а; Б – б; В – в ☐ 2) А – г; Б – а; В – д ☐ 3) А – д; Б – б; В – г ☐ 4) А – г; Б – в; В – б ☐ 5) А – д; Б – г; В – б ☐
9.4. Найти область значений функции $y = x^2 + 4x + 6$	1) $[-2; +\infty)$ ☐ 2) $[1,5; +\infty)$ ☐ 3) $[1,75; +\infty)$ ☐ 4) $[2; +\infty)$ ☐

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
9.5. Дана функция $y = \sqrt{x^2 + 5x + 4} + 9$. Тогда областью ее значений является множество...	1) $[9; +\infty)$ ☐ 2) $[-9; +\infty)$ ☐ 3) $(-\infty; -4] \cup [-1; +\infty)$ ☐ 4) $(11; +\infty)$ ☐
9.6. Пусть $f(x) = \sin x$. Тогда сложная функция $g[f(x)]$ нечетна, если функция $g(x)$ задается формулой: а) $g(x) = 6x$; б) $g(x) = 3x^2 - 1$; в) $g(x) = x^4$; г) $g(x) = x^5$.	1) Только а) и в) ☐ 2) Только а) и г) ☐ 3) Только а), в) и г) ☐ 4) Все ☐ 5) Ни одной ☐
9.7. Функция $f(x)$ задана на отрезке $[-3; 5]$ графиком: Какие из следующих утверждений являются правильными: а) при любом значении x выполняется неравенство $f(x) < 2$; б) множеством значений является отрезок $[-2; 2]$; в) на отрезке $[-3; -1]$ функция $f(x)$ возрастает; г) уравнение $f(x) = -1$ имеет четыре корня?	1) Только а) и в) ☐ 2) Только а) и г) ☐ 3) Только а), в) и г) ☐ 4) Все ☐ 5) Ни одного ☐

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
9.8. Функция $f(x)$ задана на отрезке $[-4; 6]$ графиком:  Какие из следующих утверждений являются правильными: а) при любом значении x выполняется неравенство $f(x) \geq -4$; б) уравнение $f(x) = -2$ имеет три корня; в) среди значений функции $f(x)$ на отрезке $[-4; -1]$ есть наибольшее и наименьшее; г) на отрезке $[2; 5]$ функция $f(x)$ возрастает?	1) Только а) и г) ☐ 2) Только а) и в) ☐ 3) Только а), в) и г) ☐ 4) Все ☐ 5) Ни одного ☐
9.9. Наименьшее значение y из области значений функции $y = x^2 + 4x - 7$ равно...	1) -11 ☐ 2) -6 ☐ 3) -7 ☐ 4) -10 ☐
9.10. Наименьшее значение y из области значений функции $y = 5x^2 + 10x - 1$ равно...	1) -26 ☐ 2) -2 ☐ 3) -6 ☐ 4) -1 ☐
9.11. Если графику функции $y = f(x)$ соответствует условие $\lim_{x \rightarrow 2-0} f(x) = a$, то значение a равно... 	1) -2 ☐ 2) $-\infty$ ☐ 3) 2 ☐ 4) $+\infty$ ☐

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа	
9.12. Значение предела $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2(x^2 - 9)}{x - 3}$ равно...	1) 12 ☐ 2) 0 ☐ 3) 6 ☐ 4) ∞ ☐	
9.13. Значение предела $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ равно...	1) 0 ☐ 2) ∞ ☐ 3) 4 ☐ 4) 2 ☐	
9.14. Значение предела $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ равно...	1) 2 ☐ 2) 1 ☐ 3) 0 ☐ 4) ∞ ☐	
9.15. Найти предел функции $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 5x - 14}{x^2 - 6x + 8}$	1) -4,5 ☐ 2) -5 ☐ 3) -5,5 ☐ 4) -6 ☐	
9.16. Найти предел функции $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 + 4x + 3}{x^2 + x - 6}$	1) 0,2 ☐ 2) 0,3 ☐ 3) 0,4 ☐ 4) 0,5 ☐	
9.17. Найти предел функции $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 10x + 16}{x^2 - x - 6}$	1) -0,4 ☐ 2) -0,8 ☐ 3) -1 ☐ 4) -1,2 ☐	
9.18. Найти предел функции $\lim_{x \rightarrow -7} \frac{x^2 + 2x - 35}{x^2 + 4x - 21}$	1) 1,2 ☐ 2) 1,5 ☐ 3) 2 ☐ 4) 2,4 ☐	
9.19. Найти предел функции $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 7x - 18}{x^2 - 8x + 12}$	1) -2,25 ☐ 2) -2,5 ☐ 3) -2,75 ☐ 4) -3 ☐	

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа	
9.20. Найти предел функции $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{x^2 - x - 42}{x^2 - 9x + 14}$	1) 2 ☐ 2) 2,25 ☐ 3) 2,5 ☐ 4) 2,6 ☐ 5) 2,75 ☐	
9.21. Найти предел функции $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + 8x - 33}{x^2 + 4x - 21}$	1) 1,2 ☐ 2) 1,4 ☐ 3) 1,6 ☐ 4) 1,8 ☐	
9.22. Предел $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{5x^2 + 13x - 6}{2x^2 + 5x - 3}$ равен...	1) 4/17 ☐ 2) 7/3 ☐ 3) 17/7 ☐ 4) -17 ☐ 5) -7/3 ☐	
9.23. Предел $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{4x^2 - 11x + 6}{3x^2 - 4x - 4}$ равен...	1) 0,5 ☐ 2) 0,625 ☐ 3) 3/4 ☐ 4) 1,325 ☐ 5) ∞ ☐	
9.24. Предел $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{7x^2 + 9x + 2}{11x^2 + 7x - 4}$ равен...	1) -1/3 ☐ 2) 3/4 ☐ 3) -1/4 ☐ 4) 3/2 ☐ 5) 1/3 ☐	
9.25. Предел $\lim_{x \rightarrow 6} \frac{2x^2 - 9x - 18}{3x^2 - 10x - 48}$ равен...	1) 23/5 ☐ 2) 5/17 ☐ 3) 15/26 ☐ 4) -15/23 ☐ 5) 15/23 ☐	
9.26. Предел $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{7x^2 - 18x - 40}{5x^2 - 11x - 36}$ равен...	1) 38/29 ☐ 2) 18/43 ☐ 3) 8/51 ☐ 4) 19/23 ☐ 5) 4/5 ☐	

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа	
9.27. Предел $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{19x^4 + 7x^2 - 24x + 17}{5x^4 - 2x^3 + 19x + 41}$ равен...	1) 17/41 2) 0 3) 19/5 4) ∞	☐ ☐ ☐ ☐
9.28. Предел $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{16x^6 + 9x^4 - 32x + 19}{8x^6 - 12x^5 + 12x + 38}$ равен...	1) 2 2) 0,5 3) ∞ 4) 1	☐ ☐ ☐ ☐
9.29. Предел $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 23x + 15}{7x + x^2 - 43}$ равен...	1) ∞ 2) 15/43 3) 1 4) 1/7	☐ ☐ ☐ ☐
9.30. Предел $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 13x + 42}{9x + x^2 - 90}$ равен...	1) ∞ 2) 7/15 3) 1/9 4) 1	☐ ☐ ☐ ☐
9.31. Имеют ли следующие функции конечный предел при $x \rightarrow +\infty$: а) $f(x) = \frac{\sqrt{x+1}+1}{1-\sqrt{x}}$; б) $f(x) = \frac{\sqrt{x^5+1}+1}{x-1}$?	1) Только а) 2) Только б) 3) И а), и б) 4) Ни а), ни б)	☐ ☐ ☐ ☐
9.32. Имеют ли следующие функции конечный предел при $x \rightarrow +\infty$: а) $f(x) = \frac{x^5 - x^7 + 2}{x^6 + 1}$; б) $f(x) = \frac{1 - 2x^2}{x^2 + x + 1}$?	1) Только а) 2) Только б) 3) И а), и б) 4) Ни а), ни б)	☐ ☐ ☐ ☐
9.33. Имеют ли следующие функции конечный предел при $x \rightarrow +\infty$: а) $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 1} - 1}{x + 1}$; б) $f(x) = \frac{x + 1}{x^2 + 2x + 5}$?	1) Только а) 2) Только б) 3) И а), и б) 4) Ни а), ни б)	☐ ☐ ☐ ☐

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
9.34. Имеют ли следующие функции конечный предел при $x \rightarrow +\infty$: а) $f(x) = \frac{\sqrt{x^5 + 1} - 1}{x + 1}$; б) $f(x) = \frac{1 - 3x^8}{x^2 + 5}$?	1) Только а) ☐ 2) Только б) ☐ 3) И а), и б) ☐ 4) Ни а), ни б) ☐
9.35. Конечный предел при $x \rightarrow \infty$ имеют следующие функции: а) $f(x) = \frac{\sqrt{x^4 + 1} + 1}{x - 2}$; б) $f(x) = \frac{x^4 - x^7 + 2}{x + 2x^2}$; в) $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 1} + 3}{x - 2}$; г) $f(x) = \frac{x^5 + 2x + \sqrt{x} + 1}{1 - x^5}$.	1) Только г) ☐ 2) Только а) и б) ☐ 3) Только в) и г) ☐ 4) Только а) и в) ☐ 5) Ни одна ☐
9.36. Предел $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x$ равен...	1) e^2 ☐ 2) $\sqrt{e}$ ☐ 3) $0,5e$ ☐ 4) $2e$ ☐ 5) 1 ☐
9.37. Установите соответствие между пределами и их значениями: А) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x+1)}{\ln(x^2-1)}$; Б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x - 3}{3^x - 3}$; В) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{3x - 1}$. а) 2; б) 0; в) $\frac{1}{2}$; г) $\frac{1}{3}$; д) 3	1) А – а; Б – б; В – в ☐ 2) А – г; Б – в; В – д ☐ 3) А – в; Б – б; В – г ☐ 4) А – г; Б – а; В – б ☐ 5) А – в; Б – д; В – а ☐

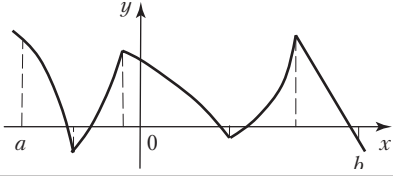
Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
9.38. Установить соответствие между пределами и их значениями: А) $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 e^x$; Б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{x^2} + 1}{e^x}$; В) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 1}{\sqrt{4x^4 + 1}}$. а) $-\infty$; б) $\frac{1}{2}$; в) 2; г) ∞; д) 0	1) А – а; Б – б; В – в ☐ 2) А – г; Б – в; В – д ☐ 3) А – д; Б – б; В – г ☐ 4) А – г; Б – в; В – б ☐ 5) А – д; Б – г; В – б ☐
9.39. Установить соответствие между пределами и их значениями: А) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^4 + x^2 + 5}{4x^4 - x + 1}$; Б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 6x + 3}{3x^3 + 5x^2 + 1}$; В) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3 + 4x^2 + 8}{3x^2 + 7x - 1}$; Г) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{12x^3 + 7x^2 + 1}{4x^3 - x - 11}$; а) ∞; б) 3; в) $\frac{5}{3}$; г) 0; д) $\frac{7}{4}$	1) А – д; Б – б; В – в; Г – а ☐ 2) А – г; Б – в; В – д; Г – б ☐ 3) А – в; Б – б; В – г; Г – а ☐ 4) А – д; Б – г; В – а; Г – б ☐ 5) А – д; Б – б; В – в; Г – а ☐
9.40. Установить соответствие между пределами и их значениями: А) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3 + 6x + 3}{8x^3 - 4x^2 + 1}$; Б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 6x + 5}{3x^3 - 9x^2 + 1}$; В) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 9x + 7}{9x^2 + 6x + 1}$; Г) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^4 + 3x^3 + 1}{x^4 - x^2 + 8}$; а) 5; б) ∞; в) $\frac{1}{9}$; г) $\frac{1}{3}$; д) $\frac{5}{8}$; е) 0	1) А – д; Б – е; В – б; Г – а ☐ 2) А – г; Б – в; В – д; Г – б ☐ 3) А – в; Б – е; В – г; Г – а ☐ 4) А – д; Б – е; В – в; Г – б ☐ 5) А – д; Б – б; В – в; Г – а ☐

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа	
9.41. Число точек разрыва функции $y = \frac{1}{x^3(x^2+1)(x-1)^4}$ равно...	1) 4	☐
	2) 2	☐
	3) 3	☐
	4) 7	☐
9.42. Найти точки разрыва функции $y = \frac{2x+3}{x^2-5x-24}$	1) -3 и 8	☐
	2) 3 и 8	☐
	3) 3 и -8	☐
	4) -3 и -8	☐
9.43. Найти точки разрыва функции $y = \frac{x+5}{x^2-x-42}$	1) -7 и 6	☐
	2) 7 и 6	☐
	3) 7 и -6	☐
	4) -7 и -6	☐
9.44. Найти точки разрыва функции $y = \frac{x+1}{x^2+9x+20}$	1) -5 и 4	☐
	2) 5 и 4	☐
	3) 5 и -4	☐
	4) -5 и -4	☐
9.45. Найти точки разрыва функции $y = \frac{3x-4}{x^2+10x-11}$	1) -11 и 1	☐
	2) 11 и 1	☐
	3) 11 и -1	☐
	4) -11 и -1	☐
9.46. Найти точки разрыва функции $y = \frac{2x-5}{3x^2-2x-8}$	1) 2 и 4/3	☐
	2) 2 и -4/3	☐
	3) 2 и -3/4	☐
	4) -2 и 3/4	☐
9.47. Найти точки разрыва функции $y = \frac{3x+1}{21x^2+11x-2}$	1) 2/7 и 1/3	☐
	2) -2/3 и -1/7	☐
	3) -2/3 и 1/7	☐
	4) -2/7 и -1/3	☐

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
9.48. Точка $x = 4$ для функции $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-4}, & \text{если } x < 4 \\ e^x, & \text{если } x \geq 4 \end{cases}$ является точкой...	1) устранимого разрыва ☐ 2) разрыва 1-го рода (неустраняемый разрыв) ☐ 3) разрыва 2-го рода ☐ 4) непрерывности ☐
9.49. Точка $x = 2$ для функции $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{если } x \leq 2 \\ 3^x - 5, & \text{если } x > 2 \end{cases}$ является точкой...	1) устранимого разрыва ☐ 2) разрыва 1-го рода (неустраняемый разрыв) ☐ 3) разрыва 2-го рода ☐ 4) непрерывности ☐
9.50. Горизонтальной асимптотой графика функции $y = \frac{3+4x}{x}$ является прямая, определяемая уравнением...	1) $y = -\frac{4}{3}$ ☐ 2) $x = 0$ ☐ 3) $x = -\frac{4}{3}$ ☐ 4) $y = 4$ ☐
9.51. Горизонтальной асимптотой графика функции $y = \frac{x}{3x+4}$ является прямая, определяемая уравнением...	1) $x = 0$ ☐ 2) $y = \frac{1}{3}$ ☐ 3) $x = \frac{4}{3}$ ☐ 4) $y = \frac{4}{3}$ ☐

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
9.52. Вертикальная асимптота графика функции $y = \frac{x-3}{(\sqrt[3]{x}+2) \cdot (x^2+4)}$ определяется уравнением...	1) $x = -8$ ☐ 2) $y = \frac{1}{8}$ ☐ 3) $x = -2$ ☐ 4) $x = 3$ ☐
9.53. Наклонной асимптотой графика функции $y = \frac{4x^2+2x-2}{2x+1}$ является прямая...	1) $y = 2x$ ☐ 2) $y = x + 2$ ☐ 3) график не имеет наклонных асимптот ☐ 4) $y = 4x - 2$ ☐
9.54. Угловой коэффициент наклонной асимптоты графика функции $y = \frac{8x-x^2}{x+2}$ равен...	1) -1 ☐ 2) 8 ☐ 3) 4 ☐ 4) $-\frac{1}{2}$ ☐
10. Элементы дифференциального исчисления	
10.1. Как определяется производная функции $y = f(x)$?	1) $y' = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{x}$ ☐ 2) $y' = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{y}{x}$ ☐ 3) $y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ ☐ 4) $y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 1} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ ☐ 5) $y' = \frac{y}{x}$ ☐
10.2. Если α — угол наклона касательной к графику функции $y = f(x)$, то $y' = \dots$	1) $\operatorname{tg} \alpha$ ☐ 2) $\operatorname{ctg} \alpha$ ☐ 3) $\sin \alpha$ ☐ 4) $\cos \alpha$ ☐ 5) α ☐

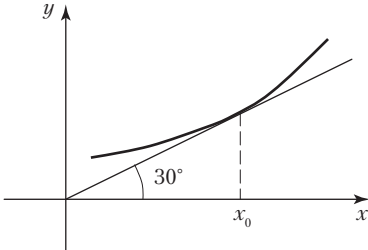
Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
10.3. Если $y = uv$, то $y' = \dots$	1) $u'v'$ ☐ 2) $u'v - uv'$ ☐ 3) $\frac{u'v + uv'}{uv}$ ☐ 4) $u' + v'$ ☐ 5) $u'v + uv'$ ☐
10.4. Если $y = \frac{u}{v}$, то $y' = \dots$	1) $u'v - uv'$ ☐ 2) $\frac{u'v - uv'}{v^2}$ ☐ 3) $\frac{u'v + uv'}{v^2}$ ☐ 4) $u' - v'$ ☐ 5) $\frac{u'}{v'}$ ☐
10.5. Если $y = x^\alpha$, то $y' = \dots$	1) x^α ☐ 2) $\alpha x^{\alpha-1}$ ☐ 3) $x^\alpha \ln \alpha$ ☐ 4) $\alpha x^{\alpha+1}$ ☐ 5) $x^{2\alpha-1}$ ☐
10.6. Если $y = a^x$, то $y' = \dots$	1) xa^{x-1} ☐ 2) a^x ☐ 3) a^{x-1} ☐ 4) ax^{a-1} ☐ 5) $a^x \ln a$ ☐

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
10.7. Функция задана графически. Определить количество точек, принадлежащих интервалу (a, b), в которых не существует производная. 	1) 3 ☐ 2) 4 ☐ 3) 5 ☐ 4) 6 ☐
10.8. Найти производную функции $y = x^4 \cdot e^{5x}$	1) $20x^3 \cdot e^{5x}$ ☐ 2) $4x^3 \cdot e^{5x}$ ☐ 3) $4x^3 \cdot e^{5x} + 5x^4 \cdot e^{5x}$ ☐ 4) $20x^3 \cdot e^{5x} + x^4 \cdot e^{5x}$ ☐ 5) $4x^3 + 5e^{5x}$ ☐
10.9. Найти производную функции $y = x^6 \cdot \sin 2x$	1) $6x^5 \cdot \cos 2x$ ☐ 2) $12x^5 \cdot \cos 2x$ ☐ 3) $6x^5 \cdot \sin 2x - 2x^6 \cdot \cos 2x$ ☐ 4) $6x^5 \cdot \sin 2x + 2x^6 \cdot \cos 2x$ ☐
10.10. Найти производную функции $y = x^3 \cdot \ln 3x$	1) $3x^2 \cdot \ln 3x + x^2$ ☐ 2) $3x^2$ ☐ 3) x^2 ☐ 4) $9x^2 \cdot \ln x + 3x^3$ ☐
10.11. Найти производную функции $y = \sin^2(x^2)$	1) $2\cos 2x$ ☐ 2) $2x\sin(2x^2)$ ☐ 3) $2\cos(x^2) + 2x\sin^2 2x$ ☐ 4) $2\sin(x^2)$ ☐
10.12. Найти производную функции $y = \frac{x^3}{\sin x}$	1) $\frac{3x^2}{\cos x}$ ☐ 2) $\frac{3x^2 \cdot \cos x}{\sin^2 x}$ ☐ 3) $\frac{3x^2 \cdot \sin x - x^3 \cos x}{\sin^2 x}$ ☐ 4) $\frac{-3x^2 \cdot \cos x + x^3 \sin x}{\cos x}$ ☐

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
10.13. Найти производную функции $y = 5^x \cos 2x$	1) $5^x \cdot \ln 5 \cdot \cos 2x - 2 \cdot 5^x \cdot \sin 2x$ ☐ 2) $-2 \cdot 5^x \cdot \ln 5 \cdot \sin 2x$ ☐ 3) $-5^x \cdot \ln 5 \sin 2x$ ☐ 4) $5^x \cdot \cos 2 - 5^x \cdot \sin 2x$ ☐
10.14. Найти производную функции $y = x^x$	1) x^x ☐ 2) $x^x \cdot \ln x$ ☐ 3) $x \cdot x^{x-1}$ ☐ 4) $x^x \cdot (\ln x + 1)$ ☐
10.15. Производная функции $y = e^{x^2+1}$ равна...	1) $y' = -2xe^{x^2+1}$ ☐ 2) $y' = xe^{x^2+1}$ ☐ 3) $y' = e^{x^2+1}$ ☐ 4) $y' = 2xe^{x^2+1}$ ☐
10.16. Производная функции $y = \cos(3x^2 + 2)$ равна...	1) $y' = 6x \sin(3x^2 + 2)$ ☐ 2) $y' = x \sin(3x^2 + 2)$ ☐ 3) $y' = -6x \sin(3x^2 + 2)$ ☐ 4) $y' = -\sin(3x^2 + 2)$ ☐
10.17. Производная частного $y = \frac{x+5}{x+1}$ равна...	1) $y' = \frac{4}{(x+1)^2}$ ☐ 2) $y' = -\frac{4}{x+1}$ ☐ 3) $y' = \frac{2x+6}{(x+1)^2}$ ☐ 4) $y' = -\frac{4}{(x+1)^2}$ ☐

