

Сборник задач по высшей математике

Часть 1

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ ДЛЯ БАКАЛАВРОВ

Под редакцией **А. С. Поспелова**

*Рекомендовано Министерством образования и науки РФ
в качестве учебного пособия для студентов вузов,
обучающихся по направлениям и специальностям
в области техники и технологии*

Москва • Юрайт • 2012

УДК 51
ББК 22.1я73
С23

Авторы:

**В. Н. Земсков, В. В. Лесин, А. С. Поспелов, А. А. Прокофьев,
Т. В. Соколова.**

Сборник задач по высшей математике. В 2 ч. Ч. 1 : учеб. пособие для бакалавров / под ред. А. С. Поспелова. — М. : Издательство Юрайт ; ИД Юрайт, 2012. — 605 с. — Серия : Бакалавр.

ISBN 978-5-9916-1369-9 (Издательство Юрайт)

ISBN 978-5-9692-1209-1 (ИД Юрайт)

В сборнике содержатся задачи по основам математического анализа, векторной алгебре и аналитической геометрии, линейной алгебре, дифференциальному и интегральному исчислениям функций одной и нескольких переменных, кратным интегралам и дифференциальным уравнениям. Приведенные краткие теоретические сведения, иллюстрируемые большим количеством разнообразных примеров, позволяют использовать сборник для всех видов обучения, а также для самостоятельной работы студентов. Соответствует государственному образовательному стандарту нового поколения.

Для студентов младших курсов высших технических учебных заведений.

УДК 51
ББК 22.1я73

Покупайте наши книги:

Оптом в офисе книготорга «Юрайт»:

140004, Московская обл., г. Люберцы, 1-й Панковский проезд, д. 1,
тел.: (495) 744-00-12, e-mail: sales@urait.ru, www.urait.ru

В розницу в интернет-магазине: www.urait-book.ru,
e-mail: order@urait-book.ru, тел.: (495) 742-72-12

Для закупок у Единого поставщика в соответствии
с Федеральным законом от 21.07.2005 № 94-ФЗ обращаться
по тел.: (495) 744-00-12, e-mail: sales@urait.ru, vuz@urait.ru

ISBN 978-5-9916-1369-9
(Издательство Юрайт)
ISBN 978-5-9692-1209-1
(ИД Юрайт)

© Коллектив авторов, 2011
© ООО «ИД Юрайт», 2012

Оглавление

Предисловие	8
ЧАСТЬ I. ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА И МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ	
Глава 1. Введение в анализ	10
1.1. Действительные числа. Множества и операции над ними. Верхние и нижние грани числовых множеств	10
1.2. Метод математической индукции. Элементы комбинаторики. Бином Ньютона	27
1.3. Комплексные числа	42
Глава 2. Пределы.....	57
2.1. Предел последовательности	57
2.2. Понятие функции. Элементарные функции и их графики	70
2.3. Предел функции. Непрерывность	77

Глава 3. Матрицы и определители	96
3.1. Матрицы. Операции над матрицами	96
3.2. Определители	101
1. Определители 2-го и 3-го порядка. 2. Решение систем линейных уравнений с двумя и тремя неизвестными.	
3. Определители n -го порядка. 4. Основные методы вычисления определителей n -го порядка.	
3.3. Обратная матрица	118
1. Обратная матрица и методы ее вычисления. 2. Матричные уравнения.	
3.4. Ранг матрицы	126
1. Пространство арифметических векторов. 2. Основные определения и методы вычисления ранга матрицы.	
Глава 4. Векторная алгебра и аналитическая геометрия	135
4.1. Векторная алгебра	135
1. Линейные операции над векторами. 2. Базис и координаты вектора. 3. Декартовы прямоугольные координаты точки на плоскости и в пространстве. Простейшие задачи аналитической геометрии. 4. Скалярное произведение векторов.	
5. Векторное произведение векторов. 6. Смешанное произведение векторов.	
4.2. Линейные геометрические объекты	159
1. Прямая на плоскости. 2. Плоскость и прямая в пространстве.	
Глава 5. Кривые на плоскости, кривые и поверхности в пространстве	179
5.1. Кривые на плоскости	179
1. Уравнение кривой в декартовой системе координат.	
2. Уравнение кривой в полярной системе координат.	
3. Алгебраические кривые второго порядка. 4. Полярное уравнение окружности, эллипса, гиперболы и параболы.	
5. Преобразование декартовых координат при параллельном переносе и повороте. 6. Параметрические уравнения кривой.	
5.2. Кривые и поверхности в пространстве	203
1. Уравнение поверхности и кривой в декартовой прямоугольной системе координат. 2. Алгебраические поверхности второго порядка.	
Глава 6. Системы линейных уравнений	213
6.1. Правило Крамера	213
6.2. Решение произвольных систем	216
1. Решение линейных систем общего вида. 2. Однородные системы 3. Метод последовательных исключений Жордана — Гаусса.	
Глава 7. Линейная алгебра	226
7.1. Линейные пространства и пространства со скалярным произведением	226

1. Линейное пространство. 2. Конечномерное пространство. Базис в n -мерном пространстве. 3. Изоморфизм n -мерных пространств. 4. Подпространства линейного пространства и линейные многообразия. 5. Сумма и пересечение подпространств. 6. Пространства со скалярным произведением.	
7.2. Линейные операторы	240
1. Алгебра линейных операторов. 2. Собственные числа и собственные векторы линейного оператора. 3. Линейные операторы в пространстве со скалярным произведением.	
4. Приведение матрицы линейного оператора к диагональному виду.	
7.3. Билинейные и квадратичные формы	256
1. Линейные формы. 2. Билинейные формы. 3. Квадратичные формы. 4. Кривые и поверхности второго порядка. Приведение к каноническому виду.	
Глава 8. Дифференциальное исчисление функций одной переменной	269
8.1. Производная	269
1. Определение производной. 2. Дифференцирование явно заданных функций. 3. Дифференцирование функций, заданных неявно и параметрически. 4. Производные высших порядков. 5. Геометрические и механические приложения производной.	
8.2. Дифференциал	283
1. Дифференциал первого порядка. 2. Дифференциалы высших порядков.	
8.3. Исследование функций и построение графиков	288
1. Возрастание и убывание функции. Экстремумы. 2. Направление выпуклости. Точки перегиба. 3. Асимптоты. 4. Построение графиков функций.	
8.4. Правило Лопитала	297
1. Раскрытие неопределенностей типа $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$. 2. Раскрытие неопределенностей типа $0 \cdot \infty$ и $\infty - \infty$. 3. Раскрытие неопределенностей типа 0^0 , ∞^0 , 1^∞ .	
8.5. Формула Тейлора	301
8.6. Векторные и комплексные функции действительной переменной	305
1. Определение вектор-функции действительной переменной. 2. Дифференцирование вектор-функций. 3. Касательная к пространственной кривой и нормальная плоскость. 4. Комплексные функции действительной переменной.	
Глава 9. Интегральное исчисление функции одной переменной	311
9.1. Основные методы вычисления неопределенного интеграла	311

1. Первообразная и неопределенный интеграл. 2. Замена переменной в неопределенном интеграле. 3. Интегрирование по частям неопределенного интеграла	
9.2. Интегрирование основных классов элементарных функций	321
1. Интегрирование рациональных дробей. 2. Интегрирование тригонометрических и гиперболических функций. 3. Интегрирование некоторых иррациональных функций.	
9.3. Определенный интеграл и методы его вычисления	338
1. Определенный интеграл как предел интегральной суммы. 2. Вычисление простейших интегралов с помощью формулы Ньютона — Лейбница. 3. Свойства определенного интеграла. 4. Замена переменной в определенном интеграле. 5. Интегрирование по частям определенного интеграла.	
9.4. Несобственные интегралы	346
1. Несобственные интегралы с бесконечными пределами. 2. Интегралы от неограниченных функций.	
9.5. Геометрические приложения определенного интеграла	356
1. Площадь плоской фигуры. 2. Длина дуги кривой. 3. Площадь поверхности вращения. 4. Объем тела.	
9.6. Приложения определенного интеграла к решению некоторых задач механики и физики	366
Глава 10. Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных	371
10.1. Основные понятия	371
1. Понятие функции нескольких переменных. 2. Предел и непрерывность функций. 3. Частные производные 4. Дифференциал функции и его применение.	
10.2. Дифференцирование сложных и неявных функций	383
1. Сложные функции одной и нескольких независимых переменных. 2. Неявные функции нескольких независимых переменных. 3. Системы неявных и параметрически заданных функций.	
10.3. Приложения частных производных	390
1. Формула Тейлора 2. Экстремум функции 3. Условный экстремум. 4. Наибольшее и наименьшее значения функции 5. Геометрические приложения частных производных.	
Глава 11. Кратные интегралы	401
11.1. Двойной интеграл	401
1. Свойства двойного интеграла и его вычисление в декартовых прямоугольных координатах. 2. Замена переменных в двойном интеграле. 3. Приложения двойных интегралов.	
11.2. Тройной интеграл	412
1. Тройной интеграл и его вычисление в декартовых прямоугольных координатах. 2. Замена переменных в тройном интеграле. 3. Приложения тройных интегралов.	

11.3. Несобственные кратные интегралы	420
1. Интеграл по бесконечной области. 2. Интеграл от разрывной функции.	
11.4. Вычисление интегралов, зависящих от параметра	424
1. Собственные интегралы, зависящие от параметра.	
2. Несобственные интегралы, зависящие от параметра.	
Глава 12. Дифференциальные уравнения	431
12.1. Дифференциальные уравнения 1-го порядка	431
1. Основные понятия. 2. Аналитический метод решения уравнений 1-го порядка. 3. Уравнения с разделяющимися переменными. 4. Однородные уравнения. 5. Линейные уравнения. 6. Уравнение в полных дифференциалах. 7. Уравнения, не разрешенные относительно производной. 8. Смешанные задачи на дифференциальные уравнения 1-го порядка. 9. Геометрические задачи, приводящие к появлению дифференциальных уравнений 1-го порядка.	
12.2. Дифференциальные уравнения высших порядков	466
1. Основные понятия. Теорема Коши 2. Дифференциальные уравнения, допускающие понижение порядка. 3. Линейные однородные уравнения. 4. Линейные неоднородные уравнения.	
12.3. Линейные уравнения с постоянными коэффициентами	482
1. Линейные однородные уравнения с постоянными коэффициентами. 2. Линейные неоднородные уравнения с постоянными коэффициентами. 3. Дифференциальные уравнения Эйлера.	
12.4. Системы дифференциальных уравнений	496
1. Основные понятия. Связь с дифференциальными уравнениями n -го порядка. 2. Методы интегрирования нормальных систем. 3. Физический смысл нормальной системы. 4. Линейные однородные системы. 5. Линейные неоднородные системы.	
12.5. Элементы теории устойчивости	520
1. Основные понятия. 2. Простейшие типы точек покоя. 3. Метод функций Ляпунова. 4. Исследование системы на устойчивость по первому приближению.	
ОТВЕТЫ И УКАЗАНИЯ	533

ПРЕДИСЛОВИЕ

Предлагаемый «Сборник задач по математике» в двух частях предназначен для студентов высших технических учебных заведений, обучающихся по направлениям подготовки бакалавров в области техники и технологий. Его структура соответствует Государственным образовательным стандартам высшего профессионального образования (ГОСВПО) третьего поколения.

В своей работе над задачником авторский коллектив использовал опыт подготовки пособия «Сборник задач по математике для вузов» (части 1—4) под редакцией А. В. Ефимова и А. С. Поспелова (4-е и 5-е издания, 2001—2009 гг.). Вместе с тем отбор тематических разделов предлагаемого сборника задач рассчитан в большей степени на освоение программ подготовки бакалавров, чем специалистов, что предусматривает ряд существенных изменений в методике и глубине изложения материала.

Настоящий «Сборник задач по математике» состоит из 19 глав, приведенный материал в которых обеспечивает изучение всех математических курсов цикла математических и естественно-научных дисциплин (М и ЕН) ГОСВПО третьего поколения. Часть I — введение в анализ, пределы, матрицы и определители, векторная алгебра и аналитическая геометрия, кривые на плоскости, кривые и поверхности в пространстве, системы линейных уравнений, линейная алгебра, дифференциальное исчисление функций одной переменной, интегральное исчисление функций одной переменной, дифференциальное исчисление функций нескольких переменных, кратные интегралы, дифференциальные уравнения. Часть II — дискретная математика, векторный анализ, числовые и функциональные ряды, теория функций комплексной переменной, операционное исчисление, теория вероятностей, математическая статистика.

Каждая глава задачника состоит из параграфов и пунктов, в которых приведены необходимые теоретические сведения (определения, формулировки основных теорем, формулы) и большое число подробно разобранных примеров, и содержит циклы задач для решения как в аудитории, так и при самостоятельной работе студентов.

Р.С. Когда работа над рукописью этой книги подходила к концу, скоропостижно умер ее редактор и соавтор, доктор физико-математических наук, профессор, заслуженный работник высшей школы РФ А. С. Поспелов. Светлая память об Алексее Сергеевиче надолго сохранится в его добрых делах. Авторы уверены, что настоящий задачник — одно из таких дел.

Часть I

**Линейная алгебра
и математический анализ**



Глава 1

ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИЗ

1.1. Действительные числа. Множества и операции над ними. Верхние и нижние грани числовых множеств

1. Понятие действительного числа. Всякое неотрицательное действительное число x представляется *бесконечной десятичной дробью*

$$x = [x], x_1 x_2 \dots, \quad (1.1)$$

где $[x]$ — наибольшее целое число, не превосходящее x и называемое его *целой частью*, а $x_n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ для любого $n \in \mathbb{N}$. При этом дроби, у которых $x_n = 9$ для всех $n \geq n_0$ (n_0 — некоторое натуральное число), обычно исключаются из рассмотрения в силу следующих равенств:

$$[x], 999\dots = [x] + 1,$$

$$[x], x_1 x_2 \dots x_{n_0-1} 999\dots = [x], x_1 x_2 \dots (x_{n_0-1} + 1) \quad (n_0 > 1, x_{n_0-1} \neq 9).$$

Из определения целой части следует, что $x - 1 < [x] \leq x$ для любого действительного числа x .

Дробной частью $\{x\}$ действительного числа x называют разность $x - [x]$. Из определения следует, что $0 \leq \{x\} < 1$ для любого действительного числа x .

Действительное число x *рационально*, т.е. представимо в виде обыкновенной дроби $\frac{m}{n}$, $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, в том и только том случае, когда десятичная дробь (1.1) периодическая. В противном случае число x *иррационально*.

Абсолютной величиной, или *модулем*, действительного числа x называется неотрицательное число

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{если } x \geq 0; \\ -x, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

Два неотрицательных действительных числа

$$\alpha = a_0, a_1 \dots a_n \dots \text{ и } \beta = b_0, b_1 \dots b_n \dots$$

называют *равными* и в этом случае пишут $\alpha = \beta$, если $a_0 = b_0$ и $a_k = b_k$ при всех $k \in \mathbb{N}$. В частности, $\alpha = 0$, если $a_0 = 0$ и $a_k = 0$ при всех $k \in \mathbb{N}$.

Говорят, что число α *меньше* числа β , и пишут $\alpha < \beta$, если $a_0 < b_0$ либо $a_0 = b_0$, однако существует такой номер n , что $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$, ..., $a_{n-1} = b_{n-1}$, но $a_n < b_n$.

Если α — неотрицательное, а β — произвольное отрицательное число, то считают, что $\alpha > \beta$.

Если α и β отрицательны ($\alpha < 0$, $\beta < 0$), то будем считать, что $\alpha = \beta$, если $|\alpha| = |\beta|$, и $\alpha < \beta$, если $|\beta| < |\alpha|$.



ПРИМЕР 1.1. Доказать, что число $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$ является иррациональным.

► Предположим, что число $\alpha = \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$ — рациональное. Тогда $\alpha - \sqrt{2} = \sqrt{3} + \sqrt{5}$. Возводя обе части последнего равенства в квадрат, получим $\alpha^2 - 2\alpha\sqrt{2} + 2 = 3 + 2\sqrt{15} + 5$ или $\frac{\alpha^2}{2} - 3 = \alpha\sqrt{2} + \sqrt{15}$. Возводя обе части последнего ра-

венства в квадрат, получим $\frac{\alpha^4}{4} - 3\alpha^2 + 9 = 2\alpha^2 + 2\alpha\sqrt{30} + 15$

$$\text{или } \sqrt{30} = \frac{\frac{\alpha^4}{4} - 5\alpha^2 - 6}{2\alpha} \quad (\alpha \neq 0).$$

Правая часть последнего равенства — рациональное число. Докажем, что его левая часть — иррациональное число. Предположим обратное, тогда число можно представить в виде $\sqrt{30} = \frac{m}{n}$, где $m, n \in \mathbb{N}$ и дробь $\frac{m}{n}$ несократима.

Возводя в квадрат, получим $\frac{m^2}{n^2} = 30$ или $m^2 = 30n^2$. Отсюда следует, что m — четное, т.е. $m = 2k$, $k \in \mathbb{N}$. Но тогда из равенства $4k^2 = 30n^2$ или $2k^2 = 15n^2$ следует, что и n — четное, т.е. $n = 2l$, $l \in \mathbb{N}$, поэтому дробь $\frac{m}{n} = \frac{2k}{2l}$ сократима, следовательно, пришли к противоречию.

В итоге получаем, что равенство $\sqrt{30} = \frac{\frac{\alpha^4}{4} - 5\alpha^2 - 6}{2\alpha}$,

$\alpha \neq 0$, невозможно, поэтому предположение о том, что $\alpha = \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$ — рациональное, неверно. $\blacktriangleleft$

Доказать, что следующие числа являются иррациональными.

1.1. $\sqrt{3}$. **1.2.** $\sqrt[3]{3}$. **1.3.** $\sqrt[n]{p}$, p — простое число, $n > 1$.

1.4. $\sqrt{3} + \sqrt{2}$. **1.5.** $\sqrt{3 + \sqrt{2}}$. **1.6.** $\sqrt{3} + \sqrt{5} + \sqrt{7}$.

1.7. $\sqrt[3]{3} + \sqrt{5}$. **1.8.** $\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{2}$.

1.9. 0,1011001110001111.... **1.10.** 0,121122111222....

1.11. 2,123456789101112..., где после запятой стоят выписанные подряд все натуральные числа.

Записать в виде обыкновенной дроби числа.

1.12. 0,(25). **1.13.** 0,(243). **1.14.** -1,(7). **1.15.** 5,23(36).

Вычислить выражения.

1.16. $(0,(23) + 0,(37)) \cdot 33$. **1.17.** $0,(2) : 0,(123) \cdot 41$.

1.18. $(0,(32) - 0,(23)) : 0,(25)$.

1.19. $\frac{0,(12) + 0,(3)}{0,(21) + 0,(39)} + 0,(2) : 0,(8)$.

1.20. $2,(54) : 0,3(18)$.

1.21. $121 \cdot 0,(45)$.

1.22. $66 \cdot (0,1(6) + 0,(45))$.

1.23. $0,375 \cdot \sqrt{1,(7)}$.

1.24. $88 \cdot 0,08(3) \cdot 0,(27)$.

1.1.5. Доказать, что между любыми двумя различными действительными числами содержится по крайней мере одно: а) рациональное число; б) иррациональное число.

1.25. Все десятичные приближения числа α по недостатку начиная с некоторого совпадают. Рациональным или иррациональным числом является α ?

Вычислить с точностью, не превышающей ε .

1.26. $6,(3) \cdot 0,9(81)$, $\varepsilon = 10^{-2}$. **1.27.** $0,7(14) \cdot 0,27(16)$, $\varepsilon = 10^{-4}$.

1.28. $3,(6) / 2,(17)$, $\varepsilon = 10^{-2}$. **1.29.** $101,(1) / 2,9(15)$, $\varepsilon = 10^{-4}$.

Записать с помощью знака модуля неравенства.

1.30. $-5 < x < 5$. **1.31.** $-3 < x < 7$.

$$1.32. 4 \leq x^2 \leq 9. \quad 1.33. 4 \leq \frac{1}{x^2} \leq 9.$$

Доказать, что модуль действительного числа обладает следующими свойствами.

$$1.34. |x| = \max\{x; -x\}. \quad 1.35. |x \cdot y| = |x| \cdot |y| \text{ и } \left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}.$$

1.36. $|x + y| \leq |x| + |y|$ и $|x - y| \geq ||x| - |y||$ (неравенства треугольника).

Упростить выражения.

$$1.37. ||2x - 3| - 1| + 2x. \quad 1.38. |2 - |4 + 3x|| - 3x.$$

Решить уравнения.

$$1.39. |2x - 5| = x - 1. \quad 1.40. |x^2 + 4x + 2| = \frac{5x + 16}{3}.$$

$$1.41. 2\sqrt{x-2} + 10 = x. \quad 1.42. \sqrt{22-x} - \sqrt{10-x} = 2.$$

$$1.43. \sqrt{x^2 - 4x + 4} + \sqrt{x^2 - 6x + 9} = 1. \quad 1.44. 2\sqrt[6]{x} + \sqrt[3]{x} = 3.$$

$$1.45. \sqrt[3]{x^2} - 4\sqrt[3]{x} + 3 = 0.$$

Решить неравенства.

$$1.46. |2x - 4| > x - 1. \quad 1.47. |x^2 + 2x - 1| \geq -x - 3.$$

$$1.48. |x^2 - 4x - 3| < 3x - 3. \quad 1.49. |5x - x^2| < x + 4.$$

$$1.50. \sqrt{x^2 + 4x + 4} > 3x - 8. \quad 1.51. \sqrt{x+6} < x.$$

$$1.52. \sqrt{x-2} \geq x-3. \quad 1.53. \sqrt{3x-x^2} \leq 4-x.$$

$$1.54. \sqrt{2x^2 - 3x - 5} \leq x - 1.$$

1.55. Найти целую часть числа $1/\alpha$, если $\alpha > 1/2$.

Доказать утверждения.

1.56. Если $x \notin \mathbb{Z}$, то $[x] + [-x] = -1$.

1.57. $[x] + [x + 1/2] = [2x]$.

1.58. Если $[x + y] = [x] + [y]$ и $[-x - y] = [-x] + [-y]$, то $x \in \mathbb{Z}$.

ПРИМЕР 1.2. Решить уравнение $\left[\frac{5+6x}{8} \right] = \frac{15x-7}{5}$.

► Введем замену $t = \frac{15x-7}{5}$, где $t \in \mathbb{Z}$, тогда $x = \frac{5t+7}{15}$.

Исходное уравнение преобразуется к виду $\left[\frac{10t+39}{40} \right] = t$.

По определению целой части $\alpha - 1 \leq [\alpha] \leq \alpha$. Следовательно,
 $t \leq \frac{10t+39}{40} < t+1$, или $40t \leq 10t+39 < 40t+40$, или
 $0 \leq -30t+39 < 40$, откуда $-\frac{1}{30} < t \leq \frac{39}{30}$. С учетом того что
 t — целое число, получаем $t=0$ или $t=1$.

Если $t=0$, то $x = \frac{7}{15}$; если $t=1$, то $x = \frac{4}{5}$. ◀

Решить уравнения.

1.59. $[6x] = 5$.

1.60. $[x] + [2x] + [3x] = 0$.

1.61. $[2x+2] = [3x]$.

1.62. $\left[\frac{x-3}{2} \right] = \left[\frac{x-2}{3} \right]$.

1.63. $\{x\}^2 - \frac{3}{4}\{x\} + \frac{1}{8} = 0$. **1.64.** $\{x\}^2 - 4,5\{x\} + 2 = 0$.



Если $a_1, a_2, \dots, a_n$ — заданные числа, то их сумма обозначается $\sum_{k=1}^n a_k$, т.е.

$$\sum_{k=1}^n a_k = a_1 + a_2 + \dots + a_n,$$

где k — индекс суммирования.

Сумма не зависит от того, какой буквой обозначен индекс суммирования, а операция суммирования обладает свойством линейности, т.е. для любых действительных чисел α и β справедливо равенство

$$\sum_{k=1}^n (\alpha a_k + \beta b_k) = \alpha \sum_{k=1}^n a_k + \beta \sum_{k=1}^n b_k.$$

Справедливо равенство

$$\sum_{k=m+1}^{m+p} a_k = \sum_{k=1}^p a_{k+m},$$

которое показывает, что если индекс суммирования увеличивается на m единиц, то пределы суммирования ($m+1$ и $m+p$)

уменьшаются на m единиц. В частности, $\sum_{k=1}^{n+1} a_k = \sum_{k=0}^n a_{k+1}$.

Аналогично произведение чисел $a_1, a_2, \dots, a_n$ обозначается

$$\prod_{k=1}^n a_k, \text{ т.е. } \prod_{k=1}^n a_k = a_1 a_2 \dots a_n.$$



Записать выражения без использования знака Σ .

$$1.65. \sum_{k=0}^n \frac{1}{2k-1}.$$

$$1.66. \sum_{k=2}^n (k-k^3).$$

$$1.67. \sum_{k=1}^{20} \frac{1}{k(k+1)}.$$

$$1.68. \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k}.$$

Записать суммы с помощью знака Σ .

$$1.69. \frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{298}. \quad 1.70. 2+5+10+17+\dots+362.$$

$$1.71. \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{20 \cdot 21 \cdot 22}.$$

$$1.72. 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{625}.$$

$$1.73. \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{4} - \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{100} - \frac{1}{10\,000}.$$

ПРИМЕР 1.3. Вычислить сумму $S = \sum_{k=1}^n (a_{k+1} - a_k)$.

► Записав сумму без использования знака Σ и раскрыв скобки, находим

$$\begin{aligned} S &= \sum_{k=1}^n (a_{k+1} - a_k) = a_2 - a_1 + a_3 - a_2 + a_4 - a_3 + \dots + a_{n+1} - a_n = \\ &= a_{n+1} - a_1. \end{aligned}$$

► **ПРИМЕР 1.4.** Вычислить сумму $S = \sum_{k=1}^{49} \frac{1}{(2k+1)(2k+3)}$.

► Так как

$$\frac{1}{(2k+1)(2k+3)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+3} \right),$$

то

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{49} \left(\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+3} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7} \right) + \dots + \left(\frac{1}{97} - \frac{1}{99} \right) + \left(\frac{1}{99} - \frac{1}{101} \right) \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{101} \right) = \frac{49}{303}. \end{aligned}$$

► **ПРИМЕР 1.5.** Вычислить сумму $S = \sum_{k=1}^n k^2$.

Рассмотрим тождество

$$(x+1)^3 - x^3 = 3x^2 + 3x + 1.$$

Полагая в этом тождестве $x = 1, 2, \dots, n$ и складывая почленно получаемые равенства, находим

$$\sum_{k=1}^n ((k+1)^3 - k^3) = 3 \sum_{k=1}^n k^2 + 3 \sum_{k=1}^n k + n.$$

Так как $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$, а $\sum_{k=1}^n ((k+1)^3 - k^3) = (n+1)^3 - 1$, то полученное равенство преобразуется к виду

$$(n+1)^3 - 1 = 3S + \frac{3}{2}n(n+1) + n.$$

Отсюда

$$S = \frac{1}{6}(2n^3 + 3n^2 + n) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \quad \blacktriangleleft$$

Вычислить суммы.

1.74. $\sum_{k=1}^n (2k-1).$

1.75. $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}.$

1.76. $\sum_{k=1}^n (3k^2 - 3k + 1).$

1.77. $\sum_{k=1}^n k(k+1).$

1.78. $\sum_{k=1}^n k^3.$

2. Логическая символика. При записи математических рассуждений целесообразно применять экономную символику, используемую в логике. Укажем здесь несколько наиболее употребительных символов.

Пусть $\alpha, \beta, \dots$ — некоторые *высказывания* или *утверждения*, т.е. повествовательные предложения, относительно каждого из которых можно сказать истинно оно или ложно.

Запись $\bar{\alpha}$ означает «не α », т.е. *отрицание* утверждения α .

Запись $\alpha \Rightarrow \beta$ означает «из утверждения α следует утверждение β » ($\Rightarrow$ — символ *импликации*).

Запись $\alpha \Leftrightarrow \beta$ означает «утверждение α эквивалентно утверждению β », т.е. из α следует β и из β следует α ($\Leftrightarrow$ — символ *эквивалентности*).

Запись $\alpha \wedge \beta$ означает « α и β » ($\wedge$ — символ *конъюнкции*).

Запись $\alpha \vee \beta$ означает « α или β » ($\vee$ — символ *дизъюнкции*).

Запись $\forall x \in X \alpha(x)$ означает «для всякого элемента $x \in X$ истинно утверждение $\alpha(x)$ » ($\forall$ — квантор *всеобщности*).

Запись $\exists x \in X \alpha(x)$ означает «существует элемент $x \in X$ такой, что для него истинно утверждение $\alpha(x)$ » ($\exists$ — квантор *существования*).

Если элемент $x \in X$, для которого истинно утверждение $\alpha(x)$, не только существует, но и единственен, то пишут $\exists! x \in X \alpha(x)$.



ПРИМЕР 1.6. Записать отрицания следующих высказываний:

а) $\forall x \in X \alpha(x)$; б) $\exists x_0 \in X : \alpha(x_0)$.

► а) Отрицание высказывания $\forall x \in X \alpha(x)$ можно образовать двумя способами:

1) поставить знак отрицания над всем высказыванием $\overline{\forall x \in X \alpha(x)}$;

2) записать отрицание высказывания $\forall x \in X \alpha(x)$ в виде $\exists x_0 \in X : \alpha(x_0)$, т.е. заменить знак всеобщности $\forall$ на знак существования $\exists$, а высказывание $\alpha(x)$ — на его отрицание $\alpha(x)$. Это означает, что в множестве X найдется (хотя бы один) элемент x_0 для которого утверждение $\alpha(x)$ ложно. Равносильность двух способов построения отрицания следует из равенства

$$\overline{\forall x \in X \alpha(x)} = \exists x_0 \in X : \overline{\alpha(x_0)}.$$

Это равенство означает, что $\alpha(x)$ истинно не для всех $x \in X$ тогда и только тогда, когда существует $x_0 \in X$, для которого $\alpha(x_0)$ ложно.

б) Отрицание высказывания $\exists x_0 \in X : \alpha(x_0)$ также можно образовать двумя способами:

1) поставить знак отрицания над всем высказыванием: $\overline{\exists x_0 \in X : \alpha(x_0)}$;

2) записать отрицание высказывания $\exists x_0 \in X : \alpha(x_0)$ в виде $\forall x \in X \alpha(x)$, т.е. заменить знак $\exists$ на знак $\forall$, а высказывание $\alpha(x)$ — на его отрицание $\alpha(x)$.

Равносильность двух способов построения отрицания следует из равенства

$$\overline{\exists x_0 \in X : \alpha(x_0)} = \forall x \in X \alpha(x).$$

Это равенство означает, что не существует $x_0 \in X$, для которого $\alpha(x_0)$ истинно тогда и только тогда, когда $\alpha(x)$ ложно для всех $x \in X$. $\blacktriangleleft$

ПРИМЕР 1.7. Используя логические символы, записать утверждение: «функция $f: X \rightarrow \mathbb{R}$, $X \subset \mathbb{R}$, непрерывна в точке $a \in X$ », а также его отрицание.

► Исходное утверждение записывается следующим образом:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in X (|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon)$$

(для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что для любого числа $x \in X$, удовлетворяющего условию $|x - a| < \delta$, выполняется условие $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$). Тогда отрицание этого утверждения имеет вид:

$$\exists \varepsilon > 0 \forall \delta > 0 \exists x \in X (|x - a| < \delta \wedge |f(x) - f(a)| \geq \varepsilon)$$

(существует $\varepsilon > 0$ такое, что для любого $\delta > 0$ найдется число $x \in X$, удовлетворяющее условию $|x - a| < \delta$ и $|f(x) - f(a)| \geq \varepsilon$). $\blacktriangleleft$

Прочитать приведенные высказывания, выяснить их смысл и установить, истинны они или ложны (символами x, y, z, a, b, c всюду, где это специально не оговаривается, обозначены действительные числа).

1.79. а) $\forall x \exists y (x + y = 3)$; б) $\exists x \forall y (x + y = 3)$;

в) $\exists x, y (x + y = 3)$; г) $\forall x, y (x + y = 3)$.

1.80. $\exists x, y (x > y > 0 \wedge x + y = 0)$.

1.81. $\forall x, y (x < y) \Leftrightarrow \forall z (x < z < y)$.

1.82. $\forall x (x^2 > x \Leftrightarrow x > 1 \vee x < 0)$.

1.83. $\forall x (x > 2 \wedge \overline{x > 3} \Leftrightarrow 2 < x \leq 3)$.