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
10.18. Производная частного $y = \frac{x+3}{x+2}$ равна...	1) $y' = -\frac{1}{x+2}$ ☐ 2) $y' = -\frac{1}{(x+2)^2}$ ☐ 3) $y' = \frac{2x+5}{(x+2)^2}$ ☐ 4) $y' = \frac{1}{(x+2)^2}$ ☐
10.19. Производная частного $y = \frac{x}{x-1}$ равна...	1) $y' = -\frac{1}{x-1}$ ☐ 2) $y' = \frac{1}{(x-1)^2}$ ☐ 3) $y' = -\frac{1}{(x-1)^2}$ ☐ 4) $y' = \frac{2x-1}{(x-1)^2}$ ☐
10.20. Установите соответствие между функциями и их производными: А) $y = e^{-3x}$; Б) $y = \sin(-5x+1)$; В) $y = \ln(x^2+1)$. а) $\frac{2x}{1+x^2}$; б) $\frac{1}{1+x^2}$; в) $-3x \cdot e^{-3x-1}$; г) $-5\cos(5x-1)$; д) $-3e^{-3x}$.	1) А – б; Б – г; В – в ☐ 2) А – д; Б – г; В – а ☐ 3) А – б; Б – а; В – в ☐ 4) А – д; Б – в; В – г ☐ 5) А – д; Б – г; В – в ☐

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
10.21. Установите соответствие между функциями и их производными: А) $y = e^{\sin x}$; Б) $y = \sqrt{\ln x}$; В) $y = \sqrt{1 - \sqrt{x}}$. а) $\frac{1}{2\sqrt{\ln x}}$; б) $\cos x \cdot e^{\sin x}$; в) $-\frac{1}{4\sqrt{x} \cdot (1 - \sqrt{x})}$; г) $\frac{1}{2x\sqrt{\ln x}}$; д) $\sin x \cdot e^{\sin x - 1}$	1) А – б; Б – г; В – в ☐ 2) А – д; Б – а; В – в ☐ 3) А – б; Б – а; В – в ☐ 4) А – д; Б – в; В – г ☐ 5) А – д; Б – г; В – в ☐
10.22. Пусть $u(x)$ – некоторая дифференцируемая функция по x. Установите соответствие между функциями и их производными по x: А) $y = 3^u$; Б) $y = \sin(u)$; В) $y = \log_2(u)$. а) $\frac{1}{u}u'$; б) $\frac{1}{u}\log_2 e \cdot u'$; в) $3^u \cdot u'$; г) $\cos(u) \cdot u'$; д) $3^u \cdot \ln 3 \cdot u'$.	1) А – д; Б – г; В – б ☐ 2) А – д; Б – г; В – а ☐ 3) А – в; Б – г; В – б ☐ 4) А – в; Б – г; В – а ☐ 5) А – д; Б – г; В – в ☐
10.23. Значение производной функции $y = \frac{10x + 1}{e^{3x}}$ в точке $x = 0$ равно...	1) 13 ☐ 2) 7 ☐ 3) 10 ☐ 4) 9 ☐
10.24. Значение производной функции $y = xe^x$ в точке $x = 0$ равно...	1) e ☐ 2) 0 ☐ 3) -1 ☐ 4) 1 ☐
10.25. Значение производной функции $y = (4x + 3) \cdot \ln x$ в точке $x = 1$ равно...	1) 11 ☐ 2) 7 ☐ 3) -7 ☐ 4) 4 ☐

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа	
10.26. Найти производную функции $y = \frac{x+1}{x-4}$ в точке $x = 3$	1) $-3,5$ ☐ 2) -4 ☐ 3) $-4,5$ ☐ 4) -5 ☐	
10.27. Найти производную функции $y = \frac{x^2-3}{x^3+2}$ в точке $x = 2$	1) $0,24$ ☐ 2) $0,28$ ☐ 3) $0,32$ ☐ 4) $0,36$ ☐	
10.28. Найти производную функции $y = \ln\left(\frac{x^2+1}{x+2}\right)$ в точке $x = 3$	1) $0,4$ ☐ 2) $0,3$ ☐ 3) $0,2$ ☐ 4) $0,1$ ☐	
10.29. График функции $y = f(x)$ изображен на рисунке:  Тогда значение производной этой функции в точке x_0 равно...	1) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ☐ 2) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ☐ 3) $-\sqrt{3}$ ☐ 4) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ ☐	
10.30. Касательная к графику функции $f(x) = 3x^2 - x - 10$ образует с положительным направлением оси Ox угол $\arctg 17$. Тогда абсцисса точки касания равна...	1) 3 ☐ 2) 17 ☐ 3) 840 ☐ 4) $2\frac{2}{3}$ ☐	
10.31. Уравнение касательной к графику функции $y = x^3$ в точке $(2; 8)$ имеет вид...	1) $2x - y + 16 = 0$ ☐ 2) $y - 12 = 0$ ☐ 3) $12x - y - 24 = 0$ ☐ 4) $2x - y - 8 = 0$ ☐ 5) $12x - y - 16 = 0$ ☐	

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
10.32. Уравнение касательной к графику функции $y = \frac{3}{x^2 + 2}$ в точке (1; 1) имеет вид...	1) $2x - 3y - 5 = 0$ ☐ 2) $x + 2y - 7 = 0$ ☐ 3) $2x + 3y - 5 = 0$ ☐ 4) $x - 2y - 3 = 0$ ☐ 5) $x + 2y - 2 = 0$ ☐
10.33. Уравнение касательной к графику функции $y = \frac{4}{x^3 + 3}$ в точке (1; 1) имеет вид...	1) $3x - y - 2 = 0$ ☐ 2) $x + y - 2 = 0$ ☐ 3) $y - 1 = 0$ ☐ 4) $3x + 4y - 7 = 0$ ☐ 5) $3x - 4y + 1 = 0$ ☐
10.34. Уравнение касательной к графику функции $y = \frac{1}{x - 1}$ в точке (2; 1) имеет вид...	1) $x + y - 3 = 0$ ☐ 2) $2x - y - 3 = 0$ ☐ 3) $x - 2y = 0$ ☐ 4) $x + 2y - 4 = 0$ ☐
10.35. Уравнение касательной к графику функции $y = \frac{3}{x^3 + x + 1}$ в точке (0; 3) имеет вид...	1) $3x + y + 1 = 0$ ☐ 2) $3x + y - 3 = 0$ ☐ 3) $3x - 4y - 5 = 0$ ☐ 4) $3x + 4y - 12 = 0$ ☐
10.36. Закон движения материальной точки имеет вид $x(t) = 11 + 2t + 5t^2$, где $x(t)$ — координата точки в момент времени t . Тогда скорость точки при $t = 1$ равна...	1) 18 ☐ 2) 12 ☐ 3) 7 ☐ 4) 23 ☐
10.37. Закон движения материальной точки имеет вид $x(t) = 1 + 7t + 10t^2$, где $x(t)$ — координата точки в момент времени t . Тогда скорость точки при $t = 1$ равна...	1) 18 ☐ 2) 27 ☐ 3) 28 ☐ 4) 17 ☐
10.38. Закон движения материальной точки имеет вид $x(t) = 4 + 10t^2$, где $x(t)$ — координата точки в момент времени t . Тогда скорость точки при $t = 1$ равна...	1) 14 ☐ 2) 24 ☐ 3) 10 ☐ 4) 20 ☐

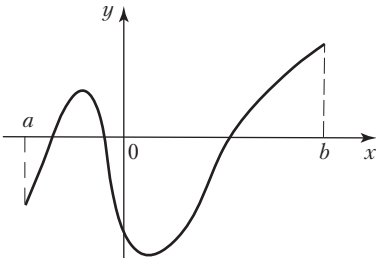
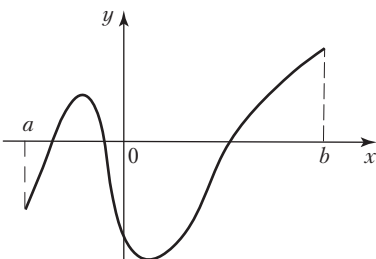
Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
10.39. Материальная точка движется по закону $S = 5 \sin 2t + 3t^2 + 4t.$ Тогда ее ускорение в момент времени $t = 0$ равно...	1) 6 ☐ 2) 5 ☐ 3) 1 ☐ 4) -14 ☐
10.40. Производная второго порядка функции $y = e^{3x+2}$ имеет вид...	1) $9e$ ☐ 2) $3e^x$ ☐ 3) $9e^{3x+2}$ ☐ 4) $9e^{3x}$ ☐
10.41. Производная второго порядка функции $y = e^{5x-1}$ имеет вид...	1) $25e^{5x-1}$ ☐ 2) $25e^{5x}$ ☐ 3) $25e$ ☐ 4) $5e^x$ ☐
10.42. Производная второго порядка функции $y = \ln 11x$ имеет вид...	1) $\frac{1}{x^2}$ ☐ 2) $-\frac{1}{x^2}$ ☐ 3) $\frac{11}{x}$ ☐ 4) $-\frac{11}{x^2}$ ☐
10.43. Производная второго порядка функции $y = x^2 e^x$ имеет вид...	1) $2xe^x$ ☐ 2) $2e^x$ ☐ 3) $e^x(2x + x^2)$ ☐ 4) $e^x(x^2 + 4x + 2)$ ☐
10.44. Найти вторую производную функции $y = \sin 2x$	1) $-4\sin 2x$ ☐ 2) $4\sin 2x$ ☐ 3) $8\sin x$ ☐ 4) $-8\sin x$ ☐

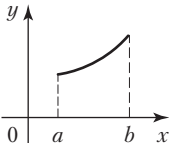
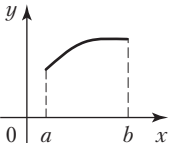
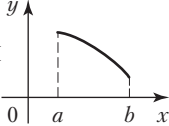
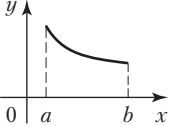
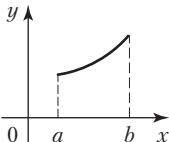
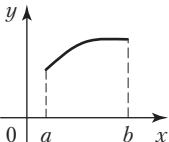
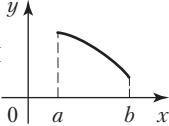
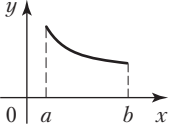
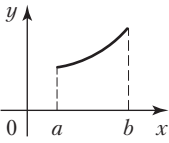
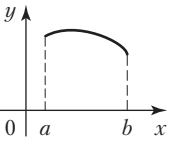
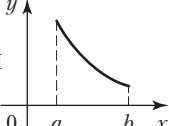
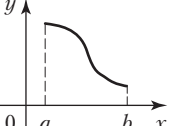
Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
10.45. Найти вторую производную функции $y = \cos(x^2)$	1) $-2 \sin(x^2) + 2x^2 \cdot \cos(x^2)$ ☐ 2) $-2 \cos(2x) + 4x^2 \cdot \sin(2x)$ ☐ 3) $-2 \sin(x^2) - 4x^2 \cdot \cos(x^2)$ ☐ 4) $-4x^2 \cdot \cos(2x)$ ☐
10.46. Найти вторую производную функции $y = x \cdot \ln x$	1) $\ln x + 1$ ☐ 2) $\frac{\ln x}{x}$ ☐ 3) 1 ☐ 4) $\frac{1}{x}$ ☐
10.47. Найти вторую производную функции $y = x\sqrt{x}$	1) $\frac{2}{3\sqrt{x}}$ ☐ 2) $\frac{3\sqrt{x}}{2}$ ☐ 3) $\frac{3}{4\sqrt{x}}$ ☐ 4) $3\sqrt{x}$ ☐
10.48. Найти вторую производную функции $y = e^{x^2}$	1) $e^{x^2} \cdot (4x^2 + 2)$ ☐ 2) $4x^2 \cdot e^{x^2}$ ☐ 3) $2e^{2x}$ ☐ 4) $e^{x^2} \cdot (2x^2 + 4)$ ☐
10.49. Найти вторую производную функции $y = x \cdot \cos 3x$	1) $-9 \cos 3x$ ☐ 2) $3 \cos 3x - 6x \sin 3x$ ☐ 3) $-6 \sin 3x - 9x \cos 3x$ ☐ 4) $3 \sin 3x - 9x \cos 3x$ ☐

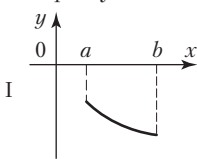
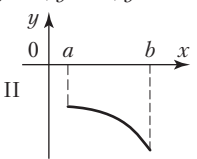
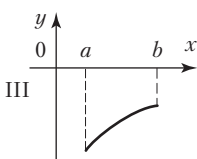
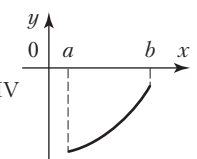
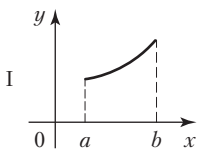
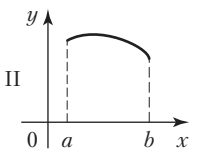
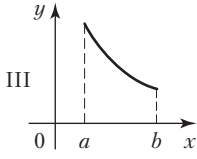
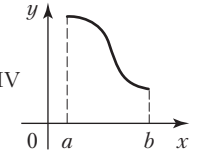
Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
10.50. Найти вторую производную функции $y = \sin 3x$ в точке $x = \frac{\pi}{6}$	1) -3 ☐ 2) -5 ☐ 3) -6 ☐ 4) -9 ☐
10.51. Дифференциал функции $y = f(x)$ определяется по формуле...	1) $dy = \frac{dx}{y'}$ ☐ 2) $dy = (\ln y)' dx$ ☐ 3) $dy = f(x) dx$ ☐ 4) $dy = dx$ ☐ 5) $dy = y' dx$ ☐
10.52. Какое равенство определяет инвариантность формы записи дифференциала?	1) $dy = \text{const}$ ☐ 2) $dy = y \cdot (\ln x)' dx$ ☐ 3) $dy = y'_x dx = y'_u du$ ☐ 4) $dy = dx$ ☐
10.53. Что равно длине отрезка, отсекаемого касательной к графику функции от приращения функции?	1) Дифференциал ☐ 2) Производная ☐ 3) Вторая производная ☐ 4) Определенный интеграл ☐
10.54. Чему при малых Δx приближенно равно выражение $f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x$?	1) $f''(x_0)$ ☐ 2) $f(x_0 + \Delta x)$ ☐ 3) $f(x_0 - \Delta x)$ ☐ 4) $f(\Delta x)$ ☐
10.55. Если к пределу $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x}$ применить правило Лопиталя, то он примет вид...	1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \ln x}{x^2}$ ☐ 2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x}$ ☐ 3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x$ ☐ 4) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2}$ ☐

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
10.56. Если к пределу $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log_2 x}{e^{2x}}$ применить правило Лопиталя, то он примет вид...	1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log_2 x}{2e^{2x}}$ ☐ 2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2xe^{2x} \ln 2}$ ☐ 3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - 2x \ln x}{xe^{2x} \ln 2}$ ☐ 4) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{xe^{2x} \ln 2}$ ☐
10.57. Предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x}{4x}$ равен...	1) 4/7 ☐ 2) 0 ☐ 3) ∞ ☐ 4) 1 ☐ 5) 7/4 ☐
10.58. Предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 10x}{5x}$ равен...	1) 1 ☐ 2) 1/2 ☐ 3) ∞ ☐ 4) 2 ☐ 5) 0 ☐
10.59. Предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{4x}$ равен...	1) 4 ☐ 2) 1/4 ☐ 3) 1 ☐ 4) ∞ ☐ 5) 0 ☐
10.60. Предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\ln(1 + 2x)}$ равен...	1) 0 ☐ 2) 1/4 ☐ 3) 1 ☐ 4) 2 ☐ 5) 1/2 ☐

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа	
10.61. Предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{\sqrt{x+1}-1}$ равен...	1) 8	☐
	2) 4	☐
	3) 2	☐
	4) 1	☐
	5) 0	☐
10.62. Предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x \sin x}$ равен...	1) 0	☐
	2) 1/2	☐
	3) 1	☐
	4) 2	☐
	5) 4	☐
10.63. Предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1}{\ln(1 + 3x)}$ равен...	1) e	☐
	2) $\sqrt[3]{e}$	☐
	3) 1	☐
	4) 1/3	☐
	4) 3	☐
10.64. Предел $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x - 2}{\ln x}$ равен...	1) 0	☐
	2) 1	☐
	3) -1	☐
	4) 2	☐
	5) -2	☐
10.65. Предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{3 - \sqrt{2x+9}}$ равен...	1) 0	☐
	2) -1	☐
	3) -3	☐
	4) -6	☐
	5) -9	☐
10.66. Необходимым условием максимума дифференцируемой функции $y = f(x)$ в точке x_0 является...	1) $f'(x_0) > 0$	☐
	2) $f'(x_0) = 0$	☐
	3) $f'(x_0) < 0$	☐
	4) $f''(x_0) = 0$	☐

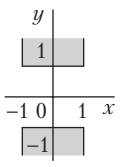
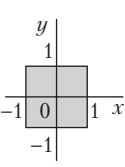
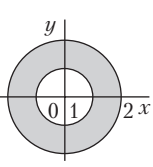
Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
10.67. Необходимым условием минимума дифференцируемой функции $y = f(x)$ в точке x_0 является...	1) $f'(x_0) < 0$ ☐ 2) $f''(x_0) = 0$ ☐ 3) $f'(x_0) > 0$ ☐ 4) $f'(x_0) = 0$ ☐
10.68. Необходимым условием точки перегиба дважды дифференцируемой функции $y = f(x)$ в точке x_0 является...	1) $f''(x_0) = 0$ ☐ 2) $f'(x_0) = 0$ ☐ 3) $f''(x_0) > 0$ ☐ 4) $f''(x_0) < 0$ ☐
10.69. Функция $y = f(x)$ задана на отрезке $[a; b]$. Укажите количество точек экстремума функции, если график ее производной имеет вид: 	1) 0 ☐ 2) 1 ☐ 3) 2 ☐ 4) 3 ☐
10.70. Функция $y = f(x)$ задана на отрезке $[a; b]$. Укажите количество точек максимума функции, если график ее производной имеет вид: 	1) 0 ☐ 2) 1 ☐ 3) 2 ☐ 4) 3 ☐

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
10.71. График какой функции на всем отрезке $[a, b]$ одновременно удовлетворяет трем условиям: $y > 0$; $y' < 0$; $y'' < 0$? I  II  III  IV 	1) Все графики ☐ 2) Только I и IV ☐ 3) Только II и III ☐ 4) Только II ☐ 5) Только III ☐
10.72. График какой функции на всем отрезке $[a, b]$ одновременно удовлетворяет трем условиям: $y > 0$; $y' > 0$; $y'' > 0$? I  II  III  IV 	1) Только I ☐ 2) Все графики ☐ 3) Только III ☐ 4) Только II ☐ 5) Только I и III ☐
10.73. График какой функции на всем отрезке $[a, b]$ одновременно удовлетворяет трем условиям: $y > 0$; $y' < 0$; $y'' > 0$? I  II  III  IV 	1) Все графики ☐ 2) Только II ☐ 3) Только III ☐ 4) Только II и III ☐ 5) Только I и III ☐

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
10.74. График какой функции на всем отрезке $[a, b]$ одновременно удовлетворяет трем условиям: $y < 0$; $y' < 0$; $y'' < 0$?  I  II  III  IV	1) Только IV ☐ 2) Только I и II ☐ 3) Только II ☐ 4) Только II и III ☐ 5) Только I ☐
10.75. График какой функции на всем отрезке $[a, b]$ одновременно удовлетворяет трем условиям: $y > 0$; $y' > 0$; $y'' > 0$?  I  II  III  IV	1) Только I ☐ 2) Только I и II ☐ 3) Только II ☐ 4) Только III ☐ 5) Только I и IV ☐
10.76. Найти точку максимума функции $y = 2x^3 + 3x^2 - 72x + 7$	1) $x = -4$ ☐ 2) $x = 3$ ☐ 3) $x = -3$ ☐ 4) $x = 4$ ☐
10.77. Найти точку минимума функции $y = x^3 - 6x^2 - 63x + 14$	1) $x = 3$ ☐ 2) $x = 7$ ☐ 3) $x = -7$ ☐ 4) $x = -3$ ☐

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа	
10.78. Найти точку минимума функции $y = 2x^3 - 24x + 3$	1) $x = -1$	☐
	2) $x = 1$	☐
	3) $x = -2$	☐
	4) $x = 2$	☐
10.79. Найти точку перегиба функции $y = x^3 - 24x^2 + 3x + 7$	1) $x = 2$	☐
	2) $x = 6$	☐
	3) $x = 8$	☐
	4) $x = 12$	☐
10.80. Найти точку максимума функции $y = 2x^3 - 27x^2 + 108x + 4$	1) $x = 1$	☐
	2) $x = 2$	☐
	3) $x = 3$	☐
	4) $x = 6$	☐
10.81. Найти точку минимума функции $y = x^2 - 8x + 5$	1) $x = -5$	☐
	2) $x = 4$	☐
	3) $x = 5$	☐
	4) $x = 8$	☐
10.82. Найти точку максимума функции $y = -x^2 - 12x + 31$	1) $x = -2$	☐
	2) $x = -3$	☐
	3) $x = -5$	☐
	4) $x = -6$	☐
10.83. Точкой максимума функции $y = \frac{x^2 + 4}{x - 2}$ является точка x , равная...	1) $2 + 2\sqrt{2}$	☐
	2) $2 - 2\sqrt{2}$	☐
	3) 2	☐
	4) -2	☐
10.84. Длина промежутка убывания функции $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 10x + 4$ равна...	1) 5	☐
	2) 6	☐
	3) 7	☐
	4) 8	☐
10.85. Длина промежутка возрастания функции $y = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{11}{2}x^2 - 28x - 7$ равна...	1) 5	☐
	2) 3	☐
	3) 2	☐
	4) 1	☐

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа	
10.86. Длина промежутка убывания функции $y = \frac{1}{3}x^3 + \frac{9}{2}x^2 - 22x + 3$ равна...	1) 13 ☐ 2) 11 ☐ 3) 7 ☐ 4) 3 ☐	
10.87. Длина промежутка убывания функции $y = x^3 - 12x + 9$ равна...	1) 1 ☐ 2) 2 ☐ 3) 3 ☐ 4) 4 ☐	
10.88. Длина промежутка убывания функции $y = x^3 + 9x^2 + 24x - 15$ равна...	1) 1 ☐ 2) 2 ☐ 3) 3 ☐ 4) 5 ☐	
10.89. Наименьшее значение функции $y = x^2 - 4x - 1$ на отрезке $[0; 3]$ равно...	1) -1 ☐ 2) -4 ☐ 3) 0 ☐ 4) -5 ☐	
10.90. Наибольшее значение функции $y = -x^2 + 4x + 5$ на отрезке $[0; 5]$ равно...	1) 8 ☐ 2) 5 ☐ 3) 0 ☐ 4) 9 ☐	
11. Функции нескольких переменных		
11.1. Как называется предел отношения приращения $\Delta_x z$ функции $z = f(x, y)$ к приращению Δx переменной x при стремлении Δx к нулю?	1) Условный экстремум ☐ 2) Градиент ☐ 3) Частный дифференциал ☐ 4) Производная по направлению ☐ 5) Частная производная ☐	
11.2. Как называется выражение $\nabla z = (z'_x, z'_y)$?	1) Условный экстремум ☐ 2) Градиент ☐ 3) Частный дифференциал ☐ 4) Производная по направлению ☐ 5) Частная производная ☐	

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
11.3. Что определяется выражением $z'_x \cos \alpha + z'_y \cos \beta$?	1) Условный экстремум ☐ 2) Градиент ☐ 3) Частный дифференциал ☐ 4) Производная по направлению ☐ 5) Частная производная ☐
11.4. К чему относится определение: существует окрестность такая, что для всех точек $M(x, y)$, принадлежащих этой окрестности и удовлетворяющих уравнению связи $g(x, y) = C$, выполняется неравенство $f(x, y) < f(x_0, y_0)$ [$f(x, y) > f(x_0, y_0)$]?	1) Условный экстремум ☐ 2) Градиент ☐ 3) Частный дифференциал ☐ 4) Производная по направлению ☐ 5) Частная производная ☐
11.5. Дана функция двух переменных $z = \sqrt{1-x^2} + \sqrt{y^2} - 1$. Тогда область определения этой функции изображена на рисунке... а  б  в 	1) а ☐ 2) б ☐ 3) в ☐ 4) ни на одном из них ☐
11.6. Частная производная по y функции $z = \frac{1}{3}x^3 - xy - 3y^2 + 11x + 7y$ равна ...	1) $z'_y = x^2 - y + 11$ ☐ 2) $z'_y = -xy - 6y + 18$ ☐ 3) $z'_y = x^2 - x + 7$ ☐ 4) $z'_y = -x - 6y + 7$ ☐ 5) $z'_y = -x - 3y + 11$ ☐

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
11.7. Частная производная по x функции $z = x^3 + 3x^2 - 5xy - 4y^2 + 15y - 8$ равна...	1) $z'_x = 3x^2 + 6x - 8$ ☐ 2) $z'_x = 3x^2 + 6x - 5y$ ☐ 3) $z'_x = 6x^2 + 6x - 13y + 15$ ☐ 4) $z'_x = x^3 + 3x^2 - 5xy$ ☐
11.8. Частная производная по y функции $z = x^5y^2 + 2x^3y^3 - 4x^2 - 7y^2 + 5x + 19$ равна...	1) $z'_y = 10x^4y + 18x^2y^2 - 11xy$ ☐ 2) $z'_y = x^4y + 2x^2y^2 - 14y$ ☐ 3) $z'_y = 2x^5y + 6x^3y^2 - 14y$ ☐ 4) $z'_y = 2x^5y + 18x^2y^2 - 14y$ ☐ 5) $z'_y = 10x^5y + 18x^3y^3 - 11xy$ ☐
11.9. Частная производная по x функции $z = 3x^2y^3 + 2x^2y^2 - 6y^5 + 3x^2 + 25$ равна...	1) $z'_x = 9x^2y^2 + 4x^2y - 30y$ ☐ 2) $z'_x = 18xy^2 + 8xy - 18xy^4$ ☐ 3) $z'_x = 6xy^3 + 4xy^2 + 6x$ ☐ 4) $z'_x = 3x^2y^3 + 2x^2y^2 + 6x$ ☐
11.10. Частная производная по x функции $z = 5x^3 + x^2 + y^2 - 6y + 28$ равна...	1) $z'_x = 15x^2 + 2x$ ☐ 2) $z'_x = 15x^2 + 2x + 2y - 6$ ☐ 3) $z'_x = 2y - 6$ ☐ 4) $z'_x = \frac{5}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 + 28x$ ☐

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
11.11. Частная производная по y функции $z = 3\ln(x^2 + 2y^3)$ равна...	1) $z'_y = \frac{6x + 18y^2}{x^2 + 2y^2}$ ☐ 2) $z'_y = \frac{3}{2x + 6y^2}$ ☐ 3) $z'_y = \frac{3}{x^2 + 2y^3}$ ☐ 4) $z'_y = \frac{18y^2}{x^2 + 2y^3}$ ☐
11.12. Частная производная второго порядка z''_{xy} функции $z = x^2 \cdot y^3$ равна...	1) $4y^3$ ☐ 2) $2xy^2$ ☐ 3) $2xy^3 + 3x^2y^2$ ☐ 4) $6xy^2$ ☐
11.13. Смешанная производная z''_{xy} функции $z = \sin xy - 6xy^3$ равна...	1) $\cos xy - xy \sin xy - 18y^2$ ☐ 2) 0 ☐ 3) $-18y^2$ ☐ 4) $-xy \sin xy - 18y^2$ ☐
11.14. Найти частную производную $z'_y = \frac{\partial z}{\partial y}$ в точке (5; 2) функции $z = \frac{x^2}{y^3 + 2}$	1) -2 ☐ 2) -3 ☐ 3) -4 ☐ 4) -5 ☐
11.15. Найти частную производную $z'_x = \frac{\partial z}{\partial x}$ в точке (2; 2) функции $z = \frac{y + 3}{x^3 - 3}$	1) -1 ☐ 2) -1,6 ☐ 3) -2 ☐ 4) -2,4 ☐

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа	
11.16. Найти частную производную $z'_y = \frac{\partial z}{\partial y}$ в точке $(\sqrt{2}; 3)$ функции $z = \frac{x^2 + 3}{y^2 + 1}$	1) $-0,3$ 2) $-0,5$ 3) $-0,7$ 4) $-0,9$	☐ ☐ ☐ ☐
11.17. Найти частную производную $z'_x = \frac{\partial z}{\partial x}$ в точке $(3; 2)$ функции $z = \frac{y - 5}{x^2 + x - 2}$	1) $0,35$ 2) $0,28$ 3) $0,21$ 4) $0,14$	☐ ☐ ☐ ☐
11.18. Найти частную производную $z'_x = \frac{\partial z}{\partial x}$ в точке $(2; -3)$ функции $z = \frac{2y + 1}{x^2 + 6}$	1) $0,05$ 2) $0,1$ 3) $0,15$ 4) $0,2$	☐ ☐ ☐ ☐
11.19. Найти частную производную $z'_x = \frac{\partial z}{\partial x}$ в точке $(1; 1)$ функции $z = \frac{xy}{xy + 1}$	1) $0,2$ 2) $0,25$ 3) $0,5$ 4) $0,75$	☐ ☐ ☐ ☐
11.20. Найти критическую точку функции $z = x^2 + 3xy - \frac{7}{2}y^2 - 5x + 4y + 18$	1) $M(1; 1)$ 2) $M(1; 2)$ 3) $M(2; 1)$ 4) $M(2, 2)$	☐ ☐ ☐ ☐
11.21. Найти критическую точку функции $z = 3x^2 - 7xy - \frac{1}{2}y^2 - 25x + 20y + 6$	1) $M(2; -1)$ 2) $M(3; -2)$ 3) $M(3; -1)$ 4) $M(-2, 1)$	☐ ☐ ☐ ☐

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа	
11.22. Найти критическую точку функции $z = 2x^2 - 2xy + 3y^2 - 18x - 16y + 7$	1) $M(2; 5)$	☐
	2) $M(3; 7)$	☐
	3) $M(3; 5)$	☐
	4) $M(7; 5)$	☐
11.23. Найти критическую точку функции $z = 9x^2 + xy + y^2 - 25x - 15y + 14$	1) $M(1; 7)$	☐
	2) $M(3; 1)$	☐
	3) $M(3; -1)$	☐
	4) $M(7, -3)$	☐
11.24. Найти критическую точку функции $z = 5x^2 + 2xy - 2y^2 - 10x - 24y + 1$	1) $M(2; -5)$	☐
	2) $M(2; 5)$	☐
	3) $M(5; 3)$	☐
	4) $M(-5; -3)$	☐
11.25. Точкой экстремума функции $z = 3x^2 + 4y^2 - 48x + 16y + 12$ является точка...	1) $M(2; -6)$	☐
	2) $M(8; -2)$	☐
	3) $M(-2; 6)$	☐
	4) $M(6; -8)$	☐
11.26. Точкой экстремума функции $z = 9x^2 + y^2 + 18x - 4y + 7$ является точка...	1) $M(2; -4)$	☐
	2) $M(1; -2)$	☐
	3) $M(-2; 4)$	☐
	4) $M(-1; 2)$	☐
11.27. Если $U = \ln(3x - y^2 + z^3)$, то значение U'_z в точке $M(1; 0; 1)$ равно...	1) 0,5	☐
	2) 0,25	☐
	3) 0,75	☐
	4) 1	☐
	5) 2	☐
11.28. Если $U = e^{(2x-3y+z^2)}$, то значение U'_z в точке $M(1; 1; 1)$ равно...	1) 0	☐
	2) $-3e^{-3}$	☐
	3) 1	☐
	4) $-e^6$	☐
	5) -3	☐

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
11.29. Если $U = \ln(x^2 - y + 6z)$, то значение U'_z в точке $M(1; 3; 1)$ равно...	1) $2/3$ ☐ 2) $3/2$ ☐ 3) $-1/3$ ☐ 4) 0 ☐ 5) -2 ☐
11.30. Если $U = \sin(x + y^2 - 2z)$, то значение U'_z в точке $M(0; 0; \pi)$ равно...	1) -2 ☐ 2) 2 ☐ 3) 0 ☐ 4) -1 ☐ 5) $\sqrt{2}/2$ ☐
11.31. Если $U = \cos(2x^2 + y + z^3)$, то значение U'_z в точке $M(0; \frac{\pi}{4}; 0)$ равно...	1) 1 ☐ 2) $\sqrt{2}/2$ ☐ 3) 0 ☐ 4) $-\sqrt{2}/2$ ☐
11.32. Функция $L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda \cdot (g(x, y) - C)$ является функцией...	1) Лежандра ☐ 2) Лагранжа ☐ 3) Лобачевского ☐ 4) Коши ☐ 5) Лопиталья ☐
11.33. Максимум функции $z = xy$ при условии $x + y = 3$ равен...	1) 5 ☐ 2) $0,75$ ☐ 3) $4,5$ ☐ 4) $2,25$ ☐
11.34. Максимум функции $z = xy$ при условии $x + y = 6$ равен...	1) 18 ☐ 2) $1,5$ ☐ 3) 9 ☐ 4) $19,5$ ☐

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
12. Неопределенный и определенный интегралы	
12.1. Неопределенный интеграл — это...	1) числовой интервал ☐ 2) уравнение ☐ 3) совокупность функций ☐ 4) число ☐ 5) функция ☐
12.2. Как называется функция $F(x)$ по отношению к функции $f(x)$, если $F'(x) = f(x)$?	1) Оригинальная ☐ 2) Первообразная ☐ 3) Характеристическая ☐ 4) Исходная ☐ 5) Производная ☐
12.3. $\left[\int f(x)dx\right]' = \dots$	1) $f(x)dx$ ☐ 2) $df(x)$ ☐ 3) $f(x) + C$ ☐ 4) $f(x)$ ☐
12.4. Множество первообразных функции $f(x) = e^{-5x}$ имеет вид...	1) $\frac{1}{5}e^{-5x} + C$ ☐ 2) $e^{-5x} + C$ ☐ 3) $-\frac{1}{5}e^{-5x} + C$ ☐ 4) $-5e^{-5x} + C$ ☐
12.5. Множество первообразных функции $f(x) = e^{3x}$ имеет вид...	1) $-\frac{1}{3}e^{3x} + C$ ☐ 2) $\frac{1}{3}e^{3x} + C$ ☐ 3) $e^{3x} + C$ ☐ 4) $3e^{3x} + C$ ☐

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
12.6. Множество первообразных функции $f(x) = e^{2x}$ имеет вид...	1) $-\frac{1}{2}e^{2x} + C$ ☐ 2) $e^{2x} + C$ ☐ 3) $\frac{1}{2}e^{2x} + C$ ☐ 4) $2e^{2x} + C$ ☐
12.7. Какие из этих функций являются первообразными функции $y = e^{7+5x}$: а) e^{7+5x} ; б) $5e^{7+5x}$?	1) Только а) ☐ 2) Только б) ☐ 3) И а), и б) ☐ 4) Ни а), ни б) ☐
12.8. Какие из этих функций являются первообразными функции $y = e^{7+5x}$: а) $\frac{1}{5}e^{7+5x} + 31$; б) $\frac{1}{5}e^{7+5x}$?	1) Только а) ☐ 2) Только б) ☐ 3) И а), и б) ☐ 4) Ни а), ни б) ☐
12.9. Какие из этих функций являются первообразными функции $y = e^{7x+15}$: а) e^{7x+15} ; б) $\frac{1}{7}e^{7x+15} + 11$?	1) Только а) ☐ 2) Только б) ☐ 3) И а), и б) ☐ 4) Ни а), ни б) ☐
12.10. Какие из этих функций являются первообразными функции $y = e^{7x+15}$: а) $\frac{1}{7}e^{7x+15}$; б) $7e^{7x+15}$?	1) Только а) ☐ 2) Только б) ☐ 3) И а), и б) ☐ 4) Ни а), ни б) ☐
12.11. Какие из этих функций являются первообразными функции $y = 15\sin 6x$: а) $-2,5\cos 6x + 39$; б) $90\cos 6x$; в) $-15\cos 6x - 25$; г) $-2,5\cos 6x$?	1) а) и в) ☐ 2) а) и г) ☐ 3) Только б) ☐ 4) Ни одна ☐
12.12. Чему равен неопределенный интеграл $\int x^6 dx?$	1) $\frac{x^7}{7} + C$ ☐ 2) $x^7 + C$ ☐ 3) $6x^5 + C$ ☐ 4) $\frac{x^6}{6} + C$ ☐

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
12.13. Чему равен неопределенный интеграл $\int \frac{dx}{\sin^2 x}?$	1) $-\operatorname{tg} x + C$ ☐ 2) $-\operatorname{ctg} x + C$ ☐ 3) $\operatorname{tg} x + C$ ☐ 4) $\operatorname{ctg} x + C$ ☐
12.14. Чему равен неопределенный интеграл $\int \frac{dx}{\cos^2 x}?$	1) $\operatorname{ctg} x + C$ ☐ 2) $-\operatorname{tg} x + C$ ☐ 3) $-\operatorname{ctg} x + C$ ☐ 4) $\operatorname{tg} x + C$ ☐
12.15. Чему равен неопределенный интеграл $\int \frac{dx}{1+x^2}?$	1) $\ln(1+x^2) + C$ ☐ 2) $\operatorname{arctg} x + C$ ☐ 3) $\operatorname{arctg} x + C$ ☐ 4) $\ln x + C$ ☐
12.16. Чему равен неопределенный интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+25}}?$	1) $\ln 5+\sqrt{x^2+25} + C$ ☐ 2) $0,2\operatorname{arctg}(0,2x) + C$ ☐ 3) $\operatorname{arcsin}(0,2x) + C$ ☐ 4) $\ln x+\sqrt{x^2+25} + C$ ☐
12.17. Чему равен неопределенный интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{25-x^2}}?$	1) $\ln x+\sqrt{x^2+25} + C$ ☐ 2) $\operatorname{arcsin}(0,2x) + C$ ☐ 3) $\ln 5+\sqrt{x^2+25} + C$ ☐ 4) $0,2\operatorname{arctg}(0,2x) + C$ ☐
12.18. Чему равен неопределенный интеграл $\int \frac{dx}{x^2+25}?$	1) $\ln x+\sqrt{x^2+25} + C$ ☐ 2) $\ln 5+\sqrt{x^2+25} + C$ ☐ 3) $0,2\operatorname{arctg}(0,2x) + C$ ☐ 4) $\operatorname{arcsin}(0,2x) + C$ ☐

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
12.19. Установить соответствие между интегралом и его значением: А) $\int \frac{dx}{x}$; Б) $\int \sin x dx$; В) $\int \frac{dx}{1+x^2}$; Г) $\int x^4 dx$. а) $-\cos x + C$; б) $\ln x + C$; в) $\cos x + C$; г) $\arctg x + C$; д) $\frac{x^5}{5} + C$	1) А – б; Б – в; В – г; Г – д ☐ 2) А – б; Б – а; В – г; Г – д ☐ 3) А – г; Б – а; В – в; Г – д ☐ 4) А – г; Б – в; В – а; Г – д ☐ 5) А – а; Б – б; В – в; Г – г ☐
12.20. Установить соответствие между интегралом и его значением: А) $\int \frac{dx}{x}$; Б) $\int \sin x dx$; В) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$; Г) $\int \frac{dx}{\cos^2 x}$. а) $\ln x + C$; б) $-\cos x + C$; в) $\tg x + C$; г) $\arcsin x + C$; д) $\arctg x + C$	1) А – а; Б – в; В – г; Г – д ☐ 2) А – б; Б – а; В – г; Г – д ☐ 3) А – а; Б – б; В – д; Г – в ☐ 4) А – г; Б – в; В – а; Г – д ☐ 5) А – а; Б – б; В – г; Г – в ☐
12.21. Установить соответствие между интегралом и его значением: А) $\int \tg 2x dx$; Б) $\int 2^{2x} dx$; В) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-(2x)^2}}$. а) $\arcsin 2x + C$; б) $\ln \cos 2x + C$; в) $-\frac{1}{2}\ln \cos 2x + C$; г) $\frac{2^{2x}}{\ln 4} + C$; д) $\frac{1}{2}\arcsin 2x + C$	1) А – а; Б – в; В – г ☐ 2) А – б; Б – г; В – а ☐ 3) А – в; Б – г; В – д ☐ 4) А – в; Б – г; В – а ☐ 5) А – б; Б – г; В – д ☐

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
12.22. Установить соответствие между интегралом и его значением: А) $\int \frac{dx}{(2x)^2 - 4}$; Б) $\int 2^{x^4} x^3 dx$; В) $\int \frac{dx}{\sin^2 3x}$. а) $\frac{2^{x^4}}{4 \ln 2} + C$; б) $\frac{1}{3} \operatorname{ctg} 3x + C$; в) $-\frac{1}{3} \operatorname{ctg} 3x + C$; г) $\ln \left \frac{x-1}{x+1} \right + C$; д) $\frac{1}{8} \ln \left \frac{x-1}{x+1} \right + C$	1) А – а; Б – в; В – г ☐ 2) А – д; Б – а; В – б ☐ 3) А – в; Б – г; В – д ☐ 4) А – д; Б – а; В – в ☐ 5) А – б; Б – г; В – д ☐
12.23. Чему равна величина d в равенстве $\int \sqrt[10]{x^9} dx = \frac{x^d}{d} + C?$	1) 0,45 ☐ 2) 1,1 ☐ 3) 1,9 ☐ 4) 2,45 ☐
12.24. Чему равна величина b в равенстве $\int \frac{dx}{x^2 - b^2} = \ln \left \frac{x-0,5}{x+0,5} \right + C?$	1) 0,5 ☐ 2) 0,75 ☐ 3) 0,25 ☐ 4) 1 ☐
12.25. Чему равна величина b в равенстве $\int \frac{dx}{4x^2 - b} = 0,25 \cdot \ln \left \frac{x-0,5}{x+0,5} \right + C?$	1) 4 ☐ 2) 0,25 ☐ 3) 2,25 ☐ 4) 1 ☐
12.26. Чему равна величина b в равенстве $\int \frac{dx}{\sqrt[5]{x^3}} = \frac{1}{b} x^b + C?$	1) 0,2 ☐ 2) 0,4 ☐ 3) 1,4 ☐ 4) 1,6 ☐
12.27. Чему равна величина b в равенстве $\int \frac{dx}{\sqrt[10]{x^7}} = \frac{1}{b} x^b + C?$	1) 0,3 ☐ 2) 0,7 ☐ 3) 1,3 ☐ 4) 1,7 ☐

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
12.28. Чему равна величина b в равенстве $\int \frac{dx}{25x^2 + 1} = \frac{1}{b} \arctg 5x + C?$	1) 1 ☐ 2) 5 ☐ 3) 25 ☐ 4) 125 ☐
12.29. Чему равен неопределенный интеграл $\int \frac{dx}{\cos^2 2x}?$	1) $2 \operatorname{tg} 2x + C$ ☐ 2) $\frac{0,25}{\sin^2 2x} + C$ ☐ 3) $\operatorname{tg} 2x + C$ ☐ 4) $0,5 \operatorname{tg} 2x + C$ ☐
12.30. Интеграл $\int \sin(5x + 3) dx$ равен...	1) $-\cos(5x + 3) + C$ ☐ 2) $-\cos\left(\frac{5x^2}{2} + 3x\right) + C$ ☐ 3) $-\frac{1}{5} \cos(5x + 3) + C$ ☐ 4) $-\frac{1}{5} \cos\left(\frac{5x^2}{2} + 3x\right) + C$ ☐
12.31. Интеграл $\int \left(2x - \frac{1}{x^2}\right) dx$ равен...	1) $2x - \ln^2 x + C$ ☐ 2) $x^2 + \frac{1}{x} + C$ ☐ 3) $x^2 - \ln \frac{1}{x} + C$ ☐ 4) $x^2 + \ln \left \frac{1}{x} \right + C$ ☐
12.32. Интеграл $\int 7e^{7x} dx$ равен...	1) $7e^{7x} + C$ ☐ 2) $\frac{1}{7} e^{7x} + C$ ☐ 3) $e^{7x} + C$ ☐ 4) $7e^x + C$ ☐