1.84. а) $\forall a, b, c (\exists x (ax^2 + bx + c > 0) \Leftrightarrow b^2 - 4ac \geq 0)$;

б) $\forall a, b, c (\forall x (ax^2 + bx + c > 0) \Leftrightarrow b^2 - 4ac < 0 \wedge a > 0)$.

1.85. а) $\forall b \exists a \forall x (x^2 + ax + b > 0)$;

б) $\exists b \forall a \exists x (x^2 + ax + b = 0)$;

в) $\exists a \forall b \exists x (x^2 + ax + b = 0)$.

Записать приведенные высказывания с использованием логической символики, а также сформулировать и записать их отрицания.

1.86. а) Число x_0 есть решение уравнения $f(x) = 0$.

б) Число x_0 есть единственное решение уравнения $f(x)=0$.

в) Уравнение $f(x)=0$ имеет единственное действительное решение.

1.87. а) Число $m \in \mathbb{N}$ является делителем числа $n \in \mathbb{Z}$, или в краткой записи: $m \mid n$.

б) Если число $n \in \mathbb{Z}$ делится на 2 и на 3, то оно делится на 6.

в) Число $p \in \mathbb{N}$ простое.

3. Множества и операции над ними. Под *множеством* понимается любая совокупность объектов, называемых *элементами* множества. Запись $a \in A$ означает, что объект a есть элемент множества A (принадлежит множеству A); в противном случае пишут $a \notin A$.

Множество, не содержащее элементов, называют *пустым* и обозначают $\emptyset$.

Множества A и B *равны*, если они состоят из одних и тех же элементов, в этом случае пишут $A = B$.

Если любой элемент множества A принадлежит множеству B , то множество A называется *подмножеством* множества B и обозначается $A \subset B$. Если $A \subset B$ и $B \subset A$, то $A = B$.

Существуют два основных способа задания (описания) множеств.

а) Множество A определяется непосредственным перечислением всех своих элементов $a_1, a_2, \dots, a_n$, т.е. записывается в виде

$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}.$$

б) Множество A определяется как совокупность тех и только тех элементов из некоторого основного множества T , которые обладают общим свойством P . В этом случае используется символическая запись

$$A = \{x \in T \mid P(x)\},$$

где запись $P(x)$ означает, что элемент x обладает свойством P .

ПРИМЕР 1.8. Записать символически и перечислением элементов множество A , элементами которого являются все целые числа, квадрат которых не превосходит 25.

► Решением неравенства $x^2 \leq 25$ на множестве $\mathbb{Z}$ являются все целые числа, принадлежащие промежутку $[-5, 5]$,

т.е. $-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5$. Следовательно, можно записать

$$A = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 \leq 25\} = \{-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}.$$

Записать символически множества с определенными для них элементами.

1.88. Все целые числа, делящиеся на 7.

1.89. Все неотрицательные числа, отличные от 2 и 3.

1.90. Все целые числа, дающие остаток 1 при делении на 5.

1.91. Все целые числа, являющиеся полными квадратами.

1.92. Все точки отрезка $[a, b]$.

1.93. Все решения уравнения $|x| - x = 0$.

1.94. Все точки координатной плоскости, находящиеся на расстоянии r от начала координат.

Установить, верны ли утверждения.

1.95. $3 \in \{x \in \mathbb{R} \mid x^3 - 2x^2 - 4x + 3 = 0\}.$

1.96. $2 \in \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{x^3 - 3x^2}{3 - 4x} \geq 0\right\}.$

1.97. $2 \in \left\{x \in \mathbb{Q} \mid \exists n \in \mathbb{N} : x = \frac{2n+2}{3n-5}\right\}.$

1.98. $\emptyset \in \emptyset.$

1.99. $\emptyset \in \{\emptyset\}.$

1.100. $\{1, 2, 3\} \in \mathbb{N}.$ **1.101.** $[0, 1] \subset [-2, 2].$

1.102. Выписать все подмножества множества M .

а) $M = \{1, 2\}.$ б) $M = \{1, 2, 3\};$ в) $M = \{a, b, c, d\}.$

Установить, верны ли утверждения.

1.103. $\{1, 2, 3\} \subset \mathbb{N};$

1.104. $\{-3, -2, 2, 3\} \subset \{x \mid x^5 - 13x^3 + 36x = 0\};$

1.105. $\{x \in \mathbb{R} \mid x^3 - 3x^2 - 4x + 12 = 0\} \subset \{-3, -2, 0, 3\};$

1.106. $\emptyset \subseteq \emptyset;$

1.107. $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 5x + 6 = 0\} \subseteq \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 9 \leq 0\}.$



Объединением множеств A и B (обозначается $A \cup B$) называется множество

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ или } x \in B\}.$$

Пересечением множеств A и B (обозначается $A \cap B$) называется множество

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \in B\}.$$

Два множества называются *непересекающимися*, если $A \cap B = \emptyset$.

Разностью множеств A и B (обозначается $A \setminus B$) называется множество

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \notin B\}.$$

Если $A \subset B$, то разность $B \setminus A$ называется *дополнением* множества A до множества B и обозначается $\overline{A}_B$.

В случае когда рассматриваемые множества являются подмножествами некоторого основного или *универсального множества U* , *дополнением множества A до множества U* или просто *дополнением $\overline{A}$* называется множество $\overline{A} = \{x \in U \mid x \notin A\}$.

Множество всех упорядоченных пар (a, b) , где $a \in A, b \in B$, называется *прямым* или *декартовым произведением* множеств A и B и обозначается $A \times B$. Аналогично определяется прямое (декартово) произведение n множеств $A_1, A_2, \dots, A_n$:

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) \mid a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \dots, a_n \in A_n\}.$$

Соответственно, $\underbrace{A \times A \times \dots \times A}_{n \text{ раз}}$ обозначают A^n .

ПРИМЕР 1.9. Заданы множество $A = (-4, 7)$ и множество $B = [-1, 2)$. Найти $A \cup B$, $A \cap B$, $B \setminus A$, $A \setminus B$, $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{A \cap B}$, считая, что $\mathbb{R}$ — универсальное множество.

► Поскольку $B \subset A$, то $A \cup B = A = (-4, 7)$ и $A \cap B = B = [-1, 2)$, $B \setminus A = \emptyset$ и $A \setminus B = (-4, -1) \cup [2, 7)$.

В соответствии с определением дополнения множества, получаем, что множество $\overline{A} = \mathbb{R} \setminus A$, т.е. $\overline{A} = (-\infty, -4] \cup [7, +\infty)$.

Аналогично $\overline{B} = (-\infty, -1) \cup [2, +\infty)$. Замечаем, что $\overline{A} \subset \overline{B}$.

Отсюда $\overline{A \cap B} = \overline{A}$. ◀

Для данных множеств A и B найти и изобразить на числовой прямой множества $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{A \cap B}$.

1.108. $A = (-3, 3]$, $B = [0, 5]$. **1.109.** $A = (-2, 2]$, $B = [-4, 6)$.

1.110. Для данных множеств A и B определить, что представляет собой множество $A \cap B$, если:

а) A — множество всех целых чисел, делящихся на 2, B — множество всех целых чисел, делящихся на 7;

б) A — множество всех целых чисел, делящихся на 30, B — множество всех целых чисел, делящихся на 45.

Для данных множеств точек X и Y определить, что представляет собой множество $X \times Y$.

1.111. $X = [-3, 3]$ — отрезок на оси Ox , $Y = [0, 5]$ — отрезок на оси Oy .

1.112. $X = [0, 1] \cup [2, 3]$ — на оси Ox , $Y = [0, 1] \cup [2, 3]$ — на оси Oy .

1.113. $X = \mathbb{R}$, $Y = \mathbb{R}$.



Для любых множеств выполняются следующие свойства операций:

- $A \cup B = B \cup A$ и $A \cap B = B \cap A$ (коммутативность).
- $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ и $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ (ассоциативность).
- $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$ и $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$ (дистрибутивность одной операции относительно другой).
- $A \cup A = A$ и $A \cap A = A$ (идемпотентность).
- $A \cup \bar{B} = \bar{B} \cap \bar{A}$ и $A \cap \bar{B} = \bar{B} \cup \bar{A}$ (законы де Моргана).



ПРИМЕР 1.10. Доказать двумя способами (с помощью таблицы истинности и методом эквивалентных переходов) закон де Моргана $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$.

- 1. Заполним таблицу и сравним столбцы значений множеств $\overline{A \cup B}$ и $\bar{A} \cap \bar{B}$.

A	B	$A \cup B$	$\overline{A \cup B}$	$\bar{A}$	$\bar{B}$	$\bar{A} \cap \bar{B}$
0	0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0	0
1	0	1	0	0	1	0
1	1	1	0	0	0	0

Так как столбцы совпадают, то множества в обеих частях доказываемого равенства также совпадают.

2. Рассмотрим произвольный элемент x

$$x \in \overline{A \cup B} \Leftrightarrow x \notin (A \cup B) \Leftrightarrow (x \notin A \wedge x \notin B) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (x \in \bar{A} \wedge x \in \bar{B}) \Leftrightarrow x \in \bar{B} \cap \bar{A}.$$

Следовательно, выполняя переходы слева направо, можно показать, что если $x \in \overline{A \cup B}$, то $x \in \bar{B} \cap \bar{A}$. Аналогично, выполняя переходы справа налево, убеждаемся, что если $x \in \bar{B} \cap \bar{A}$, то $x \in \overline{A \cup B}$. Это означает, что множества, стоящие в обеих частях равенства, состоят из одних и тех же элементов, т. е. совпадают. ◀

Доказать свойства операций.

$$1.114. (A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C).$$

$$1.115. \overline{A \cap B} = \bar{B} \cup \bar{A}.$$

$$1.116. A \setminus (A \setminus B) = A \cap B.$$

$$1.117. A \setminus (A \cap B) = (A \cup B) \setminus B.$$

$$1.118. A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C).$$

$$1.119. A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C).$$

1.120. Для каждого $x \in A$ положим $M_x = A \setminus \{x\}$. Найти пересечение всех множеств M_x .

1.121. Даны два разбиения множества M на непересекающиеся подмножества: $M = A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n$ и $M = B_1 \cap B_2 \cap \dots \cap B_k$. Будут ли образовывать разбиение множества M всевозможные подмножества $A_i \cap B_j$ ($1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq k$)?

Упростить выражения.

$$1.122. A \cap (A \cup B). \quad 1.123. (A \cap B) \cap (B \cap A).$$

$$1.124. (A \cap B) \cup (B \cap A). \quad 1.125. \overline{A \setminus B} \cap (\bar{B} \cup \bar{A}).$$

1.126. Для данных множеств $A = \{x \mid x = 3n + 1, n \in \mathbb{N}\}$, $B = \{x \mid x = 5n - 2, n \in \mathbb{N}\}$ и $C = \{x \mid x = 2n + 1, n \in \mathbb{N}\}$ определить, что представляет собой множество D , если

$$a) D = A \cap B \cap C; \quad б) D = (A \cap B) \cup C.$$



Объединение конечного числа множеств A_i ($1 \leq i \leq n$) обозначают $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$ или $\bigcup_{i=1}^n A_i$.

Пересечение конечного числа множеств A_i ($1 \leq i \leq n$) обозначают $A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n$ или $\bigcap_{i=1}^n A_i$.



Для заданных семейств множеств A_n , $n \in \mathbb{N}$, найти $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ и $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$.

1.127. $A_n = \{x \in \mathbb{Z} \mid -n \leq x \leq n\}$. **1.128.** $A_n = \{3n-2, 3n-1\}$.

1.129. $A_n = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}\right\}$.



Через $|X|$ обозначают число элементов конечного множества. Пусть $X_1, X_2, \dots, X_n$ — конечные множества, тогда верна формула

$$\left| \bigcup_{i=1}^n X_i \right| = |X_1| + \dots + |X_n| - \underbrace{(|X_1 \cap X_2| + \dots + |X_{n-1} \cap X_n|)}_{\text{все парные пересечения}} + \dots + (-1)^{n-1} |X_1 \cap X_2 \cap \dots \cap X_n|, \quad (1.2)$$

называемая *формулой включений и исключений* для n конечных множеств.



Пусть X_1, X_2, X_3 — конечные множества. Доказать.

1.130. $|X_1 \cup X_2| = |X_1| + |X_2| - |X_1 \cap X_2|$.

1.131. $|X_1 \cup X_2 \cup X_3| = |X_1| + |X_2| + |X_3| - |X_1 \cap X_2| - |X_1 \cap X_3| - |X_2 \cap X_3| + |X_1 \cap X_2 \cap X_3|$.

1.132. Множества трехзначных натуральных чисел A , B и C таковы, что элементами множества A являются числа, кратные 3; B — кратные 5 и C — кратные 7. Определить $|A \cup B|$, $|B \cup C|$, $|A \cup C|$ и $|A \cup B \cup C|$.

1.133. Пусть A — некоторое подмножество множества натуральных чисел. Причем каждый элемент множества A — число, кратное 2, 3 или 5. Найти число элементов в множестве A , если среди них имеется 70 чисел, кратных 2, 60 чисел, кратных 3, 80 чисел, кратных 5, 32 числа, кратных 6, 35 чисел, кратных 10, 38 чисел, кратных 15 и 20 чисел, кратных 30.



Множество X называется *счетным*, если может быть установлено взаимно однозначное соответствие между элементами этого множества и элементами множества $\mathbb{N}$ всех натуральных чисел.



1.138. $A = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x \in \mathbb{Q} \text{ и } y \in 2^n, n \in \mathbb{Z}\}$.

1.139. Множество всех точек координатной плоскости с рациональными координатами.

1.140. Множество всех многочленов с рациональными коэффициентами.

4. Верхние и нижние грани числовых множеств. Пусть X — произвольное непустое множество действительных чисел. Число $M = \max X$ называется *наибольшим (максимальным)* элементом множества X , если $M \in X$ и для всякого $x \in X$ выполняется неравенство $x \leq M$. Аналогично определяется понятие *наименьшего (минимального)* элемента $M = \min X$ множества X .

Множество X называется *ограниченным сверху*, если существует действительное число a такое, что $x \leq a$ для всех $x \in X$. Всякое число, обладающее этим свойством, называется *верхней гранью* множества X . Для заданного ограниченного сверху множества X множество всех его верхних граней имеет наименьший элемент, который называется *точной верхней гранью* множества X и обозначается символом $\sup X$.

Аналогично определяются понятия *ограниченного снизу* множества, *нижней* и *точной нижней грани* множества X , последняя обозначается символом $\inf X$.

Множество X , ограниченное сверху и снизу, называется *ограниченным*.

1.141. Доказать, что приведенное выше определение точной верхней грани эквивалентно следующему.

Число M есть точная верхняя грань множества X тогда и только тогда, когда

1) $x \leq M$ для всех $x \in X$;

2) для всякого $\varepsilon > 0$ найдется элемент $x \in X$ такой, что $x > M - \varepsilon$.

1.142. Пусть $X = \left\{ x \in \mathbb{Q} \mid x = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N} \right\}$.

а) Указать наибольший и наименьший элементы множества X , если они существуют.

б) Каковы множества верхних и нижних граней для множества X . Найти $\sup X$ и $\inf X$.

Для следующих множеств найти $\min X$, $\max X$, $\inf X$ и $\sup X$, если они существуют.

$$1.143. X = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{1}{2^n}, n \in \mathbb{N} \right\}. \quad 1.144. X = [-1; 1].$$

$$1.145. X = \{x \in \mathbb{Z} \mid -6 \leq x < 1\}. \quad 1.146. X = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}.$$

$$1.147. X = \left\{ x \in \mathbb{Q} \mid x = \frac{m}{n}, m, n \in \mathbb{N} \text{ и } m < n \right\}.$$

1.148. Пусть $X = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2\}$. Показать, что множество X не имеет наибольшего элемента. Найти $\sup X$.

1.149. Пусть $X \subset \mathbb{R}$ — произвольное ограниченное множество. Доказать, что множество $Z = \{z \mid z = -x, x \in X\}$ также ограничено и справедливы равенства

$$\sup Z = -\inf X, \quad \inf Z = -\sup X.$$

1.150. Пусть $X, Y \subset \mathbb{R}$ — произвольные ограниченные сверху множества. Доказать, что множество

$$Z = \{z \in \mathbb{R} \mid z = x + y, x \in X, y \in Y\}$$

ограничено сверху и

$$\sup Z = \sup X + \sup Y.$$

1.151. Пусть $X \subset \mathbb{R}$ — ограниченное сверху и $Y \subset \mathbb{R}$ — ограниченное снизу множества. Доказать, что множество

$$Z = \{z \in \mathbb{R} \mid z = x - y, x \in X, y \in Y\}$$

ограничено сверху и

$$\sup Z = \sup X - \inf Y.$$

1.2. Метод математической индукции.

Элементы комбинаторики. Бином Ньютона

1. Метод математической индукции. Для доказательства истинности некоторого утверждения, зависящего от $n \in \mathbb{N}$, для всех значений $n \geq n_0$ используется следующее утверждение.

Принцип математической индукции. Утверждение $A(n)$ является истинным для всех n , если выполнены следующие условия:

1. Утверждение $A(1)$ истинно (*базис индукции*).
2. Для любого натурального k из предположения, что утверждения $A(1), A(2), \dots, A(k)$ истинны, следует, что $A(k+1)$ также истинно (*индуктивный переход*).

Предположение об истинности $A(1), A(2), \dots, A(k)$ называется *предположением индукции*.

В ряде случаев базис индукции можно заменить на предположение об истинности $A(n_0)$, где n_0 — фиксированное число, и соответствующим образом изменить предположение индукции. Кроме того, предположением индукции можно считать истинность $A(k)$, а индуктивным переходом — $A(k)$ истинно $\Rightarrow$ истинно $A(k+1)$.



ПРИМЕР 1.13. Доказать, что

$$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \dots + n \cdot n! = (n+1)! - 1.$$

- Пусть $A(n)$ означает, что рассматриваемое равенство выполняется для данного натурального n . При $n=1$ имеем верное равенство $1 \cdot 1! = (1+1)! - 1$. Следовательно, $A(1)$ истинно. Докажем справедливость перехода $A(k) \Rightarrow A(k+1)$. Пусть

$$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \dots + k \cdot k! = (k+1)! - 1.$$

Тогда

$$\begin{aligned} 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \dots + k \cdot k! + (k+1) \cdot (k+1)! &= (k+1)! - 1 + \\ + (k+1) \cdot (k+1)! &= (k+1)! (k+1+1) - 1 = (k+2)! - 1. \end{aligned}$$

Равенство доказано. 

ПРИМЕР 1.14. Доказать, что

$$\left(1 - \frac{4}{1}\right) \cdot \left(1 - \frac{4}{9}\right) \cdot \left(1 - \frac{4}{25}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{4}{(2n-1)^2}\right) = \frac{1+2n}{1-2n}.$$

- Пусть $n=1$. Тогда $1 - \frac{4}{1} = -3$ и $\frac{1+2}{1-2} = -3$, так что равенство справедливо.

Предположим, что при $n=k$ справедливо равенство

$$\left(1 - \frac{4}{1}\right) \cdot \left(1 - \frac{4}{9}\right) \cdot \left(1 - \frac{4}{25}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{4}{(2k-1)^2}\right) = \frac{1+2k}{1-2k}.$$

Выведем из этого предположения справедливость доказываемого равенства при $n = k + 1$. Используя предположение индукции, получаем

$$\underbrace{\left(1 - \frac{4}{1}\right) \cdot \left(1 - \frac{4}{9}\right) \cdot \left(1 - \frac{4}{25}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{4}{(2k-1)^2}\right)}_{=\frac{1+2k}{1-2k}} \cdot \left(1 - \frac{4}{(2k+1)^2}\right) =$$

$$= \frac{1+2k}{1-2k} \cdot \left(1 - \frac{4}{(2k+1)^2}\right) = \frac{(2k+3)(2k-1)}{(1-2k)(2k+1)} = \frac{(1+2(k+1))}{1-2(k+1)}.$$

Следовательно, исходное предположение справедливо при всех $n \in \mathbb{N}$. ◀

Доказать справедливость равенств при всех натуральных значениях $n > 1$.

$$1.152. \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

$$1.153. \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

$$1.154. \sum_{k=1}^n k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

$$1.155. \sum_{k=1}^n (k-1)k = \frac{(n-1)n(n+1)}{3}.$$

$$1.156. \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}.$$

$$1.157. \sum_{k=1}^n k(k+1)(k+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}.$$

$$1.158. \sum_{k=1}^n (2k-1) = n^2. \quad 1.159. \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{1}{(k+1)^2}\right) = \frac{n+2}{2n+2}.$$

$$1.160. \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{4}{(2k-1)^2}\right) = \frac{1+2n}{1-2n}.$$

$$1.161. \prod_{k=1}^n \cos(2^k x) = \frac{\sin(2^{n+1} x)}{2^{n+1} \sin x}.$$

$$1.162. \sum_{k=1}^n \cos kx = \frac{\cos \frac{(n+1)x}{2} \sin \frac{nx}{2}}{\sin \frac{x}{2}}.$$

$$1.163. \sum_{k=1}^n \sin kx = \frac{\sin \frac{(n+1)x}{2} \sin \frac{nx}{2}}{\sin \frac{x}{2}}.$$

Вычислив значения сумм для $n = 1, 2, 3, \dots$, вывести формулы для их нахождения и доказать их справедливость при всех натуральных значениях $n > 1$.

$$1.164. \sum_{k=1}^n \frac{1}{(3k-2)(3k+1)}. \quad 1.165. \sum_{k=1}^n \frac{1}{(6k-1)(6k+5)}.$$

Доказать справедливость равенств для любого натурального $n \geq 2$.

$$1.166. a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-2}) = \\ = (a-b) \sum_{k=1}^n a^{n-k} b^{k-1}.$$

$$1.167. a^{2n+1} - b^{2n+1} = (a-b)(a^{2n} + a^{2n-1}b + \dots + ab^{2n-1} + b^{2n}) = \\ = (a-b) \sum_{k=1}^{2n+1} a^{2n+1-k} b^{k-1}.$$

$$1.168. a^{2n+1} + b^{2n+1} = (a-b)(a^{2n} - a^{2n-1}b + \dots - ab^{2n-1} + b^{2n}) = \\ = (a+b) \sum_{k=1}^{2n+1} a^{2n+1-k} (-1)^{k-1} b^{k-1}.$$

1.169. Доказать, что при любом натуральном n и любом $x \in \mathbb{R}$ $|\sin nx| \leq n |\sin x|$.

1.170. Доказать, что при любом натуральном n число $a_n = n^3 + 3n^2 + 5$ делится на 3.

1.171. Доказать, что при любом натуральном n число $a_n = n^3 + 11n$ делится на 6.

1.172. Доказать, что сумма кубов любых трех последовательных натуральных чисел делится на 9.

1.173. Доказать, что при любом натуральном n число $a_n = 4^n + 15n - 1$ делится на 9.

1.174. Доказать, что при любом натуральном n число $a_n = 10^n + 18n - 1$ делится на 27.

1.175. Доказать, что при любом натуральном n число $a_n = 3^{n+1} + 2^n \cdot 5^{n+2}$ делится на 7.

1.176. Доказать, что при любом натуральном $n \geq 10$ справедливо неравенство $2^n > n^3$.

1.177. Доказать, что при любом натуральном $n \geq 2$ справедливо неравенство $\frac{(2n)!}{(n!)^2} > \frac{4^n}{n+1}$.

Найти все такие натуральные n , для которых справедливы неравенства:

$$\mathbf{1.178.} \quad 3^n \geq 2(n+1)^2. \qquad \mathbf{1.179.} \quad 5^n \geq 5n^3 + 2.$$

2. Основные законы и формулы комбинаторики. Для подсчета числа решений комбинаторных задач используются формулы, основанные на двух простых правилах, называемых *правилами произведения и суммы*.

Правилом суммы называют утверждение: если элемент x можно выбрать k способами, а элемент y — m способами, причем любой выбор элемента x отличен от любого выбора элемента y , то выбор x или y можно сделать $k + m$ способами.

Правило обобщается на случай: если множества $X_1, X_2, \dots, X_n$ попарно не имеют общих элементов, т.е. $X_i \cap X_j = \emptyset$ при $i \neq j$, и $|X_1| = k_1, |X_2| = k_2, \dots, |X_n| = k_n$, то число выборов элемента из множества $X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_n$ равно $k_1 + k_2 + \dots + k_n$.

Правилом произведения называют утверждение: если даны два множества X и Y , состоящие соответственно из k и m элементов, то пару (x, y) такую, что $x \in X, y \in Y$, можно составить km способами.

Правило обобщается на случай, когда выбирается не пара, а тройка, четверка элементов и т.д.: если элемент x_1 можно выбрать k_1 способами, элемент x_2 — k_2 способами, ..., элемент x_m — k_m способами, то набор $(x_1, x_2, \dots, x_m)$ можно выбрать $k_1 \times k_2 \times \dots \times k_m$ способами.

ПРИМЕР 1.15. Бросают две игральные кости с шестью гранями каждая (рис. 1.1). Сколькими способами они могут упасть так, чтобы на каждой кости выпадало четное либо нечетное число очков?

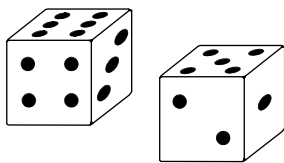


Рис. 1.1

► Пусть k — число способов выпадения на каждой кости четного числа очков, m — число способов выпадения на каждой кости нечетного числа очков. Тогда по правилу суммы искомое число равно $k + m$.

Пусть k_1 — число способов выпадения четного числа очков на первой

кости, а k_2 — число способов выпадения четного числа очков на второй кости. Тогда $k_1 = k_2 = 3$ и по правилу произведения $k = k_1 \cdot k_2 = 9$. Аналогично получаем, что $m = 9$. Следовательно, искомое число способов равно $k + m = 9 + 9 = 18$. ◀



Упорядоченный набор $(x_1, x_2, \dots, x_m)$, где $x_i \in X_i$, называется *кортежем длины m* , составленным из элементов множеств $X_1, X_2, \dots, X_m$, и является элементом декартова произведения $X_1 \times X_2 \times \dots \times X_m$. Элемент x_i ($1 \leq i \leq m$) называют *i -й компонентой* или *i -й координатой* кортежа $(x_1, x_2, \dots, x_m)$. Если все множества X_i равны X , то $(x_1, x_2, \dots, x_m)$ называется *кортежем длины m* , составленным из элементов множества X .

Два кортежа $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $(y_1, y_2, \dots, y_k)$ считаются *равными*, если длина их одинакова, а их компоненты, имеющие одинаковые номера, равны.



ПРИМЕР 1.16. Сколько различных кортежей длины k можно составить из элементов множества $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, если это множество не содержит одинаковых элементов?

► Используя определение равенства кортежей, получаем, что два кортежа одинаковой длины различны, если они различаются порядком следования элементов. Будем из элементов $x_1, x_2, \dots, x_n$, составлять различные кортежи. Так, на первую позицию можно поместить любой из n элементов $x_1, x_2, \dots, x_n$, на вторую — уже любой из $n - 1$ элементов, а различных способов для заполнения первых двух позиций по правилу произведения получается $n(n - 1)$. Далее аналогично, на третью — любой из $n - 2$ элементов, а различных способов для заполнения первых трех позиций получается $n(n - 1)(n - 2)$, и т.д. Окончательно получаем, что общее число кортежей длины k , форми-

руемых из различных элементов n -элементного множества, равно $n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{k!}$. ◀

ПРИМЕР 1.17. Сколько различных кортежей длины k можно составить из элементов множества $X = X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_n$, где каждое множество X_i состоит из k или более одинаковых элементов x_i , причем все элементы $x_1, x_2, \dots, x_n$ различны?

- По аналогии с предыдущим примером будем из элементов $x_1, x_2, \dots, x_n$ составлять различные кортежи. Так как на первую позицию можно поместить любой из n элементов $x_1, x_2, \dots, x_n$ и на вторую также любой из n элементов, то различных способов для заполнения первых двух позиций по правилу произведения получается $nn = n^2$. Далее аналогично, на третью — любой из n элементов, а различных способов для заполнения первых трех позиций получается n^3 , и т.д. Окончательно получаем, что общее число кортежей длины k в этой задаче равно $\underbrace{nn \dots n}_{k \text{ раз}} = n^k$. ◀

1.180. Сколькими способами можно расставить на книжной полке подряд друг за другом книги десятичного собрания сочинений?

1.181. В подземную пещеру ведут шесть путей. Сколько туристических маршрутов посещения можно составить, чтобы спуск и подъем происходили по различным путям?

1.182. Сколькими способами можно сделать флаг, содержащий семь вертикальных полос одинаковой ширины красного, белого и синего цвета, причем любые две соседние полосы должны быть разных цветов?

1.183. В некотором государстве нет двух жителей с одинаковым набором зубов. Какова может быть наибольшая численность этого государства, если у человека может быть не более 32 зубов?

1.184. Сколько пятизначных чисел можно составить из цифр 1, 3, 4, 6, 7, 9, чтобы каждая цифра входила в число не более одного раза? Найти сумму всех этих чисел.

1.185. Сколько существует четырехзначных чисел, в которых две единицы стоят рядом, а остальные цифры различны и не равны единице? Сколько существует аналогичных пятизначных чисел?

1.186. Сколькими способами можно на шахматной доске расставить восемь ладей, чтобы они не били друг друга, если: а) ладьи неразличимы; б) ладьи различимы (например, пронумерованы)?

1.187. Сколько существует пятизначных чисел, которые одинаково читаются слева направо и справа налево? Сколько существует аналогичных шестизначных чисел?

1.188. Пусть $p_1, p_2, \dots, p_k$ — различные простые числа. Сколько делителей имеет число $a = p_1^{n_1} \cdot p_2^{n_2} \cdot \dots \cdot p_k^{n_k}$, где $n_1, n_2, \dots, n_k$ — некоторые натуральные числа, включая 1 и само число a ?

1.189. Сколько диагоналей имеет выпуклый n -угольник?



Кортежи длины k , составленные из n -элементного множества X , называют также *размещениями с повторениями из n элементов по k* . Их общее число обозначают $\tilde{A}_n^k$ (A — первая буква фран. *arrangement* — размещение). Из примера 1.17 следует, что

$$\tilde{A}_n^k = n^k. \quad (1.3)$$

Пусть есть k -элементное множество X и n -элементное множество Y . Для подсчета числа отображений f множества X в множество Y ($f: X \rightarrow Y$) используется формула числа размещений с повторениями из n элементов по k элементов. Число отображений k -элементного множества в n -элементное множество равно $\tilde{A}_n^k = n^k$.

Этот результат позволяет найти *число подмножеств n -элементного множества X* . Для этого возьмем числа 0 и 1. Каждому подмножеству A множества X соответствует отображение φ множества X в множество $\{0; 1\}$, при котором элементы из A отображаются в 1, а остальные — в 0. Число таких отображений равно 2^n , где n — число элементов множества X . Значит, число подмножеств n -элементного множества X равно 2^n .



ПРИМЕР 1.18. Сколько существует способов размещения n различных предметов по m различным ящикам?

► Каждый предмет может быть помещен в любой из m ящиков. Тогда по правилу произведения число размещений n различных предметов по m различным ящикам равно

$$\underbrace{m \cdot m \cdot \dots \cdot m}_n = m^n = \tilde{A}_m^n.$$



Упорядоченные k -элементные подмножества данного множества X , содержащего n элементов, называют *размещениями без повторений из n элементов по k* . Их число обозначают A_n^k . Из примера 1.16 следует, что

$$A_n^k = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1). \quad (1.4)$$

Формулу (1.4) можно записать в виде

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}. \quad (1.5)$$

ПРИМЕР 1.19. Сколькими способами из 40 учеников класса можно выделить актив в следующем составе: староста, физорг и редактор стенгазеты?

- Требуется выделить упорядоченные трехэлементные подмножества множества, содержащего 40 элементов, т.е. найти число размещений без повторений из 40 элементов по 3. По формуле (1.5) находим $A_{40}^3 = \frac{40!}{37!} = 40 \cdot 39 \cdot 38 = 59\,280$.

Упорядоченные множества (кортежи) из n элементов, отличающиеся друг от друга лишь порядком входящих в них элементов, называются *перестановками без повторений из n элементов*. Число перестановок без повторений обозначается P_n (от фр. *permutation* — перестановка) или $P(n)$:

$$P_n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 = n! \quad (1.6)$$

ПРИМЕР 1.20. Сколько существует пятизначных чисел, не кратных пяти и не содержащих одинаковых цифр, составленных из цифр 1, 2, 3, 4, 5?

- Из пяти различных цифр можно составить P_5 пятизначных чисел. Эти числа не должны быть кратны 5, т.е. не могут оканчиваться цифрой 5. Если же цифру 5 поставить на последнее место, то остальные могут распределиться по разрядам числа P_4 способами. Поэтому условию задачи удовлетворяет $P_5 - P_4 = 5! - 4! = 120 - 24 = 96$ чисел.