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
12.33. Интеграл $\int \frac{e^x dx}{(e^x + 1)^5}$ равен...	1) $\frac{4}{(e^x + 1)^4} + C$ ☐ 2) $\frac{6}{(e^x + 1)^6} + C$ ☐ 3) $\frac{-1}{6(e^x + 1)^6} + C$ ☐ 4) $-5\ln e^x + 1 + C$ ☐ 5) $\frac{-1}{4(e^x + 1)^4} + C$ ☐
12.34. Интеграл $\int \frac{x^2 dx}{x^6 + 1}$ равен...	1) $(\operatorname{arctg} x)^3 + C$ ☐ 2) $\frac{1}{3}\ln\left \frac{x^3 - 1}{x^3 + 1}\right + C$ ☐ 3) $\frac{1}{3}\operatorname{arctg} x^3 + C$ ☐ 4) $\frac{1}{3}\ln x^3 + 1 + C$ ☐ 5) $\operatorname{arctg} x^3 + C$ ☐
12.35. Интеграл $\int \frac{\sin x dx}{\cos^2 x + 1}$ равен...	1) $-\operatorname{arctg}(\cos x) + C$ ☐ 2) $\operatorname{arctg}(\cos x) + C$ ☐ 3) $\frac{1}{(\cos^2 x + 1)} + C$ ☐ 4) $\ln \cos^2 x + 1 + C$ ☐ 5) $(\cos^2 x + 1) + C$ ☐

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
12.36. Интеграл $\int \frac{x^4 dx}{\sqrt{1-x^{10}}}$ равен...	1) $\frac{1}{5} \arcsin(x^5) + C$ ☐ 2) $(\arcsin x)^5 + C$ ☐ 3) $\frac{1}{5} \ln x^5 + \sqrt{x^{10}-1} + C$ ☐ 4) $\arcsin(x^5) + C$ ☐ 5) $\frac{1}{5} (\arcsin x)^5 + C$ ☐
12.37. Интеграл $\int \frac{x^3 dx}{x^4-1}$ равен...	1) $\ln x^4-1 + C$ ☐ 2) $\frac{3}{4} \ln x^4-1 + C$ ☐ 3) $3 \ln x^4-1 + C$ ☐ 4) $-\frac{1}{(x^4-1)^3} + C$ ☐ 5) $\frac{1}{4} \ln x^4-1 + C$ ☐
12.38. Найти интеграл $\int x^2 \cdot 3^{x^3} dx$	1) $\frac{1}{2} \cdot \sin(2x) + C$ ☐ 2) $\frac{1}{20} \cdot \ln \left \frac{2x+5}{2x-5} \right + C$ ☐ 3) $-\frac{1}{20} \cdot \ln \left \frac{2x+5}{2x-5} \right + C$ ☐ 4) $\frac{3^{x^3}}{3} + C$ ☐ 5) $\frac{3^{x^3}}{3 \ln 3} + C$ ☐

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
12.39. Найти интеграл $\int \cos(2x) dx$	1) $\frac{1}{2} \cdot \sin(2x) + C$ ☐ 2) $\frac{1}{20} \cdot \ln \left \frac{2x+5}{2x-5} \right + C$ ☐ 3) $-\frac{1}{20} \cdot \ln \left \frac{2x+5}{2x-5} \right + C$ ☐ 4) $\frac{3^{x^3}}{3} + C$ ☐ 5) $\frac{3^{x^3}}{3 \ln 3} + C$ ☐
12.40. Правильную рациональную дробь $\frac{x+1}{(x+3)x^2}$ можно представить в виде суммы простейших дробей....	1) $\frac{A}{x^2} + \frac{B}{x+3}$ ☐ 2) $\frac{A}{x} + \frac{B}{x+3}$ ☐ 3) $\frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x+3}$ ☐ 4) $\frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{2(x+3)}$ ☐

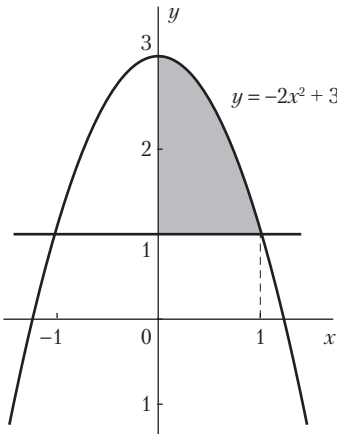
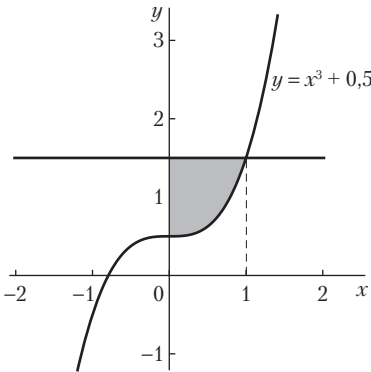
Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
12.41. Правильную рациональную дробь $\frac{2x+1}{(x+1)^2(x^2+4x+5)^2}$ можно представить в виде суммы простейших дробей....	1) $\frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{(x+1)^2} + \frac{D}{x^2+4x+5} + \frac{Ex+F}{(x^2+4x+5)^2}$ ☐ 2) $\frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+4x+5} + \frac{Ex+F}{(x^2+4x+5)^2}$ ☐ 3) $\frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{x^2+4x+5} + \frac{D}{(x^2+4x+5)^2}$ ☐ 4) $\frac{1}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{5}{x^2+4x+5} + \frac{2}{(x^2+4x+5)^2}$ ☐

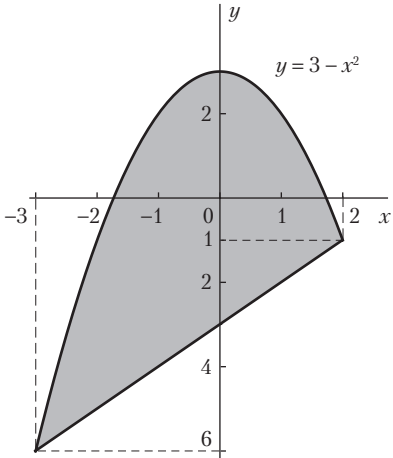
Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
12.42. Установить соответствие между неопределенными интегралами и разложениями подынтегральных функций на элементарные дроби: А) $\int \frac{9x-15}{x(x-12)} dx$; Б) $\int \frac{3x^2+1}{x^2(x^2-x+2)} dx$; В) $\int \frac{x^3+4}{x^3(x-10)} dx$; Г) $\int \frac{1}{x(x^2+19)} dx$. а) $\frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+19}$; б) $\frac{A}{x} + \frac{B}{x-12}$; в) $\frac{A}{x^3} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x} + \frac{D}{x-10}$; г) $\frac{A}{x^2} + \frac{B}{x} + \frac{Cx+D}{x^2-x+2}$; д) $\frac{A}{x^2} + \frac{B}{x^2-x+2}$	1) А — б; Б — д; В — в; Г — а ☐ 2) А — б; Б — г; В — в; Г — а ☐ 3) А — б; Б — а; В — в; Г — д ☐ 4) А — г; Б — в; В — а; Г — д ☐ 5) А — а; Б — б; В — в; Г — г ☐
12.43. В неопределенном интеграле $\int \frac{x}{\sqrt{x}-1} dx$ введена новая переменная $t = \sqrt{x}$. Тогда интеграл примет вид...	1) $2 \int \frac{t^3}{t-1} dt$ ☐ 2) $\int \frac{t^3}{2(t-1)} dt$ ☐ 3) $\int \frac{t^2}{t^2-1} dt$ ☐ 4) $2 \int (t^2-1) dt$ ☐
12.44. Определенный интеграл — это...	1) числовой интервал ☐ 2) уравнение ☐ 3) совокупность функций ☐ 4) число ☐ 5) функция ☐

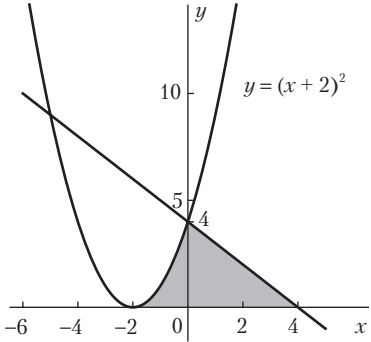
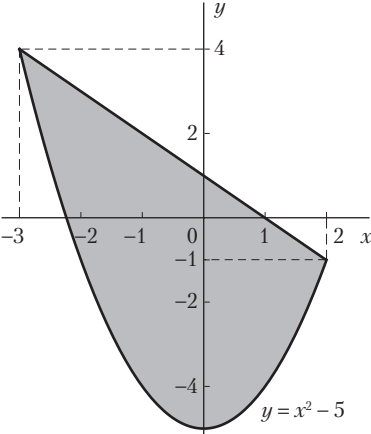
Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
12.45. Формула $\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big _a^b = F(b) - F(a)$ называется формулой...	1) Коши — Буняковского ☐ 2) Ньютона — Лейбница ☐ 3) Фробениуса — Перрона ☐ 4) Больцано — Коши ☐ 5) Бойля — Мариотта ☐
12.46. Если $f(x)$ определена в точке a , то чему равен $\int_a^a f(x)dx$?	1) $F(a)$ ☐ 2) a ☐ 3) a^2 ☐ 4) 1 ☐ 5) 0 ☐
12.47. Согласно теореме о среднем если $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то найдется точка $c \in [a, b]$ такая, что $\int_a^b f(x)dx = \dots$	1) $f(c) \cdot (b - a)$ ☐ 2) $ab \cdot f(c)$ ☐ 3) $(a - c) \cdot (b - c)$ ☐ 4) $F(c)$ ☐ 5) $f(c)$ ☐
12.48. Ненулевая функция $y = f(x)$ является нечетной на отрезке $[-8; 8]$. Тогда $\int_{-8}^8 f(x)dx$ равен...	1) $\frac{1}{16} \int_0^1 f(x)dx$ ☐ 2) $2 \int_0^8 f(x)dx$ ☐ 3) $16 \int_0^1 f(x)dx$ ☐ 4) 0 ☐
12.49. Вычислить определенный интеграл $\int_1^2 \left(x^3 - \frac{1}{x^3} \right) dx$	1) 4,125 ☐ 2) 3,625 ☐ 3) 3,375 ☐ 4) 3,125 ☐

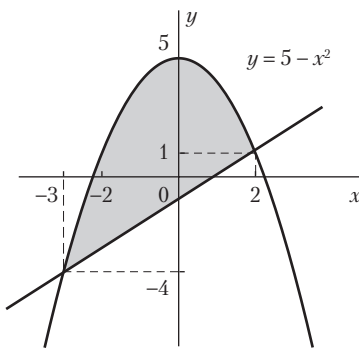
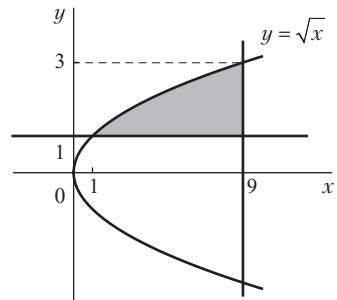
Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
12.50. Вычислить определенный интеграл $\int_1^2 \frac{dx}{x^2}$	1) 0,4 ☐ 2) 0,5 ☐ 3) 0,75 ☐ 4) 1 ☐
12.51. Вычислить определенный интеграл $\int_1^2 x^4 dx$	1) 5,5 ☐ 2) 5,8 ☐ 3) 6 ☐ 4) 6,2 ☐
12.52. Вычислить определенный интеграл $\int_3^4 (x-1)dx$	1) 2,5 ☐ 2) 3,5 ☐ 3) 4,5 ☐ 4) 5,5 ☐
12.53. Вычислить определенный интеграл $\int_2^4 (x^2 - 2x)dx$	1) 3 ☐ 2) 10/3 ☐ 3) 20/3 ☐ 4) 6 ☐
12.54. Вычислить определенный интеграл $\int_{-1}^2 (x^2 + 3)dx$	1) 6 ☐ 2) 8 ☐ 3) 10 ☐ 4) 12 ☐
12.55. Вычислить определенный интеграл $\int_{0,5}^1 \left(x + \frac{1}{x^5} \right) dx$	1) 4,125 ☐ 2) 4,25 ☐ 3) 4,375 ☐ 4) 5,125 ☐
12.56. Определенный интеграл $\int_1^5 (3x^2 + 2)dx$ равен...	1) 118 ☐ 2) 123 ☐ 3) 132 ☐ 4) 138 ☐

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа	
12.57. Определенный интеграл $\int_1^7 (6x^2 + 1)dx$ равен...	1) 663	☐
	2) 690	☐
	3) 696	☐
	4) 716	☐
12.58. Определенный интеграл $\int_1^2 \frac{2t+1}{t^2+t} dt$ равен...	1) $3 + \ln 3$	☐
	2) $\ln 3$	☐
	3) $\ln 4$	☐
	4) $\ln 5$	☐
	5) $-1 + \ln 6$	☐
12.59. Определенный интеграл $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}} dx$ равен...	1) $1 + \ln 2$	☐
	2) $\ln 4$	☐
	3) $1 + \ln 5$	☐
	4) $\ln 2$	☐
12.60. Значение интеграла $\int_1^{e^3} \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$ равно...	1) 0	☐
	2) 2	☐
	3) 1	☐
	4) 6	☐
12.61. Определенный интеграл $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin 6x dx$ равен...	1) 0	☐
	2) -12	☐
	3) $\frac{1}{3}$	☐
	4) $-\frac{1}{3}$	☐
12.62. Определенный интеграл $\int_1^e \frac{\ln^3 x}{x} dx$ равен...	1) 1	☐
	2) $\frac{1}{3}$	☐
	3) $\frac{1}{4}$	☐
	4) $\frac{4}{3}$	☐

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
12.63. Определенный интеграл $\int_0^1 xe^x dx$ равен...	1) 1 ☐ 2) 2 ☐ 3) 3 ☐ 4) $\frac{3}{2}$ ☐
12.64. Площадь фигуры, изображенной на рисунке, определяется интегралом... 	1) $\int_{-1}^0 (-2x^2 + 3)dx$ ☐ 2) $\int_0^1 (2 - 2x^2)dx$ ☐ 3) $\int_0^1 (2x^2 - 2)dx$ ☐ 4) $\int_0^3 (3 - 2x^2)dx$ ☐
12.65. Площадь фигуры, изображенной на рисунке, определяется интегралом... 	1) $\int_0^1 (1 - x^3)dx$ ☐ 2) $\int_0^{1.5} (1.5 - x^3)dx$ ☐ 3) $\int_0^1 (x^3 - 1)dx$ ☐ 4) $\int_0^1 (x^3 + 0.5)dx$ ☐

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
12.66. Площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2$, $y = 3x^2$, $x = 1$, вычисляется с помощью определенного интеграла...	1) $\int_0^1 x^2 dx$ ☐ 2) $\int_0^1 (3x^2 - x^2) dx$ ☐ 3) $\int_0^1 (x^2 - 3x^2) dx$ ☐ 4) $\int_0^1 3x^2 dx$ ☐
12.67. Площадь заштрихованной части фигуры, изображенной на чертеже, задана интегралом... 	1) $\int_{-3}^2 [(x-3) - (3-x^2)] dx$ ☐ 2) $\int_{-3}^2 [(3-x^2) - (x-3)] dx$ ☐ 3) $2 \int_{-3}^0 [(3-x^2) - (x-3)] dx$ ☐ 4) $2 \int_{-3}^0 (3-x^2) dx$ ☐ 5) $2 \int_0^2 (3-x^2-x) dx$ ☐

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
12.68. Площадь заштрихованной части фигуры, изображенной на чертеже, задана интегралом... 	1) $-\int_{-2}^0 (x+2)^2 dx + \int_0^4 (4-x) dx$ ☐ 2) $\int_{-2}^0 (x+2)^2 dx - \int_0^4 (4-x) dx$ ☐ 3) $\int_{-2}^4 (x+2)^2 dx$ ☐ 4) $\int_{-2}^4 (4-x) dx$ ☐ 5) $\int_{-2}^0 (x+2)^2 dx + \int_0^4 (4-x) dx$ ☐
12.69. Площадь заштрихованной части фигуры, изображенной на чертеже, задана интегралом... 	1) $\int_{-3}^2 [(x^2 - 5) - (x + 1)] dx$ ☐ 2) $\int_{-3}^2 [(1 - x) - (x^2 - 5)] dx$ ☐ 3) $2 \int_{-3}^0 [(1 - x) - (x^2 - 5)] dx$ ☐ 4) $2 \int_0^2 [(x^2 - 5) - (1 - x)] dx$ ☐ 5) $\int_{-3}^2 [(1 - x) + (x^2 - 5)] dx$ ☐

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
12.70. Площадь заштрихованной части фигуры, изображенной на чертеже, задана интегралом... 	1) $2\int_0^2 (6 - x^2 - x)dx$ ☐ 2) $2\int_0^2 (5 - x^2)dx$ ☐ 3) $\int_{-3}^2 [(5 - x^2) - (x + 1)]dx$ ☐ 4) $\int_{-3}^2 (6 - x^2 - x)dx$ ☐ 5) $\int_{-3}^2 (5 - x^2)dx$ ☐
12.71. Площадь заштрихованной части фигуры, изображенной на чертеже, задана интегралом... 	1) $\int_1^9 (1 - x^2)dx$ ☐ 2) $\int_1^9 (\sqrt{x} - 1)dx$ ☐ 3) $\int_1^9 (x^2 - 1)dx$ ☐ 4) $\int_0^9 (\sqrt{x} - 1)dx$ ☐ 5) $\int_0^9 (1 - \sqrt{x})dx$ ☐
12.72. Вычислить площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y = x^2 + 2$, осью x, осью y и прямой $x = 1$	1) $7/3$ ☐ 2) $2/3$ ☐ 3) $1/3$ ☐ 4) $4/3$ ☐

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа	
12.73. Вычислить площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y = (x - 3)^2$, осью x и осью y	1) 8/3 2) 6 3) 9 4) 10 5) 12	☐ ☐ ☐ ☐ ☐
12.74. Вычислить площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y = x^{\frac{7}{3}}$, осью y и прямой $y = 1$	1) 0,6 2) 0,7 3) 0,8 4) 0,9 5) 1,0	☐ ☐ ☐ ☐ ☐
12.75. Вычислить площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y = \cos x$, осью x и прямыми $x = \pi/6$ и $x = \pi/2$	1) 0,2 2) 0,25 3) 0,4 4) 0,5 5) 0,75	☐ ☐ ☐ ☐ ☐
12.76. Вычислить площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y = x^9$, осью x и прямой $x = 1$	1) 0,05 2) 0,1 3) 0,15 4) 0,2 5) 0,25	☐ ☐ ☐ ☐ ☐
12.77. Вычислить площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y = \sin 2x$, осью x и прямыми $x = \frac{\pi}{6}$ и $x = \frac{\pi}{2}$	1) 1 2) 0,75 3) 0,5 4) 0,25 5) 0,2	☐ ☐ ☐ ☐ ☐
12.78. Вычислить площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y = \frac{1}{x}$, осью x и прямыми $x = e$ и $x = e^5$	1) 4 2) 3 3) 2 4) 1	☐ ☐ ☐ ☐
12.79. Вычислить площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y = x^2 + 2x$, осью x и прямой $x = 3$	1) 12 2) 14 3) 15 4) 18	☐ ☐ ☐ ☐

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
12.80. Вычислить площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y = \cos 2x$, осью x, осью y и прямой $x = \frac{\pi}{12}$	1) $1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$ ☐ 2) 0,5 ☐ 3) 0,25 ☐ 4) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ☐
12.81. Если $\int_0^1 3f(x)dx = 3$ и $\int_1^4 f(x)dx = 5$, то $\int_0^4 3f(x)dx$ равен...	1) 8 ☐ 2) 2 ☐ 3) 12 ☐ 4) 18 ☐
12.82. Если $\int_0^1 f(x)dx = 3$ и $\int_1^3 f(x)dx = -5$, то $\int_0^3 3f(x)dx$ равен...	1) -2 ☐ 2) -24 ☐ 3) -8 ☐ 4) -6 ☐
12.83. В определенном интеграле $\int_0^{16} \frac{dx}{3 + \sqrt{x}}$ введена новая переменная $t = \sqrt{x}$. Тогда интеграл примет вид...	1) $\int_0^{16} \frac{t^2 dt}{3 + t}$ ☐ 2) $\int_0^4 \frac{dt}{3 + t}$ ☐ 3) $\int_0^8 \frac{dt}{3 + t}$ ☐ 4) $\int_0^8 \frac{2t dt}{3 + t}$ ☐

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
12.84. Сходящимися являются несобственные интегралы: а) $\int_1^{+\infty} x^{-\frac{8}{3}} dx$; б) $\int_1^{+\infty} x^{-\frac{3}{5}} dx$; в) $\int_1^{+\infty} x^{-\frac{5}{3}} dx$; г) $\int_1^{+\infty} x^{-\frac{3}{8}} dx$	1) а) и в) ☐ 2) б) и г) ☐ 3) а) и г) ☐ 4) б) и в) ☐ 5) Только а) ☐
12.85. Сходящимися являются несобственные интегралы: а) $\int_1^{+\infty} x^{-\frac{6}{5}} dx$; б) $\int_1^{+\infty} x^{-\frac{5}{6}} dx$; в) $\int_1^{+\infty} x^{-\frac{4}{5}} dx$; г) $\int_1^{+\infty} x^{-\frac{5}{4}} dx$	1) а) и в) ☐ 2) б) и г) ☐ 3) а) и г) ☐ 4) б) и в) ☐ 5) Только а) ☐
12.86. Сходящимися являются несобственные интегралы: а) $\int_1^{+\infty} x^{-\frac{1}{6}} dx$; б) $\int_1^{+\infty} x^{-\frac{1}{3}} dx$; в) $\int_1^{+\infty} x^{-6} dx$; г) $\int_1^{+\infty} x^{-3} dx$	1) а) и в) ☐ 2) б) и г) ☐ 3) а) и б) ☐ 4) в) и г) ☐ 5) Только а) ☐
12.87. Несобственный интеграл $\int_4^{+\infty} (x-3)^{-2} dx$ равен...	1) 1/3 ☐ 2) -1 ☐ 3) 1 ☐ 4) 1/4 ☐
12.88. Несобственный интеграл $\int_0^{+\infty} (x+1)^{-4} dx$ равен...	1) 1/3 ☐ 2) -1 ☐ 3) 1 ☐ 4) 1/4 ☐
12.89. Несобственный интеграл $\int_3^{+\infty} \frac{6}{x^2} dx$ равен...	1) 0 ☐ 2) 1 ☐ 3) 2 ☐ 4) ∞ (расходится) ☐

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
12.90. Пусть $S = \int_1^4 dx \int_{-8}^{-5} f(x, y) dy$. Тогда область интегрирования D данного интеграла имеет вид...	1) квадрата ☐ 2) треугольника ☐ 3) окружности с радиусом $\sqrt{3}$ ☐ 4) прямоугольника ☐
12.91. Пусть $S = \int_{-5}^{-4} dy \int_0^1 f(x, y) dx$. Тогда область интегрирования D данного интеграла имеет вид...	1) квадрата ☐ 2) треугольника ☐ 3) окружности с радиусом 1 ☐ 4) прямоугольника ☐
13. Числовые и степенные ряды	
13.1. Необходимое условие сходимости числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ записывается в виде...	1) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n > 0$ ☐ 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ ☐ 3) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n < 0$ ☐ 4) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$ ☐
13.2. Для исследования сходимости числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+2)!}{3^n \cdot (n+1)!}$ следует применить...	1) признак Даламбера ☐ 2) признак Лейбница ☐ 3) признак Коши ☐ 4) предельный признак сравнения ☐
13.3. Для исследования сходимости числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 + n}{n^5 + 2n^2}$ следует применить...	1) признак Даламбера ☐ 2) признак Лейбница ☐ 3) признак Коши ☐ 4) предельный признак сравнения ☐
13.4. Для исследования сходимости числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 - 8}{n^2 + 2n}$ следует применить...	1) предельный признак сравнения ☐ 2) признак Даламбера ☐ 3) признак Лейбница ☐ 4) необходимое условие ☐

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
13.5. Для исследования сходимости числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n^3 - 3n}{n^4 + 5n^2}$ следует применить...	1) предельный признак сравнения ☐ 2) признак Даламбера ☐ 3) признак Лейбница ☐ 4) признак Коши ☐
13.6. Необходимое условие сходимости не выполнено для рядов... а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2n^5 + 1}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2n^2 + 4}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2 + 1}$; г) $\sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{1}{n+3}\right)$	1) а), б) и г) ☐ 2) а) и б) ☐ 3) б) и г) ☐ 4) только б) ☐ 5) только г) ☐
13.7. Необходимое условие сходимости не выполнено для рядов... а) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{1}{n+1} + 2\right)$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 + 1}{n^3 + 4}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3 + 2}$; г) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$	1) а), б) и г) ☐ 2) а) и б) ☐ 3) а) и г) ☐ 4) только а) ☐ 5) только г) ☐
13.8. Какой ряд сходится: а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+3}{1000n+1}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7n}{n^3+1}$?	1) Только а) ☐ 2) Только б) ☐ 3) И тот и другой ☐ 4) Ни тот ни другой ☐
13.9. Какой ряд сходится: а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{n+2}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+3}{n^2+1}$?	1) Только а) ☐ 2) Только б) ☐ 3) И тот и другой ☐ 4) Ни тот ни другой ☐
13.10. Какой ряд сходится: а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{(n+1)(n+2)}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{n^2+1}$?	1) Только а) ☐ 2) Только б) ☐ 3) И тот и другой ☐ 4) Ни тот ни другой ☐

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
13.11. Какой ряд сходится: а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+3}{3^n(n+1)}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2+5}$?	1) Только а) ☐ 2) Только б) ☐ 3) И тот и другой ☐ 4) Ни тот ни другой ☐
13.12. Из рядов а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+3}{7n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+3}{2n^3-1}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n!}$ сходятся...	1) только в) ☐ 2) только а) и б) ☐ 3) ни один не сходится ☐ 4) только б) ☐ 5) только б) и в) ☐
13.13. Из рядов а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+5}{n+3}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10}{n\sqrt{n}}$ сходятся...	1) только б) ☐ 2) только в) ☐ 3) только б) и в) ☐ 4) ни один не сходится ☐ 5) только а) и в) ☐
13.14. Из рядов а) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^3}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^{n+1}}{(n+1)!}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$ сходятся...	1) только а) и б) ☐ 2) сходятся все ☐ 3) только б) ☐ 4) только б) и в) ☐ 5) только а) ☐
13.15. Из рядов а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+n}{15n^2-n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{10^n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \sqrt[3]{n}}$ сходятся...	1) только а) ☐ 2) только в) ☐ 3) только б) и в) ☐ 4) ни один не сходится ☐ 5) только б) ☐
13.16. Из рядов а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{10 \cdot n+2}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{1/2}+1}{n^2}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2+1}$; г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ сходятся...	1) ни один не сходится ☐ 2) только а) и в) ☐ 3) только а) и б) ☐ 4) только а) ☐ 5) только б) ☐

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
13.17. Укажите сходящиеся числовые ряды: а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$; г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$	1) а), б) и в) ☐ 2) а) и в) ☐ 3) а) и г) ☐ 4) только а) ☐ 5) только в) ☐
13.18. Укажите сходящиеся числовые ряды: а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^5}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^5}}$; г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[9]{n^5}}$	1) а), б) и в) ☐ 2) а) и г) ☐ 3) а) и в) ☐ 4) только а) ☐ 5) только в) ☐
13.19. Сходящимися среди числовых рядов являются... а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 \cdot 3^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{3n+1}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{3^n}$; г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n+1}$	1) а), б) и в) ☐ 2) а) и г) ☐ 3) а) и в) ☐ 4) только а) ☐ 5) только в) ☐
13.20. Знакопередающийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4n-1} \dots$	1) абсолютно сходится ☐ 2) условно сходится ☐ 3) расходится ☐
13.21. Знакопередающийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \dots$	1) абсолютно сходится ☐ 2) условно сходится ☐ 3) расходится ☐
13.22. Знакопередающийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot 5^n \dots$	1) абсолютно сходится ☐ 2) условно сходится ☐ 3) расходится ☐

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
13.23. Установить соответствие между видами сходимости и знакопеременными рядами: А) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n!}$; Б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+7}$; В) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n 2^n$. а) абсолютно сходится; б) условно сходится; в) расходится	1) А – а; Б – б; В – в ☐ 2) А – б; Б – а; В – в ☐ 3) А – в; Б – б; В – а ☐ 4) А – а; Б – в; В – б ☐ 5) А – б; Б – в; В – а ☐
13.24. Установить соответствие между видами сходимости и знакопеременными рядами: А) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot 7^n$; Б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n-2}$; В) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1)!}$. а) абсолютно сходится; б) условно сходится; в) расходится	1) А – а; Б – б; В – в ☐ 2) А – б; Б – а; В – в ☐ 3) А – в; Б – а; В – б ☐ 4) А – а; Б – в; В – б ☐ 5) А – в; Б – б; В – а ☐
13.25. Степенным рядом называется ряд вида...	1) $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$ ☐ 2) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{(x - x_0)}$ ☐ 3) $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)$ ☐ 4) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{(x - x_0)^n}$ ☐
13.26. Ряд Тэйлора функции $f(x)$ имеет вид...	1) $\sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(x_0) \cdot (x - x_0)^n$ ☐ 2) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$ ☐ 3) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n} (x - x_0)^n$ ☐ 4) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{f^{(n)}(x_0)} (x - x_0)^n$ ☐

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
13.27. Найти радиус сходимости степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+4)x^n}{3^n(n+7)}$	1) 1/3 ☐ 2) 3 ☐ 3) 6 ☐ 4) 9 ☐
13.28. Найти радиус сходимости степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(7n+2)}$	1) 1/7 ☐ 2) 1 ☐ 3) 7 ☐ 4) 9 ☐
13.29. Найти радиус сходимости степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(5n+11)}$	1) 1 ☐ 2) 1/5 ☐ 3) 1/16 ☐ 4) 5 ☐
13.30. Найти радиус сходимости степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{8^n(n+1)}$	1) 8 ☐ 2) 1 ☐ 3) 0,125 ☐ 4) 0,25 ☐
13.31. Радиус сходимости степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{4^n}$ равен...	1) ∞ ☐ 2) 16 ☐ 3) 4 ☐ 4) 1 ☐
13.32. Радиус сходимости степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{6n^3+5}$ равен...	1) 1 ☐ 2) 6 ☐ 3) ∞ ☐ 4) 1/6 ☐
13.33. Радиус сходимости степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{3^n}$ равен...	1) 1 ☐ 2) 1/3 ☐ 3) ∞ ☐ 4) 3 ☐

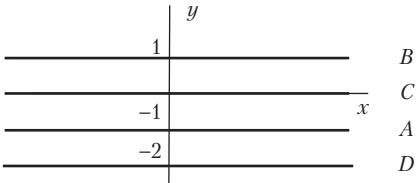
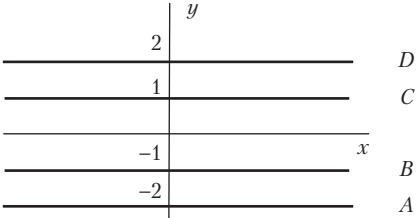
Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа	
13.34. Радиус сходимости степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{7}{3n^4 + 2n} x^n$ равен...	1) ∞	☐
	2) 1	☐
	3) 7	☐
	4) $1/3$	☐
13.35. Радиус сходимости степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5}{7^n} x^n$ равен...	1) 5	☐
	2) ∞	☐
	3) $5/7$	☐
	4) 7	☐
13.36. Радиус сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n x^n}{2n+1}$ равен...	1) 1	☐
	2) 3	☐
	3) $\frac{1}{3}$	☐
	4) $\frac{3}{2}$	☐
13.37. Радиус сходимости степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ равен 10. Тогда интервал сходимости имеет вид...	1) $(-5; 5)$	☐
	2) $(-10; 10)$	☐
	3) $(0; 10)$	☐
	4) $(-10; 0)$	☐
13.38. Радиус сходимости степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ равен 9. Тогда интервал сходимости имеет вид...	1) $(0; 9)$	☐
	2) $(-9; 0)$	☐
	3) $(-9; 9)$	☐
	4) $(-4,5; 4,5)$	☐
13.39. Интервал сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x-3}{3} \right)^n$ имеет вид $(a; b)$. Тогда $a + b$ равно...	1) 12	☐
	2) 9	☐
	3) 6	☐
	4) 3	☐
13.40. Интервал сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n \cdot 2^n}$ имеет вид $(a; b)$. Тогда $a + b$ равно...	1) 2	☐
	2) 4	☐
	3) 8	☐
	4) 16	☐

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа	
13.41. Интервал сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^n$ имеет вид (a, b) . Тогда $a + b$ равно...	1) 0 2) 1 3) 2 4) 4	☐ ☐ ☐ ☐
13.42. Количество целых чисел, принадлежащих интервалу сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n x^n}{8^n \sqrt[3]{8n^2 + 1}}$, равно...	1) 3 2) 4 3) 5 4) 6	☐ ☐ ☐ ☐
13.43. Количество целых чисел, принадлежащих интервалу сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n x^n}{9^n \sqrt[3]{9n^2 + 1}}$, равно...	1) 7 2) 8 3) 9 4) 10	☐ ☐ ☐ ☐
13.44. Количество целых чисел, принадлежащих интервалу сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n x^n}{5^n \sqrt[5]{2n^2 + 1}}$, равно...	1) 0 2) 1 3) 2 4) 3	☐ ☐ ☐ ☐
13.45. Первый отличный от нуля коэффициент разложения функции $y = \sin 2x$ в ряд Тейлора по степеням x равен...	1) 1/2 2) 1 3) 2 4) 4	☐ ☐ ☐ ☐
13.46. Первый отличный от нуля коэффициент разложения функции $y = 3 \sin x$ в ряд Тейлора по степеням x равен...	1) 1 2) 2 3) 3 4) 6	☐ ☐ ☐ ☐
13.47. Если $f(x) = x^3 - 1$, то коэффициент a_4 разложения данной функции в ряд Тейлора по степеням $(x - 1)$ равен...	1) 1 2) 3 3) 0,25 4) 0	☐ ☐ ☐ ☐

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа	
13.48. Если $f(x) = 5 - 3x^3$, то коэффициент a_6 разложения данной функции в ряд Тэйлора по степеням $(x - 2)$ равен...	1) 0	☐
	2) 9	☐
	3) 10	☐
	4) 18	☐
13.49. Если $f(x) = x^3 - 3$, то коэффициент a_4 разложения данной функции в ряд Тэйлора по степеням $(x - 3)$ равен...	1) 3	☐
	2) 0,25	☐
	3) 0	☐
	4) 1	☐
13.50. Если $f(x) = 5 + x^3$, то коэффициент a_5 разложения данной функции в ряд Тэйлора по степеням $(x + 2)$ равен...	1) 0	☐
	2) 5	☐
	3) 6	☐
	4) 4	☐
13.51. Функция $f(x) = x^5 + 2x^2 + x - 10$ разложена в ряд Тэйлора по степеням $(x - 1)$. Тогда коэффициент при $(x - 1)^2$ равен...	1) 24	☐
	2) 0	☐
	3) -6	☐
	4) 12	☐
14. Дифференциальные уравнения		
14.1. Даны уравнения: а) $xdy = ydx$; б) $x = y'' \ln\left(\frac{y}{x}\right)$; в) $1 + y^2 = \frac{y'}{x}$; г) $y - 9x + 20y = 0$. Какие из них являются дифференциальными уравнениями первого порядка?	1) а) и б)	☐
	2) а) и в)	☐
	3) а) и г)	☐
	4) Только г)	☐
	5) Только в)	☐
14.2. Указать дифференциальные уравнения первого порядка: а) $2x + 6 = \frac{y''}{y'}$; б) $2y\sqrt{x} = x$; в) $\frac{x}{y'} = \ln y$; г) $\frac{dy}{y} = \sqrt{x}dx$	1) а) и б)	☐
	2) б) и г)	☐
	3) в) и г)	☐
	4) Только г)	☐
	5) Только в)	☐

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
14.3. Указать дифференциальные уравнения первого порядка: а) $(2x+6)y = 2$; б) $\frac{dy}{x^2} = ydx$; в) $y'y'' - x = \ln 2$; г) $y' + x = y$.	1) а) и б) ☐ 2) б) и г) ☐ 3) в) и г) ☐ 4) Только г) ☐ 5) Только в) ☐
14.4. Даны уравнения: а) $\frac{y''}{y'} = e^{3y}$; б) $(2-x)y^2 = y$; в) $x\sqrt{1+y^2}dx + y\sqrt{1+x^2}dy = 0$; г) $(x^2-9) = 6y'$. Какие из них являются дифференциальными уравнениями первого порядка?	1) а) и б) ☐ 2) б) и г) ☐ 3) в) и г) ☐ 4) Только б) ☐ 5) Только г) ☐
14.5. Каков порядок дифференциального уравнения $(y')^4 - (y''')^4 + 2y = 0$?	1) Первый ☐ 2) Второй ☐ 3) Третий ☐ 4) Четвертый ☐
14.6. Каков порядок дифференциального уравнения $y^{IV} - y^{(6)} + y' = 0$?	1) Первый ☐ 2) Второй ☐ 3) Четвертый ☐ 4) Шестой ☐
14.7. Как называется дифференциальное уравнение $y' - 2\frac{y}{x^2} = 2x^3$?	1) С разделяющимися переменными ☐ 2) Однородное ☐ 3) Линейное первого порядка ☐ 4) Линейное второго порядка ☐
14.8. Как называется дифференциальное уравнение $(x^4+5)y' + xy^3 = 0$?	1) С разделяющимися переменными ☐ 2) Однородное ☐ 3) Линейное первого порядка ☐ 4) Линейное второго порядка ☐

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
14.9. Как называется дифференциальное уравнение $y' = \frac{x^2 - xy}{y^2 + 5xy} ?$	1) С разделяющимися переменными ☐ 2) Однородное ☐ 3) Линейное первого порядка ☐ 4) Линейное второго порядка ☐
14.10. Как называется дифференциальное уравнение $y'' + 4y' + 13y = 5x?$	1) С разделяющимися переменными ☐ 2) Однородное ☐ 3) Линейное первого порядка ☐ 4) Линейное второго порядка ☐
14.11. Нахождение частных решений дифференциальных уравнений по начальным условиям называется решением задачи...	1) Бернулли ☐ 2) Коши ☐ 3) Лагранжа ☐ 4) Лейбница ☐
14.12. Дифференциальное уравнение $y'' - y' - 3y = 0$ является...	1) уравнением Бернулли ☐ 2) уравнением с разделяющимися коэффициентами ☐ 3) линейным неоднородным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами ☐ 4) линейным однородным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами ☐
14.13. Дифференциальное уравнение $y' + xy = x^5$ является...	1) уравнением Бернулли ☐ 2) уравнением с разделяющимися коэффициентами ☐ 3) линейным неоднородным уравнением первого порядка ☐ 4) однородным дифференциальным уравнением ☐

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
14.14. Среди перечисленных дифференциальных уравнений уравнениями второго порядка являются... а) $x^2y' + 2y - 15x + 3 = 0$; б) $xy \frac{d^2y}{dx^2} + y \frac{dy}{dx} + 3y = 7x$; в) $y \frac{d^2y}{dx^2} + 4y \frac{dy}{dx} + 12x = 0$; г) $xy \frac{\partial z}{\partial x} + 5y^2 \frac{\partial z}{\partial y} = 0$	1) а) и б) ☐ 2) б) и г) ☐ 3) в) и г) ☐ 4) б) и в) ☐ 5) только б) ☐
14.15. Дано дифференциальное уравнение $(x-1)y' = y-1$ при $y(2) = 1$. Тогда интегральная кривая, которая определяет решение этого уравнения, имеет вид... 	1) <i>B</i> ☐ 2) <i>D</i> ☐ 3) <i>A</i> ☐ 4) <i>C</i> ☐
14.16. Дано дифференциальное уравнение $(x+2)y' = y+2$ при $y(-1) = -2$. Тогда интегральная кривая, которая определяет решение этого уравнения, имеет вид... 	1) <i>A</i> ☐ 2) <i>B</i> ☐ 3) <i>C</i> ☐ 4) <i>D</i> ☐

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
14.17. Общий интеграл дифференциального уравнения $\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = x^2 dx$ имеет вид...	1) $\arccos y = \frac{x^3}{3} + C$ ☐ 2) $\arctg y = \frac{x^3}{3} + C$ ☐ 3) $\arcsin y = 2x + C$ ☐ 4) $\arcsin y = \frac{x^3}{3} + C$ ☐
14.18. Общий интеграл дифференциального уравнения $y^2 dy = \frac{dx}{\sqrt{x}}$ имеет вид...	1) $y^3 = \sqrt{x} + C$ ☐ 2) $2y = \ln x + C$ ☐ 3) $\frac{y^3}{3} = 2\sqrt{x} + C$ ☐ 4) $y = \sqrt{x} + C$ ☐
14.19. Общий интеграл дифференциального уравнения $\frac{dy}{y^2} = x dx$ имеет вид...	1) $-\frac{1}{y} = \frac{x^2}{2} + C$ ☐ 2) $y = \frac{x^2}{2} + C$ ☐ 3) $\frac{1}{y} = \frac{x^2}{2} + C$ ☐ 4) $-\frac{1}{y} = x^2 + C$ ☐
14.20. Установить соответствие между дифференциальным уравнением и его общим решением: А) $y' - 3x^2 y = 0$; Б) $y' - 6x^5 y = 0$; В) $y' = 3xy$. а) $\ln y = x^2 + C$; б) $\ln y = \frac{3}{2}x^2 + C$; в) $\ln y = x^3 + C$; г) $\ln y = x^6 + C$.	1) А – б; Б – г; В – а ☐ 2) А – а; Б – г; В – в ☐ 3) А – б; Б – в; В – а ☐ 4) А – в; Б – а; В – б ☐ 5) А – в; Б – г; В – б ☐

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
14.21. Установить соответствие между дифференциальным уравнением и его общим решением: А) $y' - 14x^{13}y = 0$; Б) $y' - 7x^6y = 0$; В) $y' = 14xy$. а) $\ln y = x^{14} + C$; б) $\ln y = 7x^2 + C$; в) $\ln y = x^7 + C$; г) $\ln y = 14x^2 + C$	1) А – б; Б – г; В – а ☐ 2) А – а; Б – г; В – в ☐ 3) А – а; Б – в; В – б ☐ 4) А – в; Б – а; В – б ☐ 5) А – а; Б – г; В – б ☐
14.22. Каково общее решение дифференциального уравнения $y' - 3x^2 = 0$?	1) $y = x^2 + C$ ☐ 2) $y = x^3 + C$ ☐ 3) $y = Cx^3$ ☐ 4) $y = Cx^2$ ☐
14.23. Каково общее решение дифференциального уравнения $y' - \sin x = 0$?	1) $y = C \cos x$ ☐ 2) $y = C \sin x$ ☐ 3) $y = \cos x + C$ ☐ 4) $y = -\cos x + C$ ☐
14.24. Каково общее решение дифференциального уравнения $y' - \cos x = 0$?	1) $y = C \cos x$ ☐ 2) $y = C \sin x$ ☐ 3) $y = \sin x + C$ ☐ 4) $y = -\sin x + C$ ☐
14.25. Каково общее решение дифференциального уравнения $x^2y' = 1$?	1) $y = -2x^{-3} + C$ ☐ 2) $y = -x^{-1} + C$ ☐ 3) $y = 2\ln x + C$ ☐ 4) $y = \ln Cx^2$ ☐
14.26. Каково общее решение дифференциального уравнения $(x^2 + 16)y' = 1$?	1) $y = \arctg 0,25x + C$ ☐ 2) $y = 0,25\arctg 0,25x + C$ ☐ 3) $y = 4\ln x + C$ ☐ 4) $y = \ln Cx$ ☐
14.27. Каково общее решение дифференциального уравнения $\cos^2 2x \cdot y' = 2$?	1) $y = \arctg 2x + C$ ☐ 2) $y = 0,5\operatorname{tg} 2x + C$ ☐ 3) $y = 2\operatorname{tg} 2x + C$ ☐ 4) $y = \operatorname{tg} 2x + C$ ☐