Неупорядоченные подмножества, содержащие k элементов из данного n -элементного множества, называют *сочетаниями без повторений из n элементов по k* , а их число обозначают C_n^k . Отметим, что $C_n^0 = 1$, т.е. каждое множество X имеет лишь одно подмножество, не содержащее элементов (пустое множество). Количество сочетаний C_n^k и размещений A_n^k связано соотношением $A_n^k = k! \cdot C_n^k$, так как упорядочить каждое сочетание (получив при этом размещение) можно $k!$ способами. Отсюда $C_n^k = \frac{A_n^k}{k!}$, т.е.

$$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!}. \quad (1.7)$$

ПРИМЕР 1.21. Сколькими способами можно расставить на 32 черных полях шахматной доски 12 белых и 12 черных пешек?

- Поля для белых пешек можно выбрать C_{32}^{12} способами. После этого остается 20 полей, на которых можно C_{20}^{12} способами выбрать поля для черных пешек. Следовательно, искомое количество способов равно $C_{32}^{12} \cdot C_{20}^{12}$. ◀

ПРИМЕР 1.22. На книжной полке стоят n книг. Сколькими способами можно выбрать из них k книг так, чтобы в их число не попали никакие две стоящие рядом?

- Рассмотрим последовательности из k единиц и $m = n - k$ нулей. Подсчитаем количество таких последовательностей, в которых никакие две единицы не стоят рядом. Отметим, что каждой такой последовательности соответствует способ выбора книг на полке.

Для подсчета запишем сначала m нулей. Тогда у единиц получается $m + 1$ место, из которых два по краям и $m - 1$ место в промежутках между нулями. На любое из них можно поставить одну из k единиц. Следовательно, это число способов равно $C_{m+1}^k = C_{n-k+1}^k$. Значит, выбрать k книг так, чтобы в их число не попали никакие две стоящие рядом, можно C_{n-k+1}^k способами. Заметим, что задача разрешима, если $2k \leq n + 1$.

Так, например, для десятичного издания, тома которого стоят в некотором фиксированном порядке, можно извлечь четыре книги, чтобы в число извлеченных не

попали никакие две стоящие рядом; количество способов
 $C_{10-4+1}^4 = C_7^4 = 35$. ◀



Пусть дан кортеж α длины k , составленный из элементов множества $X = X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_m$, где каждое множество X_i состоит из k или более одинаковых элементов x_i , причем все $x_1, x_2, \dots, x_m$ — различны. Каждому индексу $i, 1 \leq i \leq m$, поставим в соответствие число n_i , показывающее, сколько раз элемент x_i встречается среди компонент кортежа α . Выписывая по порядку эти числа, получаем новый кортеж $(n_1, n_2, \dots, n_m)$, где $n_1 + n_2 + \dots + n_m = k$, называемый *составом кортежа* α .

Кортежи, имеющие один и тот же состав и отличающиеся друг от друга лишь порядком компонент, называются *перестановками с повторениями данного состава*. Их общее число обозначают символом $P(n_1, n_2, \dots, n_m)$ и для вычисления используют формулу

$$P(n_1, n_2, \dots, n_m) = \frac{(n_1 + n_2 + \dots + n_m)!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot n_m!}. \quad (1.8)$$



ПРИМЕР 1.22. Сколькими способами можно расставить белые фигуры: 2 коня, 2 слона, 2 ладьи, 1 ферзь и 1 короля на первой линии шахматной доски?

► Для решения задачи надо найти число кортежей длины 8, имеющих заданный состав $(2, 2, 2, 1, 1)$. Число таких кортежей, т.е. перестановок с повторениями, равно

$$P(2, 2, 2, 1, 1) = \frac{8!}{2! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 1! \cdot 1!} = 5040. \quad \blacktriangleleft$$



Сочетанием с повторениями из n элементов по k называют различные составы кортежей длины n , образованные из k групп одинаковых элементов. Общее число сочетаний с повторениями из n элементов по k обозначают символом $\tilde{C}_k^n$:

$$\tilde{C}_k^n = C_{n+k-1}^n = P(n, k-1). \quad (1.9)$$



ПРИМЕР 1.24. Сколько существует способов размещения n одинаковых предметов по m различным ящикам?

- Предположим, что n элементов разместились по ящикам так, что в первый, второй, ... m -й ящик попало соответственно $n_1, n_2, \dots, n_m$ предметов. Такому размещению поставим в соответствие набор из n единиц и $m - 1$ нулей, т.е. $\underbrace{1\dots1}_{n_1} \underbrace{01\dots0}_{n_2} \dots \underbrace{01\dots1}_{n_m}$, и, наоборот, каждому такому набору — размещение). Тогда число таких размещений равно $\tilde{C}_k^n = P(n, k - 1)$. ◀

Решить уравнения.

$$1.190. 5C_{n+1}^2 = 4C_n^3.$$

$$1.191. 3C_{2n}^{n+1} = 2C_{2n+1}^{n-1}.$$

$$1.192. C_n^3 + C_n^4 = 11C_{n+1}^2.$$

Решить неравенства.

$$1.193. C_{13}^n < C_{13}^{n+2}.$$

$$1.194. C_{n+1}^{n-2} - C_{n+1}^{n-1} \leq 100.$$

$$1.195. \frac{A_{n+4}^4}{(n+2)!} \leq \frac{15}{(n-1)!}.$$

$$1.196. C_{n+5}^4 - \frac{143}{96} \cdot \frac{P_{n+5}}{P_{n+3}} < 0.$$

Вычислить выражения.

$$1.197. \frac{A_5^2}{P_2} + \frac{A_{10}^2}{7P_5}.$$

$$1.198. P_1 A_2^1 + P_2 A_3^2 + P_3 A_4^3 + P_4 A_5^4 - P_1 P_2 P_3 P_4.$$

$$1.199. \left(\frac{1}{3} C_6^2 - \frac{1}{28} C_8^3 + \frac{1}{65} C_{15}^3 \right) : (P_3 A_5^3).$$

1.200. а) Сколькими способами можно расставить 25 учеников в одну шеренгу?

б) Сколькими способами можно рассадить 25 учеников за 15 парт (считая, что за каждой партой может сидеть не более двух учеников)?

1.201. На плоскости проведены n прямых, среди которых нет ни одной пары параллельных прямых и ни одной тройки прямых, пересекающихся в одной точке. Найти:

а) число точек пересечения этих прямых;

б) число треугольников, образованных этими прямыми;

в) число треугольников, которые можно построить, взяв в качестве вершин точки пересечения этих прямых.

1.202. Сколькими способами можно расставить на книжной полке подряд друг за другом книги 10-томного собрания сочинений так, чтобы:

а) том № 1 и том № 2 стояли рядом и в порядке возрастания;

б) на четных местах стояли тома с четными номерами?

1.203. Сколько шестизначных чисел, кратных 5, можно составить из цифр 0, 1, 2, ..., 9 при условии, что в записи числа нет одинаковых цифр?

1.204. Сколько существует натуральных чисел, меньших 10^n , в десятичной записи которых соседние цифры различны?

1.205. Хоккейная команда состоит из двух вратарей, семи защитников и 10 нападающих. Сколькими способами тренер может образовать стартовую шестерку, состоящую из вратаря, двух защитников и трех нападающих?

1.206. На окружности отмечено девять точек. Сколько можно построить:

а) хорд, соединяя любые две из них;

б) различных треугольников с вершинами в этих точках;

в) выпуклых четырехугольников с вершинами в этих точках?

1.207. За круглым столом сидят n рыцарей. Сколькими способами можно из них отобрать k рыцарей, чтобы в их число не попали никакие два сидящих рядом?

1.208. Сколькими способами можно рассадить 12 человек за круглым столом, если для каждого человека важно не место, которое он занимает за столом, а лишь то, кто:

а) является его соседом слева и кто является соседом справа;

б) кто является его соседями (и не важно, кто из них сидит слева, а кто — справа);

в) сидит напротив него, т.е. на диаметрально противоположном месте?

1.209. Для проведения письменного экзамена по математике надо составить четыре варианта по семь задач в каждом. Сколькими способами можно разбить 28 задач на четыре варианта?

1.210. На линии расположены n стульев. Сколькими способами можно убрать три стула так, чтобы не были убраны:

а) три рядом стоящих стула;

б) никакие два рядом стоящих стула?

1.211. Сколько можно сделать перестановок из n элементов, в которых:

а) данные два элемента не стоят рядом;

б) данные три элемента не стоят рядом (в любом порядке);

в) никакие два из данных трех элементов не стоят рядом?

1.212. Сколькими способами могут распределиться 15 пронумерованных бильярдных шаров по шести лузам?

1.213. Каждая сторона квадрата разбита на n частей. Сколько можно построить треугольников, вершинами которых являются точки разбиения (вершины квадрата такими точками не считать)?

1.214. При игре в преферанс каждому из трех игроков раздают по 10 карт, две карты кладут на стол в прикуп (игра ведется колодой из 36 карт). Сколько различных сдач возможно в этой игре?

1.215. Сколькими способами можно расставить на шахматной доске трех белопольных слонов так, чтобы они не могли бить друг друга?

1.216. Из колоды, содержащей 52 карты, вынули 10 карт. Сколько существует способов вынуть их так, чтобы:

- а) среди этих карт был хотя бы один туз;
- б) ровно один туз; в) не менее двух тузов;
- г) ровно два туза?

1.217. Сколькими способами можно разложить: а) 15 книг по пяти бандеролям по три книги в каждой? б) девять книг по четырем бандеролям по две книги и одной бандероли с одной книгой?

1.218. Бросают n игральных костей. В результате получают n чисел от 1 до 6. Сколько может получиться различных результатов, если результаты, отличающиеся друг от друга лишь порядком очков, считаются одинаковыми?

1.219. Сколько можно построить различных прямоугольных параллелепипедов, у которых длина каждого ребра является целым числом от 1 до 10?

1.220. Сколько решений имеет уравнение $x_1 + x_2 + \dots + x_7 = 10$, где:

- а) $x_1, x_2, \dots, x_7$ — целые неотрицательные числа;
- б) $x_1, x_2, \dots, x_7$ — натуральные числа?

1.221. Сколько цифр потребуется для записи всех чисел от 1 до $10^n - 1$, если:

- а) $n = 3$; б) $n = 6$; в) $n = k$?

1.222. Сколькими способами можно разместить пять одинаковых предметов по трем ящикам, если в каждый ящик можно поместить от нуля до пяти предметов?

1.223. Комиссия из семи человек хранит материалы в сейфе. Сколько замков должно быть на сейфе и сколько ключей должно быть у каждого члена комиссии для того, чтобы сейф

мог быть открыт, когда соберутся любые четыре члена комиссии, но не мог быть открыт при меньшем количестве членов?

1.224. Сколькими способами можно выбрать комиссию в составе m человек из группы, состоящей из n мужчин и k женщин, при условии, что $m \leq n$ и $m \leq k$?

3. Бином Ньютона. Формулы $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ и т.д. являются частным случаем общей формулы бинома Ньютона, справедливой при любых a, b и при любом $n \in \mathbb{N}$,

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} b^k, \quad (1.10)$$

где $C_n^0 = 1$, $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, $1 \leq k \leq n$.

Правую часть формулы (1.10) называют разложением степени бинома, числа C_n^k — биномиальными коэффициентами, а слагаемое $C_n^k a^{n-k} b^k$ — $(k+1)$ -м членом разложения бинома.

ПРИМЕР 1.25. Вычислить сумму $\sum_{k=0}^n \frac{C_n^k}{k+1}$.

► Используя равенство

$$\begin{aligned} \frac{1}{k+1} C_n^k &= \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{(k+1)k!} = \frac{(n+1)n(n-1)\dots(n-k+1)}{(n+1)(k+1)!} = \\ &= \frac{1}{n+1} C_{n+1}^{k+1}, \end{aligned}$$

получаем $\sum_{k=0}^n \frac{C_n^k}{k+1} = \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} C_{n+1}^k = \frac{1}{n+1} (2^{n+1} - 1).$ ◀

1.225. Доказать свойства биномиальных коэффициентов:

а) $C_n^{k-1} + C_n^k = C_{n+1}^k$; б) $C_n^k = C_n^{k-1} \frac{n-(k-1)}{k}$;

в) $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n = \sum_{k=0}^n C_n^k = 2^n$;

г) $C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - \dots + (-1)^n C_n^n = 0$.

Написать формулы разложения степеней биномов.

$$1.226. (1+x)^5. \quad 1.227. (a-b)^6.$$

$$1.228. (x+y)^7. \quad 1.229. (a-b)^8.$$

Вычислить суммы.

$$1.230. \sum_{k=1}^n (k+1)C_n^k. \quad 1.231. \sum_{k=1}^n (k-1)C_n^k.$$

$$1.232. \sum_{k=0}^n C_{2n}^{2k}. \quad 1.233. \sum_{k=1}^n C_{2n-1}^{k-1}.$$

$$1.234. \sum_{k=1}^m (-1)^k C_n^k, m < n.$$

Доказать равенства.

$$1.235. \sum_{k=1}^n k C_n^k = n \cdot 2^{n-1}. \quad 1.236. \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} k C_n^k = 0.$$

1.3. Комплексные числа

1. Определение комплексных чисел и алгебраические операции над ними. Алгебраическая форма комплексного числа. *Комплексными числами* называются всевозможные упорядоченные пары $z = (x, y)$ действительных чисел, для которых следующим образом определены операции сложения и умножения:

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2); \quad (1.11)$$

$$(x_1, y_1)(x_2, y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1). \quad (1.12)$$

Множество всех комплексных чисел обозначается символом $\mathbb{C}$.

Действительные числа x и y называют соответственно *действительной* и *мнимой частью* комплексного числа z и обозначают $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$.

Два комплексных числа $z_1 = (x_1, y_1)$ и $z_2 = (x_2, y_2)$ равны тогда и только тогда, когда $x_1 = x_2$ и $y_1 = y_2$.

Из (1.11) и (1.12) следует, что комплексное число (x, y) может быть записано

$$(x, y) = (x, 0) + (0, 1)(y, 0). \quad (1.13)$$

Комплексные числа вида $(x, 0)$ отождествляют с действительными числами x , а число $(0, 1)$ обозначают символом i , называемым *мнимой единицей*. Равенство (1.13) представляется в виде

$$z = x + iy$$

и называется *алгебраической формой комплексного числа* $z = (x, y)$.

Операции сложения и умножения комплексных чисел обладают следующими свойствами:

- 1) $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ (*коммутативность сложения*);
- 2) $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$ (*ассоциативность сложения*);
- 3) $z_1 z_2 = z_2 z_1$ (*коммутативность умножения*);
- 4) $(z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3)$ (*ассоциативность умножения*);
- 5) $z_1 (z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$ (*закон дистрибутивности*).

1.237. Доказать, что

а) $\forall z_1, z_2 \exists z (z_1 = z_2 + z)$ (число z называют *разностью* чисел z_1 и z_2 и обозначают $z_1 - z_2$;

б) если $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$, то

$$z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2);$$

$$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1).$$

1.238. Доказать, что:

а) $\forall z_1, z_2 \neq 0 \exists z (z_1 z = z_2)$ (число z называют *частным* от деления z_1 на z_2 и обозначают символом $\frac{z_1}{z_2}$);

б) если $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$, то

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}. \quad (1.14)$$

ПРИМЕР 1.26. Выполнить указанные операции, представив результат в алгебраической форме:

а) $(2 - 3i)(3 + 4i) + (i + 1)^2$; б) $\frac{2 - 3i}{3 + 4i}$.

► а) Задача состоит в том, чтобы заданное число представить в форме $x + iy$. Для этого можно воспользоваться результатом задачи 1.237, однако из свойств операций над комплексными числами, перечисленными выше, следует,

что при сложении и умножении комплексных чисел с ними можно обращаться как с биномами вида $a + ib$, учитывая дополнительно, что $i^2 = (0, 1)(0, 1) = (-1, 0) = -1$. Поэтому

$$(2 - 3i)(3 + 4i) = 6 + 8i - 9i - 12i^2 = 18 - i,$$

$$(1 + i)^2 = 1 + 2i + i^2 = 1 + 2i - 1 = 2i.$$

Отсюда окончательно получаем

$$(2 - 3i)(3 + 4i) + (i + 1)^2 = (18 - i) + 2i = 18 - i.$$

б) Результат может быть получен непосредственно по формуле (1.14). Заметим, однако, что $(a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2$. Поэтому, умножая и деля числитель и знаменатель дроби на $3 - 4i$, получим

$$\frac{2 - 3i}{3 + 4i} = \frac{(2 - 3i)(3 - 4i)}{(3 + 4i)(3 - 4i)} = \frac{6 - 17i + 12i^2}{9 + 16} = \frac{6 - 17i - 12}{25} =$$

$$= -\frac{6}{25} - i\frac{17}{25}.$$

Выполнить указанные операции, представив результат в алгебраической форме.

$$1.239. (2 + 3i)(3 - i). \quad 1.240. (1 + 2i)^2.$$

$$1.241. (2 + 3i)(3 - i)^2. \quad 1.242. (3 - 2i)^2 + (3 + 2i)^2.$$

$$1.243. (1 - i)^3 - (1 + i)^3. \quad 1.244. (1 - 2i)(2 + i)^2 + 5i.$$

$$1.245. i^2 + i^3 + i^4 + i^5. \quad 1.246. i \cdot i^2 \cdot i^3 \cdot \dots \cdot i^{100}.$$

$$1.247. i^4 + i^{14} + i^{24} + \dots + i^{84}. \quad 1.248. 1 - i^5 + i^{10} - i^{15} + \dots + i^{50}.$$

$$1.249. i + \frac{1}{i}. \quad 1.250. \frac{1}{4 + i} + \frac{1}{4 - i}. \quad 1.251. \frac{2 - i}{1 + i}. \quad 1.252. \left(\frac{1 - i}{1 + i} \right)^3.$$

$$1.253. \left(\frac{i^5 + 2}{i^{19} + 1} \right)^2. \quad 1.254. \frac{2 + 3i}{4 - 2i} + \frac{1 - 3i}{2i}. \quad 1.255. \frac{1 + 2i}{3 - i} + (1 - i)^2.$$

$$1.256. \frac{1 + i}{(i + \sqrt{3})(1 + i\sqrt{3})}. \quad 1.257. \frac{2 - 3i}{2 + i} + \frac{2 - 3i}{2 - i}.$$

$$1.258. \frac{4i}{1 - 3i} - (1 + 2i)^3. \quad 1.259. (1 - \sqrt{3} \cdot i)(\sqrt{3} + 2i)(2 - i^{-1}).$$

Найти действительные решения уравнений.

$$1.260. (1 - \sqrt{3} \cdot i)x + (\sqrt{3} + 2i)(2i - y) = -2 - \sqrt{3} - 2i.$$

1.261. $(1+i)x + (-2+5i)y = -4+17i$.

Решить системы линейных уравнений.

1.262.
$$\begin{cases} (3-i)z_1 + (4+2i)z_2 = 1+3i, \\ (4+2i)z_1 - (2+3i)z_2 = 7. \end{cases}$$

1.263.
$$\begin{cases} iz_1 + z_2 = i, \\ (i+1)z_1 + (1-i)z_2 = 1+i. \end{cases}$$



Комплексное число $z = x - iy$ называют *сопряженным* комплексному числу $z = x + iy$ и обозначают $\bar{z}$.



1.264. Доказать справедливость соотношений для любых комплексных чисел z и w .

а) $\overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}$, $\overline{z-w} = \bar{z} - \bar{w}$;

б) $\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$; $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{w}}$, где $w \neq 0$;

в) $z + \bar{z} = 2\operatorname{Re} z$, $z - \bar{z} = 2i\operatorname{Im} z$; г) $\bar{z} = z \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$;

д) $\bar{z} = -z \Leftrightarrow z$ — чисто мнимое число.

Выполнить указанные действия и представить результат в алгебраической форме.

1.265. $z_1 \bar{z}_2$ и $\left(\frac{\bar{z}_1}{z_2}\right)^2$, если $z_1 = 1+i\sqrt{3}$, $z_2 = \sqrt{3}-i$.

1.266. $z_1 \bar{z}_2$ и $\frac{\bar{z}_1^2}{z_2}$, если $z_1 = 3+2i$, $z_2 = 2-2i$.

1.267. $\overline{1+i\sqrt{3}} + \operatorname{Im}\left((1+i)^3\right) - \frac{1-5i}{1+i}$.

1.268. $\overline{8+6i} + \operatorname{Re}\left((1-i)^4\right) + \frac{2-4i}{3-i}$.

Решить системы уравнений.

1.269.
$$\begin{cases} 3z + \bar{w} = 1, \\ \bar{z} + iw = 4i. \end{cases}$$

1.270.
$$\begin{cases} \bar{z} - 4\bar{w} = i, \\ \bar{z} + iw = -4. \end{cases}$$

1.271. Пусть $p(z)$ — произвольный многочлен с действительными коэффициентами. Доказать, что для любого $z \in \mathbb{C}$ верно равенство $p(z) = p(\bar{z})$.

2. Комплексная плоскость. Тригонометрическая форма комплексного числа и действия над комплексными числами в тригонометрической форме. Если на плоскости введена декартова прямоугольная система координат Oxy , то всякому комплексному числу $z = x + iy$ может быть поставлена в

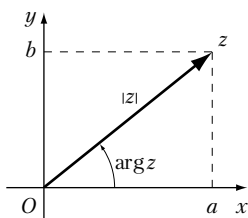


Рис. 1.2

соответствие некоторая точка плоскости с координатами (x, y) (рис. 1.2). При этом говорят, что точка (x, y) изображает комплексное число $z = (x, y)$.

Плоскость, на которой изображаются комплексные числа, называется *комплексной*, ось Ox — *действительной*, а ось Oy — *мнимой*.

Число $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ называется модулем комплексного числа и обозначается $|z|$:

$$|z| = |x + iy| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Модуль числа z равен расстоянию от начала координат до точки плоскости, изображающей это число.

Всякое решение φ системы уравнений

$$\cos \varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \sin \varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad (1.15)$$

называется *аргументом* комплексного числа z ($z \neq 0$). Все аргументы числа z различаются на целые кратные 2π и обозначают символом $\arg z$. Каждое значение аргумента совпадает с величиной φ некоторого угла, на который следует повернуть ось Ox до совпадения с радиус-вектором точки плоскости, изображающей число z (при этом $\varphi > 0$, если поворот осуществляется против часовой стрелки, и $\varphi < 0$ в противном случае). Значение $\arg z$, удовлетворяющее условию $0 \leq \arg z < 2\pi$, называется *главным значением аргумента* и обозначается символом $\arg z$.

В некоторых случаях главным значением аргумента называется значение $\arg z$, удовлетворяющее условию $-\pi < \arg z \leq \pi$.

ПРИМЕР 1.27. Решить уравнение $|z + i| + 4z = 2 - 4i$.

► Представим искомое комплексное число в алгебраической форме $z = x + iy$. В соответствии с определением модуля комплексного числа $z + i$ получаем

$|z + i| = |x + i(y + 1)| = \sqrt{x^2 + (y + 1)^2}$. Подставляя в уравнение, имеем

$$\sqrt{x^2 + (y + 1)^2} + 4(x + iy) = 2 - 4i$$

или

$$\left(\sqrt{x^2 + (y + 1)^2} + 4x - 2\right) + i(4y + 4) = 0.$$

Комплексное число равно нулю, если равны нулю его действительная и мнимая части. Следовательно, последнее равенство возможно, если

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + (y + 1)^2} + 4x - 2 = 0, \\ 4y + 4 = 0. \end{cases}$$

Из второго уравнения системы находим $y = -1$. Тогда из первого уравнения при $y = -1$ получаем $\sqrt{x^2} + 4x - 2 = 0$ или $x = \frac{2}{5}$. Следовательно, решением исходного уравнения является $z = \frac{2}{5} - i$. ◀

Решить уравнения.

1.272. $2z = -|z| + 2i$. **1.273.** $|z| + z = 2 + i$.

1.274. $|z| - z = 8 + 12i$. **1.275.** $z + |z + 1| + i = 0$.

1.276. $|z - 2i| - 3z = -12i$. **1.277.** $|z|^2 + 2i - 2iz = 0$.

1.278. $|z - i|^2 + 2z = 9 + 2i$.

Доказать равенства и выяснить их геометрический смысл.

1.279. $|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$, $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$;

1.280. $\arg z_1 + \arg z_2 = \arg(z_1 z_2)$, $\arg z_1 - \arg z_2 = \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right)$

(приведенные равенства понимаются в смысле равенства множеств).

Выяснить геометрический смысл данных преобразований комплексной плоскости.

1.281. $z \rightarrow z + 2$. **1.282.** $z \rightarrow z - (3 + i)$. **1.283.** $z \rightarrow iz$.

1.284. $z \rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}(1 - i)z$. **1.285.** $z \rightarrow -z$. **1.286.** $z \rightarrow 2z$.

$$1.287. z \rightarrow \frac{z}{1+i}.$$

$$1.288. z \rightarrow \bar{z}.$$

1.289. Доказать, что:

а) величина $|z_1 - z_2|$ равна расстоянию на комплексной плоскости между точками, изображающими комплексные числа z_1 и z_2 ;

б) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ и $|z_1 - z_2| \leq ||z_1| - |z_2||$ (*неравенства треугольника*). Каков геометрический смысл этих неравенств?

1.290. Доказать тождества:

а) $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2)$. Каков геометрический смысл этого неравенства?

$$\text{б) } |z_1| + |z_2| = \left| \frac{z_1 + z_2}{2} + \sqrt{z_1 z_2} \right| + \left| \frac{z_1 + z_2}{2} - \sqrt{z_1 z_2} \right|.$$

Дать геометрическое описание множеств всех точек комплексной плоскости, удовлетворяющих указанным условиям.

$$1.291. \operatorname{Re} z > 0.$$

$$1.292. \operatorname{Im} z \leq 1.$$

$$1.293. 0 \leq \operatorname{Re} z \leq 1.$$

$$1.294. |\operatorname{Im} z| < 1.$$

$$1.295. |z| \leq 1.$$

$$1.296. |z + 2i| < 4.$$

$$1.297. |z - i| > 1.$$

$$1.298. |z - i| = |z + 1|.$$

$$1.299. 1 < |z - 1| < 2.$$

$$1.300. 0 \leq \arg z \leq \frac{\pi}{4}.$$

$$1.301. |\pi - \arg z| \leq \frac{\pi}{4}.$$



Из соотношений (1.15) следует $x = |z| \cos \varphi$, $y = |z| \sin \varphi$, поэтому любое комплексное число $z \neq 0$ можно представить в виде

$$z = |z| (\cos \varphi + i \sin \varphi),$$

называемом *тригонометрической формой комплексного числа*.

Пусть $z_1 = r_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$ и $z_2 = r_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$, тогда

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)),$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)),$$

$$z^n = (r(\cos \varphi + i \sin \varphi))^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi) \quad (\text{формула Муавра}). \quad (1.16)$$

Корнем степени n ($n \in \mathbb{N}$) из комплексного числа z , отличного от 0, называется всякое число w , такое, что $w^n = z$. Существует ровно n различных корней w_k степени n из числа z , каждый из которых получается из формулы

$$w_k = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right), \quad (1.17)$$

где $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$.

Так как $|w_k| = \sqrt[n]{r}$, $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$, то все значения w_k лежат на окружности, центр которой находится в начале координат, а радиус равен $\sqrt[n]{r}$. Если эти значения последовательно соединить, то получится правильный n -угольник. $\triangleleft$

ПРИМЕР 1.28. Представить в тригонометрической форме комплексное число $z = 2 - 2i\sqrt{3}$.

► Имеем

$$|z| = \sqrt{2^2 + (-2\sqrt{3})^2} = 4, \quad \cos \varphi = \frac{1}{2}, \quad \sin \varphi = -\frac{\sqrt{3}}{2},$$

поэтому главное значение аргумента равно $\arg z = \frac{4\pi}{3}$, следовательно, $z = 4 \left(\cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} \right)$. $\blacktriangleleft$

Представить в тригонометрической форме данные числа.

$$1.302. -1 + i. \quad 1.303. \frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$1.304. 1 - i\sqrt{3}. \quad 1.305. -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$1.306. \frac{1-i}{1+i}. \quad 1.307. -2.$$

$$1.308. -\frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2}. \quad 1.309. -\frac{1}{i}.$$

$$1.310. \frac{1 + \cos \alpha + i \sin \alpha}{1 + \cos \alpha - i \sin \alpha}. \quad 1.311. \frac{1 + \sin \alpha + i \cos \alpha}{1 + \sin \alpha - i \cos \alpha}.$$

ПРИМЕР 1.29. Вычислить $(1+i\sqrt{3})^{2008}$.

► Запишем число $1+i\sqrt{3}$ в тригонометрической форме

$$1+i\sqrt{3} = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right).$$

Тогда по формуле Муавра получим

$$\begin{aligned} (1+i\sqrt{3})^{2008} &= 2^{2008} \left(\cos\frac{2008\pi}{3} + i\sin\frac{2008\pi}{3} \right) = \\ &= 2^{2008} \left(\cos\left(668\pi + \frac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(668\pi + \frac{4\pi}{3}\right) \right) = \\ &= -2^{2007}(1+i\sqrt{3}). \end{aligned}$$

Используя формулу Муавра, вычислить данные выражения.

1.312. $(1+i)^{10}$.

1.313. $\frac{(1+i)^5}{(1-i)^3}$.

1.314. $(-1-i\sqrt{3})^{15}$.

1.315. $(-\sqrt{2} + \sqrt{2}i)^5$.

1.316. $(1+i)^{10}(1-i)^{-10}$.

1.317. $\frac{(1+i\sqrt{3})^{1001}(1-i\sqrt{3})^{1001}}{(\sqrt{3}-i)^{2002}}$.

1.318. $(1+i)^{13}(1-\sqrt{3}i)^{-6}$.

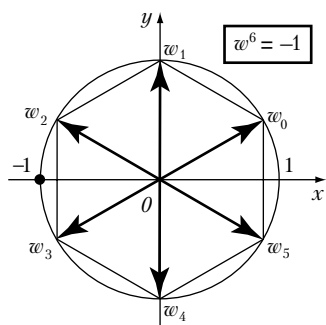


Рис. 1.3

ПРИМЕР 1.30. Найти все корни 6-й степени из -1 и изобразить их на комплексной плоскости.

► Так как модуль r числа -1 равен 1, а аргумент $\alpha = \arg(-1) = \pi$, то $\sqrt[6]{r} = 1$ и корни (рис. 13) будут иметь вид

$$w_k = \sqrt[6]{r} \left(\cos\frac{\pi + 2\pi k}{6} + i\sin\frac{\pi + 2\pi k}{6} \right),$$

где $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$.

$$w_0 = \sqrt[6]{r} \left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6} \right) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i;$$

$$w_1 = \sqrt[6]{r} \left(\cos\frac{\pi + 2\pi}{6} + i\sin\frac{\pi + 2\pi}{6} \right) = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = i;$$

$$w_2 = \sqrt[6]{r} \left(\cos \frac{\pi + 4\pi}{6} + i \sin \frac{\pi + 4\pi}{6} \right) = \cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} =$$

$$= -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i;$$

$$w_3 = \sqrt[6]{r} \left(\cos \frac{\pi + 6\pi}{6} + i \sin \frac{\pi + 6\pi}{6} \right) = \cos \frac{7\pi}{6} + i \sin \frac{7\pi}{6} =$$

$$= -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i;$$

$$w_4 = \sqrt[6]{r} \left(\cos \frac{\pi + 8\pi}{6} + i \sin \frac{\pi + 8\pi}{6} \right) = \cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} = -i;$$

$$w_5 = \sqrt[6]{r} \left(\cos \frac{\pi + 10\pi}{6} + i \sin \frac{\pi + 10\pi}{6} \right) = \cos \frac{11\pi}{6} + i \sin \frac{11\pi}{6} =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i. \quad \blacktriangleleft$$

Найти все значения корней.

1.319. $\sqrt[4]{1}$.

1.320. $\sqrt{i}$.

1.321. $\sqrt[3]{-1}$.

1.322. $\sqrt{-1 + i\sqrt{3}}$.

1.323. $\sqrt{-1 + i}$.

1.324. $\sqrt[4]{2\sqrt{3} + 2i}$.

1.325. $\sqrt{-9}$.

1.326. $\sqrt[5]{-1 - i}$.

Решить уравнения.

1.327. $z^2 = -i$.

1.328. $z^3 = 1$.

1.329. $z^6 = 64$.

1.330. $z^2 = 3 - 4i$.