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
14.28. Каково общее решение дифференциального уравнения $2\sqrt{x} \cdot y' = 1$?	1) $y = x^{0,5} + C$ ☐ 2) $y = 0,5 \ln x + C$ ☐ 3) $y = x^2 + C$ ☐ 4) $y = -x^{0,5} + C$ ☐
14.29. Общее решение дифференциального уравнения $xy' - 2y = x^4$ имеет вид...	1) $y = x^2 + C$ ☐ 2) $y = x^2 \cdot C$ ☐ 3) $y = x^2 \cdot C + \frac{1}{2}x^4$ ☐ 4) $y = \frac{1}{2}x^4 + C$ ☐
14.30. Частное решение дифференциального уравнения $(3 + e^x)y' = ye^x$ при $y(0) = 8$ имеет вид...	1) $3 + 5e^x$ ☐ 2) $6 + 2e^x$ ☐ 3) $6 + e^{2x}$ ☐ 4) $9 - e^x$ ☐
14.31. Частное решение дифференциального уравнения $y' = y \cdot \operatorname{tg} x$ при $y(0) = 2$ имеет вид...	1) $-2\cos x$ ☐ 2) $2\sin^2 x$ ☐ 3) $\frac{2}{\cos x}$ ☐ 4) $2\operatorname{ctg} x$ ☐ 5) $-\cos 2x$ ☐
14.32. Частное решение дифференциального уравнения $(1+x^3) \cdot y' = 3x^2y$ при $y(1) = 4$ имеет вид...	1) $3x^2 + 1$ ☐ 2) $4x$ ☐ 3) $5x^3 - 1$ ☐ 4) $2x^3 + 2$ ☐ 5) $4x^2$ ☐
14.33. Частное решение дифференциального уравнения $y' \cdot \operatorname{tg} x = y$ при $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ имеет вид...	1) $\sin x + 1$ ☐ 2) $\sin x$ ☐ 3) $-\sin x$ ☐ 4) $\cos x$ ☐ 5) $\cos x + 1$ ☐

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
14.34. Частное решение дифференциального уравнения $x^2y' - y^2 = 0$ при $y(1) = 1$ имеет вид...	1) $2x - 1$ ☐ 2) $x + 3$ ☐ 3) $3x - 2$ ☐ 4) $x - 1$ ☐ 5) x ☐
14.35. Общим решением дифференциального уравнения $y'' - \frac{y'}{x} = 0$ является...	1) $C_1x^{2+} + C_2$ ☐ 2) $C_1x^{2+} + C_2x + 1$ ☐ 3) $x^2/4 + C_1x + C_2$ ☐ 4) $C_1x^3 + C_2$ ☐ 5) $3x^2 + C$ ☐
14.36. Общим решением дифференциального уравнения $yy'' - (y')^2 = 0$ является...	1) $y = C_1 \ln x + C_2$ ☐ 2) $y = \frac{C_1}{x + C_1}$ ☐ 3) $y = C_2 e^{C_1 x}$ ☐ 4) $y = 0$ ☐ 5) $y = C_1 e^x + C_2$ ☐
14.37. Общим решением дифференциального уравнения $y'' = \frac{1}{x^2}$ является...	1) $-\frac{1}{x^2} + \frac{C_1}{x} + C_2$ ☐ 2) $\frac{1}{x} + C_1x + C_2$ ☐ 3) $-\ln x + C_1x^2 + C_2x$ ☐ 4) $-\frac{1}{x} + C_1x + C_2$ ☐ 5) $-\ln x + C_1x + C_2$ ☐
14.38. Общим решением дифференциального уравнения $y'' = 4\cos(2x)$ является...	1) $C_1 \cdot \sin(2x) + C_2$ ☐ 2) $-\cos(2x) + C_1x + C_2$ ☐ 3) $C_1 \cdot \cos(2x) + C_2$ ☐ 4) $4 \cdot \cos(2x) + C_1x + C_2$ ☐ 5) $-2 \cdot \cos(2x) + C_1x + C_2$ ☐

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
14.39. Общим решением дифференциального уравнения $xy'' - 2y' = 0$ является...	1) $C_1x^3 + C_2$ ☐ 2) $C_1x^2 + C_2$ ☐ 3) $C_1x^3 + C_2x$ ☐ 4) $C_1\frac{x}{2} + 2C_2$ ☐ 5) $2x^2 + C_1 + C_2$ ☐
14.40. Общее решение дифференциального уравнения $y''' = \cos 5x$ имеет вид...	1) $y = -\frac{1}{125}\sin 5x + C$ ☐ 2) $y = -\sin 5x + \frac{C_1}{2}x^2 + C_2x + C_3$ ☐ 3) $y = \frac{1}{125}\sin 5x + \frac{C_1}{2}x^2 + C_2x + C_3$ ☐ 4) $y = -\frac{1}{125}\sin 5x + \frac{C_1}{2}x^2 + C_2x + C_3$ ☐
14.41. Общее решение дифференциального уравнения $y''' = \sin 3x$ имеет вид...	1) $y = \frac{1}{27}\cos 3x + \frac{C_1}{2}x^2 + C_2x + C_3$ ☐ 2) $y = \cos 3x + \frac{C_1}{2}x^2 + C_2x + C_3$ ☐ 3) $y = \frac{1}{27}\cos 3x + C$ ☐ 4) $y = -\frac{1}{27}\cos 3x + \frac{C_1}{2}x^2 + C_2x + C_3$ ☐

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
14.42. Дано дифференциальное уравнение $y' = -2$. Тогда функция $y = 2 - kx$ является его решением при k , равном...	1) 1 ☐ 2) -1 ☐ 3) 2 ☐ 4) -2 ☐
14.43. Дано дифференциальное уравнение $y' = (2k - 2)x^3$. Тогда функция $y = x^4 - 3$ является его решением при k , равном...	1) 2 ☐ 2) 3 ☐ 3) 1 ☐ 4) 0 ☐
14.44. Дано дифференциальное уравнение $y' = (k + 1)x^2$. Тогда функция $y = x^3$ является его решением при k , равном...	1) 3 ☐ 2) 1 ☐ 3) 0 ☐ 4) 2 ☐
14.45. Если $y(x)$ — решение уравнения $y' = \frac{y-1}{x}$, удовлетворяющее условию $y(2) = 3$, тогда $y(1) = \dots$	1) 3 ☐ 2) 1 ☐ 3) 0 ☐ 4) 2 ☐
14.46. Если $y(x)$ — решение уравнения $y' = \cos 2x \cdot y$, удовлетворяющее условию $y(0) = 1$, тогда $y(3\pi) = \dots$	1) 3 ☐ 2) 1 ☐ 3) 0 ☐ 4) 2 ☐
14.47. Функция $y = \frac{a}{x^3}$ будет частным решением задачи Коши $y' + b\frac{y}{x} = 0$; $y(-2) = 2$ при a и b , равных...	1) $a = -16$; $b = 3$ ☐ 2) $a = -8$; $b = 3$ ☐ 3) $a = -16$; $b = 1$ ☐ 4) $a = -8$; $b = 1$ ☐

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
14.48. Общее решение дифференциального уравнения $y''' = 12x - 3$ имеет вид...	1) $y = \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{C_1}{2}x^2 + C_2x + C_3$ ☐ 2) $y = \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{2}x^3 + C$ ☐ 3) $y = \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{6}x^3 + \frac{C_1}{2}x^2 + C_2x + C_3$ ☐ 4) $y = x^4 - x^3 + C_1x^2 + C_2x + C_3$ ☐
14.49. Порядок дифференциального уравнения $y'' + \frac{2x}{x^2 + 4}y' = x$ можно понизить заменой...	1) $y' = z(x)$ ☐ 2) $y' = z(y)$ ☐ 3) $y'' = z(x)$ ☐ 4) $y'' = z(y)$ ☐
14.50. Дано дифференциальное уравнение $y'' + 5y' + 6y = 0$. Тогда соответствующее ему характеристическое уравнение имеет вид...	1) $1 + 5k + 6k^2 = 0$ ☐ 2) $k^2 - 5k - 6 = 0$ ☐ 3) $k^2 - 5k + 6 = 0$ ☐ 4) $k^2 + 5k + 6 = 0$ ☐
14.51. Однородному дифференциальному уравнению второго порядка $3y'' + 5y' + 2y = 0$ соответствует характеристическое уравнение...	1) $\lambda^2 + \lambda + 1 = 0$ ☐ 2) $3\lambda^2 - 5\lambda + 2 = 0$ ☐ 3) $3\lambda^2 + 5\lambda + 2 = 0$ ☐ 4) $3\lambda^2 - 5\lambda - 2 = 0$ ☐
14.52. Общее решение линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с различными действительными корнями характеристического уравнения $\lambda_1 = 2$ и $\lambda_2 = -2$ имеет вид...	1) $y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$ ☐ 2) $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x}$ ☐ 3) $y = C_1 x + C_2 e^{-2x}$ ☐ 4) $y = (C_1 + C_2 x)e^{2x}$ ☐

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
14.53. Общее решение линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с различными действительными корнями характеристического уравнения $\lambda_1 = 6$ и $\lambda_2 = -1$ имеет вид...	1) $y = C_1 e^x + C_2 e^{-6x}$ ☐ 2) $y = C_1 \cos x + C_2 \sin 6x$ ☐ 3) $y = C_1 e^{4x} + C_2$ ☐ 4) $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{6x}$ ☐
14.54. Общее решение линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с различными действительными корнями характеристического уравнения $\lambda_1 = 1$ и $\lambda_2 = 3$ имеет вид...	1) $y = C_1 e^x + C_2 e^{3x}$ ☐ 2) $y = C_1 e^x + C_2 x e^{3x}$ ☐ 3) $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^x$ ☐ 4) $y = C_1 \cos 5x + C_2 \sin 5x$ ☐
14.55. Общее решение линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с равными действительными корнями характеристического уравнения $\lambda_{1,2} = -1$ имеет вид...	1) $y = (C_1 + C_2 x) e^{-x}$ ☐ 2) $y = (C_1 + C_2 x) e^x$ ☐ 3) $y = C_1 + C_2 x e^{3x}$ ☐ 4) $y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$ ☐
14.56. Каково общее решение дифференциального уравнения $y'' + 3y' + 2y = 0$?	1) $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^x$ ☐ 2) $y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-x}$ ☐ 3) $y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^x$ ☐ 4) $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x}$ ☐
14.57. Каково общее решение дифференциального уравнения $y'' + 2y' + 2y = 0$?	1) $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$ ☐ 2) $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x}$ ☐ 3) $y = e^{-x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x)$ ☐ 4) $y = e^x(C_1 \cos x + C_2 \sin x)$ ☐
14.58. Каково общее решение дифференциального уравнения $y'' + 6y' + 25y = 0$?	1) $y = e^{-3x} \times (C_1 \cos 4x + C_2 \sin 4x)$ ☐ 2) $y = e^{3x} \times (C_1 \cos 4x + C_2 \sin 4x)$ ☐ 3) $y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-3x}$ ☐ 4) $y = (C_1 + C_2 x) e^{-3x}$ ☐

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
14.59. Каково общее решение дифференциального уравнения $y'' - 6y' + 9y = 0$?	1) $y = (C_1 + C_2 x)e^{-3x}$ ☐ 2) $y = (C_1 + C_2 x)e^{3x}$ ☐ 3) $y = e^{-3x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x)$ ☐ 4) $y = e^{3x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x)$ ☐
14.60. Каково общее решение дифференциального уравнения $y'' + 4y' + 8y = 0$?	1) $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x}$ ☐ 2) $y = (C_1 + C_2 x)e^{-2x}$ ☐ 3) $y = e^{-2x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$ ☐ 4) $y = e^{2x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$ ☐
14.61. Каково общее решение дифференциального уравнения $y'' - 2y' - 35y = 0$?	1) $y = C_1 e^{7x} + C_2 e^{-5x}$ ☐ 2) $y = (C_1 + C_2 x)e^x$ ☐ 3) $y = e^x(C_1 \cos 5x + C_2 \sin 5x)$ ☐ 4) $y = e^x(C_1 \cos 7x + C_2 \sin 7x)$ ☐
14.62. Каково общее решение дифференциального уравнения $y'' + y' - 30y = 0$?	1) $y = e^{-x}(C_1 \cos 5x + C_2 \sin 5x)$ ☐ 2) $y = e^{-x}(C_1 \cos 6x + C_2 \sin 6x)$ ☐ 3) $y = C_1 e^{6x} + C_2 e^{-5x}$ ☐ 4) $y = C_1 e^{5x} + C_2 e^{-6x}$ ☐
14.63. Общим решением дифференциального уравнения $y'' - 12y' + 40y = 0$ является...	1) $y = e^{4x}(C_1 \cos 4x + C_2 \sin 4x)$ ☐ 2) $y = C_1 e^{5x} + C_2 e^{-2x}$ ☐ 3) $y = C_1 e^{5x} + C_2 e^x$ ☐ 4) $y = e^{6x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$ ☐
14.64. Общим решением дифференциального уравнения $y'' - 16y' + 55y = 0$ является...	1) $y = C_1 \cos 5x + C_2 \sin 5x$ ☐ 2) $y = C_1 e^{6x} + C_2 e^{12x}$ ☐ 3) $y = C_1 e^{5x} + C_2 e^{11x}$ ☐ 4) $y = C_1 e^{-5x} + C_2 e^{-11x}$ ☐

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
14.65. Общим решением дифференциального уравнения $y'' - 13y' + 42y = 0$ является...	1) $y = C_1 e^{-11x} + C_2 e^{-2x}$ ☐ 2) $y = C_1 e^{6x} + C_2 e^{7x}$ ☐ 3) $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{11x}$ ☐ 4) $y = C_1 \cos 7x + C_2 \sin 7x$ ☐
14.66. Общим решением дифференциального уравнения $y'' - 19y' + 90y = 0$ является...	1) $y = C_1 e^{10x} + C_2 e^{9x}$ ☐ 2) $y = C_1 e^{8x} + C_2 e^{11x}$ ☐ 3) $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{7x}$ ☐ 4) $y = C_1 \cos 9x + C_2 \sin 9x$ ☐
14.67. Общим решением дифференциального уравнения $y'' - 16y' + 65y = 0$ является...	1) $y = C_1 e^{5x} + C_2 e^{11x}$ ☐ 2) $y = C_1 e^{-5x} + C_2 e^{-11x}$ ☐ 3) $y = e^{8x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x)$ ☐ 4) $y = e^{8x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$ ☐
14.68. Частное решение $y_{\text{чн}}$ неоднородного линейного дифференциального уравнения $y'' - 2y' - 35y = e^{4x} \cdot x$ нужно искать в виде...	1) $y_{\text{чн}} = e^{4x} \cdot B_0 x$ ☐ 2) $y_{\text{чн}} = e^{-4x} \cdot B_0 x$ ☐ 3) $y_{\text{чн}} = e^{4x} \cdot x(B_0 x + B_1)$ ☐ 4) $y_{\text{чн}} = e^{4x} \cdot (B_0 x + B_1)$ ☐
14.69. Частное решение $y_{\text{чн}}$ неоднородного линейного дифференциального уравнения $y'' - 2y' - 35y = e^{7x} \cdot x$ нужно искать в виде...	1) $y_{\text{чн}} = e^{7x} \cdot B_0 x$ ☐ 2) $y_{\text{чн}} = e^{-7x} \cdot B_0 x$ ☐ 3) $y_{\text{чн}} = e^{7x} \cdot x(B_0 x + B_1)$ ☐ 4) $y_{\text{чн}} = e^{7x} \cdot (B_0 x + B_1)$ ☐
14.70. Частное решение $y_{\text{чн}}$ неоднородного линейного дифференциального уравнения $y'' - 6y' + 9y = e^{3x} \cdot x$ нужно искать в виде...	1) $y_{\text{чн}} = e^{3x} \cdot x(B_0 x + B_1)$ ☐ 2) $y_{\text{чн}} = e^{3x} \cdot (B_0 x + B_1)$ ☐ 3) $y_{\text{чн}} = e^{3x} \cdot x^2(B_0 x + B_1)$ ☐ 4) $y_{\text{чн}} = e^{3x} \cdot B_0 x$ ☐

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
14.71. Частное решение $y_{\text{чн}}$ неоднородного линейного дифференциального уравнения $y'' - 6y' + 9y = e^{2x} \cdot x$ нужно искать в виде...	1) $y_{\text{чн}} = e^{2x} \cdot x(B_0x + B_1)$ ☐ 2) $y_{\text{чн}} = e^{2x} \cdot (B_0x + B_1)$ ☐ 3) $y_{\text{чн}} = e^{2x} \cdot x^2(B_0x + B_1)$ ☐ 4) $y_{\text{чн}} = e^{2x} \cdot B_0x$ ☐
14.72. Установить общий вид частного решения дифференциального уравнения $y'' + 7y' + 3y = 7 + 3x$	1) $y(x)_{\text{чн}} = C_0x$ ☐ 2) $y(x)_{\text{чн}} = C_0 + C_1x^2$ ☐ 3) $y(x)_{\text{чн}} = C_0 + C_1x$ ☐ 4) $y(x)_{\text{чн}} = (C_0 + C_1x)x$ ☐ 5) $y(x)_{\text{чн}} = (C_0 + C_1x)x^2$ ☐
14.73. Установить общий вид частного решения дифференциального уравнения $y'' + 7y' = 7 + 3x$	1) $y(x)_{\text{чн}} = C_0x$ ☐ 2) $y(x)_{\text{чн}} = C_0 + C_1x^2$ ☐ 3) $y(x)_{\text{чн}} = C_0 + C_1x$ ☐ 4) $y(x)_{\text{чн}} = (C_0 + C_1x)x$ ☐ 5) $y(x)_{\text{чн}} = (C_0 + C_1x)x^2$ ☐
14.74. Установить общий вид частного решения дифференциального уравнения $y'' - 2 = 5 + 3x$	1) $y(x) = C_0x$ ☐ 2) $y(x)_{\text{чн}} = C_0 + C_1x^2$ ☐ 3) $y(x)_{\text{чн}} = C_0 + C_1x$ ☐ 4) $y(x)_{\text{чн}} = (C_0 + C_1x)x$ ☐ 5) $y(x)_{\text{чн}} = (C_0 + C_1x)x^2$ ☐
14.75. Дано дифференциальное уравнение $y'' - 6y' + 5y = 4e^{5x}$. Общим видом частного решения данного уравнения является...	1) $y(x)_{\text{чн}} = C_0 \cos 5x + C_1 \sin 5x$ ☐ 2) $y(x)_{\text{чн}} = C_0 + C_1x$ ☐ 3) $y(x)_{\text{чн}} = C_0xe^{5x}$ ☐ 4) $y(x)_{\text{чн}} = C_0e^{5x}$ ☐

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
14.76. Установить соответствие между дифференциальным уравнением и общим видом его частного решения: А) $y'' + 5y' + 8y = 5 + 8x$; Б) $y'' + 5y' = 5 + 8x$; В) $y'' - 2 = 3 + 8x$. а) $y(x)_{\text{чн}} = (C_0 + C_1x)x^2$; б) $y(x)_{\text{чн}} = (C_0 + C_1x)x$; в) $y(x)_{\text{чн}} = C_0x$; г) $y(x)_{\text{чн}} = C_0 + C_1x$; д) $y(x)_{\text{чн}} = C_0 + C_1x^2$.	1) А — а; Б — б; В — г ☐ 2) А — д; Б — б; В — в ☐ 3) А — г; Б — в; В — а ☐ 4) А — г; Б — б; В — а ☐ 5) А — а; Б — г; В — в ☐
14.77. Установить соответствие между дифференциальным уравнением и общим видом его частного решения: А) $y'' + 7y' + 9y = 7 + 9x$; Б) $y'' + 7y' = 7 + 9x$; В) $y'' - 2 = 5 + 9x$. а) $y(x)_{\text{чн}} = C_0 + C_1x^2$; б) $y(x)_{\text{чн}} = C_0 + C_1x$; в) $y(x)_{\text{чн}} = (C_0 + C_1x)x^2$; г) $y(x)_{\text{чн}} = C_0x$; д) $y(x)_{\text{чн}} = (C_0 + C_1x)x$	1) А — б; Б — а; В — г ☐ 2) А — д; Б — б; В — в ☐ 3) А — б; Б — д; В — в ☐ 4) А — г; Б — б; В — а ☐ 5) А — а; Б — г; В — в ☐
14.78. Функция $y = (C_1 + C_2x)e^x$ является общим решением линейного однородного дифференциального уравнения. Тогда его характеристическое уравнение имеет вид...	1) $k^2 - 2k + 1 = 0$ ☐ 2) $k^2 + 2k + 1 = 0$ ☐ 3) $k^2 - 1 = 0$ ☐ 4) $k^2 + k = 0$ ☐

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
14.79. Установить соответствие между дифференциальным уравнением и его характеристическим уравнением: А) $y^{IV} - y''' + y'' = 0$; Б) $y^{IV} - y''' + y'' + y' = 0$; В) $y^{IV} - y''' + y' + y = 0$. а) $\lambda^3 - \lambda^2 + \lambda = 0$; б) $\lambda^4 - \lambda^3 + \lambda^2 + \lambda = 0$; в) $\lambda^4 - \lambda^3 + \lambda + 1 = 0$; г) $\lambda^3 - \lambda^2 + \lambda + 1 = 0$; д) $\lambda^4 - \lambda^3 + \lambda^2 = 0$	1) А – а; Б – б; В – г ☐ 2) А – д; Б – б; В – в ☐ 3) А – б; Б – в; В – г ☐ 4) А – д; Б – в; В – б ☐ 5) А – а; Б – г; В – в ☐
14.80. Установить соответствие между дифференциальным уравнением и его характеристическим уравнением: А) $y^{IV} - 2y''' + y'' + y = 0$; Б) $y^{IV} + 2y'' + y' + y = 0$; В) $y''' + 2y'' + y' + y = 0$. а) $\lambda^4 - 2\lambda^3 + \lambda^2 + 1 = 0$; б) $\lambda^4 - 2\lambda^3 + \lambda + 1 = 0$; в) $\lambda^4 + 2\lambda^2 + \lambda + 1 = 0$; г) $\lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda + 1 = 0$; д) $\lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda = 0$	1) А – а; Б – б; В – г ☐ 2) А – д; Б – б; В – в ☐ 3) А – б; Б – в; В – г ☐ 4) А – а; Б – в; В – д ☐ 5) А – а; Б – в; В – г ☐
15. Элементы теории поля	
15.1. Что описывается следующим равенством: $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = \phi(t)\vec{i} + \psi(t)\vec{j} + f(t)\vec{k}?$	1) Уравнение нормальной плоскости к кривой ☐ 2) Дивергенция ☐ 3) Векторное поле ☐ 4) Радиус-вектор точки кривой ☐ 5) Градиент функции ☐

Задание	Поставьте любой знак в квадрате против правильного ответа
15.2. Что описывается следующим равенством: $\frac{dx_A}{dt}(x - x_A) + \frac{dy_A}{dt}(y - y_A) + \frac{dz_A}{dt}(z - z_A) = 0?$	1) Уравнение нормальной плоскости к кривой ☐ 2) Дивергенция ☐ 3) Векторное поле ☐ 4) Радиус-вектор точки кривой ☐ 5) Градиент функции ☐
15.3. Что описывается следующим выражением: $\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}?$	1) Уравнение нормальной плоскости к кривой ☐ 2) Дивергенция ☐ 3) Векторное поле ☐ 4) Радиус-вектор точки кривой ☐ 5) Градиент функции ☐
15.4. Что описывается следующим выражением: $\frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{k}?$	1) Уравнение нормальной плоскости к кривой ☐ 2) Дивергенция ☐ 3) Векторное поле ☐ 4) Радиус-вектор точки кривой ☐ 5) Градиент функции ☐
15.5. Что описывается следующим выражением: $\vec{F} = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}?$	1) Уравнение нормальной плоскости к кривой ☐ 2) Дивергенция ☐ 3) Векторное поле ☐ 4) Радиус-вектор точки кривой ☐ 5) Градиент функции ☐

Ответы на вопросы тестов

Правильный ответ № 1 в вопросах №: 1.1, 1.6, 1.12, 1.14, 1.16, 1.24, 1.27, 1.31, 1.42, 1.48, 1.57, 1.60, 1.62, 1.66, 1.77, 1.80, 1.88, 1.94, 1.101, 1.103, 1.109, 1.111, 1.117, 1.121, 1.125, 1.127, 2.7, 2.11, 2.18, 2.22, 2.23, 2.27, 2.34, 3.10, 3.12, 3.15, 3.19, 3.21, 3.25, 3.33, 3.45, 3.47, 3.51, 3.55, 4.3, 4.7, 4.9, 5.6, 5.8, 5.13, 5.16, 6.5, 6.12, 6.13, 6.16, 6.25, 6.33, 6.36, 6.39, 6.50, 6.54, 6.57, 6.61, 6.64, 6.76, 6.80, 6.82, 6.86, 6.87, 6.88, 6.91, 7.3, 7.8, 7.9, 7.11, 7.20, 8.2, 8.4, 8.6, 9.5, 9.8, 9.9, 9.12, 9.14, 9.15, 9.18, 9.26, 9.28, 9.31, 9.36, 9.40, 9.42, 9.45, 9.52, 9.53, 9.54, 10.2, 10.10, 10.13, 10.21, 10.22, 10.28, 10.30, 10.39, 10.41, 10.44, 10.48, 10.53, 10.61, 10.68, 10.72, 10.75, 10.76, 10.86, 11.4, 11.5, 11.10, 11.13, 11.16, 11.20, 11.23, 11.24, 11.30, 12.10, 12.12, 12.24, 12.27, 12.35, 12.36, 12.39, 12.43, 12.47, 12.52, 12.55, 12.63, 12.65, 12.72, 12.78, 12.84, 12.88, 12.90, 12.91, 13.2, 13.10, 13.12, 13.14, 13.21, 13.23, 13.25, 13.29, 13.30, 13.32, 13.41, 13.48, 13.50, 14.8, 14.15, 14.16, 14.19, 14.28, 14.35, 14.39, 14.41, 14.47, 14.48, 14.49, 14.54, 14.55, 14.58, 14.61, 14.66, 14.78, 15.2.

Правильный ответ № 2 в вопросах №: 1.2, 1.8, 1.19, 1.22, 1.23, 1.33, 1.39, 1.43, 1.47, 1.51, 1.54, 1.63, 1.69, 1.73, 1.75, 1.81, 1.93, 1.95, 1.97, 1.118, 1.122, 1.124, 1.128, 2.2, 2.4, 2.5, 2.6, 2.13, 2.15, 2.16, 2.19, 2.20, 2.28, 2.30, 2.31, 2.33, 3.3, 3.6, 3.16, 3.23, 3.24, 3.26, 3.29, 3.31, 3.32, 3.34, 3.39, 3.43, 3.49, 3.53, 3.54, 4.4, 4.8, 4.11, 5.5, 5.10, 5.14, 5.15, 5.18, 6.4, 6.6, 6.7, 6.9, 6.15, 6.19, 6.20, 6.26, 6.32, 6.34, 6.47, 6.51, 6.59, 6.66, 6.69, 6.75, 6.78, 6.81, 7.1, 7.4, 7.7, 7.12, 7.15, 7.17, 7.21, 8.1, 9.1, 9.3, 9.6, 9.7, 9.21, 9.23, 9.32, 9.41, 9.46, 9.51, 10.4, 10.5, 10.7, 10.11, 10.18, 10.20, 10.23, 10.25, 10.27, 10.29, 10.35, 10.36, 10.37, 10.42, 10.54, 10.55, 10.56, 10.59, 10.66, 10.70, 10.77, 10.81, 10.83, 10.85, 10.88, 11.2, 11.7, 11.14, 11.19, 11.25, 11.29, 11.32, 12.2, 12.5, 12.9, 12.11, 12.13, 12.17, 12.19, 12.26, 12.28, 12.31, 12.41, 12.42, 12.45, 12.50, 12.57, 12.58, 12.60, 12.64, 12.66, 12.67, 12.69, 12.71, 12.74, 12.76, 12.77, 13.1, 13.7, 13.8, 13.15, 13.17, 13.20, 13.26, 13.27, 13.28, 13.34, 13.37, 13.40, 14.1, 14.3, 14.9, 14.11, 14.22, 14.25, 14.26, 14.30, 14.33, 14.38, 14.43, 14.46, 14.52, 14.56, 14.59, 14.65, 14.71, 14.79, 15.3.

Правильный ответ № 3 в вопросах №: 1.3, 1.5, 1.9, 1.13, 1.15, 1.17, 1.25, 1.28, 1.29, 1.30, 1.34, 1.37, 1.38, 1.40, 1.44, 1.46, 1.49, 1.53, 1.56, 1.67, 1.71, 1.79, 1.83, 1.85, 1.87, 1.89, 1.90, 1.91, 1.98, 1.99, 1.105, 1.107, 1.108, 1.110, 1.113, 1.116, 1.119, 1.120, 1.123, 2.3, 2.9,

2.12, 2.17, 2.21, 2.26, 2.32, 3.1, 3.4, 3.7, 3.9, 3.14, 3.18, 3.22, 3.28, 3.35, 3.38, 3.44, 3.46, 3.48, 4.2, 4.5, 4.10, 5.2, 5.3, 5.9, 5.11, 6.2, 6.11, 6.14, 6.18, 6.22, 6.29, 6.31, 6.37, 6.40, 6.43, 6.44, 6.52, 6.55, 6.58, 6.65, 6.68, 6.71, 6.72, 6.79, 6.83, 6.90, 7.2, 7.5, 7.6, 7.10, 7.13, 7.14, 7.16, 7.18, 7.23, 8.5, 8.7, 8.9, 9.2, 9.10, 9.11, 9.13, 9.16, 9.19, 9.22, 9.25, 9.27, 9.29, 9.33, 9.35, 9.37, 9.43, 9.47, 9.48, 10.1, 10.8, 10.12, 10.16, 10.19, 10.32, 10.40, 10.45, 10.47, 10.49, 10.52, 10.63, 10.73, 10.74, 10.79, 10.80, 10.84, 11.8, 11.9, 11.17, 11.21, 11.27, 11.34, 12.1, 12.4, 12.6, 12.8, 12.15, 12.18, 12.21, 12.23, 12.30, 12.32, 12.34, 12.40, 12.49, 12.53, 12.56, 12.61, 12.62, 12.73, 12.80, 12.85, 12.87, 12.89, 13.5, 13.6, 13.11, 13.13, 13.18, 13.19, 13.22, 13.31, 13.36, 13.38, 13.39, 13.42, 13.43, 13.45, 13.46, 13.49, 14.2, 14.4, 14.5, 14.7, 14.13, 14.18, 14.21, 14.24, 14.29, 14.31, 14.36, 14.42, 14.51, 14.57, 14.60, 14.64, 14.67, 14.69, 14.70, 14.72, 14.75, 14.77, 15.5.

Правильный ответ № 4 в вопросах №: 1.4, 1.7, 1.10, 1.18, 1.20, 1.21, 1.26, 1.32, 1.36, 1.41, 1.45, 1.50, 1.52, 1.55, 1.58, 1.59, 1.61, 1.64, 1.65, 1.68, 1.70, 1.72, 1.74, 1.76, 1.82, 1.92, 1.96, 1.100, 1.102, 1.106, 1.112, 1.126, 1.129, 2.1, 2.8, 2.10, 2.14, 2.24, 2.25, 2.29, 3.2, 3.5, 3.11, 3.13, 3.20, 3.30, 3.36, 3.40, 3.50, 3.52, 4.1, 5.1, 5.4, 5.7, 5.12, 5.19, 6.3, 6.10, 6.17, 6.23, 6.30, 6.35, 6.38, 6.41, 6.45, 6.46, 6.49, 6.56, 6.62, 6.63, 6.67, 6.70, 6.73, 6.74, 6.77, 6.84, 6.85, 6.89, 7.19, 7.22, 7.24, 8.3, 8.8, 9.4, 9.17, 9.20, 9.30, 9.34, 9.39, 9.44, 9.49, 9.50, 10.9, 10.14, 10.15, 10.17, 10.24, 10.26, 10.33, 10.38, 10.43, 10.46, 10.50, 10.58, 10.62, 10.64, 10.67, 10.69, 10.78, 10.82, 10.87, 10.89, 10.90, 11.3, 11.6, 11.11, 11.12, 11.15, 11.18, 11.22, 11.26, 11.31, 11.33, 12.3, 12.7, 12.14, 12.16, 12.22, 12.25, 12.29, 12.44, 12.48, 12.51, 12.54, 12.59, 12.70, 12.75, 12.79, 12.81, 12.82, 12.83, 12.86, 13.3, 13.4, 13.9, 13.33, 13.35, 13.44, 13.47, 13.51, 14.6, 14.10, 14.12, 14.14, 14.17, 14.23, 14.27, 14.32, 14.40, 14.44, 14.45, 14.50, 14.53, 14.62, 14.63, 14.68, 14.73, 14.76, 15.1.

Правильный ответ № 5 в вопросах №: 1.11, 1.35, 1.78, 1.84, 1.86, 1.104, 1.114, 1.115, 3.8, 3.17, 3.27, 3.37, 3.41, 3.42, 4.6, 5.17, 6.1, 6.8, 6.21, 6.24, 6.27, 6.28, 6.42, 6.48, 6.53, 6.60, 9.24, 9.38, 10.3, 10.6, 10.31, 10.51, 10.57, 10.60, 10.65, 10.71, 11.1, 11.28, 12.20, 12.33, 12.37, 12.38, 12.46, 12.68, 13.16, 13.24, 14.20, 14.34, 14.37, 14.74, 14.80, 15.4.

ПРИЛОЖЕНИЯ

Краткий справочник по математике

Латинский алфавит

<i>A</i>	<i>a</i>	а	<i>N</i>	<i>n</i>	эн
<i>B</i>	<i>b</i>	бе	<i>O</i>	<i>o</i>	о
<i>C</i>	<i>c</i>	це	<i>P</i>	<i>p</i>	пэ
<i>D</i>	<i>d</i>	де	<i>Q</i>	<i>q</i>	ку
<i>E</i>	<i>e</i>	е	<i>R</i>	<i>r</i>	эр
<i>F</i>	<i>f</i>	эф	<i>S</i>	<i>s</i>	эс
<i>G</i>	<i>g</i>	же	<i>T</i>	<i>t</i>	тэ
<i>H</i>	<i>h</i>	аш	<i>U</i>	<i>u</i>	у
<i>I</i>	<i>i</i>	и	<i>V</i>	<i>v</i>	вэ
<i>J</i>	<i>j</i>	жи	<i>W</i>	<i>w</i>	дубль-вэ
<i>K</i>	<i>k</i>	ка	<i>X</i>	<i>x</i>	икс
<i>L</i>	<i>l</i>	эль	<i>Y</i>	<i>y</i>	игрек
<i>M</i>	<i>m</i>	эм	<i>Z</i>	<i>z</i>	зет

Греческий алфавит

А	α	альфа	Ν	ν	ню
В	β	бета	Ξ	ξ	кси
Г	γ	гамма	Ο	$\omicron$	омикрон
Δ	δ	дельта	Π	π	пи
Ε	ϵ	эпсилон	Ρ	ρ	ро
Ζ	ζ	дзета	Σ	σ	сигма
Η	η	эта	Τ	τ	тау
Θ	θ	тета	Υ	υ	ипсилон
Ι	ι	йота	Φ	ϕ	фи
Κ	κ	каппа	Χ	χ	хи
Λ	λ	лямбда	Ψ	ψ	пси
Μ	μ	мю	Ω	ω	омега

Правила действий с рациональными числами (дробями)

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}; \quad \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd};$$

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad - bc}{bd}; \quad \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}.$$

Пропорции

Два равных отношения образуют пропорцию:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}; \quad ad = bc.$$

Нахождение членов пропорции:

$$a = \frac{bc}{d}; \quad b = \frac{ad}{c}; \quad c = \frac{ad}{b}; \quad d = \frac{bc}{a}.$$

Пропорции, равносильные пропорции $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$:

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{d}; \quad \frac{d}{b} = \frac{c}{a}; \quad \frac{d}{c} = \frac{b}{a}.$$

Производная пропорция — следствие пропорции $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ в виде

$$\frac{ma + nb}{pa + qb} = \frac{mc + nd}{pc + qd},$$

где m, n, p, q — произвольные числа, причем p и q не равны нулю одновременно.

Алгебра**Формулы сокращенного умножения**

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2; \quad (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3; \quad (a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3.$$

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b).$$

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2); \quad a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2).$$

Свойства степени

$$a^0 = 1; \quad a^m \cdot a^n = a^{m+n}; \quad a^m : a^n = a^{m-n}; \quad (a^m)^n = a^{mn}; \quad (a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m;$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}; \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n}; \quad \left(\frac{a}{b}\right)^{-m} = \left(\frac{b}{a}\right)^m; \quad a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}; \quad a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}.$$

Свойства квадратного (арифметического) корня

($a, b > 0$; k, m, n — натуральные числа)

$$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}; \quad \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}; \quad (\sqrt{a})^m = \sqrt{a^m}; \quad \sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b};$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}; \quad \sqrt[n]{a} = \sqrt[nk]{a^k}; \quad \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}; \quad \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}};$$

$$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}; \quad \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}; \quad \sqrt{a^m} = (\sqrt{a})^m.$$

Уравнения и системы уравнений

Решение системы двух уравнений первой степени

$$\begin{cases} ax + by = c, \\ a_1x + b_1y = c_1. \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{cb_1 - c_1b}{ab_1 - a_1b}, \\ y = \frac{ac_1 - a_1c}{ab_1 - a_1b} \end{cases}$$

$$(ab_1 - a_1b \neq 0).$$

Формула корней квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Формула корней приведенного квадратного уравнения $x^2 + px + q = 0$:

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

Формула корней квадратного уравнения с четным вторым коэффициентом $ax^2 + 2kx + c = 0$:

$$x_{1,2} = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 - ac}}{a}.$$

Теорема Виета

— для квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}; \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a};$$

— для приведенного квадратного уравнения $x^2 + px + q = 0$:

$$x_1 + x_2 = -p; \quad x_1 \cdot x_2 = q.$$

Разложение на множители квадратного трехчлена

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2),$$

где x_1, x_2 — корни уравнения $ax^2 + bx + c = 0$.

Выделение квадрата двучлена из квадратного трехчлена:

$$ax^2 + bx + c = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}.$$

Решение биквадратного уравнения $ax^4 + bx^2 + c = 0$:

$$x_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}};$$

$$x_{3,4} = \pm \sqrt{\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}.$$

Формула действительного корня неполного кубического уравнения $y^3 + py + q = 0$:

$$y = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}.$$

Прогрессии

Арифметическая прогрессия $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$.

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{2a_1 + (n-1) \cdot d}{2} \cdot n;$$

$$a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = \dots = a_{k+1} + a_{n-k}; \quad a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}.$$

Геометрическая прогрессия $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$.

$$S_n = \frac{b_n q - b_1}{q - 1} = b_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}.$$

$$b_1 \cdot b_n = b_2 \cdot b_{n-1} = \dots = b_{k+1} \cdot b_{n-k}; \quad |b_n| = \sqrt{b_{n-1} b_{n+1}}.$$

Если $q > 1$, то прогрессия возрастающая; если $0 < q < 1$, то прогрессия убывающая; если $q < 0$, то прогрессия знакопеременная.

Если $0 < |q| < 1$, то $S = \frac{b_1}{1-q}$ при $n \rightarrow \infty$.

Логарифмы

$$\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b; \quad \log_e x = \ln x, \quad \text{где } e \approx 2,72.$$

$$b^{\log_b a} = a; \quad \log_a 1 = 0;$$

$$\log_a a = 1; \quad \log_a a^m = m.$$

$$\log_c(ab) = \log_c a + \log_c b; \quad \log_c\left(\frac{a}{b}\right) = \log_c a - \log_c b;$$

$$\log_c a^k = k \log_c a; \quad \log_c \sqrt[n]{a} = \frac{1}{n} \log_c a;$$

$$\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b}; \quad \log_a b = \frac{1}{\log_b a};$$

$$\frac{\log_n b}{\log_n c} = \frac{\log_m b}{\log_m c} = \log_c b; \quad \log_n b \cdot \log_m c = \log_m b \cdot \log_n c;$$

$$a^{\log_n b} = b^{\log_n a}.$$

Формулы для приближенных вычислений

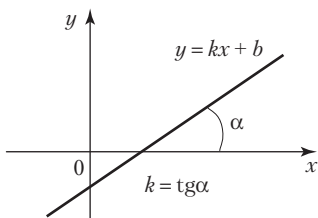
Формула Стирлинга (факториалы больших чисел):

$$n! \approx \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n} \left(1 + \frac{1}{12n} + \frac{1}{288n^2} + \dots\right);$$

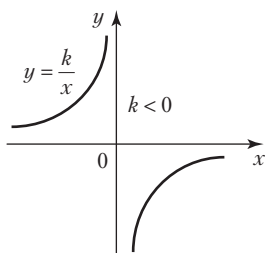
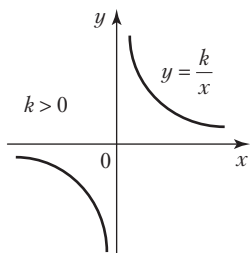
$$\ln(n!) \approx \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln n - n + \ln \sqrt{2\pi}.$$

Графики элементарных функций

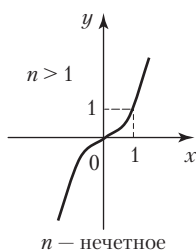
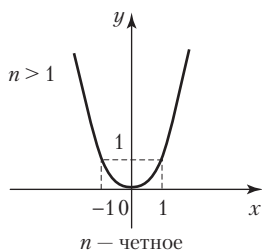
Линейная функция $y = kx + b$:



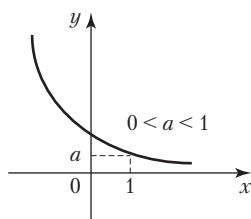
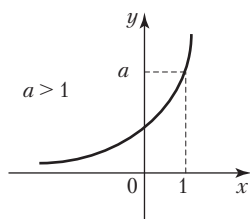
Дробно-линейная функция $y = \frac{k}{x}$ ($k \neq 0, x \neq 0$):



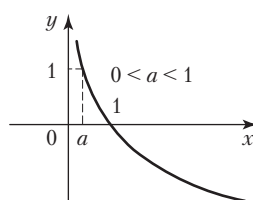
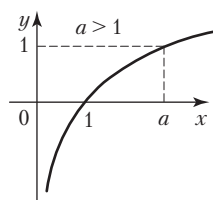
Степенная функция $y = x^n$:



Показательная функция $y = a^x$ ($a > 0, a \neq 1$):

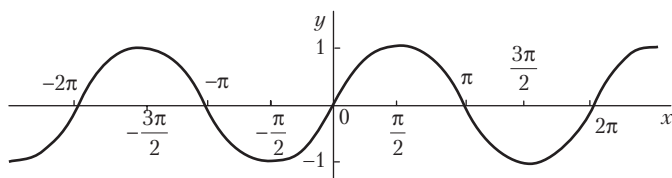


Логарифмическая функция $y = \log_a x$:

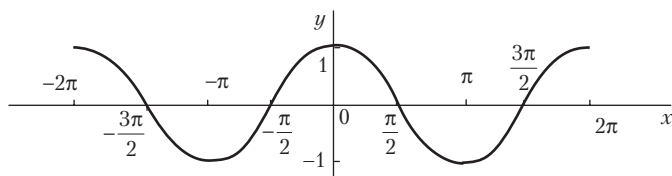


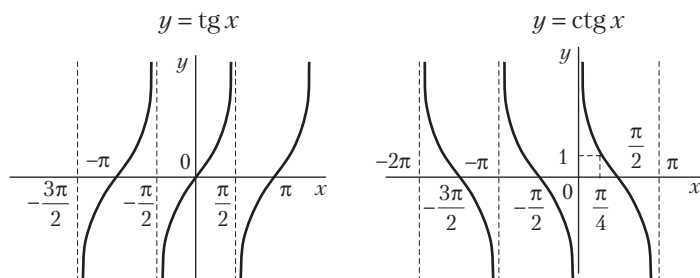
Тригонометрические функции:

$$y = \sin x$$



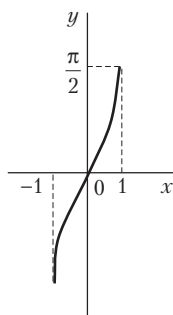
$$y = \cos x$$



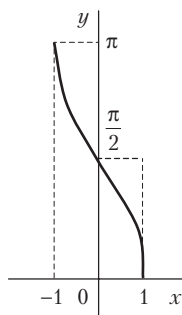


Обратные тригонометрические функции:

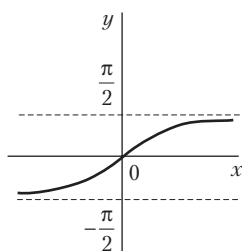
$$y = \arcsin x$$



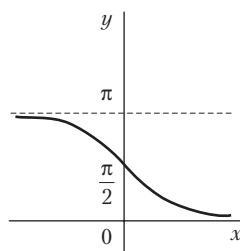
$$y = \arccos x$$



$$y = \operatorname{arctg} x$$



$$y = \operatorname{arccctg} x$$



Тригонометрия

Градусная и радианная меры углов

$$1 \text{ радиан} = \frac{180^\circ}{\pi} \approx 57^\circ 17' 45''.$$

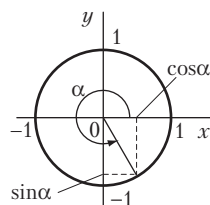
0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π

Тригонометрические функции:

Синус угла α — ордината точки единичной окружности, соответствующей данному углу, т.е. $\sin \alpha = y$.