1.331. Доказать, что квадратные корни из комплексного числа могут быть найдены по формуле

$$\sqrt{z} = \sqrt{x + iy} = \pm \left(\sqrt{\frac{|z| + x}{2}} + i \cdot \operatorname{sign} y \sqrt{\frac{|z| - x}{2}} \right).$$

Решить уравнения.

1.332. $z^2 + 2z + 5 = 0$.

1.333. $z^2 + (5 - 2i)z + 5(1 - i) = 0$.

1.334. $4z^2 - 2z + 1 = 0$.

1.335. $z^2 + (2i - 3)z + 5 - i = 0$.

1.336. $z^2 - 4z + 8 = 0$.

1.337. $z^2 - 8iz - 15 = 0$.

3. Показательная форма комплексного числа. Пусть φ — произвольное действительное число. Символом $e^{i\varphi}$ обозначается комплексное число $\cos \varphi + i \sin \varphi$. С помощью этого обозначения всякое комплексное число $z = |z| (\cos \varphi + i \sin \varphi)$ может быть записано в показательной форме

$$z = |z| e^{i\varphi}.$$

Представить в показательной форме данные числа.

1.338. $-2 + i$. **1.339.** $-3 - 4i$. **1.340.** $2\sqrt{3} - 2i$.

1.341. $-\sqrt{8} + i\sqrt{8}$. **1.342.** $\sin \alpha - i \cos \alpha$.

1.343. Доказать, что символ $e^{i\varphi}$ обладает следующими свойствами:

а) $e^{i \cdot 2\pi n} = 1 \quad (\forall n \in \mathbb{Z})$; б) $\overline{e^{i\varphi}} = e^{-i\varphi}$;

в) $e^{i\varphi_1} \cdot e^{i\varphi_2} = e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$ и $\frac{e^{i\varphi_1}}{e^{i\varphi_2}} = e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$.

1.344. Данные числа z_1 и z_2 представить в показательной форме и выполнить указанные действия над ними:

а) $z_1 z_2$ и $\frac{z_1^2}{z_2}$, если $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$, $z_2 = 3 - 3\sqrt{3}i$.

б) $z_1^2 \bar{z}_2$ и $\frac{\bar{z}_1^2}{z_2}$, если $z_1 = \sqrt{2} - i\sqrt{2}$, $z_2 = 2 - 2i$.

1.345. Доказать формулы Эйлера

$$\cos \varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}, \quad \sin \varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}.$$

1.346. Используя формулы Эйлера, выразить через косинусы и синусы кратных углов функции:

а) $\cos^3 \varphi$; б) $\sin^3 \varphi$.

1.347. Доказать формулу Муавра в показательной форме: если $z = r e^{i\varphi}$, то

$$z^n = r^n e^{in\varphi}.$$

Используя формулу Муавра, выразить через $\cos \varphi$ и $\sin \varphi$ функции.

1.348. $\cos 3\varphi$.

1.349. $\sin 3\varphi$.

1.350. $\cos 4\varphi$.

1.351. $\sin 4\varphi$.

Пусть $a = re^{i\varphi}$, $a \neq 0$, — фиксированное комплексное число. Тогда n различных корней уравнения $z^n = a$, $n \in \mathbb{N}$, задаются формулой

$$z_k = \sqrt[n]{r} e^{i\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi k}{n}\right)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1.$$

ПРИМЕР 1.31. Используя показательную форму входящих в выражение комплексных чисел, вычислить

$$(1 - i\sqrt{3})^3 (1 + i)^2.$$

► Представим числа $1 - i\sqrt{3}$ и $1 + i$ в показательной форме и воспользуемся формулой Муавра

$$(1 - i\sqrt{3})^3 (1 + i)^2 = \left(2e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)^3 \left(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^2 = 8e^{-i\pi} \cdot 2e^{i\frac{\pi}{2}} = 16e^{-i\frac{\pi}{2}} = -16i.$$

$$1.352. (2 + 2i\sqrt{3})^4 (1 - i)^6. \quad 1.353. \frac{(5 + 12i)^2}{(2\sqrt{3} + 2i)^3}.$$

$$1.354. \frac{\left(\frac{7 - 24i}{5}\right)^4}{(-2 + i)^3}. \quad 1.355. \frac{\sin \alpha - i \cos \alpha}{\sin \alpha + i \cos \alpha}.$$

Используя показательную форму входящих в выражение комплексных чисел, найти все значения корней.

$$1.356. \sqrt[7]{-128}. \quad 1.357. \sqrt[4]{2\sqrt{3} + 2i}.$$

$$1.358. \sqrt[5]{-1 - i}. \quad 1.359. \sqrt[6]{1 + i\sqrt{3}}.$$

ПРИМЕР 1.32. Привести к виду, удобному для логарифмирования,

$$S(\varphi) = \sin \varphi + \sin 2\varphi + \dots + \sin n\varphi, \quad \varphi \neq 2\pi m, m \in \mathbb{Z}.$$

► Так как $\sin \varphi = \operatorname{Im} e^{i\varphi}$, то, используя формулу суммы геометрической прогрессии, получаем

$$\begin{aligned} S(\varphi) &= \operatorname{Im} e^{i\varphi} + \operatorname{Im} e^{i2\varphi} + \dots + \operatorname{Im} e^{in\varphi} = \operatorname{Im}(e^{i\varphi} + e^{i2\varphi} + \dots + e^{in\varphi}) = \\ &= \operatorname{Im} \frac{e^{i\varphi + i\frac{n}{2}\varphi} \left(e^{-i\frac{n}{2}\varphi} - e^{i\frac{n}{2}\varphi} \right)}{e^{i\frac{\varphi}{2}} \left(e^{-i\frac{\varphi}{2}} - e^{i\frac{\varphi}{2}} \right)} = \frac{\sin \frac{n\varphi}{2}}{\sin \frac{\varphi}{2}} \operatorname{Im} e^{i\frac{n+1}{2}\varphi} = \frac{\sin \frac{n\varphi}{2} \sin \frac{(n+1)\varphi}{2}}{\sin \frac{\varphi}{2}}. \end{aligned}$$

Привести выражения к виду, удобному для логарифмирования.

$$1.360. \cos \varphi + \cos 2\varphi + \dots + \cos n\varphi.$$

$$1.361. \cos \varphi + \cos 3\varphi + \cos 5\varphi + \dots + \cos(2n-1)\varphi.$$

$$1.362. \sin \varphi + \sin 3\varphi + \sin 5\varphi + \dots + \sin(2n-1)\varphi.$$

4. Многочлены и алгебраические уравнения. *Многочленом (полиномом или целой рациональной функцией) n -й степени называется функция вида*

$$p_n(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0, \quad (1.18)$$

где $z \in \mathbb{C}$, $a_0, a_1, \dots, a_n$ — коэффициенты (в общем случае комплексные), причем $a_n \neq 0, n \in \mathbb{N}$.

Уравнение

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0 = 0, \quad a_n \neq 0, \quad (1.19)$$

называется *алгебраическим уравнением n -й степени*. Число z_0 , для которого $p_n(z_0) = 0$, называется *корнем* многочлена (1.18) или уравнения (1.19).

Основная теорема алгебры (теорема Гаусса). Всякий многочлен ненулевой степени имеет по крайней мере один корень (вообще говоря, комплексный).

Число z_0 является корнем многочлена $p_n(z)$ в том и только в том случае, когда $p_n(z)$ делится без остатка на бином $z - z_0$, т.е.

$$p_n(z) = (z - z_0)q_{n-1}(z),$$

где $q_{n-1}(z)$ — многочлен $(n-1)$ -й степени. Если $p_n(z)$ делится без остатка на $(z - z_0)^k, k \geq 1$, но не делится на $(z - z_0)^{k+1}$, то z_0 называется *корнем кратности k* многочлена $p_n(z)$; при этом

$$p_n(z) = (z - z_0)^k q_{n-k}(z),$$

где $q_{n-k}(z) \neq 0$.

Теорема Гаусса может быть уточнена следующим образом: многочлен n -й степени имеет ровно n корней, если каждый корень считать столько раз, какова его кратность.

Если коэффициенты многочлена — действительные числа и $z_0 = x_0 + iy_0$ — комплексный корень, то сопряженное

число $\bar{z}_0 = x_0 - iy_0$ — также корень этого многочлена, причем корни z_0 и $\bar{z}_0$ имеют одинаковую кратность.

Пусть многочлен $p_n(z)$ имеет корни $z_1, z_2, \dots, z_m$ ($m \leq n$) кратностей соответственно $k_1, k_2, \dots, k_m$ ($k_1 + k_2 + \dots + k_m = n$). Тогда его можно разложить на линейные множители, т.е. справедливо тождество

$$p_n(z) = a_n(z - z_1)^{k_1}(z - z_2)^{k_2} \dots (z - z_m)^{k_m}.$$

Если при этом коэффициенты многочлена — действительные числа, то, объединяя скобки, соответствующие комплексно сопряженным корням, можно разложить этот многочлен в произведение линейных и квадратичных множителей с действительными коэффициентами.

ПРИМЕР 1.33. Найти корни многочлена $z^6 - 2z^3 + 1$ и разложить его на множители.

► Так как $z^6 - 2z^3 + 1 = (z^3 - 1)^2$, то корнями этого многочлена являются корни 3-й степени из 1

$$\begin{aligned} z_1 &= 1; \\ z_2 &= \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}; \\ z_3 &= \cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

При этом каждый корень имеет кратность $k = 2$. Разложение данного многочлена на множители имеет вид

$$z^6 - 2z^3 + 1 = (z + 1)^2 \left(z - \left(-\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right)^2 \left(z - \left(-\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right)^2.$$

Объединяя два последних множителя в один, получим разложение многочлена на множители с действительными коэффициентами $z^6 - 2z^3 + 1 = (z + 1)^2 (z^2 + z + 1)^2$. ◀

Решить двучленные уравнения.

1.363. $z^3 - 1 = 0$. **1.364.** $z^3 + 1 = 0$.

1.365. $(z + 2)^4 - 16 = 0$. **1.366.** $(z + 2)^4 + 16 = 0$.

Решить уравнения.

1.367. $z^4 + 18z^2 + 81 = 0$. **1.368.** $z^4 + 4z^2 + 3 = 0$.

1.369. $z^4 + 9z^2 + 20 = 0$. **1.370.** $z^4 - (1+i)z^2 + 2(1+i) = 0$.

1.371. $z^6 + 4z^3 + 3 = 0$. **1.372.** $z^8 + 15z^4 - 16 = 0$.

Разложить многочлены на линейные и квадратичные множители с действительными коэффициентами:

1.373. $z^4 - 81$. **1.374.** $z^4 + 81$. **1.375.** $z^4 + z^2 + 1$.

1.376. $z^4 + 4z^3 + 11z^2 + 14z + 10$, если известен один корень $z_1 = -1 + i$.

1.377. $z^5 + z^4 + z^3 - z^2 - z - 1$, если известен двукратный корень $z_1 = z_2 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

1.378. $z^4 + 6z^3 + 9z^2 + 100$, если известен корень $z_1 = 1 + 2i$.

1.379. Показать, что все корни уравнения

$$\left(\frac{1+ix}{1-ix} \right)^n = \frac{1+ia}{1-ia} \quad (a \in \mathbb{R})$$

действительны и различны.

Глава 2

ПРЕДЕЛЫ

2.1. Предел последовательности

1. Понятие последовательности. Если каждому натуральному числу $n \in \mathbb{N}$ поставлено в соответствие некоторое действительное число $f(n) \in \mathbb{R}$, то говорят, что задана *последовательность* действительных чисел. Число $f(n)$ называется n -м членом последовательности и обозначается символом x_n , а формула $x_n = f(n)$ называется *формулой общего члена* последовательности $\{x_n\}$.

Найти первые пять членов последовательности $\{x_n\}$ с указанным общим членом.

2.1. $x_n = 3(n-1) + 2$. 2.2. $x_n = n^2$.

2.3. $x_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n}$. 2.4. $x_n = n(1 - (-1)^n)$.

Найти формулу общего члена последовательности:

2.5. $-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots$ 2.6. $0, 2, 0, 2, \dots$

2.7. $2, \frac{4}{3}, \frac{6}{5}, \frac{8}{7}, \dots$ 2.8. $1, 0, -3, 0, 5, 0, -7, 0, \dots$

Последовательность $\{x_n\}$ называется *возрастающей* (неубывающей), если для любого натурального n выполняется неравенство $x_{n+1} > x_n$ ($x_{n+1} \geq x_n$). Последовательность $\{x_n\}$ называют *убывающей* (невозрастающей), если для любого натурального n верно неравенство $x_{n+1} < x_n$ ($x_{n+1} \leq x_n$). Возрастающие (неубывающие), а также убывающие (невозрастающие) последовательности называются *строго монотонными* (монотонными).



ПРИМЕР 2.1. Доказать, что последовательность с общим членом $x_n = n^2 + n - 4$ является возрастающей.

- Запишем формулу $(n+1)$ -го члена: $x_{n+1} = (n+1)^2 + (n+1) - 4$ и рассмотрим разность $x_{n+1} - x_n$. Находим $x_{n+1} - x_n = (n+1)^2 + (n+1) - 4 - (n^2 + n - 4) = 2n + 2 > 0$. Таким образом, при любом натуральном n справедливо неравенство $x_{n+1} > x_n$, и, следовательно, данная последовательность является возрастающей. ◀

Исследовать на монотонность следующие последовательности:

2.9. $x_n = -0,5^{n+2}$.

2.10. $x_n = \frac{3n+4}{n+2}$.

2.11. $x_n = \sqrt{n+1}$.

2.12. $x_n = \sqrt{n+2} - \sqrt{n+5}$.

2.13. $x_n = \cos(\pi n)$.

2.14. $y_n = \frac{(-1)^n}{n}$.



Последовательность $\{x_n\}$ *ограничена снизу (сверху)*, если существует число C_1 (C_2) такое, что для всех $n \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство $x_n \geq C_1$ ($x_n \leq C_2$). Последовательность, ограниченная снизу и сверху, называется *ограниченной*. Иначе говоря, последовательность ограничена, если существует число $C > 0$ такое, что для всех $n \in \mathbb{N}$ верно неравенство $|x_n| \leq C$.



ПРИМЕР 2.2. Доказать, что последовательность с общим членом $x_n = 0,5^{n-2} + 2$ является ограниченной. Найти ее наибольший и наименьший члены (если они существуют).

- Для всех $n \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство $x_n > 2$, следовательно, последовательность ограничена снизу. Чтобы доказать ее ограниченность сверху, рассмотрим разность $x_{n+1} - x_n$. Имеем

$$x_{n+1} - x_n = (0,5^{(n+1)+1} + 2) - (0,5^{n+1} + 2) = 0,5^{n+1}(0,5 - 1) = -0,5 \cdot 0,5^{n+1}.$$

Таким образом, при любом натуральном n справедливо неравенство $x_{n+1} - x_n < 0$. Значит, $x_{n+1} < x_n < x_{n-1} < \dots < x_1$.

Учитывая, что $x_1 = 4$, окончательно получаем $x_n < 4$, $n \in \mathbb{N}$. Мы доказали, что данная последовательность ограничена сверху и ее наибольший член равен 4. Следовательно, последовательность ограничена сверху и снизу, т.е. является ограниченной. Ее наибольший член $x_1 = 4$, и так как при каждом $n \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство $x_{n+1} < x_n$, то наименьшего члена не существует. ◀

2.15. Доказать, что последовательность $x_n = \frac{n+3}{n+1}$ является ограниченной. Найти ее наибольший и наименьший члены (если они существуют).

2.16. Доказать, что последовательность $x_n = \sqrt{n}$ не является ограниченной.

Исследовать последовательность на ограниченность и найти ее наибольший и наименьший члены (если они существуют):

$$\mathbf{2.17.} \quad x_n = \sin\left(\frac{\pi}{6} + \pi n\right) + 2. \quad \mathbf{2.18.} \quad x_n = \sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi n}{3}\right).$$

$$\mathbf{2.19.} \quad x_n = \frac{4n-10}{2n-7}. \quad \mathbf{2.20.} \quad x_n = 3n^2 - 10n - 14.$$

2. Предел последовательности. Число a называется *пределом последовательности* $\{x_n\}$, что записывается $a = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, если для каждого $\varepsilon > 0$ найдется такой номер $N(\varepsilon)$, что для всех $n \geq N(\varepsilon)$ выполняется неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$. В этом случае последовательность называется *сходящейся*.

Критерий Коши. Для того чтобы последовательность $\{x_n\}$ имела предел, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовал номер $N(\varepsilon)$ такой, что для всех $n > N(\varepsilon)$ неравенство $|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon$ выполнялось при любом $p \in \mathbb{N}$. ▶

ПРИМЕР 2.3. Используя только определение, доказать,

$$\text{что } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 3}{2n^2 - 9n} = \frac{1}{2}.$$

- Зададим произвольное $\varepsilon > 0$. Нужно найти номер $N(\varepsilon)$ такой, что для любого натурального $n > N(\varepsilon)$ выполняется неравенство $\left| \frac{n^2 + 3}{2n^2 - 9n} - \frac{1}{2} \right| < \varepsilon$. Для любого натурального n имеем

$$\left| \frac{n^2 + 3}{2n^2 - 9n} - \frac{1}{2} \right| = \left| \frac{9n + 6}{2n^2 - 9n} \right| = \frac{|9n + 6|}{|2n^2 - 9n|}.$$

Так как $9n + 6 \leq 10n$ при $n \geq 6$, а $2n^2 - 9n \geq n^2$ при $n \geq 9$, то при любом $n \geq 9$ справедливо неравенство $\frac{9n + 6}{|2n^2 - 9n|} \leq \frac{10n}{n^2} = \frac{10}{n}$. Выберем число $N(\varepsilon)$ таким образом,

чтобы выполнялись неравенства $N(\varepsilon) \geq 9$ и $\frac{10}{N(\varepsilon)} < \varepsilon$. На-

пример, в качестве $N(\varepsilon)$ можно взять $N(\varepsilon) = \left[\frac{10}{\varepsilon} \right] + 9$, где

$\left[\frac{10}{\varepsilon} \right]$ — целая часть числа $\frac{10}{\varepsilon}$. Тогда для каждого $n > N(\varepsilon)$

будет выполнено неравенство $\left| \frac{n^2 + 3}{2n^2 - 9n} - \frac{1}{2} \right| < \varepsilon$, что и доказывает требуемое утверждение. ◀

Используя только определение, доказать, что $a = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

2.21. $x_n = 0, \underbrace{33\dots3}_n$, $a = \frac{1}{3}$. 2.22. $x_n = \frac{\sqrt{n^2 + 1}}{n}$, $a = 1$.

2.23. $x_n = \frac{\sin n^2}{n}$, $a = 0$. 2.24. $x_n = \frac{2n^3 - n + 1}{n^3 - n^2 - 1}$, $a = 2$.

Используя логическую символику, сформулировать следующие высказывания и их отрицания.

2.25. Число a является пределом последовательности $\{x_n\}$.

2.26. Последовательность $\{x_n\}$ сходящаяся.

При вычислении пределов последовательностей используются арифметические свойства сходящихся последовательностей и их пределов.

ПРИМЕР 2.4. Вычислить предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - \sqrt{n}}{3n^2 - 2}$.

- Так как каждая из последовательностей $\{n^2 - \sqrt{n}\}$ и $\{3n^2 - 2\}$ не является сходящейся, то применить свойство о пределе отношения нельзя. Преобразуем дробь, разделив числитель и знаменатель на максимальную степень знаменателя (в данном случае максимальные степени числителя и знаменателя равны между собой)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - \sqrt{n}}{3n^2 - 2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \sqrt{\frac{1}{n^3}}}{3 - \frac{2}{n^2}}.$$

Заметим, что теперь предел числителя и знаменателя существуют. Действительно,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \sqrt{\frac{1}{n^3}}\right) = 1 \neq 0$$

и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(3 - \frac{2}{n^2}\right) = 3 \neq 0,$$

поэтому можно воспользоваться свойством предела отношения и записать

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \sqrt{\frac{1}{n^3}}}{3 - \frac{2}{n^2}} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \sqrt{\frac{1}{n^3}}\right)}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(3 - \frac{2}{n^2}\right)} = \frac{1}{3}.$$

Окончательно искомый предел равен $\frac{1}{3}$.

Вычислить пределы.

$$2.27. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{3n-2}.$$

$$2.28. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n + \sqrt{n}}{2n - \sqrt{n}}.$$

$$2.29. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - n + 5}{n^3 - 2}.$$

$$2.30. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 - 2n\sqrt{n} + 3}{n^2 - 2}.$$

$$2.31. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^3 + 3}}{\sqrt{n^3 - 2n + 5 + 1}}.$$

$$2.32. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^2 + n - 1} + \sqrt{n+1}}{\sqrt[3]{n^2 - 1} - 1}.$$



При вычислении пределов, содержащих иррациональность в виде разности двух или нескольких корней, необходимо преобразовать формулу общего члена последовательности, умножив и разделив ее на выражение, сопряженное к этой разности.



ПРИМЕР 2.5. Вычислить предел $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 3} - n)$.

► Так как каждая из последовательностей $\{\sqrt{n^2 + 3}\}$ и $\{n\}$ не является сходящейся, то применить правило о пределе разности нельзя. Преобразуем выражение под знаком предела, умножив и разделив его на сопряженное выражение $\sqrt{n^2 + 3} + n$. Получим

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 3} - n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n^2 + 3} - n)(\sqrt{n^2 + 3} + n)}{\sqrt{n^2 + 3} + n} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n^2 + 3) - n^2}{\sqrt{n^2 + 3} + n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{\sqrt{n^2 + 3} + n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{3}{n}}{\sqrt{1 + \frac{3}{n}} + 1} = \\ &= \frac{0}{2} = 0. \end{aligned}$$



Вычислить пределы.

$$2.33. \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+2} - \sqrt{n}).$$

$$2.34. \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 2n - 3} - \sqrt{n^2 - 3n - 5}).$$

$$2.35. \lim_{n \rightarrow \infty} n^{2/3} (\sqrt[3]{n-1} - \sqrt[3]{n+7}).$$

$$2.36. \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{n^3 + n^2 + 1} - \sqrt[3]{n^3 - 2n^2 - 3}).$$

$$2.37. \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+2} + \sqrt{n} - \sqrt{2n+2}).$$

$$2.38. \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+3} + \sqrt{n} - \sqrt{2n-1}).$$



Всякая монотонная ограниченная последовательность имеет предел. Если последовательность монотонно не убывает (не возрастает) и ограничена сверху (снизу), то она ограничена, следовательно, имеет предел.



ПРИМЕР 2.6. Доказать, что последовательность

$$z_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \text{ имеет предел.}$$

► Докажем, что последовательность $z_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ монотонно возрастает и ограничена.

Действительно, по формуле бинома Ньютона имеем

$$\begin{aligned} z_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &= C_n^0 \cdot 1^n \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^0 + C_n^1 \cdot 1^{n-1} \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^1 + C_n^2 \cdot 1^{n-2} \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^2 + \dots + \\ &+ C_n^k \cdot 1^{n-k} \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^k + \dots + C_n^n \cdot 1^0 \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^n. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Преобразуя каждое слагаемое в этой сумме

$$\begin{aligned} C_n^k \cdot 1^{n-k} \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^k &= \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^k = \frac{\overbrace{n(n-1) \dots (n-k+1)}^{k \text{ множителей}}}{k! \cdot n^k} = \\ &= \frac{1}{k!} \left(\frac{n}{n}\right) \cdot \left(\frac{n-1}{n}\right) \dots \left(\frac{n-k+1}{n}\right) = \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right), \end{aligned}$$

получаем

$$z_n = 2 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{n}\right) + \dots + \\ + \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) + \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right),$$

а

$$z_{n+1} = 2 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{3!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) + \dots + \\ + \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n+1}\right) + \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{n+1}\right) + \\ + \frac{1}{(n+1)!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \dots \left(1 - \frac{n}{n+1}\right).$$

Отсюда видно, что k -е слагаемое в сумме, выражающей z_n , не превосходит соответствующего слагаемого в z_{n+1} .

Кроме того, в z_{n+1} на одно слагаемое больше. Отсюда

$z_n < z_{n+1}$, т.е. последовательность $\{z_n\}$ является монотонно возрастающей.

Покажем, что последовательность $\{z_n\}$ является ограниченной сверху.

При всех $k \in \mathbb{N}$ выполняется следующее неравенство, которое легко доказывается методом математической индукции $k! \geq 2^{k-1}$. Тогда для каждого слагаемого в (2.1) выполняется неравенство

$$\frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \leq \frac{1}{2^{k-1}}.$$

Таким образом, получаем

$$z_n \leq 1 + \frac{1}{2^0} + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}.$$

По формуле суммы n первых членов геометрической прогрессии с первым членом $b_1 = 1$ и знаменателем $d = \frac{1}{2}$ имеем

$$\frac{1}{2^0} + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1 \left(\frac{1}{2^{n+1}} - 1 \right)}{\frac{1}{2} - 1} = 2 \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}} \right) < 2.$$

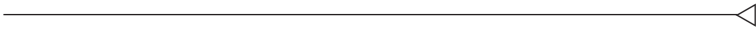
Следовательно, $z_n < 3$, т.е. последовательность $\{z_n\}$ является ограниченной сверху.

Так как последовательность $\{z_n\}$ является монотонно возрастающей и ограниченной сверху, то она имеет предел. ◀



Предел последовательности $z_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ называется *числом e* , т.е. по определению

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$



ПРИМЕР 2.7. Вычислить предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+5}{n-3}\right)^n$.

► Преобразуем дробь $\frac{n+5}{n-3}$, выделив в ней целую часть,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+5}{n-3}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{8}{n-3}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{8}{n-3}\right)^{\frac{n-3}{8}}\right]^{\frac{8n}{n-3}}.$$

Так как $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{8}{n-3}\right)^{\frac{n-3}{8}} = e$, а $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8n}{n-3} = 8$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+5}{n-3}\right)^n = e^8. \quad \blacktriangleleft$$

Вычислить пределы.

2.39. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-2}{n+1}\right)^n.$

2.40. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+5}{n-3}\right)^n.$

2.41. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n^2+5n}{2n^2-3}\right)^n.$

2.42. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n^2+7}{2n^2-3}\right)^{2n^2+n}.$



Последовательность $\{x_n\}$ называется *бесконечно малой*, если $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$.

Последовательность $\{x_n\}$ называется *бесконечно большой* (сходящейся к бесконечности), что записывается $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$, если для любого числа $E > 0$ существует номер $N(E)$ такой, что при $n > N(E)$ выполняется неравенство $|x_n| > E$. Если при этом начиная с некоторого номера все члены последовательности положительны (отрицательны), т.е. при $n > N(E)$ выполняется неравенство $x_n > E$ ($x_n < -E$), то используют запись $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$ ($\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$) и говорят, что последовательность сходится к $+\infty$ ($-\infty$).

Часто используется утверждение: если последовательность $\{x_n\}$ является бесконечно малой, а последовательность $\{y_n\}$ — ограниченной, то последовательность $\{x_n \cdot y_n\}$ является бесконечно малой.

ПРИМЕР 2.8. Вычислить $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + \sin n}{n}$.

► Представим общий член исследуемой последовательности как произведение: $\frac{2 + \sin n}{n} = \frac{1}{n}(2 + \sin n)$. Так как $1 \leq 2 + \sin n \leq 3$ при любом n , то последовательность $\{2 + \sin n\}$ ограничена. Поскольку $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$, последовательность $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ является бесконечно малой, следовательно, последовательность $\left\{\frac{2 + \sin n}{n}\right\}$ тоже бесконечно малая, т.е. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + \sin n}{n} = 0$. ◀

Установить, какие из последовательностей являются бесконечно большими.

2.43. $x_n = 2^n$.

2.44. $x_n = 3^{\sqrt{n}}$.

2.45. $x_n = \frac{n^2 - 3n - 5}{n + 1}$.

2.46. $x_n = \sqrt{n + 5} - \sqrt{2n - 3}$.

2.47. $x_n = (-1)^n n.$

2.48. $x_n = n^{(-1)^n}.$

2.49. $x_n = n \sin \frac{\pi n}{2}.$

2.50. $x_n = n \cos \frac{\pi n}{3}.$

2.51. $x_n = n + \sin n.$

2.52. $x_n = n + n \cos n.$

Вычислить пределы.

2.53. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin(2n+1)}{\sqrt{n}}.$

2.54. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n^2+1)(\sin n + \cos n)}{n^3}.$



Число a называется *предельной точкой* последовательности $\{x_n\}$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется бесконечное число членов этой последовательности, удовлетворяющих условию $|x_n - a| < \varepsilon$. Если последовательность имеет предел, то она имеет единственную предельную точку, которая совпадает с пределом. Нетрудно заметить, что если последовательность имеет по крайней мере две предельные точки, то она является расходящейся.

Принцип Больцано — Вейерштрасса. Каждая ограниченная последовательность имеет хотя бы одну предельную точку.

Часто используют и другую формулировку этого утверждения: из всякой ограниченной последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность.



Используя логическую символику, сформулировать высказывания и их отрицания.

2.55. Число a является предельной точкой последовательности $\{x_n\}$.

2.56. Последовательность $\{x_n\}$ имеет предельные точки.

Найти все предельные точки последовательностей.

2.57. $x_n = \frac{1 + (-1)^n}{2 + (-1)^n}.$

2.58. $x_n = n \sin \frac{\pi n}{2}.$

2.59. Выделить из последовательности $x_n = \frac{n+1}{n} \cos^2 \frac{\pi n}{4}$

все сходящиеся подпоследовательности.

2.60. Найти все предельные точки последовательности $x_n = n \sin \pi n$. Имеет ли она предел?

3. Предел последовательности комплексных чисел. Число a называется *пределом* последовательности комплексных чисел $\{z_n\}$, что записывается $a = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n$, если для каждого $\varepsilon > 0$ найдется такой номер $N(\varepsilon)$, что для всех $n \geq N(\varepsilon)$ выполняется неравенство $|z_n - a| < \varepsilon$.

Последовательность $\{z_n\}$ называется *сходящейся к бесконечности*, что записывается $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \infty$, если для любого числа $E > 0$ существует номер $N(E)$ такой, что при $N > N(E)$ выполняется неравенство $|z_n| > E$.

Критерий сходимости последовательности комплексных чисел. Если $x_n = \operatorname{Re} z_n$ и $y_n = \operatorname{Im} z_n$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a \neq \infty$ тогда и только тогда, когда $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \operatorname{Re} a$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \operatorname{Im} a$.

При вычислении пределов последовательности комплексных чисел используются следующие свойства. Если $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a \neq \infty$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} w_n = b \neq \infty$, то выполняются равенства:

$$\text{а) } \lim_{n \rightarrow \infty} (z_n + w_n) = a + b; \quad \text{б) } \lim_{n \rightarrow \infty} z_n w_n = ab;$$

$$\text{в) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{z_n}{w_n} = \frac{a}{b} \text{ при } b \neq 0.$$

Пусть $r_n = |z_n|$ и $\varphi_n = \arg z_n$. Если $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = r$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n = \varphi$, то последовательность $\{z_n\}$ сходится, $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a$, причем $|a| = r$ и $\arg a = \varphi$. Обратное неверно (см. задачи 2.81 и 2.82).

ПРИМЕР 2.9. Вычислить предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+i)(1+in)}{(n-i)(1-in)}$.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+i)(1+in)}{(n-i)(1-in)} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+i}{n-i} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+in}{1-in} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+i)(n+i)}{(n-i)(n+i)} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1+in)(1+in)}{(1-in)(1+in)} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - 1 + 2in}{n^2 + 1} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - n^2 + 2ni}{1 + n^2} = \end{aligned}$$

$$= \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - 1}{n^2 + 1} + 2i \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n^2 + 1} \right) \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - n^2}{1 + n^2} + 2i \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{1 + n^2} \right) = \\ = (1 + 2i \cdot 0)(-1 + 2i \cdot 0) = -1. \quad \blacktriangleleft$$

Вычислить пределы.

$$2.61. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 - i + \frac{1}{n}(1 + i) \right). \quad 2.62. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - in}{1 + in}.$$

$$2.63. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{in^2}{n^2 + n - 4i}. \quad 2.64. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n + 2i)(3 + 7in)}{(2 - i)n^2 + 1}.$$

$$2.65. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{i^n}{n} \right). \quad 2.66. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{in\pi/4}}{n}.$$

$$2.67. \lim_{n \rightarrow \infty} (2i)^n. \quad 2.68. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(n \sin \frac{1}{n} + i \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \right).$$

$$2.69. \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{i^k}{3^k}. \quad 2.70. \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{(3 - 2i)^k}.$$

Доказать сходимость последовательностей и найти их пределы.

$$2.71. z_n = z^n, \quad |z| < 1. \quad 2.72. z_n = nz^n, \quad |z| < 1.$$

$$2.73. z_n = \sum_{k=0}^n z^k, \quad |z| < 1. \quad 2.74. z_n = \frac{z^n}{1 + z^{2n}}, \quad |z| > 1.$$

Доказать ограниченность и расходимость последовательностей.

$$2.75. z_n = i^n. \quad 2.76. z_n = (-1)^n + i \frac{2 - n}{2 + n}.$$

$$2.77. z_n = \left(1 + \frac{1}{n} \right) e^{i\pi n/2}. \quad 2.78. z_n = (1 + i^n).$$

$in)(1 + in) =$ Доказать неограниченность последовательностей и не-
сходимость их к бесконечности.

$$2.79. z_n = n(1 + i^n). \quad 2.80. z_n = (e^{i\pi n/2} - i) \ln n.$$

2.81. Пусть $z_n = e^{i(-1)^n/n}$ и $\varphi_n = \arg z_n$. Показать, что по-
следовательность $\{z_n\}$ сходится, а последовательность $\{\varphi_n\}$
расходится.