Косинус угла α — абсцисса точки окружности, соответствующей данному углу, т.е. $\cos \alpha = x$.

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}; \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}.$$



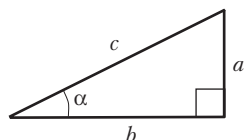
Знаки значений тригонометрических функций

Четверть	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$
I	+	+	+	+
II	+	−	−	−
III	−	−	+	+
IV	−	+	−	−

Значения тригонометрических функций некоторых углов

α	0°	30°	45°	60°	90°	120°	180°	270°	360°
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	−1	0
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	−1	0	1
$\operatorname{tg} \alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	∞	$-\sqrt{3}$	0	∞	0
$\operatorname{ctg} \alpha$	∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	∞	0	∞

Тригонометрические функции в прямоугольном треугольнике



$$\sin \alpha = \frac{a}{c}; \quad \cos \alpha = \frac{b}{c};$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}; \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{b}{a}.$$

Тригонометрические тождества

$$\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1;$$

$$\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1;$$

$$|\cos \alpha| = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha};$$

$$|\sin \alpha| = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha};$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{ctg} \alpha};$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}.$$

Формулы сложения тригонометрических функций

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta;$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta;$$

$$\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta}{1 \mp \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta};$$

$$\operatorname{ctg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta \mp 1}{\operatorname{ctg} \beta \pm \operatorname{ctg} \alpha}.$$

Тригонометрические функции двойного угла

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha;$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha;$$

$$\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha;$$

$$\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1;$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha};$$

$$\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha - 1}{2 \operatorname{ctg} \alpha}.$$

Тригонометрические функции половинного угла

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}; \quad \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha};$$

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}; \quad \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha} = \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha}.$$

Сумма и разность тригонометрических функций

$$\sin \alpha \pm \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha \pm \beta}{2} \cos \frac{\alpha \mp \beta}{2};$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2};$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}.$$

Понижение степени тригонометрических функций

$$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2};$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}.$$

Произведение тригонометрических функций

$$\sin \alpha \cdot \cos \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)}{2};$$

$$\cos \alpha \cdot \cos \beta = \frac{\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)}{2};$$

$$\sin \alpha \cdot \sin \beta = \frac{\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)}{2}.$$

Соотношение между обратными тригонометрическими функциями

$$\arcsin x = -\arcsin(-x) = \frac{\pi}{2} - \arccos x = \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$\arccos x = \pi - \arccos(-x) = \frac{\pi}{2} - \arcsin x = \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$\operatorname{arctg} x = -\operatorname{arctg}(-x) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}};$$

$$\operatorname{arctg} x = \pi - \operatorname{arctg}(-x) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x = \arccos \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Геометрия

Треугольники

Формула вычисления площади треугольника

$$S = \frac{1}{2}ab \sin \gamma = \frac{1}{2}ac \sin \beta = \frac{1}{2}bc \sin \alpha.$$

Теорема косинусов:

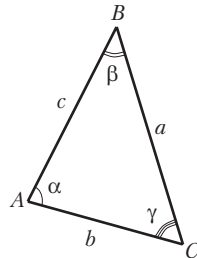
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha;$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta;$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma.$$

Теорема синусов

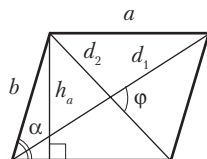
$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R.$$



Четырехугольники

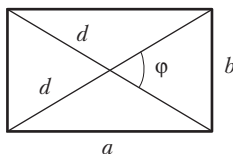
Параллелограмм

$$S = ab \sin \alpha.$$



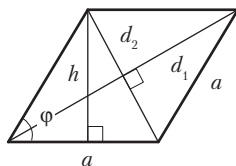
Прямоугольник

$$S = ab = \frac{1}{2} d^2 \sin \varphi.$$



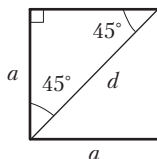
Ромб

$$S = ah = a^2 \sin \alpha = \frac{1}{2} d_1 d_2.$$



Квадрат

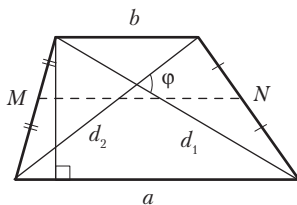
$$S = a^2 = \frac{1}{2} d^2.$$



Трапеция

$$S = \frac{a+b}{2} h = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin \varphi;$$

$$MN = \frac{1}{2} (a + b) \text{ — средняя линия.}$$

**Окружность и круг**

Длина окружности

$$C = 2\pi r = \pi d.$$

Длина дуги, равной n°

$$L = \frac{\pi r}{180^\circ} n^\circ.$$

Площадь круга

$$S = \pi r^2 = \pi \frac{d^2}{4} = \frac{Cd}{4}.$$

Сегмент и сектор

$$a = 2R \sin \frac{\alpha}{2};$$

$$h = \frac{a}{2} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{4}.$$

Площадь сектора

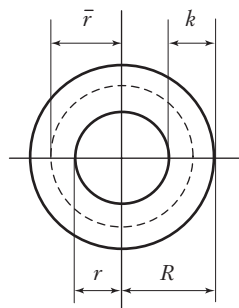
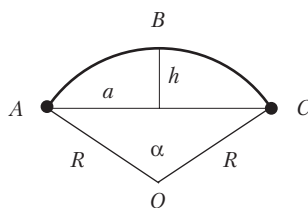
$$S_{OABC} = \frac{1}{2} R^2 \alpha.$$

Площадь сегмента:

$$S_{ABC} = S_{OABC} - S_{OAC}.$$

Площадь кругового кольца

$$a = \pi(R^2 - r^2) = \frac{\pi}{4}(D^2 - d^2) = 2\pi \bar{r}k.$$

**Многогранники**

Стандартные обозначения:

 V — объем; $S_{\text{полн}}$ — площадь полной поверхности; $S_{\text{бок}}$ — площадь боковой поверхности; $S_{\text{осн}}$ — площадь основания; $P_{\text{осн}}$ — периметр основания; $P_{\perp}$ — периметр перпендикулярного сечения; l — длина ребра; h — высота.**Призма**

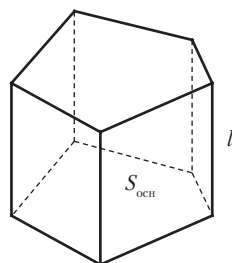
$$S_{\text{бок}} = P_{\perp} l;$$

$$S_{\text{полн}} = 2S_{\text{осн}} + S_{\text{бок}};$$

$$V = S_{\text{осн}} \cdot h.$$

Прямая призма

$$S_{\text{бок}} = P_{\text{осн}} (l = h);$$

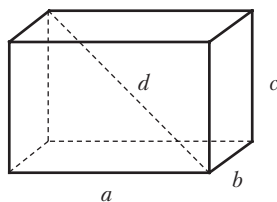


Параллелепипед

$$S_{\text{полн}} = 2(ab + bc + ac);$$

$$V = abc;$$

$$d = a^2 + b^2 + c^2.$$

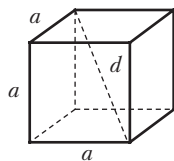


Куб

$$S_{\text{полн}} = 6a^2;$$

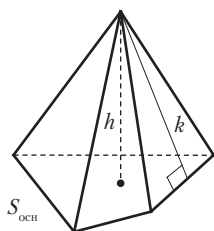
$$V = a^3;$$

$$d^2 = 3a^2.$$



Пирамида

$$V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot h.$$



Правильные многогранники

Стандартные обозначения:

a — ребро многогранника;

V — объем;

S — площадь боковой поверхности;

R — радиус описанной сферы;

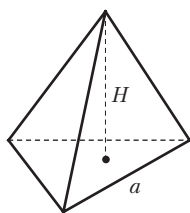
r — радиус вписанной сферы;

H — высота.

Тетраэдр

$$S = a^2 \sqrt{3}; \quad V = \frac{a^3 \sqrt{2}}{12};$$

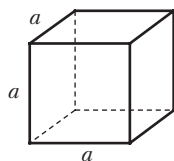
$$R = \frac{a\sqrt{6}}{4}; \quad r = \frac{a\sqrt{6}}{12}; \quad H = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$



Куб

$$S = 6a^2; \quad V = a^3;$$

$$r = \frac{a}{2}; \quad R = \frac{a\sqrt{3}}{2}; \quad H = a.$$



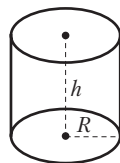
Тела вращения

Цилиндр

$$S_{\text{бок}} = 2\pi R h;$$

$$S_{\text{полн}} = 2\pi R^2 + 2\pi R h;$$

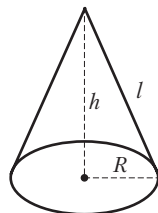
$$V = \pi R^2 h.$$



Конус

$$S_{\text{бок}} = \pi R l;$$

$$S_{\text{полн}} = 2\pi R^2 + \pi R l; \quad V = \frac{1}{3}\pi R^2 h.$$

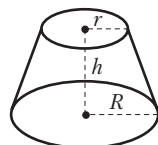


Усеченный конус

$$S_{\text{бок}} = \pi l(R + r);$$

$$S_{\text{полн}} = S_{\text{бок}} + \pi(R^2 + r^2);$$

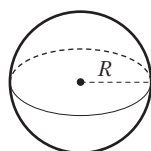
$$V = \frac{1}{3}\pi h(R^2 + Rr + r^2).$$



Шар

$$S_{\text{сферы}} = 4\pi R^2 = \pi d^2;$$

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{\pi d^3}{6}.$$



ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Аксиомы

- евклидова пространства 82
 - длины 82
 - линейного пространства 72
- Алгебраическое дополнение 28
- Асимптота 207
- Астроида 369

Базис линейного пространства 79

- ортонормированный 84
- Базисное решение системы 56
- Бесконечно большая функция 204
- малая функция 204

Векторная функция 362

- Векторное произведение 88
- Векторы n -мерные 70
- в трехмерном пространстве 69
 - коллинеарные 64
 - на плоскости 64
- Вихрь 375
- Вогнутость графика функции 244
- Выпуклость графика функции 244
- Выпуклые множества
- в пространстве R^n 156
 - на плоскости 154

Гипербола 135

- Гиперболический параболоид 151
- цилиндр 147
- Градиент 261, 375
- Граничные условия 346

Двуполостный гиперboloид 150

Декартова система координат 86

Диаграмма Эйлера — Венна 165

Дивергенция 375

Директриса параболы 138

Дифференциал 228

- полный 259
- частный 259

Дифференциальное уравнение 332

- второго порядка 345
- линейное 340, 349
- однородное 338
- первого порядка 333
- с разделяющимися переменными 334

Длина

- вектора 65
 - элемента в евклидовом пространстве 82
- Дополнение
- множества 168

Замечательные пределы 206

- Интеграл** 271
— двойной 300
— неопределенный 271
— несобственный 297
— определенный 282
Интегрирование по частям 280
Интервал монотонности 195, 237
— сходимости 325
- Канонические уравнения прямой в пространстве** 140
Канонический вид квадратичной формы 105
Каноническое уравнение
— гиперболы 135
— эллипса 132
Квадратичные формы 103
Комплексная плоскость 111
Комплексные числа 111
Конус второго порядка 151
Кортеж 173
Кривизна дуги 370
- Линейная зависимость и независимость** 75
— комбинация 75
— — выпуклая 156
— — тривиальная 75
Линейный оператор 93
Линия уровня 256
Максимумом функции 238, 263
Матрица 15
— вырожденная 32
— диагональная 15
— квадратная 15
— неотрицательная 101
— нулевая 17
— положительная 101
— системы 41
— ступенчатая 16
— треугольная 16
- Матричные многочлены** 22
Метод вариации постоянной 344
— Гаусса 48
— Жордана 52
— замены переменной 275
— множителей Лагранжа 267
— обратной матрицы 43
— разложения 274
Минимум функции 238, 263
Минор 29, 35
Многогранная область 157
Множество 160
— конечное 161
— пустое 163
— универсальное 164
— числовое 171
Монотонность функции 195
Мощность множеств 183
- Начальное условие** 334
Необходимое условие сходимости ряда 313
Непересекающиеся множества 167
Непрерывность функции 209
Нормальное уравнение окружности 131
- Областью сходимости** 324
Обратная матрица 32, 52
Общее решение дифференциального уравнения 333
— — системы 56
Общее уравнение окружности 131
— — плоскости 139
— — прямой 123

- Общий интеграл дифференциального уравнения 333
Объединение множеств 165
Ограниченность функции 196
Однополостный гиперболоид 149
Окружность 130
Определители 23
Ортогональные векторы 71
— элементы эвклидова пространства 83
Орты 69
Отношение 181
Отношения порядка 182
— эквивалентности 182
Отображение 180
- Параметр параболы** 138
Параметрическое задание функции 366
Первообразная 270
Пересечение множеств 166
Перестановки 23
Периодичность функции 196
Поверхности вращения 147
— второго порядка 146
Подмножество 163
Показательная форма комплексного числа 117
Поле векторное 374
— скалярное 374
Полупространство 155
Понижение порядка дифференциального уравнения 345
Потенциал вектора 375
Поток векторного поля 375
Правила Сарруса 26
Правило
— Крамера 46
— Лопиталя 235
Предел
— последовательности 188
— функции 200
Предельный признак сравнения 317
Признак
— Даламбера 318
— Лейбница 321
— сравнения 315
Прогрессия
— арифметическая 186
— геометрическая 187
Проекция множества 177
Произведение матрицы на матрицу 19
Производная 221
— высшего порядка 233
— по направлению 260
— функции одной переменной 221
— частная 258
Пространство
— R^n 71
— евклидово 82
— линейное 72
Прямое произведение множеств 175
- Радиус кривизны** 371
— сходимости 325
Разбиение множества 170
Размерность линейного пространства 79
— матрицы 15
Разность векторов 65
— множеств 168
Ранг матрицы 35, 53
Расстояние от точки до плоскости 143
— до прямой 128
Расширенная матрица системы 41

- Ротор 375
Ряд 309
— знакопеременный 321
— знакочередующийся 321
— Маклорена 327
— положительный 314
— степенной 324
— Тэйлора 326
— функциональный 324
— числовой 309
- Свойства определителей** 30
Системы линейных алгебраических уравнений 41
— неопределенные 42
— несовместные 42
— однородные 60
— определенные 42
— совместные 42
— эквивалентные 43
Скалярное произведение 66, 71
Смешанное произведение векторов 90
Собственное значение 98
Собственный вектор 98
Соответствие 177
Сумма векторов 65
— матриц 18
Сфера 148
Сходимость ряда 309
— абсолютная 321
- Таблица**
— интегралов 273
— производных 224
Теорема
— Абеля 324
— Больцано — Коши 212
— Вейерштрасса 211
— Кронекера — Капелли 54
- Лагранжа 232
— о первообразных функциях 270
— о среднем 285
— Ролля 232
— Ферма 231
— Фробениуса — Перрона 101
Точка перегиба 244
— разрыва 210
Транспонирование матриц 17
Трехосный эллипсоид 149
Тригонометрическая форма комплексного числа 112
- Угловая точка** 157
Угловой коэффициент прямой 120
Угол между векторами 69
— прямыми 124
— наклона прямой 120
Уравнение плоскости 139
— прямой в отрезках 123
— общее 123
— с угловым коэффициентом 121
— через две точки 122
Условия параллельности и перпендикулярности плоскостей 140
— прямых 124
- Фокус параболы** 138
Фокусы
— гиперболы 135
— эллипса 133
Формула Ньютона — Лейбница 285
Функция двух переменных 255

Характеристическое

- свойство
- — гиперболы 136
- — параболы 138
- — эллипса 133
- уравнение 99, 350

Циклоида 368

Цилиндрические поверхно-
сти 146

**Частное решение диффе-
ренциального уравнения**
333

Четность функции 195

**Числовая последователь-
ность 185**

Эвольвента 373

Эволюта 373

Экстремум 238

— условный 266

— функции двух перемен-
ных 263

Эксцентриситет 133

**Элементарные преобразо-
вания**

— — матрицы 21

— — системы линейных урав-
нений 48

— — функции 196

Эллипс 132, 135

Эллиптический параболоид
150

— цилиндр 146

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Воронов, М. В.* Математика для студентов гуманитарных факультетов / В. М. Воронов, Г. П. Мещерякова. — Ростов н/Д : Феникс, 2002.
2. Высшая математика. Общий курс / под ред. проф. А. И. Яблонского. — Минск : Вышэйшая школа, 1993.
3. Высшая математика для экономистов / под ред. проф. Н. Ш. Кремера. — М. : Банки и биржи ; ЮНИТИ, 2008.
4. *Колесников, А. Н.* Краткий курс математики для экономистов / А. Н. Колесников. — М. : ИНФРА-М, 1999.
5. *Кузнецов, Б. Т.* Математика / Б. Т. Кузнецов. — М. : ЮНИТИ, 2004.
6. *Лунгу, К. Н.* Сборник задач по высшей математике / К. Н. Лунгу [и др.] — М. : АЙРИС ПРЕСС ; РОЛЬФ, 2001.
7. *Малыхин, В. И.* Математика в экономике / В. И. Малыхин. — М. : ИНФРА-М, 2002.
8. Общий курс высшей математики для экономистов / под ред. проф. В. И. Ермакова. — М. : ИНФРА-М, 2002.
9. *Попов, А. М.* Линейная алгебра с элементами аналитической геометрии. Высшая математика для экономистов. Кн. 1 / А. М. Попов, В. Н. Сотников. — М. : ИНЭП, 2009.
10. *Попов, А. М.* Математический анализ и дифференциальные уравнения. Высшая математика для экономистов. Кн. 2 / А. М. Попов, В. Н. Сотников. — М. : ИНЭП, 2009.
11. *Попов, А. М.* Сборник тестов по математике / А. М. Попов, В. Н. Сотников. — М. : ИНЭП, 2009.
12. *Попов, А. М.* Теория вероятностей и математическая статистика. Высшая математика для экономистов. Кн. 3. / А. М. Попов, В. Н. Сотников. — М. : ИНЭП, 2008.
13. *Попов, А. М.* Экономико-математические методы и модели. Высшая математика для экономистов. Кн. 5 / А. М. Попов, В. Н. Сотников. — М. : ИНЭП, 2009.
14. Сборник задач по высшей математике для экономистов / под ред. проф. Ермакова. — М. : ИНФРА-М, 2001.

-
15. *Солодовников, А. С.* Математика в экономике. Ч. 1 / А. С. Солодовников, В. А. Бабайцев, А. В. Браилов. — М. : Финансы и статистика, 2001.

Покупайте наши книги:

Оптом в офисе книготорга «Юрайт»:
140004, Московская обл., г. Люберцы, 1-й Панковский проезд, д. 1,
тел.: (495) 744-00-12, e-mail: sales@urait.ru, www.urait.ru

В розницу в интернет-магазине: www.urait-book.ru,
e-mail: order@urait-book.ru, тел.: (495) 742-72-12

Для закупок у Единого поставщика в соответствии
с Федеральным законом от 21.07.2005 № 94-ФЗ обращаться
по тел.: (495) 744-00-12, e-mail: sales@urait.ru, vuz@urait.ru

Учебное издание

**Попов Александр Михайлович
Сотников Валерий Николаевич**

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА ДЛЯ ЭКОНОМИСТОВ

Учебник для бакалавров

Редактор *Е. В. Казакова*
Корректор *М. Б. Быкова*
Художественное оформление *А. И. Гиренко*
Компьютерная верстка *М. А. Гольдман*

Формат 84×108 $\frac{1}{32}$.
Гарнитура «Petersburg». Печать офсетная.
Усл. печ. л. 29,61. Тираж 1500 экз. Заказ №

ООО «Издательство Юрайт»
140004, Московская обл., г. Люберцы, 1-й Панковский проезд, д. 1.
Тел.: (495) 744-00-12. E-mail: izdat@urait.ru, www.urait.ru