2.82. Пусть $z_n = \frac{i^n}{n}$ и $\varphi_n = \arg z_n$. Показать, что последовательность $\{z_n\}$ сходится, а последовательность $\{\varphi_n\}$ расходится.

2.2. Понятие функции.

Элементарные функции и их графики

1. Понятие функции. Пусть D — произвольное множество действительных чисел. Если каждому числу $x \in D$ поставлено в соответствие некоторое действительное число $f(x)$, то говорят, что на множестве D задана *числовая функция* f . Множество D называется *областью определения*, а множество $E = \{y \in \mathbb{R} \mid \exists x \in D \ f(x) = y\}$ — *множеством значений* числовой функции f . Символически функция записывается в виде $f: D \rightarrow E$ или $y = f(x)$.

ПРИМЕР 2.10. Найти область определения и множество значений функции $y = \sqrt{9 - x^2}$.

- Функция $y(x) = \sqrt{9 - x^2}$ определена на множестве тех значений x , для которых подкоренное выражение неотрицательно, т.е. $9 - x^2 \geq 0$, или $(x - 3)(x + 3) \leq 0$, $x \in [-3; 3]$. Отсюда находим $D_y = [-3, 3]$.

Для нахождения множества значений выясним при каких a уравнение $\sqrt{9 - x^2} = a$ имеет решение. Очевидно, $a \geq 0$ и $9 - x^2 = a^2$, или $x^2 = 9 - a^2$. Последнее уравнение имеет решения при $9 - a^2 \geq 0$, т.е. если $|a| \leq 3$. С учетом неотрицательности a получаем $a \in [0, 3]$. Множеством значений функции является $E = [0, 3]$. ◀

► Пусть функция $f: D \rightarrow E$ такова, что для любых $x_1, x_2 \in D$ из условия $x_1 \neq x_2$ следует $f(x_1) \neq f(x_2)$. В этом случае для каждого $y \in E$ существует единственное $x \in D$

такое, что $y = f(x)$. Тем самым определена новая функция $f^{-1} : E \rightarrow D$, которая называется *обратной* к функции f . При этом для всякого $x \in D$ выполняется равенство $g(f(x)) = x$, для всякого $y \in E$ выполняется $f(g(y)) = y$.

ПРИМЕР 2.11. Найти обратную функцию для

$$f(x) = \frac{x-1}{3x+2}.$$

► Областью определения функции $f(x) = \frac{x-1}{3x+2} = \frac{1}{3} - \frac{5/3}{3x+2}$ является множество $D_f = (-\infty, -2/3) \cup (-2/3, +\infty)$, а множеством значений $E_f = (-\infty, 1/3) \cup (1/3, +\infty)$.

Для нахождения обратной функции решим уравнение $y = \frac{x-1}{3x+2}$ относительно x . Последовательно находим $x-1 = 3xy + 2y$; $x - 3xy = 2y + 1$ и $x(1-3y) = 2y + 1$. Если $1-3y = 0$, то $y = 1/3$ не принадлежит E_f . Значит, $y \neq 1/3$.

Тогда получаем $x = \frac{2y+1}{1-3y}$, следовательно, $f^{-1}(x) = \frac{2x+1}{1-3x}$.

Областью определения функции $f^{-1}(x) = \frac{2x+1}{1-3x} = -\frac{2}{3} - \frac{5/3}{3x-1}$ является множество $D_f = (-\infty, 1/3) \cup (1/3, +\infty) = E_f$, множеством значений данной функции является $E_{f^{-1}} = (-\infty, -2/3) \cup (-2/3, +\infty) = D_f$. ◀

► Пусть заданы функции $f : X \rightarrow Y$ и $g : Y \rightarrow Z$. Их *композицией*, или *сложной функцией*, полученной последовательным применением сначала f , а затем g , называется функция $h = g \circ f : X \rightarrow Z$, определенная равенством $h(x) = g(f(x))$.

ПРИМЕР 2.12. Пусть $g(x) = 2x^3 + 3$ и $f(x) = \sqrt{x}$. Найти функции $h_1(x) = f(g(x))$ и $h_2(x) = g(f(x))$.

- Найдем области определения и множества значений заданных функций: $D_g = \mathbb{R}$, $E_g = \mathbb{R}$ и $D_f = [0, +\infty)$, $E_f = [0, +\infty)$.

Функция $h_1(x) = f(g(x))$ определена при тех значениях $x \in D_g$, при которых $g(x) \in D_f$, т.е. при $2x^3 + 3 \geq 0$, $x \geq -\sqrt[3]{1,5}$. Получаем $h_1(x) = \sqrt{2x^3 + 3}$ и $D_{h_1} = [-\sqrt[3]{1,5}, +\infty)$. Так как $D_g = \mathbb{R}$, то для всех $x \in D_f$ выполняется $f(x) \in D_g$, т.е. функция $h_2(x) = g(f(x))$ определена при всех $x \in D_f$ и равна $h_2(x) = 2(\sqrt{x})^3 + 3$, $D_{h_2} = [0, +\infty)$. ◀

ПРИМЕР 2.13. Пусть $g(x) = \sin x - 1$ и $f(x) = \sqrt{x}$. Найти функцию $h(x) = f(g(x))$.

- Найдем область определения функции $f(x)$ и множество значений $g(x)$. Так как $-1 \leq \sin x \leq 1$, то $E_g = [-2, 0]$; $D_f = [0, +\infty)$. Функция $h(x) = f(g(x))$ определена при тех значениях $x \in D_g$, при которых $g(x) \in D_f$, т.е. только когда $g(x) = 0$, т.е. $\sin x = 1$, $x = \pi/2 + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Получаем $h(x) = f(0) = 0$, $D_h = \{\pi/2 + 2\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\}$. ◀

Найти области определения функций.

$$2.83. y = \sqrt{x} + \sqrt{1-x}. \quad 2.84. y = \sqrt{-x} + \frac{1}{3+x}.$$

$$2.85. y = \sqrt{\frac{2+x}{1-x}}. \quad 2.86. y = \sqrt[3]{\frac{x^2-1}{x-2}}.$$

Найти области определения и множества значений функций.

$$2.87. y = x^2 + 2x + 3. \quad 2.88. y = \sqrt{5-x^2} + 2x.$$

$$2.89. y = \frac{1}{x^2 + 4x + 5}. \quad 2.90. y = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 4x - 5}}.$$

$$2.91. y = \log_2(x^2 - 4). \quad 2.92. y = \log_{0,5}(16 - x^2).$$

2.93. $y = \sin x - 3$.

2.94. $y = \cos^2 x + 5$.

2.95. $y = 2^{x^2}$.

2.96. $y = 0,5^{\sqrt{1-x^2}}$.

2.97. Дана функция $y(x) = x^2$. Найти:а) $y(-x)$; б) $y(x-1)$; в) $y(1/x)$; г) $y(\sqrt{x})$; д) $2y(x)$;е) $y^2(1-x)$; ж) $\sqrt{y(x)}$; з) $y(y(x))$; и) $y(2y(3x))$.2.98. Дана функция $y(x) = 1/x$. Найти:а) $y(3x)$; б) $y(3(x+2))$;в) $4y(3(x+2))$; г) $2-4y(3(x+2))$.2.99. Найти $f(g(x))$, $f(f(x))$, $g(f(x))$, $g(g(x))$, если:а) $f(x) = 2x-1$, $g(x) = x^3$; б) $f(x) = (x+1)^2$, $g(x) = \sqrt{x}$.2.100. Дана функция $f(x) = \frac{x}{x+1}$. Решить неравенство

$$f(x+3) < 2f(3x+5).$$

Для функций $f(x)$ написать формулы обратных функций $f^{-1}(x)$ и указать их области определения.

2.101. $f(x) = \sqrt[3]{2x+7}$.

2.102. $f(x) = \sqrt[3]{10-3x}$.

2.103. $f(x) = \frac{x-2}{3x+5}$.

2.104. $f(x) = \frac{2x+3}{x-1}$.

2.105. $f(x) = \sqrt{3-2x} + 1$.

2.106. $f(x) = \sqrt{3x-5} - 1$.

2.107. $f(x) = 2^{x-2}$.

2.108. $f(x) = 0,5^{2-3x}$.

2.109. $f(x) = \log_3(x+5)$.

2.110. $f(x) = \log_{0,5}(5-x)$.

Найти обратные функции и области их определения, если исходные функции заданы на указанных промежутках.

2.111. $y = x^2 - 1$: а) $x \in (-\infty, 0]$; б) $x \in [0, +\infty)$.

2.112. $y = -x^2 + 2x + 3$: а) $x \in (-\infty, 1]$; б) $x \in [1, +\infty)$.

2.113. $y = \cos x$: а) $x \in [0, \pi]$; б) $x \in [-\pi, 0]$.

2.114. $y = \sin x$: а) $x \in [-\pi/2, \pi/2]$; б) $x \in [\pi/2, 3\pi/2]$.

2. Элементарные функции и их графики. Следующие функции называются *основными элементарными*.

1. *Степенная* функция: $y = x^a$, $a \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$.2. *Показательная* функция: $y = a^x$, $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $a \neq 1$, $x \in \mathbb{R}$.

3. *Логарифмическая* функция: $y = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$, $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$.

4. *Тригонометрические* функции: $y = \sin x$, $x \in \mathbb{R}$; $y = \cos x$, $x \in \mathbb{R}$; $y = \operatorname{tg} x$, $x \in \mathbb{R}$, $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; $y = \operatorname{ctg} x$, $x \in \mathbb{R}$, $x \neq \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

5. *Обратные тригонометрические* функции: $y = \arcsin x$, $x \in [-1, 1]$; $y = \arccos x$, $x \in [-1, 1]$; $y = \arctg x$, $x \in \mathbb{R}$; $y = \operatorname{arcctg} x$, $x \in \mathbb{R}$.

Элементарной называется функция, которая может быть получена из основных элементарных с помощью применения конечного числа арифметических операций, операции композиции и перехода к обратным.

Графиком функции $y = f(x)$, $x \in D$, называется множество точек плоскости с координатами $(x, f(x))$, $x \in D$.

При построении графиков элементарных функций часто используются *элементарные* (геометрические) преобразования графиков. Пусть график функции $y = f(x)$ уже построен. Перечислим преобразования графика, которые называются *элементарными*.

1. График функции $y = f(x + a)$ получается из графика функции $y = f(x)$ параллельным переносом вдоль оси Ox на a единиц влево, если $a > 0$, и на $(-a)$ вправо, если $a < 0$.

2. График функции $y = f(x) + a$ получается из графика функции $y = f(x)$ параллельным переносом вдоль оси Oy на a единиц вверх при $a > 0$ и на $(-a)$ вниз при $a < 0$.

3. График функции $y = -f(x)$ получается из графика функции $y = f(x)$ зеркальным отражением относительно оси Ox .

4. График функции $y = f(-x)$ получается из графика функции $y = f(x)$ зеркальным отражением относительно оси Oy .

5. График функции $y = af(x)$ получается из графика функции $y = f(x)$ увеличением (при $a > 1$) или уменьшением (при $0 < a < 1$) масштаба по оси ординат относительно того, что был у графика $y = f(x)$. При $a > 1$ график растягивается, а при $0 < a < 1$ сжимается к оси абсцисс. При $a < 0$ график функции $y = af(x)$ получается зеркальным отражением относительно оси Ox графика функции $y = |a| \cdot f(x)$.

6. График функции $y = f(ax)$ получается из графика функции $y = f(x)$ уменьшением (при $a > 1$) или увеличением (при $0 < a < 1$) масштаба по оси абсцисс относительно того, что был у графика $y = f(x)$. При $a > 1$ график функции $y = f(ax)$ получается сжатием в a раз к оси ординат (вдоль оси абсцисс), а при $0 < a < 1$ растяжением графика $y = f(x)$ в $\frac{1}{a}$ раз от оси ординат (вдоль оси абсцисс). При $a < 0$ график функции $y = f(ax)$ получается зеркальным отражением относительно оси Oy графика функции $y = f(|a|x)$.

В некоторых случаях при построении графика функции целесообразно разбить ее область определения на несколько непересекающихся промежутков и последовательно строить график на каждом из них.

ПРИМЕР 2.14. Построить график функции

$$y = |x + 1| - |x| + 3.$$

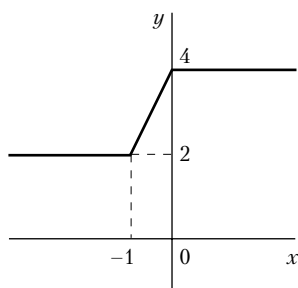


Рис. 2.1

► Разобьем область определения функции y на три промежутка: $(-\infty, -1]$, $(-1, 0]$ и $(0, +\infty)$ (рис. 2.1). При $x \in (-\infty, -1]$ имеем $|x| = -x$, $|x + 1| = -(x + 1)$, откуда $y = -(x + 1) - (-x) + 3 = 2$. При $x \in (-1, 0]$ получаем $|x + 1| = x + 1$, $|x| = -x$, откуда $y = (x + 1) - (-x) + 3 = 2x + 4$.

При $x \in (0, +\infty)$ будем иметь $|x + 1| = x + 1$, $|x| = x$, а значит, $y = (x + 1) - x + 3 = 4$. Следовательно, построение графика функции $y = |x + 1| - |x| + 3$ сводится к построению графика функции

$$y = \begin{cases} 2, & x \in (-\infty, -1], \\ 2x + 4, & x \in (-1, 0], \\ 4, & x \in (0, +\infty). \end{cases} \quad \blacktriangleleft$$

Записать функции в виде композиции основных элементарных функций.

$$2.115. f(x) = \sin(\cos \sqrt{x}). \quad 2.116. f(x) = \sqrt{\cos(\sin x)}.$$

$$2.117. f(x) = 2^{\sin x^2}. \quad 2.118. f(x) = \sin^2 2^x.$$

$$2.119. f(x) = \arcsin e^{\sqrt[3]{x}}. \quad 2.120. f(x) = e^{\sqrt[3]{\arcsin x}}.$$

Построить графики элементарных функций.

$$2.121. y = y_0 + a(x - x_0)^2, \text{ если:}$$

$$\text{а) } y_0 = 2, x_0 = -1, a = 2; \quad \text{б) } y_0 = -1, x_0 = 2, a = -0,5.$$

$$2.122. \text{ а) } y = 3x^2 + 12x + 3; \quad \text{б) } y = -3x^2 + 12x + 3.$$

$$2.123. y = y_0 + \frac{k}{x - x_0}, \text{ если:}$$

$$\text{а) } y_0 = 2, x_0 = -1, a = 2; \quad \text{б) } y_0 = -1, x_0 = 2, a = -0,5.$$

$$2.124. \text{ а) } y = \frac{2x+3}{x-2}; \quad \text{б) } y = \frac{x-3}{2-3x}.$$

$$2.125. y = a \sin(kx + \alpha) + b, \text{ если:}$$

$$\text{а) } a = 2, k = 3, \alpha = \pi/3, b = 1;$$

$$\text{б) } a = -0,5, k = 0,5, \alpha = -\pi/4, b = -1.$$

$$2.126. y = a \cos(kx + \alpha) + b, \text{ если:}$$

$$\text{а) } a = -2, k = 3, \alpha = \pi/4, b = 1;$$

$$\text{б) } a = 0,5, k = 0,5, \alpha = -\pi/6, b = -1.$$

$$2.127. y = a \arcsin(kx + b), \text{ если:}$$

$$\text{а) } a = -2, k = 3, b = -2; \quad \text{б) } a = -0,5, k = 0,5, b = -1.$$

$$2.128. y = a \operatorname{arctg}(kx + b), \text{ если:}$$

$$\text{а) } a = -3, k = 2/3, b = 1/3; \quad \text{б) } a = -0,5, k = -2, b = 3.$$

$$2.129. y = a^{kx+b}, \text{ если:}$$

$$\text{а) } a = 2, k = 3, b = -2; \quad \text{б) } a = 0,5, k = 0,5, b = -1.$$

$$2.130. y = \log_a(kx + b), \text{ если:}$$

$$\text{а) } a = 3, k = 2, b = 0,5; \quad \text{б) } a = 1/3, k = 0,5, b = -1.$$

$$2.131. y = |2 - x| + |2 + x|. \quad 2.132. y = |x| - |x^2 - 2x - 3|.$$

$$2.133. y = \cos(|x| + 1). \quad 2.134. y = \operatorname{tg}(2|x| - 1).$$

$$2.135. y = \log_5(|x| - 2). \quad 2.136. y = \log_{0,2}(2|x| + 1).$$

На плоскости Oxy изобразить множество точек, координаты которых удовлетворяют приведенным условиям.

$$2.137. x^2 - y^2 = 0.$$

$$2.138. x^2 + 6xy + 9y^2 = 0.$$

$$2.139. |x| + |y| = 1.$$

$$2.140. |x - y| + |x + y| = 1.$$

$$2.141. \|x| - |y|\| = 1.$$

$$2.142. x^2 + 2|x - y| - 4 = 0.$$

2.3. Предел функции. Непрерывность

1. Предел функции. Число A называется *пределом функции* $f(x)$ в точке x_0 , если эта функция определена в некоторой окрестности точки x_0 , за исключением, быть может, самой точки x_0 (т.е. в *проколотой* окрестности точки x_0), и для каждого $\varepsilon > 0$ найдется число $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для всех x , удовлетворяющих условиям $|x - x_0| < \delta(\varepsilon)$, $x \neq x_0$, выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$. В этом случае пишут

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A.$$

ПРИМЕР 2.15. Доказать, что $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 + x - 10}{x - 2} = 9$.

► Покажем, что для каждого $\varepsilon > 0$ найдется число $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для всех x , удовлетворяющих условиям $|x - 2| < \delta(\varepsilon)$, $x \neq 2$, выполняется неравенство $\left| \frac{2x^2 + x - 10}{x - 2} - 9 \right| < \varepsilon$. При $x \neq 2$ имеем $\frac{2x^2 + x - 10}{x - 2} = \frac{(x - 2)(2x + 5)}{x - 2} = 2x + 5$, тогда получаем

$$\left| \frac{2x^2 + x - 10}{x - 2} - 9 \right| < \varepsilon \Leftrightarrow |2x - 4| < \varepsilon \Leftrightarrow |x - 2| < \varepsilon/2.$$

Мы показали, что за искомое число $\delta(\varepsilon)$ можно принять $\varepsilon/2$. Итак, если $\delta(\varepsilon) = \varepsilon/2$, то для всех x , удовлетворяющих условиям $|x - 2| < \delta(\varepsilon)$, $x \neq 2$, выполняется

неравенство $\left| \frac{2x^2 + x - 10}{x - 2} - 9 \right| < \varepsilon$. Тем самым доказано,

что $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 + x - 10}{x - 2} = 9$. ◀



Критерий Коши. Для того чтобы функция $y = f(x)$ имела предел в точке x_0 , необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовало $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$, как только $|x' - x_0| < \delta(\varepsilon)$ и $|x'' - x_0| < \delta(\varepsilon)$, $x', x'' \neq x_0$.



ПРИМЕР 2.16. Доказать, что функция $f(x) = \cos \frac{1}{x}$ не

имеет предела при x , стремящемся к 0.

- Покажем, что для $\varepsilon = 1$ при любом $\delta > 0$ найдутся такие значения $x' \neq 0$ и $x'' \neq 0$, что условия $|x' - x_0| < \delta$ и $|x'' - x_0| < \delta$ выполняются, но $|f(x') - f(x'')| \geq \varepsilon$. Действительно, для любого $\delta > 0$ найдутся натуральные числа n' и n'' такие, что $n' > \frac{1}{2\pi\delta}$ и $n'' > \frac{1}{2\pi\varepsilon} - \frac{1}{2}$. Тогда для чисел $x' = \frac{1}{2\pi n'}$ и $x'' = \frac{1}{2\pi n'' + \pi}$ выполняются неравенства $|x' - x_0| < \delta$ и $|x'' - x_0| < \delta$, однако $f(x') = \cos 2\pi n' = 1$, а $f(x'') = \cos(2\pi n'' + \pi) = -1$. Следовательно, $|f(x') - f(x'')| = 2 > 1$, и согласно критерию Коши функция $f(x) = \cos \frac{1}{x}$ не имеет предела при x , стремящемся к 0. ◀

Пользуясь только определением предела функции, доказать, что $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$.

2.143. $f(x) = x^3$, $x_0 = 2$, $A = 8$.

2.144. $f(x) = x^4$, $x_0 = -3$, $A = 8$.

2.145. $f(x) = \sqrt{x}$, $x_0 = 27$, $A = 3$.

2.146. $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $x_0 = 27$, $A = 3$.

$$2.147. f(x) = \frac{1}{x}, \quad x_0 = \frac{1}{3}, \quad A = 3.$$

$$2.148. f(x) = \frac{2}{x+1}, \quad x_0 = -2, \quad A = -2.$$

$$2.149. f(x) = \cos x, \quad x_0 = 0, \quad A = 1.$$

$$2.150. f(x) = \sin x, \quad x_0 = 0, \quad A = 0.$$

Пользуясь критерием Коши, выяснить существование пределов.

$$2.151. \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x}. \quad 2.152. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}.$$



Число A называют *пределом функции $f(x)$ при x , стремящемся к $+\infty$* (пишут $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$), если для каждого $\varepsilon > 0$ найдется положительное число $\delta(\varepsilon)$ такое, что для всех x , удовлетворяющих неравенству $x > \delta(\varepsilon)$, выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.



ПРИМЕР 2.17. Доказать, что $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5}{\sqrt{x}} = 0$.

► Покажем, что для каждого $\varepsilon > 0$ найдется положительное число $\delta(\varepsilon)$ такое, что для всех x , удовлетворяющих неравенству $x > \delta(\varepsilon)$, выполняется неравенство $\left| \frac{5}{\sqrt{x}} \right| < \varepsilon$,

равносильное неравенству $x > \frac{25}{\varepsilon^2}$. Таким образом, в ка-

честве $\delta(\varepsilon)$ можно взять $\delta(\varepsilon) = \frac{25}{\varepsilon^2}$. ◀

Используя логическую символику, записать утверждения.

$$2.153. \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A. \quad 2.154. \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A.$$

Пользуясь определением предела функции на бесконечности, доказать, что $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$.

$$2.155. f(x) = \frac{x+2}{x-3}, \quad A = 1. \quad 2.156. f(x) = \frac{2x^3+2}{x^3-3}, \quad A = 2.$$



При вычислении пределов функций используются их арифметические свойства а также некоторые искусственные приемы. Если при подстановке x_0 числитель и знаменатель рационального выражения обращаются в 0, то их необходимо разложить на множители, выделив двучлен $(x - x_0)$.



ПРИМЕР 2.18. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 4}$.

- Числитель и знаменатель дроби обращаются в ноль при $x = 2$, следовательно, делятся на двучлен $(x - 2)$. Для любого $x \neq 2$ выполняются равенства

$$\frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 4} = \frac{(x + 3)(x - 2)}{(x - 2)(x + 2)} = \frac{x + 3}{x + 2},$$

следовательно, при $x \neq 2$ функции $\frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 4}$ и $\frac{x + 3}{x + 2}$ равны,

поэтому их пределы при $x \rightarrow 2$ также равны, поэтому

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x + 3}{x + 2} = \frac{\lim_{x \rightarrow 2} x + \lim_{x \rightarrow 2} 3}{\lim_{x \rightarrow 2} x + \lim_{x \rightarrow 2} 2} = \frac{2 + 3}{2 + 2} = \frac{5}{4}. \quad \blacktriangleleft$$



Нахождение пределов на бесконечности производится аналогично вычислению пределов последовательностей.



ПРИМЕР 2.19. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\sqrt[3]{x^3 + 10}}$.

►
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\sqrt[3]{x^3 + 10}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[3]{\frac{x^3}{x^3} + \frac{10}{x^3}}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[3]{1 + \frac{10}{x^3}}} = 1. \quad \blacktriangleleft$$

Вычислить пределы рациональных выражений.

2.157. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{7x^2 - 28}{(5x + 2)(8x - 16)}.$

2.158. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}.$

$$2.159. \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - x + 10}{x^2 - 2x - 15}. \quad 2.160. \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 6x + 8}{x^2 - 3x - 4}.$$

$$2.161. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)(1+2x)(1+3x) - 1}{x}.$$

$$2.162. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^2 - (1+5x)}{x + x^5}. \quad 2.163. \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{6}{1-x^6} - \frac{4}{1-x^4} \right).$$

$$2.164. \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{3}{1-x^3} - \frac{2}{1-x^2} \right). \quad 2.165. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^4 - 4x + 3}.$$

$$2.166. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 3x + 2}{x^5 - 4x + 3}. \quad 2.167. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^5 + 1}{x^7 + 1}.$$

$$2.168. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{10} - 1}{x^{16} - 1}. \quad 2.169. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4 - 5x}{x^4 + 8x^2 + 1}.$$

$$2.170. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}{3x^4 + 8x + 1}.$$

$$2.171. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 2x + 3}{x^5 + 2x - 1}. \quad 2.172. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^8 + 1}{10x^9 + 3x^2 + 2}.$$

$$2.173. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3}{x^2 + 1} - x + 2 \right). \quad 2.174. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3 + x}{2x^2 + 3} - \frac{x}{2} \right).$$



При вычислении пределов иррациональных выражений часто используются следующие приемы: а) введение новой переменной для избавления от иррациональности; б) умножение и деление иррационального выражения на сопряженное.



ПРИМЕР 2.20. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 4} - 2}{\sqrt{x^2 + 9} - 3}$.

► Умножив числитель и знаменатель на

$$\left(\sqrt{x^2 + 4} + 2 \right) \left(\sqrt{x^2 + 9} + 3 \right),$$

получим

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 4} - 2}{\sqrt{x^2 + 9} - 3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x^2 + 4} - 2)(\sqrt{x^2 + 4} + 2)(\sqrt{x^2 + 9} + 3)}{(\sqrt{x^2 + 9} - 3)(\sqrt{x^2 + 4} + 2)(\sqrt{x^2 + 9} + 3)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2(\sqrt{x^2+9}+3)}{x^2(\sqrt{x^2+4}+2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2+9}+3}{\sqrt{x^2+4}+2} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}.$$

Вычислить пределы иррациональных выражений.

$$2.175. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{3x}.$$

$$2.176. \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}.$$

$$2.177. \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x}-2}.$$

$$2.178. \lim_{x \rightarrow 7} \frac{\sqrt{x+2}-3}{\sqrt{x+9}-4}.$$

$$2.179. \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt[3]{x-6}+2}{x^3+8}.$$

$$2.180. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{7+x^3}-2}{x-1}.$$

$$2.181. \lim_{x \rightarrow 64} \frac{\sqrt{x}-8}{\sqrt[3]{x}-4}.$$

$$2.182. \lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt[3]{x}-2}.$$

$$2.183. \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2-5x-6}-x).$$

$$2.184. \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2+x}).$$

$$2.185. \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{x^3+x^2+1}-\sqrt[3]{x^3-x^2+1}).$$

$$2.186. \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[3]{x} (\sqrt[3]{(x+1)^2}-\sqrt[3]{(x-1)^2}).$$

$$2.187. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2+3}+\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^4+2x+1}+2x}.$$

$$2.188. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{x^3+8}+\sqrt{x^2+7}}{\sqrt[4]{16x^4+3}+\sqrt[5]{x^4+1}}.$$

$$2.189. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x}+\sqrt{x+\sqrt{x}}}{1+\sqrt{x+2}}. \quad 2.190. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x+x\sqrt{x+x\sqrt{x}}}}{1+\sqrt{1+x\sqrt[4]{x^3+1}}}.$$

2. Замечательные пределы. При вычислении пределов функций часто используются следующие замечательные пределы:

1. Первый замечательный предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1,$

2. Второй замечательный предел $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e.$

ПРИМЕР 2.21. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{x}$.

► Домножим числитель и знаменатель на 5, тогда получим

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5 \sin 5x}{5x},$$

из $x \rightarrow 0$ следует, что $5x \rightarrow 0$, поэтому можно использовать первый замечательный предел

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5 \sin 5x}{5x} = 5 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{5x} = 5 \cdot 1 = 5. \quad \blacktriangleleft$$

Доказать следствия, вытекающие из первого замечательного предела.

2.191. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x}.$

2.192. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}.$

2.193. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x}.$

2.194. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x}.$

Вычислить пределы, используя первый замечательный предел и следствия из него.

2.195. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{\sin 4x}.$

2.196. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 10x}{x}.$

2.197. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 3x}{\sin 5x}.$

2.198. $\lim_{x \rightarrow 0} x \operatorname{ctg} 3x.$

2.199. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x - \sin 3x}{\sin x}.$

2.200. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin 5x}{x + \sin 8x}.$

2.201. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 5x}{1 - \cos x}.$

2.202. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{\operatorname{tg}^2 3x}.$

2.203. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 3x}{x^2}.$

2.204. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{2x^3}.$

2.205. $\lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{\operatorname{tg} x - 1}{4x - \pi}.$

2.206. $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin 7x}{\sin 2x}.$

2.207. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin x - \sin 2}{x - 2}.$

2.208. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{4 - x^2}{\sin \pi x}.$



При вычислении пределов вида $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)^{g(x)}$, где $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 1$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \infty$, используется второй замечательный предел.



ПРИМЕР 2.22. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{x+2} \right)^{3x}$.

► Заметим, что $\frac{x}{x+2} = \frac{x+2-2}{x+2} = 1 - \frac{2}{x+2} = 1 + \frac{1}{\frac{x+2}{-2}}$.

Поэтому

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{x+2} \right)^{3x} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{x+2}{-2}} \right)^{3x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{x+2}{-2}} \right)^{\frac{x+2}{-2} \cdot \frac{-2}{x+2} \cdot 3x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{1}{\frac{x+2}{-2}} \right)^{\frac{x+2}{-2}} \right)^{\frac{-6x}{x+2}}. \end{aligned}$$

Если $x \rightarrow \infty$, то $t = \frac{x+2}{-2} \rightarrow \infty$. Следовательно,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{x+2}{-2}} \right)^{\frac{x+2}{-2}} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t} \right)^t = e;$$

отсюда окончательно выводим

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{x+2} \right)^{3x} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{1}{\frac{x+2}{-2}} \right)^{\frac{x+2}{-2}} \right)^{\frac{-6x}{x+2}} = \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-6x}{x+2}} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-6}{1+\frac{2}{x}}} = e^{-6}. \end{aligned}$$



Если $\lim_{x \rightarrow x_0(\infty)} \alpha(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow x_0(\infty)} \beta(x) = \infty$, то выполняется равенство

$$\lim_{x \rightarrow x_0(\infty)} (1 + \alpha(x))^{\beta(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow x_0(\infty)} \alpha(x)\beta(x)}.$$



ПРИМЕР 2.23. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \operatorname{tg} 5x)^{\frac{1}{\sin 3x}}$.

► Используя приведенное равенство, находим

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \operatorname{tg} 5x)^{\frac{1}{\sin 3x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left((1 + \operatorname{tg} 5x)^{\frac{1}{\operatorname{tg} 5x}} \right)^{\frac{\operatorname{tg} 5x}{\sin 3x}}.$$

Так как $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \operatorname{tg} 5x)^{\frac{1}{\operatorname{tg} 5x}} = e$, а $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 5x}{\sin 3x} = \frac{5}{3}$, то

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \operatorname{tg} 5x)^{\frac{1}{\sin 3x}} = e^{5/3}.$$



Доказать следствия, вытекающие из второго замечательного предела.

$$\mathbf{2.209.} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1. \quad \mathbf{2.210.} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e.$$

$$\mathbf{2.211.} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a. \quad \mathbf{2.212.} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^a - 1}{x} = a.$$

Используя второй замечательный предел, а также следствия из него, вычислить пределы.

$$\mathbf{2.213.} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+3}{2x-5} \right)^{4x+8}. \quad \mathbf{2.214.} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5x+7}{5x-10} \right)^{4x-15}.$$

$$\mathbf{2.215.} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2+2}{x^2+1} \right)^{x^2}. \quad \mathbf{2.216.} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2-1}{x^2+1} \right)^{x^2-1}.$$

$$\mathbf{2.217.} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2+2x-1}{x^2-3x-2} \right)^x. \quad \mathbf{2.218.} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^2-3x+3}{x^2+4x-2} \right)^{x-1}.$$

$$2.219. \lim_{x \rightarrow 0} (1 + x^2)^{\operatorname{ctg}^2 \pi x}.$$

$$2.220. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 + \operatorname{tg} x}{1 + \sin x} \right)^{\frac{1}{\sin^3 x}}.$$

$$2.221. \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin \pi x)^{\operatorname{ctg} \pi x}.$$

$$2.222. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\cos x}{\cos 2x} \right)^{\frac{1}{x^2}}.$$

$$2.223. \lim_{x \rightarrow \pi/4} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x}.$$

$$2.224. \lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{\sin x}{\sin 3} \right)^{\frac{1}{x-3}}.$$

$$2.225. \lim_{x \rightarrow \infty} x (\ln(2+x) - \ln x).$$

$$2.226. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}.$$

$$2.227. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{ax} - e^{bx}}{x}.$$

$$2.228. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos x}{x^2}.$$



Число A^- называется *пределом слева функции $f(x)$ в точке x_0* (обозначается $\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = A^-$), если для каждого $\varepsilon > 0$ найдется число $\delta > 0$ такое, что для всех $x_0 - \delta < x < x_0$ выполняется неравенство $|f(x) - A^-| < \varepsilon$.

Число A^+ называется *пределом справа функции $f(x)$ в точке x_0* (обозначается $\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = A^+$), если для каждого $\varepsilon > 0$ найдется число $\delta > 0$ такое, что для всех $x_0 < x < x_0 + \delta$ выполняется неравенство $|f(x) - A^+| < \varepsilon$.



ПРИМЕР 2.24. Найти односторонние пределы

$$\lim_{x \rightarrow \pm 0} (2+x)^{1/x}.$$

► Если $x \rightarrow -0$, то $2+x \rightarrow 2-0$, $1/x \rightarrow -\infty$ и $\lim_{x \rightarrow -0} (2+x)^{1/x} = 0$.

Если $x \rightarrow +0$, то $2+x \rightarrow 2+0$, $1/x \rightarrow +\infty$ и $\lim_{x \rightarrow +0} (2+x)^{1/x} = +\infty$.



Найти односторонние пределы.

$$2.229. \lim_{x \rightarrow 3 \pm 0} \frac{x-3}{|x-3|}.$$

$$2.230. \lim_{x \rightarrow 2 \pm 0} \frac{2+x}{4-x^2}.$$

$$2.231. \lim_{x \rightarrow \pm 0} 7^{\frac{1}{2-x}}.$$

$$2.232. \lim_{x \rightarrow -1 \pm 0} 7^{\frac{x}{x^2-1}}.$$

$$2.233. \lim_{x \rightarrow \pi/4 \pm 0} \frac{|\operatorname{tg}(4x - \pi)|}{2x - \pi/2}.$$

$$2.234. \lim_{x \rightarrow 2\pi \pm 0} \frac{x^2}{\cos x - 1}.$$

3. Бесконечно малые и бесконечно большие функции.
 Функция $\alpha(x)$ называется *бесконечно малой* при $x \rightarrow x_0$, если $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0$. Бесконечно малые $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются *сравнимыми*, если существует хотя бы один из пределов

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} \text{ или } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\beta(x)}{\alpha(x)}.$$

Пусть $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ сравнимые бесконечно малые при $x \rightarrow x_0$ и пусть для определенности существует $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = C$. Тогда:

а) если $C \neq 0$, то $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называют бесконечно малыми *одного порядка*. В частности, если $C = 1$, то бесконечно малые $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называют *эквивалентными* и пишут $\alpha \sim \beta$;

б) если $C = 0$, то $\alpha(x)$ называют бесконечно малой *более высокого порядка, чем* $\beta(x)$, и пишут $\alpha = o(\beta)$. Если при этом существует действительное число $r > 0$ такое, что

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{(\beta(x))^r} = C \neq 0, \text{ то } \alpha(x) \text{ называют бесконечно малой}$$

порядка r *относительно* $\beta(x)$.

ПРИМЕР 2.25. Найти порядок малости $\alpha(x) = \frac{2x^2\sqrt{x}}{2+x}$

относительно $\beta(x) = x$ при $x \rightarrow 0$.

► Согласно определению последовательно находим

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{(\beta(x))^r} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2\sqrt{x}}{(2+x)x^r} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2x^{\frac{1}{2}}}{(2+x)x^r} = \lim_{x \rightarrow 0} x^{\frac{5}{2}-r} = 1$$

при $r = 2,5$, следовательно, порядок малости $r = 2,5$. ◀

Определить порядок малости $\alpha(x)$ относительно $\beta(x) = x - x_0$ при $x \rightarrow x_0$.

$$2.235. \alpha(x) = \sqrt[3]{x^2} - \sqrt{x^3}, \beta(x) = x, x_0 = 0.$$

$$2.236. \alpha(x) = \cos x - 1, \beta(x) = x, x_0 = 0.$$

$$2.237. \alpha(x) = \operatorname{tg} x - x, \beta(x) = x, x_0 = 0.$$

$$2.238. \alpha(x) = \sin(\sqrt{x+2} - \sqrt{2}), \beta(x) = x, x_0 = 0.$$

$$2.239. \alpha(x) = \sqrt[3]{1 + \sqrt[3]{x}} - 1, \beta(x) = x, x_0 = 0.$$

$$2.240. \alpha(x) = \sqrt{1+2x} - 1 - \sqrt{x}, \beta(x) = x, x_0 = 0.$$

$$2.241. \alpha(x) = 3^{\sqrt{x}} - 1, \beta(x) = x, x_0 = 0.$$

$$2.242. \alpha(x) = 2^x - \cos x, \beta(x) = x, x_0 = 0.$$

$$2.243. \alpha(x) = x^2 - 1, \beta(x) = x - 1, x_0 = 1.$$

$$2.244. \alpha(x) = \sqrt[3]{x} - 2, \beta(x) = x - 8, x_0 = 8.$$

$$2.245. \alpha(x) = \cos x, \beta(x) = x - \frac{\pi}{2}, x_0 = \frac{\pi}{2}.$$

$$2.246. \alpha(x) = \sin^2 x - 0,5, \beta(x) = x - \frac{\pi}{4}, x_0 = \frac{\pi}{4}.$$



Понятие эквивалентности бесконечно малых применяется при вычислении пределов. Если $\alpha(x) \sim \alpha_1(x)$ и

$\beta(x) \sim \beta_1(x)$ при $x \rightarrow x_0$, то пределы $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ и $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}$

существуют одновременно и

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}.$$

При вычислении пределов с использованием этой теоремы применяются следующие эквивалентности при $x \rightarrow 0$:

$$e^x \sim 1 + x, \ln(1+x) \sim x, a^x - 1 \sim x \ln a, (1+x)^a \sim ax,$$

$$\sin x \sim x, 1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}, \operatorname{tg} x \sim x, \arcsin x \sim x, \arccos x \sim x.$$



ПРИМЕР 2.26. Вычислить пределы, используя понятие эквивалентности:

$$а) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \arcsin 2x^2)}{e^{\sin^2 x} - 1}; \quad б) \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\lg \sin x}{\cos^2 x}.$$

► а) При $x \rightarrow 0$ имеют место эквивалентности:

$$\ln(1 + \arcsin 2x^2) \sim \arcsin 2x^2 \sim 2x^2 \text{ и } e^{\sin^2 x} - 1 \sim \sin^2 x \sim x^2.$$

$$\text{Получаем } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \arcsin 2x^2)}{e^{\sin^2 x} - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2}{x^2} = 2.$$

б) Сделав замену $t = x - \frac{\pi}{2}$, получим

$$\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\lg \sin x}{\cos^2 x} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\lg \sin\left(t + \frac{\pi}{2}\right)}{\cos^2\left(t + \frac{\pi}{2}\right)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\lg \cos t}{\sin^2 t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln \cos t}{\ln 10 \cdot \sin^2 t}.$$

При $t \rightarrow 0$ имеем следующие эквивалентности:

$$\ln \cos t = \ln(1 + \cos t - 1) = \cos t - 1 \sim -\frac{t^2}{2} \text{ и } \sin^2 t \sim t^2, \text{ от-}$$

куда

$$\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\lg \sin x}{\cos^2 x} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln \cos t}{\ln 10 \cdot \sin^2 t} = -\lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2}{2 \ln 10 \cdot t^2} = -\frac{1}{2 \ln 10}. \quad \blacktriangleleft$$

Используя понятие эквивалентности, вычислить пределы.

$$2.247. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^3 x}{4x^2}. \quad 2.248. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{\cos 7x - \cos 3x}.$$

$$2.249. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{4x} - 1}{\operatorname{tg} 3x}. \quad 2.250. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x}.$$

$$2.251. \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{1/x^2}. \quad 2.252. \lim_{x \rightarrow 0} (\cos 6x)^{\operatorname{ctg}^2 x}.$$

$$2.253. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \operatorname{arctg} 5x)}{\sqrt[4]{x + 81} - 3}.$$

$$2.254. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \sin 2x} - \sqrt{1 - \sin 2x}}{\operatorname{tg} x}.$$

$$2.255. \lim_{x \rightarrow 10} \frac{\lg x - 1}{\sqrt{x - 9} - 1}. \quad 2.256. \lim_{x \rightarrow \pi/2} (1 + \operatorname{ctg} x)^{\operatorname{tg} x}.$$



Говорят, что функция $f(x)$, определенная в некоторой окрестности точки x_0 , за исключением самой точки x_0 (т.е. в *проколотой окрестности*), имеет в этой точке бесконечный предел, и пишут $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$, если для каждого $\varepsilon > 0$ найдется число $\delta > 0$ такое, что для всех $|x - x_0| < \delta$, $x \neq x_0$, выполняется неравенство $|f(x)| > \varepsilon$. При этом функция $f(x)$ называется *бесконечно большой*. Подобно тому, как сделано выше для бесконечно малых, вводится понятие бесконечно больших и их классификация.

Аналогично вводятся понятия пределов, равных $+\infty$ и $-\infty$, а также при x , стремящемся к ∞ , $+\infty$, $-\infty$.



ПРИМЕР 2.27. Доказать справедливость равенства

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2}{|x-1|} = +\infty, \text{ используя только определение.}$$

- Нужно показать, что для произвольного $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что для каждого x , удовлетворяющего условию $0 < |x - 1| < \delta$, выполняется неравенство $\frac{2}{|x-1|} > \varepsilon$.

Поскольку неравенство $\frac{2}{|x-1|} > \varepsilon$ равносильно двойному неравенству $0 < |x - 1| < \frac{2}{\varepsilon}$, то в качестве δ можно взять

$$\delta = \frac{2}{\varepsilon}. \text{ Действительно, в этом случае для каждого } x, \text{ удо-}$$

влетворяющего условию $0 < |x - 1| < \delta$, имеем $\frac{2}{|x-1|} > \frac{2}{\delta} =$

$$= \varepsilon.$$



Определить порядок роста бесконечно большой при $x \rightarrow \infty$.

2.257. $f(x) = x^3 + 150x + 5$.

2.258. $f(x) = \sqrt{x^3 - x^2} + 3 + x$.

2.259. $f(x) = \sqrt{x + x\sqrt{x}}$.

$$2.260. f(x) = \sqrt[3]{x^2 + x} + \sqrt{x}. \quad 2.261. f(x) = \frac{x^3 - x^2 - 5}{x + 1}.$$

$$2.262. f(x) = \frac{x^5 - 1000x^4 - 10\,000}{\sqrt{x + 1000}}.$$

4. Непрерывность функции в точке. Классификация точек разрыва.

Функция $y = f(x)$ называется *непрерывной* в точке x_0 , если:

- 1) $y = f(x)$ определена в точке x_0 ;
- 2) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

Обозначим через Δx разность $x - x_0$ — приращение аргумента. Тогда разность $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ называется *приращением* функции $y = f(x)$ в точке x_0 , соответствующим приращению аргумента Δx , и обозначается как $\Delta f(x_0, \Delta x)$. Из определения следует, что функция $y = f(x)$ непрерывна в точке x_0 , если $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta f(x_0, \Delta x) = 0$.

Для того чтобы функция $f(x)$ была непрерывной в точке x_0 , необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство $\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = f(x_0)$.



ПРИМЕР 2.28. Найти значения параметра a , при котором функция $f(x)$ будет непрерывна

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \in [-\pi/2, 0), \\ a, & x \in [0, \pi/2]. \end{cases}$$

- Если $x < 0$, то $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ и функция непрерывна как частное двух непрерывных функций при знаменателе, отличном от нуля. Если $x > 0$, то $f(x) = a$, и функция непрерывна. Выясним, при каких значениях a функция непрерывна в точке $x = 0$. Найдем односторонние пределы. Так как $\lim_{x \rightarrow 0 -} \frac{\sin x}{x} = 1$, $\lim_{x \rightarrow +0} a = a = f(0)$, то $f(x)$ будет непрерывной при $a = 1$.



Найти значения параметра a , при которых функция $f(x)$ непрерывна.

$$2.263. f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x - 2}, & x \neq 2, \\ a, & x = 2. \end{cases}$$

$$2.264. f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - 1}{x - 1}, & x \neq 1, \\ a, & x = 1. \end{cases}$$

$$2.265. f(x) = \begin{cases} 2x, & x \in [0, 1], \\ a(2 - x), & x \in (1, 2]. \end{cases}$$

$$2.266. f(x) = \begin{cases} ax^2, & x \in [0, 1], \\ 2 - x, & x \in (1, 2]. \end{cases}$$

$$2.267. f(x) = \begin{cases} e^x, & x < 0, \\ a + x, & x \geq 0. \end{cases}$$

$$2.268. f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ a, & x = 0. \end{cases}$$



Если хотя бы одно из условий в определении непрерывности нарушено, то x_0 называется *точкой разрыва* функции $f(x)$. При этом различают следующие случаи:

а) если $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ существует, но функция не определена в точке x_0 или определена, но $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq f(x_0)$, то точка x_0 называется *точкой устранимого разрыва*;

б) если $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ не существует, но существуют односторонние пределы $\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x)$, то x_0 называется *точкой разрыва первого рода*;

в) во всех остальных случаях x_0 называется *точкой разрыва второго рода*.



ПРИМЕР 2.29. Найти и классифицировать точки разрыва следующих функций:

$$\text{а) } y = \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1}; \quad \text{б) } y = \frac{|x - 2|}{x - 2}; \quad \text{в) } y = e^{\frac{1}{x+1}}.$$

- а) Функция не определена в точке $x = 1$, т.е. $y(1)$ не существует. Вычислим пределы функции слева и справа в точке $x = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{(x-1)(x-2)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1-0} (x-2) = -1;$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{(x-1)(x-2)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1+0} (x-2) = -1.$$

Так как $f(1+0) = f(1-0)$, то точка $x_0 = 1$ является точкой устранимого разрыва.

б) Функция не определена при $x = 2$. Найдем односторонние пределы

$$\lim_{x \rightarrow 2-0} \frac{|x-2|}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2-0} \frac{2-x}{x-2} = -1;$$

$$\lim_{x \rightarrow 2+0} \frac{|x-2|}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2+0} \frac{x-2}{x-2} = 1.$$

Так как $f(2+0) \neq f(2-0)$ и оба предела конечны, то точка $x_0 = 2$ является точкой разрыва первого рода.

в) Функция не определена при $x = -1$. Найдем односторонние пределы.

$$\text{Если } x \rightarrow -1-0, \text{ то } x+1 \rightarrow -0, \frac{1}{x+1} \rightarrow -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -1-0} e^{\frac{1}{x+1}} = 0.$$

$$\text{Если } x \rightarrow -1+0, \text{ то } x+1 \rightarrow +0, \frac{1}{x+1} \rightarrow +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -1+0} e^{\frac{1}{x+1}} = +\infty.$$

Значит, $x = -1$ — точка разрыва второго рода. ◀

Найти и классифицировать точки разрыва функций.

$$\text{2.269. } f(x) = \frac{1}{x^2(x-1)}. \quad \text{2.270. } f(x) = \frac{x^2 + 3x - 4}{x-1}.$$

$$\text{2.271. } f(x) = 1 - \frac{\sin x}{x}. \quad \text{2.272. } f(x) = \frac{\cos x - 1}{x^2(x-1)}.$$

$$2.273. f(x) = 3^{x/(4-x^2)}. \quad 2.274. f(x) = \frac{1}{2^{1/(1-x)} + 1}.$$

$$2.275. f(x) = \frac{3^{1/(x-2)} - 1}{3^{1/(x-2)} + 1}.$$

$$2.276. f(x) = \frac{1}{x} \ln \frac{1+x}{1-x}.$$

$$2.277. f(x) = \begin{cases} 3^x, & x < 1, \\ x-1, & 1 < x \leq 4, \\ 1, & x = 1. \end{cases}$$

$$2.278. f(x) = \begin{cases} 2\sqrt{x}, & 0 \leq x \leq 1, \\ 4-2x, & 1 < x \leq 2,5, \\ 2x-7, & 2,5 \leq x \leq 4. \end{cases}$$

5. Непрерывность на множестве. Равномерная непрерывность. Функция $f(x)$ называется *непрерывной на интервале* (a, b) , если она непрерывна в каждой точке этого интервала. То есть для любых $x' \in (a, b)$ и $\varepsilon > 0$ найдется $\delta(x', \varepsilon) > 0$ такое, что для любого $x'' \in (a, b)$ из неравенства $|x' - x''| < \delta$ следует неравенство $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$.

Функция $f(x)$ называется *непрерывной на отрезке* $[a, b]$, если она непрерывна на интервале (a, b) и $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = f(a)$ (непрерывна справа в точке a), $\lim_{x \rightarrow b-0} f(x) = f(b)$ (непрерывна слева в точке b).

Функция $f(x)$ называется *равномерно непрерывной* на множестве D , если для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для любых двух точек x' и $x'' \in D$ из неравенства $|x' - x''| < \delta$ следует неравенство $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$.

Заметим, что в отличие от функции, непрерывной в каждой точке множества D , в случае равномерной непрерывности для любого $\varepsilon > 0$ можно найти значение $\delta(\varepsilon)$, общее для всех $x \in D$.

При решении конкретных задач полезна следующая теорема.

Теорема Кантора. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она равномерно непрерывна на этом отрезке.



2.279. Показать, что функция

$$f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

не является непрерывной на отрезке $[0, 1]$.

2.280. Сформулировать на языке « $\epsilon - \delta$ » утверждение: функция $f(x)$ не является равномерно непрерывной на множестве D .

Исследовать на равномерную непрерывность функции на заданных множествах:

2.281. $f(x) = \frac{x}{4 - x^2}$, $D = [-1, 1]$.

2.282. $f(x) = \ln x$, $D = (0, 1]$.

2.283. $f(x) = \frac{\sin x}{x}$, $D = (0, \pi]$.

2.284. $f(x) = \sin \frac{1}{x}$, $D = (0, 1]$.

2.285. $f(x) = e^x \cos \frac{1}{x}$, $D = (0, 1]$.

2.286. $f(x) = \sqrt{x}$, $D = [0, +\infty)$.

Глава 3

МАТРИЦЫ И ОПРЕДЕЛИТЕЛИ

3.1. Матрицы. Операции над матрицами

Матрицей A размера $m \times n$ называется прямоугольная таблица чисел a_{ij} , состоящая из m строк и n столбцов

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Числа a_{ij} , $i = 1, 2, \dots, m$, $j = 1, 2, \dots, n$, называются *элементами* матрицы, причем первый индекс указывает номер строки, а второй — номер столбца, на пересечении которых этот элемент стоит. Для обозначения матрицы используют также запись $A = (a_{ij})$ или $A = \|a_{ij}\|$, $i = 1, 2, \dots, m$, $j = 1, 2, \dots, n$.

Если число строк равно числу столбцов, т.е. $m = n$, то матрица называется *квадратной матрицей порядка n* . Диагональ этой матрицы, идущая из левого верхнего угла в правый нижний угол (элементы a_{11} , a_{22} , ..., a_{nn}), называется *главной диагональю*, а идущая из левого нижнего угла в правый верхний (элементы: a_{n1} , $a_{n-1,2}$, ..., a_{1n}) — *побочной*. Квадратная матрица E порядка n называется *единичной матрицей порядка n* , если все элементы главной диагонали равны единице, а все элементы вне ее — нулю.

Над матрицами могут выполняться арифметические операции сложения и умножения матриц, а также умножения их на число.

Суммой $A + B$ матриц $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$ одинакового размера $m \times n$ называется матрица $C = (c_{ij})$, каждый элемент

которой равен сумме соответствующих элементов матриц A и B

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \text{ где } i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n. \quad (3.1)$$

Произведением AB матриц $A = (a_{ij})$ размера $m \times n$ и $B = (b_{ij})$ размера $n \times k$ называется матрица $C = (c_{ij})$ размера $m \times k$, элемент которой c_{ij} , стоящий на пересечении i -й строки и j -го столбца, равен сумме произведений соответствующих элементов i -й строки матрицы A и j -го столбца матрицы B

$$c_{ij} = \sum_{p=1}^n a_{ip} b_{pj}, \text{ где } i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, k. \quad (3.2)$$

Произведением λA матрицы $A = (a_{ij})$ на число λ (действительное или комплексное) называется матрица $B = (b_{ij})$, получающаяся из матрицы A умножением каждого ее элемента на λ

$$b_{ij} = \lambda a_{ij}, \text{ где } i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n. \quad (3.3)$$

В соответствии с этой операцией общий множитель всех элементов матрицы можно выносить за знак матрицы.



ПРИМЕР 3.1. Вычислить сумму матриц: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

и $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

► В соответствии с определением суммы матриц (3.1) запишем

$$C = A + B = \begin{pmatrix} 1+2 & 2+1 & 3+1 \\ 0+5 & 2+1 & 1+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 4 \\ 5 & 3 & 3 \end{pmatrix}. \quad \blacktriangleleft$$

ПРИМЕР 3.2. Найти произведение AB матриц

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

► Прежде всего, убеждаемся в том, что умножение возможно, т.е. число столбцов матрицы A равно числу строк

матрицы B . В результате умножения данных матриц размеров 2×3 и 3×4 получится матрица C размера 2×4 . Перемножая поочередно элементы первой строки матрицы A на соответствующие элементы столбцов матрицы B в соответствии с формулой (3.2) получим элементы первой строки матрицы C

$$c_{11} = \sum_{k=1}^3 a_{1k} \cdot b_{k1} = a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} + a_{13} \cdot b_{31} = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot (-1) = 2;$$

$$c_{12} = \sum_{k=1}^3 a_{1k} \cdot b_{k2} = a_{11} \cdot b_{12} + a_{12} \cdot b_{22} + a_{13} \cdot b_{32} = 1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 3 = 11;$$

$$c_{13} = \sum_{k=1}^3 a_{1k} \cdot b_{k3} = a_{11} \cdot b_{13} + a_{12} \cdot b_{23} + a_{13} \cdot b_{33} = 1 \cdot 4 + 2 \cdot (-2) + 3 \cdot 1 = 3;$$

$$c_{14} = \sum_{k=1}^3 a_{1k} \cdot b_{k4} = a_{11} \cdot b_{14} + a_{12} \cdot b_{24} + a_{13} \cdot b_{34} = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 4 = 15.$$

Аналогично получаем элементы второй строки матрицы C

$$c_{21} = \sum_{k=1}^3 a_{2k} \cdot b_{k1} = a_{21} \cdot b_{11} + a_{22} \cdot b_{21} + a_{23} \cdot b_{31} = 3 \cdot 1 + (-2) \cdot 2 + 1 \cdot (-1) = -2;$$

$$c_{22} = \sum_{k=1}^3 a_{2k} \cdot b_{k2} = a_{21} \cdot b_{12} + a_{22} \cdot b_{22} + a_{23} \cdot b_{32} = 3 \cdot 0 + (-2) \cdot 1 + 1 \cdot 3 = 1;$$

$$c_{23} = \sum_{k=1}^3 a_{2k} \cdot b_{k3} = a_{21} \cdot b_{13} + a_{22} \cdot b_{23} + a_{23} \cdot b_{33} = 3 \cdot 4 + (-2) \cdot (-2) + 1 \cdot 1 = 17;$$

$$c_{24} = \sum_{k=1}^3 a_{2k} \cdot b_{k4} = a_{21} \cdot b_{14} + a_{22} \cdot b_{24} + a_{23} \cdot b_{34} = 3 \cdot 3 + (-2) \cdot 0 + 1 \cdot 4 = 13.$$

Следовательно,

$$C = AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 11 & 3 & 15 \\ -2 & 1 & 17 & 13 \end{pmatrix}. \quad \blacktriangleleft$$

ПРИМЕР 3.3. Найти произведение λA , если $\lambda = 5$ и

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}.$$

- В соответствии с определением произведения матрицы на число (3.3) можно записать:

$$B = 5A = \begin{pmatrix} 5a_{11} & 5a_{12} & 5a_{13} & 5a_{14} \\ 5a_{21} & 5a_{22} & 5a_{23} & 5a_{24} \\ 5a_{31} & 5a_{32} & 5a_{33} & 5a_{34} \end{pmatrix}. \quad \blacktriangleleft$$

3.1. Доказать свойства арифметических операций над матрицами A , B , C и E размерности которых предполагают их выполнимость

- а) $A + B = B + A$; $(A + B) + C = A + (B + C)$;
 б) $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$; $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$; $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A = \lambda\mu A$;
 в) $(AB)C = A(BC)$; $(A + B)C = AC + BC$; г) $AE = EA = A$.

Вычислить линейные комбинации матриц A и B .

3.2. $3A + 4B$, если $A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 4 \\ 5 & 3 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -3 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$.

3.3. $2A - 3B$, если $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

3.4. $(1+i)A + (1-i)B$, если $A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} i & 1 \\ -i & 1 \end{pmatrix}$.

Вычислить выражения.

3.5. $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. **3.6.** $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 & -6 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}$.

3.7. $\begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & 1 \\ -i & 1 \end{pmatrix}$.

3.8. $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -28 & 93 \\ 38 & -126 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

3.9. $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$. **3.10.** $\begin{pmatrix} 5 & 8 & -4 \\ 6 & 9 & -5 \\ 4 & 7 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 4 & -1 & 3 \\ 9 & 6 & 5 \end{pmatrix}$.

3.11. $\begin{pmatrix} 1+i & 1 & -i \\ 2 & 1+i & 3 \\ i & 4 & 1-i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & -2 & 1-i \\ -1 & 0 & 2 \\ -i & 1 & 1+i \end{pmatrix}$.

$$3.12. (4, 0, -2, 3, 1) \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}. \quad 3.13. \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} (4, 0, -2, 3, 1).$$

$$3.14. \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}^2.$$

$$3.15. \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}^3.$$

$$3.16. \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n, \quad a \in \mathbb{R}. \quad 3.17. \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}^n, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

$$3.18. \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}^n.$$



Матрицы A и B называются *перестановочными*, если $AB = BA$.



Найти все матрицы, перестановочные с данной матрицей.

$$3.19. \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}. \quad 3.20. \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}. \quad 3.21. \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

- 3.22.** Как изменится произведение AB матриц A и B , если:
- поменять местами i -ю и j -ю строки в матрице A ;
 - к i -й строке матрицы A прибавить ее j -ю строку, умноженную на число λ ;
 - поменять местами i -й и j -й столбцы в матрице B ;

г) к i -му столбцу матрицы B прибавить ее j -й столбец, умноженный на число λ ?

Матрица A^T называется *транспонированной* к матрице A , если выполняется условие $a_{ij}^T = a_{ji}$ для всех i, j , где a_{ij}^T и a_{ji} — элементы матриц A^T и A соответственно.

Записать A^T для данных матриц.

$$\text{3.23. } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}. \quad \text{3.24. } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}.$$

Доказать следующие соотношения.

$$\text{3.25. } (A^T)^T = A.$$

$$\text{3.26. } (A + B)^T = A^T + B^T.$$

$$\text{3.27. } (AB)^T = B^T \cdot A^T.$$

Найти AA^T и $A^T A$.

$$\text{3.28. } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & 5 & -1 \end{pmatrix}. \quad \text{3.29. } A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Квадратная матрица B называется *симметрической*, если $B^T = B$. Квадратная матрица C называется *кососимметрической*, если $C^T = -C$.

3.30. Доказать, что любую матрицу A можно представить, и притом единственным образом, в виде $A = B + C$, где B — симметрическая, а C — кососимметрическая матрицы.

3.2. Определители

1. Определители 2-го и 3-го порядка. Определителем 2-го порядка, соответствующим квадратной матрице 2-го порядка $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ (или просто *определителем матрицы A*), называется число, вычисляемое по правилу

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$$

Числа $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$, составляющие матрицу данного определителя, называют *элементами этого определителя*. Таким образом, *определитель 2-го порядка равен произведению элементов главной диагонали минус произведение элементов побочной диагонали*.

Аналогично, если $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ — квадратная матри-

ца 3-го порядка, то соответствующим ей определителем 3-го порядка называется число, вычисляемое по *правилу Саррюса*

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}. \quad (3.4)$$

Таким образом, *каждый член определителя 3-го порядка представляет собой произведение трех его элементов, взятых по одному из каждой строки и каждого столбца*. При этом *три произведения берутся со знаком плюс, если их образуют элементы главной диагонали либо элементы, расположенные в вершинах треугольников с основаниями, параллельными главной диагонали, и три со знаком минус, если их образуют элементы, расположенные аналогично относительно побочной диагонали*.

ПРИМЕР 3.4. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix}.$$

► В соответствии с определением определителя 3-го порядка (формула (3.4)) получаем

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot 5 \cdot 2 + 2 \cdot 4 \cdot 1 + 2 \cdot 3 \cdot 3 - 3 \cdot 5 \cdot 1 - 2 \cdot 2 \cdot 2 - 4 \cdot 3 \cdot 3 = -3.$$

Вычислить определители 2-го порядка.

$$3.31. \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}. \quad 3.32. \begin{vmatrix} \sin \alpha & \cos \alpha \\ -\cos \alpha & \sin \alpha \end{vmatrix}.$$

$$3.33. \begin{vmatrix} \alpha + \beta i & \gamma + \delta i \\ \gamma - \delta i & \alpha - \beta i \end{vmatrix}. \quad 3.34. \begin{vmatrix} \sin \alpha & \cos \alpha \\ \sin \beta & \cos \beta \end{vmatrix}.$$

Вычислить определители 3-го порядка.

$$3.35. \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}. \quad 3.36. \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix}.$$

$$3.37. \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix}. \quad 3.38. \begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}.$$

$$3.39. \begin{vmatrix} \sin \alpha & \cos \alpha & 1 \\ \sin \beta & \cos \beta & 1 \\ \sin \gamma & \cos \gamma & 1 \end{vmatrix}. \quad 3.40. \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \sin \alpha & \cos \beta & \sin \gamma \\ \cos \alpha & \sin \beta & \cos \gamma \end{vmatrix}.$$

3.41. Доказать следующие свойства определителя 3-го порядка, используя его определение:

а) определитель не изменится, если строки (столбцы) матрицы определителя сделать столбцами (строками) с теми же номерами (т.е. транспонировать матрицу);

б) если все элементы какой-либо строки (столбца) матрицы определителя умножить на одно и то же число, то определитель умножится на это число;

в) если переставить две строки (столбца) матрицы определителя, то определитель изменит знак; в частности, если две строки (столбца) матрицы определителя равны, то он равен нулю;

г) если каждый элемент некоторой строки (столбца) матрицы определителя представлен в виде суммы двух слагаемых, то определитель равен сумме двух определителей, у которых все строки (столбцы) его матрицы, кроме данной, прежние, а в данной строке (столбце) в матрице первого определителя стоят первые, а во втором — вторые слагаемые;

д) если одна строка (столбец) матрицы определителя является линейной комбинацией остальных строк (столбцов), то определитель равен нулю.

Используя свойства определителя 3-го порядка, перечисленные в задаче 3.41, доказать следующие тождества (определитель не развертывать).

$$3.42. \begin{vmatrix} a_1 - b_1x & a_1 + b_1x & c_1 \\ a_2 - b_2x & a_2 + b_2x & c_2 \\ a_3 - b_3x & a_3 + b_3x & c_3 \end{vmatrix} = 2x \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

$$3.43. \begin{vmatrix} a_1 + b_1x & a_1x + b_1 & c_1x + a_1 \\ a_2 + b_2x & a_2x + b_2 & c_2x + a_2 \\ a_3 + b_3x & a_3x + b_3 & c_3x + a_3 \end{vmatrix} = (x - x^3) \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Минором M_{ij} элемента a_{ij} определителя 3-го порядка называют определитель второго порядка, получаемый из данного вычеркиванием i -й строки и j -го столбца, на пересечении которых стоит этот элемент. Алгебраическим дополнением A_{ij} элемента a_{ij} определителя 3-го порядка называют определитель третьего порядка, получаемый из данного заменой элемента a_{ij} на 1 и обнулением всех остальных элементов i -й строки и j -го столбца.

Алгебраическое дополнение A_{ij} и минор M_{ij} элемента a_{ij} связаны формулой

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.$$

Сформулируем еще один способ вычисления определителя 3-го порядка: *определитель равен сумме произведений элементов какой-либо строки (столбца) на их алгебраические дополнения*, т.е.

$$\det A = \sum_{k=1}^3 a_{ik} \cdot A_{ik} \quad \text{или} \quad \det A = \sum_{k=1}^3 a_{kj} \cdot A_{kj}.$$

Этот способ называют *разложением определителя по элементам i -й строки (j -го столбца)*. Например,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}. \quad (3.5)$$

ПРИМЕР 3.5. Вычислить определитель из примера 3.4:
а) разложением по 1-й строке;
б) разложением по какой-либо строке, предварительно упростив его, используя результат задачи 3.41.

► а) Используя формулу (3.5), получаем

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= 3 \cdot (10 - 12) - 2 \cdot (4 - 9) + 1 \cdot (8 - 15) = -3.$$

б) Выполним следующие действия:

• вычтем из 2-го столбца 3-й. Получим

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix};$$

• теперь вычтем из 2-й строки 3-ю:

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix};$$

• наконец, прибавим к 1-му столбцу 3-й:

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 5 & 2 & 2 \end{vmatrix};$$

• разложим полученный определитель по второй строке

$$\begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 5 & 2 & 2 \end{vmatrix} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = -1 \cdot (4 \cdot 2 - 5 \cdot 1) = -3.$$

На основании свойств, сформулированных в задаче 3.41, при выполнении указанных действий определитель не

изменился, поэтому $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix} = -3.$ ◀

Вычислить определители, используя разложение по какой-либо строке, предварительно упростив его:

3.44. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix}.$

3.45. $\begin{vmatrix} a & a & a \\ -a & a & x \\ -a & -a & x \end{vmatrix}.$

$$3.46. \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix}, \quad 3.47. \begin{vmatrix} 1 & \omega & \omega^2 \\ \omega^2 & 1 & \omega \\ \omega & \omega^2 & 1 \end{vmatrix}, \text{ где } \omega = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}.$$

2. Решение систем линейных уравнений с двумя и тремя неизвестными. В школьном курсе алгебры при решении систем линейных уравнений с несколькими неизвестными в основном использовался метод исключения неизвестных. Ниже предлагается метод решения систем линейных уравнений с использованием определителей.

Система двух линейных уравнений с двумя неизвестными

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

при условии, что определитель системы $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ отличен от нуля, имеет единственное решение, которое может быть найдено по формулам

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta}. \quad (3.6)$$

Здесь Δ_x и Δ_y — определители, полученные из определителя Δ заменой столбца коэффициентов при соответствующем неизвестном столбцом свободных членов:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} \text{ и } \Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}.$$

Система трех линейных уравнений с тремя неизвестными

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1, \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2, \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$$

при условии, что определитель системы $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0$,

имеет единственное решение, которое может быть найдено по формулам

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta}, \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta}, \quad (3.7)$$

где $\Delta_x = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$, $\Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}$ и $\Delta_z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}$.

Формулы (3.6) и (3.7) представляют собой частный случай правила Крамера (см. гл. 5).

Решить системы уравнений.

$$3.48. \begin{cases} 2x + 3y = 8, \\ x - 2y = -3. \end{cases}$$

$$3.49. \begin{cases} 9x + 2y = 8, \\ 4x + y = 3. \end{cases}$$

$$3.50. \begin{cases} (a+1)x - ay = a+1, \\ ax + (1-a)y = a-1. \end{cases}$$

$$3.51. \begin{cases} 2x + 4y + z = 4, \\ 3x + 6y + 2z = 4, \\ 4x - y - 3z = 1. \end{cases}$$

$$3.52. \begin{cases} 2x + y - z = 0, \\ x - y - 3z = 13, \\ 3x - 2y + 4z = -15. \end{cases}$$

$$3.53. \begin{cases} 2x + 3z - 3y = -10, \\ 3y + x - 3z = 13, \\ z + x = 0. \end{cases}$$

3. Определители n -го порядка. Пусть даны числа 1, 2, 3, ..., n . Всевозможные расположения $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ этих n чисел называются их *перестановками*. Если какая-то пара элементов α_i, α_k перестановки $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ расположена в ней так, что если $i < k$, но $\alpha_i > \alpha_k$, то говорят, что элементы α_i, α_k образуют *инверсию*. Общее число инверсий в перестановке $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ обозначают $[\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n]$.

Количество инверсий в заданной перестановке можно вычислить следующим образом. Сначала считается число элементов, образующих инверсии с α_1 . Далее без учета α_1 (например, после его вычеркивания) считается число элементов, образующих инверсии с α_2 . Затем без учета α_1 и α_2 — для α_3 , и так далее до α_{n-1} . Окончательно $[\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n]$ равно сумме полученных чисел.

Если число $[\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n]$ четно, то перестановку $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ называют *четной* и *нечетной* в противном случае.

ПРИМЕР 3.6. Определить четность перестановки 4, 2, 6, 5, 1, 3.

- Найдем число [4, 2, 6, 5, 1, 3]. Первый элемент 4 в перестановке 4, 2, 6, 5, 1, 3 образует три инверсии (элементы 1, 2, 3 расположены правее 4). Далее:

в ~~4~~, 2, 6, 5, 1, 3 элемент 2 образует одну инверсию (с элементом 1);

в ~~4~~, ~~2~~, 6, 5, 1, 3 элемент 6 образует три инверсии (с элементами 1, 3, 5);

в ~~4~~, ~~2~~, ~~6~~, 5, 1, 3 элемент 5 образует две инверсии (с элементами 1, 3);

в ~~4~~, ~~2~~, ~~6~~, ~~5~~, 1, 3 элемент 1 инверсий не образует.

Окончательно получаем [4, 2, 6, 5, 1, 3] = 3 + 1 + 3 + 2 = 9. ◀



Всякое взаимно однозначное отображение σ множества $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ первых n натуральных чисел на себя называется *подстановкой n -го порядка*.

Всякая подстановка может быть записана в виде

$$\sigma = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_n \\ \alpha_{i_1} & \alpha_{i_2} & \dots & \alpha_{i_n} \end{pmatrix}, \quad (3.8)$$

где $\alpha_{i_k} = \sigma(i_k) \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$ — образ элемента $i_k \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$ при отображении σ . Элементы верхней и нижней строк матрицы в (3.8) являются перестановками $i_1, i_2, \dots, i_n$ и $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_n}$ чисел $1, 2, 3, \dots, n$.

Запись подстановки σ в виде

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \end{pmatrix} \quad (3.9)$$

называется *канонической*.

Говорят, что пара элементов (i_j, i_k) образует *инверсию* в подстановке σ (3.8), если $i_j < i_k$, но $\alpha_{i_j} > \alpha_{i_k}$. Число $s(\sigma)$ всех инверсных пар определяет четность подстановки: подстановка называется *четной*, если $s(\sigma)$ — четное число, и *нечетной*, если $s(\sigma)$ — нечетное.

Число $s(\sigma)$ легко считается после приведения подстановки σ к каноническому виду (3.9) и $s(\sigma) = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n]$.



ПРИМЕР 3.7. Определить четность подстановки.

$$\sigma = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 & 3 & 1 & 5 \\ 4 & 6 & 3 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

► Приведем подстановку σ к каноническому виду
 $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 4 & 1 & 6 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, тогда $s(\sigma) = [5, 4, 1, 6, 2, 3] =$
 $= 4 + 3 + 0 + 2 + 0 = 9$. Следовательно, подстановка нечетная. ◀

Определить четность подстановок.

3.54. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. 3.55. $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 & 3 & 1 & 5 \\ 3 & 6 & 2 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$.

3.56. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n-1 & n \\ n & n-1 & \dots & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

3.57. $\begin{pmatrix} 2n & 2n-1 & \dots & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 2n-1 & 2n & \dots & 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

3.58.

$$\begin{pmatrix} n & n-1 & \dots & n-k+1 & n-k & n-k-1 & \dots & 2 & 1 \\ k & k-1 & \dots & 1 & n & n-1 & \dots & k+2 & k+1 \end{pmatrix}.$$

► *Определителем n -го порядка, соответствующим квадратной матрице*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

(или *определителем матрицы A*), называется алгебраическая сумма всевозможных произведений элементов $a_{i_1, \alpha_{i_1}} \cdot \dots \cdot a_{i_n, \alpha_{i_n}}$,

взятых по одному из каждого столбца и каждой строки матрицы, входящих в эту сумму со знаком «плюс», если под-

становка $\sigma = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_n \\ \alpha_{i_1} & \alpha_{i_2} & \dots & \alpha_{i_n} \end{pmatrix}$ — четная, и со знаком «минус»,

если σ — нечетная, т.е.

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{\sigma} (-1)^{s(\sigma)} a_{i_1, \alpha_{i_1}} \cdots a_{i_n, \alpha_{i_n}}, \quad (3.10)$$

где сумма берется по всем подстановкам σ n -го порядка.

Если в указанной алгебраической сумме во всех произведениях упорядочить все элементы в порядке возрастания первого индекса, то формулу (3.10) можно записать в виде

$$\det A = \sum_{\sigma} (-1)^{[\sigma(1), \dots, \sigma(n)]} a_{1, \sigma(1)} \cdots a_{n, \sigma(n)}. \quad (3.11)$$

Выяснить, какие из приведенных ниже произведений входят в определители соответствующих порядков и с каким знаком.

3.59. $a_{23}a_{12}a_{21}a_{44}$. **3.60.** $a_{43}a_{16}a_{24}a_{35}a_{51}a_{62}$.

3.61. $a_{42}a_{14}a_{25}a_{36}a_{51}a_{67}a_{73}$.

3.62. $a_{n,1}a_{n-1,2}a_{n-2,3} \cdots a_{2,n-1}a_{1,n}$.

3.63. $a_{n,k}a_{n-1,k-1} \cdots a_{n-k+1,1}a_{n-k,n}a_{n-k-1,n-1} \cdots a_{2,k+2}a_{1,k+1}$.

3.64. Выбрать значения i и k , чтобы данное произведение входило в некоторый определитель со знаком «минус»:

а) $a_{4i}a_{14}a_{26}a_{35}a_{5k}a_{62}$; б) $a_{k2}a_{15}a_{21}a_{34}a_{i6}a_{61}a_{43}$.

3.65. Доказать, что подстановка σ *четная*, если четности перестановок элементов верхней и нижней строк совпадают, и *нечетной* в противном случае.

3.66. Доказать, что если подстановка $\sigma = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_n \\ \alpha_{i_1} & \alpha_{i_2} & \cdots & \alpha_{i_n} \end{pmatrix}$

приведена к каноническому виду $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix}$, то

$$(-1)^{s(\sigma)} = (-1)^{[\alpha_1, \dots, \alpha_n]} = (-1)^{[i_1, \dots, i_n] + [\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_n}]} \quad (\text{правило знаков}).$$

ПРИМЕР 3.8. Пользуясь только определением, вычислить следующий определитель:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

► Используя формулу (3.11), запишем

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= \sum_{\sigma} (-1)^{[\sigma(1), \dots, \sigma(n)]} a_{1, \sigma(1)} \cdots a_{n, \sigma(n)}.$$

Все $a_{1, \sigma(1)} = 0$ при $\sigma(1) \neq 1$, потому что по условию все элементы в первой строки, кроме a_{11} , равны нулю. Значит, в сумме остаются только произведения, содержащие элемент a_{11} ,

$$\det A = \sum_{\sigma} (-1)^{[1, \sigma(2), \dots, \sigma(n)]} a_{11} a_{2, \sigma(2)} \cdots a_{n, \sigma(n)}.$$

Заметим теперь, что все элементы вида $a_{2, \sigma(2)}$ при $\sigma(2) > 2$ равны нулю и в произведениях $a_{11} a_{2, \sigma(2)} \cdots a_{n, \sigma(n)}$ не может содержаться других элементов первого столбца, кроме a_{11} . Тогда

$$\det A = \sum_{\sigma} (-1)^{[1, 2, \dots, \sigma(n)]} a_{11} a_{22} \cdots a_{n, \sigma(n)}.$$

Продолжая аналогично рассуждения, в результате получаем

$$\det A = \sum_{\sigma} (-1)^{[1, 2, \dots, n]} a_{11} a_{22} \cdots a_{nn} = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn},$$

т.е. данный определитель равен произведению элементов, стоящих на главной диагонали. ◀

Пользуясь только определением, вычислить определители.

$$3.67. \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

$$3.68. \quad \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 & a_{1, n} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{2, n-1} & a_{2, n} \\ 0 & \cdots & a_{3, n-2} & a_{3, n-1} & a_{3, n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n, 1} & \cdots & a_{n, n-2} & a_{n, n-1} & a_{n, n} \end{vmatrix}.$$

$$\begin{array}{cc}
 \text{3.69.} & \left| \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{array} \right| & \text{3.70.} & \left| \begin{array}{ccccc} 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{array} \right|
 \end{array}$$

3.71. Доказать, что если в определителе порядка n более чем $n^2 - n$ элементов равны нулю, то определитель равен нулю.

Для определителя n -го порядка выполняются основные свойства, аналогичные свойствам а) — д) задачи 3.41.

3.72. Используя свойства определителя n -го порядка, выяснить, как изменится определитель, если:

а) к каждой строке определителя, кроме последней, прибавить последнюю строку;

б) из каждой строки определителя, кроме последней, вычесть все последующие строки;

в) из каждой строки определителя, кроме последней, вычесть последующую строку, из последней вычесть прежнюю первую строку;

г) матрицу определителя «повернуть на 90° вокруг центра»;

д) первый столбец определителя переставить на последнее место, а остальные столбцы передвинуть влево, сохранив их расположение.

4. Основные методы вычисления определителей n -го порядка. Метод понижения порядка определителя сводится к вычислению определителя n -го порядка через определители меньшего порядка.

Алгебраическим дополнением A_{ij} элемента a_{ij} определителя n -го порядка называют определитель такого же порядка, получаемый из данного заменой элемента a_{ij} на 1 и обнулением всех остальных элементов i -й строки и j -го столбца. Минором M_{ij} элемента a_{ij} определителя n -го порядка называют определитель $(n-1)$ -го порядка, получаемый из данного вычеркиванием i -й строки и j -го столбца, на пересечении которых стоит этот элемент.

Алгебраическое дополнение A_{ij} и минор M_{ij} элемента a_{ij} связаны формулой

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.$$

При фиксированном значении индекса i справедлива следующая формула:

$$\det A = \sum_{k=1}^n a_{ik} A_{ik} = \sum_{k=1}^n (-1)^{i+k} a_{ik} M_{ik}. \quad (3.12)$$

Использование формулы (3.12) позволяет свести вычисление определителя n -го порядка к вычислению n определителей $(n-1)$ -го порядка. Формула (3.12) называется *формулой разложения определителя по i -й строке*. Аналогично справедлива *формула разложения определителя по i -му столбцу*

$$\det A = \sum_{k=1}^n a_{ki} A_{ki} = \sum_{k=1}^n (-1)^{i+k} a_{ki} M_{ki}.$$

ПРИМЕР 3.9. Вычислить определитель методом понижения порядка

$$D = \begin{vmatrix} 9 & -5 & 8 & 7 \\ 6 & 2 & 4 & -2 \\ 3 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 6 \end{vmatrix}.$$

- Предварительно, используя свойства определителя, упростим его. Вычитая из его первой строки третью, умноженную на три, а из второй — третью, умноженную на два, получим

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 & -5 \\ 0 & 6 & -2 & -10 \\ 3 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 6 \end{vmatrix}.$$

Полученный определитель разложим по первому столбцу

$$D = (-1)^{3+1} \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & -5 \\ 6 & -2 & -10 \\ 1 & 2 & 6 \end{vmatrix}.$$

Далее в полученном определителе из второй строки вычтем первую, умноженную на шесть, а из третьей — первую и разложим полученный определитель по первому столбцу

$$D = 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & -5 \\ 0 & 4 & 20 \\ 0 & 3 & 11 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 20 \\ 3 & 11 \end{vmatrix} = \\ = 3 \cdot (44 - 60) = -48. \quad \blacktriangleleft$$



Метод приведения к треугольному виду заключается в таком преобразовании определителя, когда все его элементы, лежащие по одну сторону от одной из его диагоналей, становятся равными нулю.



ПРИМЕР 3.10. Определитель из примера 3.9 вычислить методом приведения к треугольному виду.

► Выполняя действия, описанные в решении примера 3.9 получаем

$$D = \begin{vmatrix} 9 & -5 & 8 & 7 \\ 6 & 2 & 4 & -2 \\ 3 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 & -5 \\ 0 & 6 & -2 & -10 \\ 3 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 6 \end{vmatrix}.$$

В полученном определителе поменяем местами первую и третью строки, а далее — вторую и третью, учитывая, что при перестановке двух строк определитель меняет знак:

$$D = - \begin{vmatrix} 3 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 6 & -2 & -10 \\ 0 & 1 & -1 & -5 \\ 0 & 1 & 2 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & -5 \\ 0 & 6 & -2 & -10 \\ 0 & 1 & 2 & 6 \end{vmatrix}.$$

В последнем определителе вычтем из третьей строки вторую, умноженную на шесть, и из четвертой — вторую:

$$D = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 4 & 20 \\ 0 & 0 & 3 & 11 \end{vmatrix}.$$

Теперь вычтем из четвертой строки третью, умноженную на $\frac{3}{4}$. Наконец, вычисляем определитель, матрица которого приведена к треугольному виду,

$$D = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 4 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{vmatrix} = 3 \cdot 1 \cdot 4 \cdot (-4) = -48. \quad \blacktriangleleft$$



Метод рекуррентных соотношений позволяет выразить данный определитель, преобразуя и разлагая его по строке или столбцу, через определитель того же вида, но более низкого порядка. Полученное равенство называется рекуррентным соотношением.



ПРИМЕР 3.11. Вычислить *определитель Вандермонда*

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \dots & a_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

- Покажем, что при любом n ($n \geq 2$) определитель Вандермонда равен произведению всевозможных разностей вида $a_i - a_j$, $1 \leq j < i \leq n$. Доказательство проведем индукцией по n , используя метод рекуррентных соотношений. Действительно, при $n = 2$ имеем

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix} = a_2 - a_1.$$

Предположим, что доказываемое утверждение верно для определителя Вандермонда порядка $(n-1)$, т.е.

$$D_{n-1} = \prod_{1 \leq j < i \leq n-1} (a_i - a_j).$$

Преобразуем определитель D_n следующим образом: из последней n -й строки вычтем $(n-1)$ -ю, умноженную на a_1 , и далее последовательно будем вычитать из k -й строки $(k-1)$ -ю, умноженную на a_1 . В результате получим

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & a_2 - a_1 & a_3 - a_1 & \dots & a_n - a_1 \\ 0 & a_2^2 - a_1 a_2 & a_3^2 - a_1 a_3 & \dots & a_n^2 - a_1 a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_2^{n-1} - a_1 a_2^{n-2} & a_3^{n-1} - a_1 a_3^{n-2} & \dots & a_n^{n-1} - a_1 a_n^{n-2} \end{vmatrix}.$$

Раскладывая последний определитель по первому столбцу и вынося из каждого столбца общий множитель, получим

$$\begin{aligned} D_n &= \begin{vmatrix} a_2 - a_1 & a_3 - a_1 & \dots & a_n - a_1 \\ a_2^2 - a_1 a_2 & a_3^2 - a_1 a_3 & \dots & a_n^2 - a_1 a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_2^{n-1} - a_1 a_2^{n-2} & a_3^{n-1} - a_1 a_3^{n-2} & \dots & a_n^{n-1} - a_1 a_n^{n-2} \end{vmatrix} = \\ &= (a_2 - a_1)(a_3 - a_1) \dots (a_n - a_1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_2^{n-2} & a_3^{n-2} & \dots & a_n^{n-2} \end{vmatrix} = \\ &= (a_2 - a_1)(a_3 - a_1) \dots (a_n - a_1) \cdot D_{n-1}. \end{aligned}$$

Получили рекуррентное соотношение. Используя предположение индукции, окончательно имеем

$$D_n = (a_2 - a_1)(a_3 - a_1) \dots (a_n - a_1) \cdot D_{n-1} = \prod_{1 \leq j < i \leq n} (a_i - a_j). \blacktriangleleft$$

Вычислить определители, предварительно упростив.

$$\text{3.73.} \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \quad \text{3.74.} \quad \begin{vmatrix} -3 & 9 & 3 & 6 \\ -5 & 8 & 2 & 7 \\ 4 & -5 & -3 & -2 \\ 7 & -8 & -4 & -5 \end{vmatrix}.$$

$$\text{3.75.} \quad \begin{vmatrix} 35 & 59 & 71 & 52 \\ 42 & 70 & 77 & 54 \\ 43 & 68 & 72 & 52 \\ 29 & 49 & 65 & 50 \end{vmatrix} \quad \text{3.76.} \quad \begin{vmatrix} 27 & 44 & 40 & 55 \\ 20 & 64 & 21 & 40 \\ 13 & -20 & -13 & 24 \\ 46 & 45 & -55 & 84 \end{vmatrix}.$$

Вычислить определители, используя разложение по строке или по столбцу.

$$3.77. \begin{vmatrix} 0 & -a & -b & -d \\ 0 & 0 & -c & -e \\ b & c & 0 & 0 \\ d & e & 0 & 0 \end{vmatrix}. \quad 3.78. \begin{vmatrix} x & a & b & 0 & c \\ 0 & y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e & z & 0 & f \\ g & h & k & u & l \\ 0 & 0 & 0 & 0 & v \end{vmatrix}.$$

$$3.79. \begin{vmatrix} 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 \\ 9 & 7 & 8 & 9 & 4 & 3 \\ 7 & 4 & 9 & 7 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 8 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Вычислить определители порядка n приведением к треугольному виду.

$$3.80. \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ -1 & 0 & 3 & \cdots & n \\ -1 & -2 & 0 & \cdots & n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -1 & -2 & -3 & \cdots & 0 \end{vmatrix}. \quad 3.81. \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 3 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \cdots & 2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 3 \end{vmatrix}.$$

Вычислить определители, элементы которых заданы указанными условиями.

$$3.82. a_{ij} = \min(i, j).$$

$$3.83. a_{ij} = \max(i, j).$$

Вычислить определители порядка n методом рекуррентных соотношений.

$$3.84. \begin{vmatrix} \alpha & \alpha\beta & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha+\beta & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \alpha+\beta \end{vmatrix}.$$

$$3.85. \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

$$3.86. \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 0 \end{vmatrix}.$$

$$3.87. \begin{vmatrix} 9 & 5 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 4 & 9 & 5 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 9 & 5 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 4 & 9 \end{vmatrix}.$$

$$3.88. \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & a_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1} \end{vmatrix}. \quad 3.89. \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 \end{vmatrix}.$$

3.90. Доказать, что для любого определителя выполняется соотношение

$$\sum_{k=1}^n a_{ik} A_{mk} = \begin{cases} \det A, & i = m, \\ 0, & i \neq m, \end{cases}$$

где A_{mk} — алгебраическое дополнение элемента a_{mk} .

3.3. Обратная матрица

1. Обратная матрица и методы ее вычисления. Квадратная матрица называется *невырожденной (неособенной)*, если ее определитель не равен нулю, и *вырожденной (особенной)* в противном случае.

Обратной матрицей для невырожденной квадратной матрицы A n -го порядка называется такая квадратная матрица A^{-1} n -го порядка, для которой выполняется равенство

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E.$$

Укажем основные методы вычисления обратной матрицы.

Метод присоединенной матрицы. Матрица $A^\vee$, элементами которой являются алгебраические дополнения A_{ij}

соответствующих элементов a_{ij} матрицы A , называется *присоединенной* к матрице A . Справедливо равенство

$$(A^\vee)^\top A = A(A^\vee)^\top = \det A \cdot E.$$

Отсюда следует, что если A — невырожденная матрица, то, используя свойства определителя n -го порядка, получаем способ нахождения матрицы A^{-1} через определитель $\det A$ и ее присоединенную матрицу $A^\vee$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot (A^\vee)^\top = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}^\top. \quad (3.13)$$



ПРИМЕР 3.12. Методом присоединенной матрицы най-

ти A^{-1} , если $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix}$.

- Находим $\det A = -1$. Так как определитель не равен нулю, то обратная матрица для матрицы A существует. Вычисляем все алгебраические дополнения A_{ij} элементов a_{ij} матрицы A :

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -5 & -1 \end{vmatrix} = 8; \quad A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 5;$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = -1;$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -4 & 5 \\ -5 & -1 \end{vmatrix} = -29; \quad A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -18;$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = 3;$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -4 & 5 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 11; \quad A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 7;$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -1.$$

Используя формулу (3.13), отсюда находим матрицу A^{-1}

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot (A^\vee)^T = (-1) \cdot \begin{pmatrix} 8 & 5 & -1 \\ -29 & -18 & 3 \\ 11 & 7 & 1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} -8 & 29 & -11 \\ -5 & 18 & -7 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

ПРИМЕР 3.13. Методом присоединенной матрицы найти A^{-1} , если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \text{ — квадратная матрица } n\text{-го по-}$$

рядка.

- Так как матрица A треугольная, то ее определитель равен произведению элементов главной диагонали. Находим $\det A = 1$. Следовательно, обратная матрица A^{-1} для матрицы A существует. Рассмотрим алгебраические дополнения A_{ij} в случаях: 1) $i = j$; 2) $i > j$; 3) $i < j$.

1) Пусть $i = j$. В этом случае рассматриваются алгебраические дополнения к элементам главной диагонали. Так как $A_{ii} = (-1)^{i+i} M_{ii}$, а минор M_{ii} получается из исходного определителя вычеркиванием i -й строки и i -го столбца, т.е. также имеет треугольный вид, то $M_{ii} = 1$ и, следовательно, $A_{ii} = 1$.

2) При $i > j$ рассмотрим два случая.

Пусть $i = j + 1$, т.е. выделяются элементы под главной диагональю. Так как $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$, то, выделяя соответствующий минор M_{ij} (вычеркиваются i -я строка и j -й столбец, где $j = i - 1$), видим, что минор $M_{i,i-1}$ имеет треугольный вид и равен 1. Соответственно, $A_{ij} = (-1)^{2i-1} = -1$.

Пусть теперь $i \geq j + 2$. Выделяя соответствующий минор M_{ij} (вычеркивается i -я строка и j -й столбец, и $j \leq i - 2$), видим, что в этом случае минор M_{ij} имеет две равные строки. Следовательно, он равен нулю, а значит, равно нулю и алгебраическое дополнение A_{ij} .

3) Пусть $j > i$, т.е. выделяются элементы над главной диагональю. Снова выделяя соответствующий минор M_{ij} (вычеркивается i -я строка и j -й столбец, и $j > i$), видим, что выделенный минор M_{ij} имеет две равные строки. Следовательно, он равен нулю, а значит, равно нулю и алгебраическое дополнение $A_{ij} = 0$.

Учитывая полученные результаты, записываем

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

► *Метод элементарных преобразований.* Следующие преобразования матрицы A называются элементарными:

1) перестановка строк (столбцов);
2) умножение строки (столбца) на число, отличное от нуля;

3) прибавление к элементам строки (столбца) соответствующих элементов другой строки (столбца), предварительно умноженных на некоторое число.

Для нахождения обратной матрицы A^{-1} для невырожденной матрицы A n -го порядка строят прямоугольную матрицу $\Gamma_A = (A | E)$ размера $n \times 2n$, приписывая к A справа единичную матрицу E . Далее, используя элементарные преобразования только для строк (или только для столбцов), приводят матрицу Γ_A к виду $\Gamma_A = (E | B)$, что всегда возможно, если матрица A — невырожденна. Тогда $A^{-1} = B$.

ПРИМЕР 3.14. Методом элементарных преобразований

найти A^{-1} для матрицы $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

► Образует матрицу $\Gamma_A = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$. Обозначив

через $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ строки матрицы Γ_A , выполним над ними элементарные преобразования.

1. Поменяем местами первую и вторую строки матриц

$$\gamma_1^{(1)} = \gamma_2,$$

$$\gamma_2^{(1)} = \gamma_1,$$

$$\gamma_3^{(1)} = \gamma_3,$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{(1)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

2. Преобразуем вторую и третью строки

$$\gamma_1^{(2)} = \gamma_1^{(1)},$$

$$\gamma_2^{(2)} = \gamma_2^{(1)} - 3\gamma_1^{(1)},$$

$$\gamma_3^{(2)} = \gamma_3^{(1)} - \gamma_1^{(1)},$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{(2)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -5 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right).$$

3. Приводим левую матрицу в Γ_A к треугольному виду

$$\gamma_1^{(3)} = \gamma_1^{(2)},$$

$$\gamma_2^{(3)} = \gamma_2^{(2)},$$

$$\gamma_3^{(3)} = \frac{1}{6}(\gamma_3^{(2)} - \gamma_2^{(2)}),$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -5 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{(3)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -5 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1/6 & 1/3 & 1/6 \end{array} \right).$$

4. Преобразуя первую и вторую строки левой матрицы в Γ_A , приводим ее к единичной

$$\gamma_1^{(4)} = \gamma_1^{(3)} - \gamma_3^{(3)},$$

$$\gamma_2^{(4)} = \frac{1}{2}(\gamma_2^{(3)} + 5\gamma_3^{(3)}),$$

$$\gamma_3^{(4)} = \gamma_3^{(3)}.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & | & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -5 & | & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & -1/6 & 1/3 & 1/6 \end{pmatrix} \xrightarrow{(4)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 4/3 & -2/3 & 2/3 \\ 0 & 1 & 0 & | & 1/12 & -2/3 & 5/12 \\ 0 & 0 & 1 & | & -1/6 & 1/3 & 1/6 \end{pmatrix}.$$

В результате получаем, что правая матрица в Γ_A и есть

$$\text{искомая } A^{-1} = \begin{pmatrix} 4/3 & -2/3 & 2/3 \\ 1/12 & -2/3 & 5/12 \\ -1/6 & 1/3 & 1/6 \end{pmatrix}. \quad \blacktriangleleft$$

Найти обратные матрицы методом присоединенной матрицы.

$$\mathbf{3.91.} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{3.92.} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{3.93.} \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{3.94.} \begin{pmatrix} i+1 & i-1 \\ i & -i \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{3.95.} \begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{3.96.} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{3.97.} \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{3.98.} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & -6 \end{pmatrix}.$$

Найти обратные матрицы методом элементарных преобразований.

$$\mathbf{3.99.} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{3.100.} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & 6 & 8 \\ 2 & 6 & 12 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{3.101.} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{3.102.} \begin{pmatrix} 3 & 3 & -4 & -3 \\ 0 & 6 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$3.103. \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & -6 \end{pmatrix}.$$

$$3.104. \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$3.105. \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$3.106. \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

3.107. Доказать следующие равенства:

а) $(\alpha A)^{-1} = \frac{1}{\alpha} A^{-1}$; б) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$; в) $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$.

3.108. Как изменится обратная матрица, если:

а) в матрице $\Gamma_A = (A | E)$ матрица A будет транспонирована;

б) в данной матрице A поменять местами i -ю и j -ю строки;

в) i -ю строку данной матрицы A умножить на число λ , не равное нулю;

г) к i -й строке прибавить j -ю, умноженную на число λ , или совершить аналогичное преобразование столбцов?

2. Матричные уравнения. Матричным уравнением называют уравнение одного из следующих видов:

$$AX = B, \quad (3.14)$$

где A — прямоугольная матрица n -го порядка, а X и B — матрицы размера $n \times k$;

$$XA = B, \quad (3.15)$$

где A — прямоугольная матрица n -го порядка, а X и B — матрицы размера $k \times n$;

$$AXB = C, \quad (3.16)$$

где A — прямоугольная матрица n -го порядка, B — прямоугольная матрица k -го порядка, X и C — матрицы размера $n \times k$.

Решения уравнений (3.14), (3.15) и (3.16) соответственно записывают в виде $X = A^{-1}B$, $X = BA^{-1}$ и $X = A^{-1}CB^{-1}$.



ПРИМЕР 3.15. Решить матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 4 \\ 11 \\ 11 \end{pmatrix}.$$

► По условию $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 \\ 11 \\ 11 \end{pmatrix}$.

Находим $\det A = 60$, $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot (A^\vee)^\mathrm{T} = \frac{1}{60} \begin{pmatrix} 12 & 6 & 6 \\ -18 & 11 & 1 \\ -18 & 1 & 11 \end{pmatrix}$.

По формуле $X = A^{-1}B$ получаем

$$X = \frac{1}{60} \begin{pmatrix} 12 & 6 & 6 \\ -18 & 11 & 1 \\ -18 & 1 & 11 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 11 \\ 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Решить матричные уравнения:

3.109. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$. **3.110.** $X \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}$.

3.111. $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 16 \\ 9 & 10 \end{pmatrix}$.

3.112. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & -1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 5 \\ 16 \\ 10 \end{pmatrix}$. **3.113.** $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -4 & 8 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$.

3.114. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 10 & 2 & 7 \\ 10 & 7 & 8 \end{pmatrix}$.

3.115. $X \cdot \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 3 & 0 \\ -5 & 9 & 0 \\ -2 & 15 & 0 \end{pmatrix}$.

3.116. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 4 & 1 \\ 3 & 7 & 8 & 5 \\ 6 & 14 & 15 & 11 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 7 & 7 & 1 & 8 \\ -1 & 5 & -6 & 13 \\ 6 & 13 & -5 & 23 \\ 14 & 26 & -9 & 44 \end{pmatrix}$.

$$3.117. X \cdot \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 & 3 \\ 10 & 6 & 3 & 10 \\ 5 & 0 & -1 & 0 \\ 10 & 6 & 4 & 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 & 20 & 15 & 42 \\ 0 & 4 & 5 & 9 \\ 30 & 18 & 12 & 39 \\ 15 & 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

3.4. Ранг матрицы

1. Пространство арифметических векторов. Всякая упорядоченная совокупность из n действительных (комплексных) чисел называется *действительным (комплексным) арифметическим вектором* и обозначается символом $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$. Числа $x_1, x_2, \dots, x_n$ называются *компонентами* арифметического вектора $\mathbf{x}$.

Над арифметическими векторами вводятся следующие операции.

Сложение: если $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, то

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n). \quad (3.17)$$

Умножение на число: если λ — число (действительное или комплексное) и $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ — арифметический вектор, то

$$\lambda \mathbf{x} = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n). \quad (3.18)$$

Множество всех действительных (комплексных) арифметических n -компонентных векторов с введенными выше операциями сложения (3.17) и умножения на число (3.18) называется *пространством арифметических векторов* (соответственно действительным или комплексным). Всюду в дальнейшем, если не оговаривается противное, рассматривается действительное пространство арифметических векторов, обозначаемое символом $\mathbb{R}^n$.

Система арифметических векторов $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_k\}$ называется *линейно зависимой*, если найдутся числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$, не равные одновременно нулю, такие что $\lambda_1 \mathbf{x}_1 + \lambda_2 \mathbf{x}_2 + \dots + \lambda_k \mathbf{x}_k = \mathbf{0}$, где $\mathbf{0} = (0, 0, \dots, 0)$ — нулевой вектор. В противном случае система называется *линейно независимой*.

Пусть Q — произвольное множество арифметических векторов. Система векторов $\mathfrak{B} = \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_m\}$ называется *базисом* в Q , если

а) $\mathbf{e}_k \in Q$, $k = 1, 2, \dots, m$;

ПРИМЕР 3.16. Найти линейную комбинацию $3\mathbf{a}_1 + 2\mathbf{a}_2 - 3\mathbf{a}_3$ арифметических векторов $\mathbf{a}_1 = (4, 1, 3)$, $\mathbf{a}_2 = (1, 2, -3)$, $\mathbf{a}_3 = (2, -3, 6)$.

► Пусть $\mathbf{x} = 3\mathbf{a}_1 + 2\mathbf{a}_2 - 3\mathbf{a}_3$. Найдем компоненты вектора $\mathbf{x}$, используя правила выполнения линейных операций в координатной форме. Тогда

$$\begin{aligned} X &= 3 \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 \\ 9 \\ -18 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 12+2-6 \\ 3+4+9 \\ 9-6-18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 16 \\ -15 \end{pmatrix}. \quad \blacktriangleleft \end{aligned}$$

Заданы арифметические векторы $\mathbf{a}_1 = (4, 1, 3, -2)$, $\mathbf{a}_2 = (1, 2, -3, 2)$, $\mathbf{a}_3 = (16, 9, 1, -3)$, $\mathbf{a}_4 = (0, 1, 2, 3)$, $\mathbf{a}_5 = (1, -1, 15, 0)$.

Найти линейные комбинации.

3.118. $3\mathbf{a}_1 + 5\mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_3 + 2\mathbf{a}_4$. **3.119.** $\mathbf{a}_1 + 2\mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_4 - 2\mathbf{a}_5$.

3.120. $2\mathbf{a}_1 + 4\mathbf{a}_3 - 2\mathbf{a}_5$. **3.121.** $\frac{3}{2}\mathbf{a}_1 + 3\mathbf{a}_2 - \frac{1}{2}\mathbf{a}_4 + \mathbf{a}_5$.

3.122. Доказать, что линейно зависима всякая система векторов:

- а) содержащая два равных вектора;
- б) содержащая два вектора, различающихся числовым множителем;
- в) содержащая нулевой вектор;
- г) содержащая линейно зависимую подсистему.

2. Определение и основные методы вычисления ранга матрицы. Пусть в матрице A размера $m \times n$ выбраны произвольно k строк и k столбцов ($k \leq \min(m, n)$). Элементы, стоящие на пересечении выбранных строк и столбцов, образуют квадратную матрицу порядка k , определитель которой называется *минором k -го порядка* матрицы A .

Максимальный порядок r отличных от нуля миноров матрицы A называется ее *рангом*, а любой минор порядка r , отличный от нуля, — *базисным минором*.

Теорема о базисном миноре. Ранг матрицы равен рангу системы ее строк (столбцов); при этом система строк (столбцов) матрицы, содержащая базисный минор, образует базис в системе строк (столбцов) этой матрицы.

Приведем основные методы вычисления ранга матрицы.

Метод окаймляющих миноров. Пусть в матрице A найден минор k -го порядка M , отличный от нуля. Рассмотрим лишь те миноры $(k+1)$ -го порядка, которые содержат в себе (окаймляют) минор M : если все они равны нулю, то ранг матрицы равен k . В противном случае среди окаймляющих миноров найдется ненулевой минор $(k+1)$ -го порядка, и вся процедура повторяется.



ПРИМЕР 3.17. Найти ранг матрицы методом окаймляющих миноров

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 6 & 1 \\ -2 & -4 & 6 & 5 & 2 \\ 4 & -2 & 3 & -2 & 3 \\ -8 & 4 & -6 & 4 & -6 \end{pmatrix}.$$

- Находим в матрице A минор M_2 второго порядка, отличный от нуля,

$$A = \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 5 & 6 & 1 \\ -2 & -4 & 6 & 5 & 2 \\ 1 & -2 & 3 & -2 & 3 \\ -8 & 4 & -6 & 4 & -6 \end{array} \right), \quad M_2 = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -4 & 6 \end{vmatrix} = 32 \neq 0.$$

Минор M_3 третьего порядка, окаймляющий M_2 , также отличен от нуля

$$M_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -2 & -4 & 6 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-12 + 12) - 2 \cdot (-6 - 6) + 5 \cdot (4 + 4) = 64 \neq 0.$$

Оба минора 4-го порядка, окаймляющие M_3 , равны нулю (проверить самостоятельно!)

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 & 6 \\ -2 & -4 & 6 & 5 \\ 1 & -2 & 3 & -2 \\ -8 & 4 & -6 & 4 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{и} \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 & 1 \\ -2 & -4 & 6 & 2 \\ 1 & -2 & 3 & 3 \\ -8 & 4 & -6 & -6 \end{vmatrix} = 0,$$

следовательно, ранг матрицы A равен трем.



Метод элементарных преобразований основан на том факте, что элементарные преобразования (см. 3.3) строк и столбцов матрицы не меняют ее ранга. Используя эти преобразования, матрицу можно привести к такому виду, когда все ее элементы, кроме элементов $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{rr}$ ($r \leq \min(m, n)$), равны нулю. Следовательно, ранг матрицы равен r .

ПРИМЕР 3.18. Методом элементарных преобразований найти ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & -2 & -3 \\ -6 & 4 & 6 & -2 \\ 4 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

- Обозначив через $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4, \gamma_5$ строки матрицы A и выполняя последовательно элементарные преобразования со строками (и возможно, переставляя столбцы!), приведем ее к такому виду, когда все ее элементы, кроме элементов $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{rr}$ ($r \leq \min(m, n)$), будут равны нулю.

1. Приведем матрицу к такому виду, чтобы в первом столбце обнулились все элементы, кроме $a_{11}^{(1)}$,

$$\gamma_1^{(1)} = \gamma_2,$$

$$\gamma_2^{(1)} = \gamma_1,$$

$$\gamma_3^{(1)} = \gamma_3 + 3\gamma_2,$$

$$\gamma_4^{(1)} = \gamma_4 - 2\gamma_2,$$

$$\gamma_5^{(1)} = \gamma_5,$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & -2 & -3 \\ -6 & 4 & 6 & -2 \\ 4 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 5 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{(1)} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -11 \\ 0 & 5 & 5 & 9 \\ 0 & -2 & 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

2. Далее добиваемся того, чтобы во втором столбце все элементы, расположенные ниже $a_{22}^{(2)}$, были равны нулю:

$$\gamma_3^{(2)} = \gamma_3^{(1)} - \gamma_2^{(1)},$$

$$\gamma_4^{(2)} = \gamma_4^{(1)} - 5\gamma_2^{(1)},$$

$$\gamma_5^{(2)} = \gamma_5^{(1)} + 2\gamma_2^{(1)},$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -11 \\ 0 & 5 & 5 & 9 \\ 0 & -2 & 5 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{(2)} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -14 \\ 0 & 0 & 5 & -6 \\ 0 & 0 & 5 & 10 \end{pmatrix}.$$

3. Теперь добиваемся того, чтобы в третьем столбце все элементы, расположенные ниже $a_{33}^{(3)}$, были равны нулю:

$$\gamma_3^{(3)} = \gamma_5^{(2)},$$

$$\gamma_4^{(3)} = \gamma_4^{(2)} - \gamma_5^{(2)},$$

$$\gamma_5^{(3)} = \gamma_3^{(2)},$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -14 \\ 0 & 0 & 5 & -6 \\ 0 & 0 & 5 & 10 \end{pmatrix} \xrightarrow{(3)} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & -16 \\ 0 & 0 & 0 & -14 \end{pmatrix}.$$

4. Выполняя элементарные преобразования, получаем $a_{44}^{(4)} = 1$, $a_{54}^{(4)} = 0$.

$$\gamma_4^{(4)} = -\frac{1}{16}\gamma_4^{(3)},$$

$$\gamma_5^{(4)} = \gamma_5^{(3)} - \frac{14}{16}\gamma_4^{(3)},$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & -16 \\ 0 & 0 & 0 & -14 \end{pmatrix} \xrightarrow{(4)} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Далее полученная матрица легко приводится к виду

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, ранг матрицы равен 4. ◀

Найти ранг матриц методом окаймляющих миноров.

$$\text{3.123. } \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix}. \quad \text{3.124. } \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{3.125. } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}. \quad \text{3.126. } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & -4 \\ 4 & 1 & 3 \\ -34 & 5 & -3 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Найти ранг матриц методом элементарных преобразований.

$$\text{3.127. } \begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ -1 & -4 & 5 \\ 3 & 1 & 7 \\ 0 & 5 & -10 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}. \quad \text{3.128. } \begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 & -4 \\ 4 & -7 & -2 & 1 \\ -3 & 5 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{3.129. } \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad \text{3.130. } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 3 & 6 & 6 \\ 3 & 4 & 3 & 8 & 7 \\ 4 & 5 & 3 & 10 & 8 \end{pmatrix}.$$

3.131. Доказать, что если произведение матриц AB определено, то $\text{rang}(AB) \leq \min\{\text{rang } A, \text{rang } B\}$.

3.132. Пусть A — невырожденная матрица, а матрицы B и C таковы, что AB и CA определены. Доказать, что $\text{rang}(AB) = \text{rang } B$ и $\text{rang}(CA) = \text{rang } C$.

3.133. Доказать, что если сумма матриц $A + B$ определена, то $\text{rang}(A + B) \leq \text{rang } A + \text{rang } B$.

ПРИМЕР 3.19. Выяснить, является ли система арифметических векторов $\mathbf{a}_1 = (4, 1, 3)$, $\mathbf{a}_2 = (1, 2, -3)$, $\mathbf{a}_3 = (2, -3, 9)$ линейно зависимой или линейно независимой. Найти ее ранг и какой-нибудь базис.

► Составим матрицу A , столбцами которой являются компоненты векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$:

$$A = (\mathbf{a}_1^T, \mathbf{a}_2^T, \mathbf{a}_3^T) = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & -3 & 9 \end{pmatrix}.$$

Нетрудно видеть, что ранг матрицы A равен 2. Следовательно, исходная система арифметических векторов линейно зависима и ее ранг также равен 2. Выделенный

минор $M_2 = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$ матрицы A отличен от нуля (равен 7),

$$\text{а } \det A = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & -3 & 9 \end{vmatrix} = 0.$$

Отсюда следует, что арифметические векторы $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ и $\mathbf{a}_3$ линейно зависимы и по теореме о базисном миноре векторы $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ образуют базис исходной системы векторов. ◀

Выяснить, являются ли системы арифметических векторов линейно зависимыми или линейно независимыми.

3.134. $\mathbf{x}_1 = (4, 1, 3)$, $\mathbf{x}_2 = (-8, 2, -6)$.

3.135. $\mathbf{x}_1 = (2, -2, 1, -3)$, $\mathbf{x}_2 = (-4, 4, -2, 6)$.

3.136. $\mathbf{x}_1 = (2, -3, 1)$, $\mathbf{x}_2 = (3, 1, -5)$, $\mathbf{x}_3 = (1, -4, 3)$.

3.137. $\mathbf{x}_1 = (1, i, 2 - i, 3 + i)$, $\mathbf{x}_2 = (1 - i, 1 + i, 1 - 3i, 4 - 2i)$.

3.138. $\mathbf{x}_1 = (1, 1, 1, 1)$, $\mathbf{x}_2 = (1, -1, -1, 1)$, $\mathbf{x}_3 = (1, -1, 1, -1)$, $\mathbf{x}_4 = (1, 1, -1, -1)$.

3.139. $\mathbf{x}_1 = (4, -5, 2, 6)$, $\mathbf{x}_2 = (2, -2, 1, 3)$,

$\mathbf{x}_3 = (6, -3, 3, 9)$, $\mathbf{x}_4 = (4, -1, 5, 6)$.

Найти ранг системы векторов.

3.140. $\mathbf{a}_1 = (1, -1, 0, 0)$, $\mathbf{a}_2 = (0, 1, -1, 0)$, $\mathbf{a}_3 = (1, 0, -1, 1)$, $\mathbf{a}_4 = (0, 0, 0, 1)$, $\mathbf{a}_5 = (3, -5, 2, -3)$.

3.141. $\mathbf{a}_1 = (1, i, -1, -i, 1)$, $\mathbf{a}_2 = (1, -i, -1, i, 1)$,
 $\mathbf{a}_3 = (1, -1, 1, -1, 1)$, $\mathbf{a}_4 = (3, -1, -1, -1, 3)$.

Найти ранг и какой-нибудь базис заданной системы векторов.

3.142. $\mathbf{a}_1 = (5, 2, -3, 1)$, $\mathbf{a}_2 = (4, 1, -2, 3)$, $\mathbf{a}_3 = (1, 1, -1, -2)$,
 $\mathbf{a}_4 = (3, 4, -1, 2)$.

3.143. $\mathbf{a}_1 = (2, -1, 3, 5)$, $\mathbf{a}_2 = (4, -3, 1, 3)$, $\mathbf{a}_3 = (3, -2, 3, 4)$,
 $\mathbf{a}_4 = (4, -1, 15, 17)$, $\mathbf{a}_5 = (7, -6, -7, 0)$.

Найти ранг и все базисы заданной системы векторов.

3.144. $\mathbf{a}_1 = (1, 2, 0, 0)$, $\mathbf{a}_2 = (1, 2, 3, 4)$, $\mathbf{a}_3 = (3, 6, 0, 0)$.

3.145. $\mathbf{a}_1 = (1, 2, 3, 4)$, $\mathbf{a}_2 = (2, 3, 4, 5)$, $\mathbf{a}_3 = (3, 4, 5, 6)$,
 $\mathbf{a}_4 = (4, 5, 6, 7)$.

3.146. Доказать, что система арифметических векторов
 $\mathbf{e}_1 = (1, 1, 1, 1, 1)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 1, 1, 1)$, $\mathbf{e}_3 = (0, 0, 1, 1, 1)$, $\mathbf{e}_4 = (0, 0, 0, 1, 1)$, $\mathbf{e}_5 = (0, 0, 0, 0, 1)$ образует базис в $\mathbb{R}^5$.

Найти координаты вектора $\mathbf{x}$ в базисе $\mathfrak{B} = \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_5\}$ из задачи **3.146**.

3.147. $\mathbf{x} = (1, 0, 1, 0, 1)$. **3.148.** $\mathbf{x} = (5, 4, 3, 2, 1)$.

3.149. Доказать, что если векторы $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ линейно зависимы и вектор $\mathbf{a}_3$ не выражается линейно через векторы $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2$, то векторы $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2$ различаются лишь числовым множителем.

3.150. Доказать, что если векторы $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$ линейно независимы, а векторы $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k, \mathbf{b}$ линейно зависимы, то вектор $\mathbf{b}$ линейно выражается через векторы $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$.

Глава 4

ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА И АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

4.1. Векторная алгебра

1. Линейные операции над векторами. *Направленным отрезком $\overrightarrow{AB}$* называется отрезок AB , для которого указаны начало — точка A и конец — точка B (рис. 4.1). *Длиной $|\overrightarrow{AB}|$* направленного отрезка $\overrightarrow{AB}$ называется длина отрезка AB . На-

правленные отрезки $\overrightarrow{A_1B_1}, \dots, \overrightarrow{A_nB_n}$ называются *коллинеарными*, если существует прямая l , которой параллелен каждый из этих отрезков. Направленные отрезки $\overrightarrow{A_1B_1}, \dots, \overrightarrow{A_nB_n}$ называются *компланарными*, если существует плоскость α которой параллелен каждый из этих отрезков.

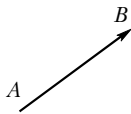


Рис. 4.1

Геометрическим вектором $\mathbf{a}$ называется множество всех направленных отрезков, имеющих одинаковую длину и направление. О всяком направленном отрезке из этого множества говорят, что он *представляет* вектор $\mathbf{a}$ (получен приложением вектора $\mathbf{a}$ к точке A), и в этом случае пишут $\mathbf{a} = \overrightarrow{AB}$. *Длиной (модулем) вектора $\mathbf{a}$* называется длина любого направленного отрезка $\overrightarrow{AB}$, представляющего этот вектор $|\mathbf{a}| = |\overrightarrow{AB}|$. Вектор нулевой длины называется *нулевым вектором* и обозначается символом $\mathbf{0}$.

Векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ называются равными, если множество представляющих их направленных отрезков сопадают.

Пусть направленный отрезок $\overrightarrow{OA}$ представляет вектор $\mathbf{a}$. Прикладывая к точке A вектор $\mathbf{b}$, получим направленный отрезок $\overrightarrow{AB}$. Вектор, представленный направленным отрезком

$\overrightarrow{OB}$, называется суммой векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ и обозначается $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ (правило треугольника, рис. 4.2, а). Сумма векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ может быть определена также по правилу параллелограмма (рис. 4.2, б).

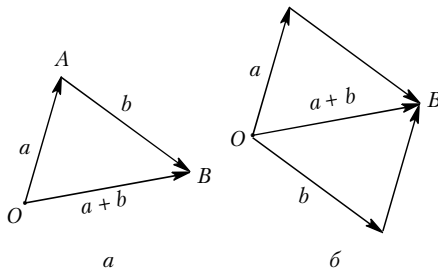


Рис. 4.2

Произведением вектора $\mathbf{a}$ на действительное число $\lambda \neq 0$ называется вектор, обозначаемый $\lambda \mathbf{a}$, такой, что $|\lambda \mathbf{a}| = |\lambda| \cdot |\mathbf{a}|$, векторы $\mathbf{a}$ и $\lambda \mathbf{a}$ сонаправлены при $\lambda > 0$ и противоположно направлены при $\lambda < 0$. По определению $0\mathbf{a} = \lambda\mathbf{0} = \mathbf{0}$.

ПРИМЕР 4.1. Найти сумму векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4, \mathbf{a}_5$, изображенных на рис. 4.3, а.

- Чтобы построить сумму векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4, \mathbf{a}_5$, к концу вектора $\mathbf{a}_1$ прикладываем вектор $\mathbf{a}_2$ и получаем сумму $\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2$. Затем к концу полученного вектора прикладываем вектор $\mathbf{a}_3$ и получаем сумму $\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3$, и т.д. На рис. 4.3, б изображен процесс построения их суммы. Результирующий вектор $\overrightarrow{A_1A_6} = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3 + \mathbf{a}_4 + \mathbf{a}_5$ (правило многоугольника).

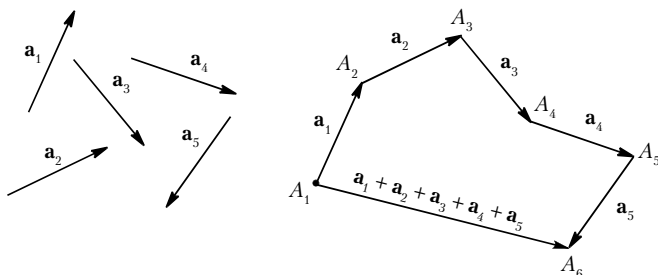


Рис. 4.3

4.1. Длины векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ заданы. Как следует направить эти векторы, чтобы длина вектора $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ была: а) наибольшей;

б) наименьшей; в) может ли длина вектора $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ быть меньше длин каждого из векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$?

4.2. $\overrightarrow{ABCD}$ — параллелограмм. Доказать, что $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}$.

4.3. $ABCD$ — тетраэдр. Найти суммы векторов:

а) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DC}$; б) $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{DC}$;

в) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{CD}$.

4.4. $ABCD$ — тетраэдр. Доказать, что $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AC}$. Верно ли это для четырех произвольных точек?

4.5. $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — параллелепипед. Найти следующие суммы векторов:

а) $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{D_1 C_1}$; б) $\overrightarrow{A} + \overrightarrow{A_1 B_1} + \overrightarrow{A_1 A_1} + \overrightarrow{C_1 A_1} + \overrightarrow{AC}$;

в) $\overrightarrow{AD_1} + \overrightarrow{AB_1} + \overrightarrow{A_1 A}$.

4.6. Доказать равенства:

$$1) \mathbf{a} + \frac{1}{2}(\mathbf{b} - \mathbf{a}) = \frac{1}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{b}); \quad 2) \mathbf{a} - \frac{1}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \frac{1}{2}(\mathbf{b} - \mathbf{a}).$$

4.7. Коллинеарны ли векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, если коллинеарны векторы $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ и $\mathbf{a} - \mathbf{b}$?

4.8. В треугольнике ABC точка M — точка пересечения медиан.

а) Доказать, что $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \mathbf{0}$.

б) Доказать, что для произвольной точки пространства выполняется равенство $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$.

ПРИМЕР 4.2. В параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ точка M — центр грани $CC_1 D_1 D$. Выразить вектор $\overrightarrow{B_1 M}$ через векторы $\overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$.

► Для треугольника $B_1 C_1 M$ запишем равенство

$$\overrightarrow{B_1 M} = \overrightarrow{B_1 C_1} + \overrightarrow{C_1 M}.$$

Так как $\overrightarrow{B_1 C_1} = \overrightarrow{AD}$, а $\overrightarrow{C_1 M} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{C_1 D_1} + \overrightarrow{C_1 C})$, а $\overrightarrow{C_1 D_1} = -\overrightarrow{AB}$,

$\overrightarrow{C_1 C} = -\overrightarrow{A_1 A}$, то отсюда получаем $\overrightarrow{C_1 M} = -\frac{1}{2}(\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{AB})$.

Следовательно, $\overrightarrow{B_1 M} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AA_1} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$. ◀

4.9. В параллелограмме $ABCD$ точки M и N — середины сторон BC и CD соответственно. Выразить вектор $\overrightarrow{AB}$ через векторы $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AN}$.

4.10. В правильном шестиугольнике $ABCDEF$ выразить вектор $\overrightarrow{AC}$ через векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AF}$.

4.11. В правильном шестиугольнике $ABCDEF$ точка M — середина стороны CD . Выразить вектор $\overrightarrow{FM}$ через векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AF}$.

4.12. В призме $ABCA_1B_1C_1$ точка M — центр грани AA_1B_1B . Выразить вектор $\overrightarrow{MC_1}$ через векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AA_1}$.

4.13. В параллелепипеде $ABCA_1B_1C_1D_1$ выразить векторы $\overrightarrow{AA_1}$ и $\overrightarrow{AC_1}$ через векторы $\overrightarrow{AB_1}$, $\overrightarrow{AD_1}$, $\overrightarrow{AC}$.

4.14. В треугольнике ABC $\overrightarrow{AM} = \alpha \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AN} = \beta \overrightarrow{AC}$:

а) при каком соотношении α и β векторы $\overrightarrow{AM}$ и $\overrightarrow{BC}$ коллинеарны?

б) пусть α и β таковы, что векторы $\overrightarrow{AM}$ и $\overrightarrow{BC}$ неколлинеарны, выразить векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ через векторы $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{MM}$.

4.15. В параллелепипеде $ABCA_1B_1C_1D_1$ точка M — центр грани $A_1B_1C_1D_1$. Выразить вектор $\overrightarrow{AM}$ через векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{A_1A}$.



Система векторов $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ называется *линейно зависимой*, если существуют числа $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ($\lambda_1^2 + \dots + \lambda_n^2 \neq 0$), что $\lambda_1 \mathbf{a}_1 + \dots + \lambda_n \mathbf{a}_n = \mathbf{0}$. В противном случае система называется *независимой*.



4.16. Доказать следующие критерии линейной зависимости:

1) система векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ линейно зависима в том и только том случае, когда векторы $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2$ коллинеарны;

2) система векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ линейно зависима в том и только том случае, когда векторы $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ и $\mathbf{a}_3$ компланарны;

3) всякая система из $n \geq 4$ векторов линейно зависима.

4.17. Доказать, что точка C принадлежит прямой AB тогда и только тогда, когда векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ коллинеарны, т.е.

существует такое действительное число k , что $\overrightarrow{AC} = k \overrightarrow{AB}$. Выяснить геометрический смысл числа k .

4.18. В треугольнике OAB OL — биссектриса угла AOB . Выразить вектор $\overrightarrow{OL}$ через векторы $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}$, $\mathbf{b} = \overrightarrow{OB}$ и длины этих векторов.

4.19. В окружности с центром O проведены радиусы OA и OB . Радиус OC делит угол AOB пополам. Зная, что $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{OB} = \mathbf{b}$ и $\angle AOB = \alpha$, найти вектор $\overrightarrow{OC}$.

4.20. Найти линейную зависимость между четырьмя некопланарными векторами $\mathbf{p} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$, $\mathbf{q} = \mathbf{b} - \mathbf{c}$, $\mathbf{r} = \mathbf{a} - \mathbf{b} + \mathbf{c}$, $\mathbf{s} = \mathbf{b} + \frac{1}{2}\mathbf{c}$.

4.21. Доказать, что для любых векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ векторы $\mathbf{a} + \mathbf{b}$, $\mathbf{b} + \mathbf{c}$ и $\mathbf{c} - \mathbf{a}$ компланарны.

4.22. Даны три некопланарных вектора $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$. Найти все значения λ , при которых векторы $\lambda\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$, $\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b} + \mathbf{c}$, $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \lambda\mathbf{c}$ компланарны.

4.23. Назовем *медианой тетраэдра* отрезок, соединяющий вершину тетраэдра с точкой пересечения медиан противоположной грани. Доказать, что медианы тетраэдра пересекаются в одной точке. В каком отношении они делятся этой точкой?

4.24. Доказать, что в треугольной пирамиде отрезки, соединяющие середины противоположных ребер (скрещивающихся), пересекаются в одной точке и в точке пересечения делятся пополам.

4.25. Доказать, что отрезки, соединяющие середины противоположных сторон пространственного четырёхугольника (вершины могут не лежать в одной плоскости), а также отрезок, соединяющий середины его диагоналей, пересекаются в одной точке и делятся этой точкой пополам.

4.26. Даны два параллелограмма $ABCD$ и $AB_1C_1D_1$ с общей вершиной A . Доказать, что векторы $\overrightarrow{BB_1}$, $\overrightarrow{CC_1}$, $\overrightarrow{DD_1}$ компланарны.

4.27. Известно, что $\mathbf{a}$ и $\mathbf{d}$ неколлинеарны, вектор $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$ коллинеарен вектору $\mathbf{d}$, а вектор $\mathbf{b} + \mathbf{c} + \mathbf{d}$ коллинеарен вектору $\mathbf{a}$. Чему равна сумма $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} + \mathbf{d}$?

2. Базис и координаты вектора. Упорядоченная тройка некопланарных векторов $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ называется *базисом* $\mathfrak{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ в множестве всех геометрических векторов.

Всякий геометрический вектор $\mathbf{a}$ может быть единственным образом представлен в виде

$$\mathbf{a} = X_1 \mathbf{e}_1 + X_2 \mathbf{e}_2 + X_3 \mathbf{e}_3, \quad (4.1)$$

где числа X_1, X_2, X_3 называются координатами вектора $\mathbf{a}$ в базисе $\mathfrak{B}$. Формулу (4.1) называют *разложением вектора $\mathbf{a}$ по базису $\mathfrak{B}$* . Используют также следующую форму записи: $\mathbf{a} = \{X_1, X_2, X_3\}$.

Аналогично упорядоченная пара $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ неколлинеарных векторов называется базисом $\mathfrak{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ в множестве всех геометрических векторов, компланарных некоторой плоскости.

Наконец, всякий ненулевой вектор $\mathbf{e}$ образует базис $\mathfrak{B} = \{\mathbf{e}\}$ в множестве всех геометрических векторов, коллинеарных некоторому направлению.

Если вектор $\mathbf{a}$ есть линейная комбинация векторов $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ с коэффициентами $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ т.е.

$$\mathbf{a} = \sum_{k=1}^n \lambda_k \mathbf{a}_k,$$

то каждая координата $X_i(\mathbf{a})$ вектора $\mathbf{a}$ равна сумме произведений коэффициентов $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ на соответствующие координаты векторов $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$

$$X_i(\mathbf{a}) = \sum_{k=1}^n \lambda_k X_i(\mathbf{a}_k), \quad i = 1, 2, 3.$$

Базис $\mathfrak{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ называется *прямоугольным*, если векторы $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ и $\mathbf{e}_3$ попарно перпендикулярны. Прямоугольный базис $\mathfrak{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ называется *ортонормированным*, если векторы $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ и $\mathbf{e}_3$ имеют единичную длину. В этом случае приняты обозначения

$$\mathbf{e}_1 = \mathbf{i}, \quad \mathbf{e}_2 = \mathbf{j}, \quad \mathbf{e}_3 = \mathbf{k}.$$

Проекцией вектора $\mathbf{a}$ на вектор $\mathbf{e}$ называется число $\text{пр}_{\mathbf{e}} \mathbf{a} = |\mathbf{a}| \cos \varphi$, где $\varphi = (\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{e}})$ — угол между векторами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{e}$ ($0 \leq \varphi \leq \pi$).

Координаты X, Y, Z вектора $\mathbf{a}$ в прямоугольном базисе совпадают с проекциями вектора $\mathbf{a}$ на базисные орты $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ соответственно, а длина вектора $\mathbf{a}$ равна

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}. \quad (4.2)$$

Числа

$$\cos \alpha = \cos(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{i}}) = \frac{X}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}},$$

$$\cos \beta = \cos(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{j}}) = \frac{Y}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}},$$

$$\cos \gamma = \cos(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{k}}) = \frac{Z}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}}$$

называются *направляющими косинусами* вектора $\mathbf{a}$. Направляющие косинусы вектора совпадают с координатами (проекциями) его орта $\mathbf{a}_0 = \frac{1}{|\mathbf{a}|} \cdot \mathbf{a}$.

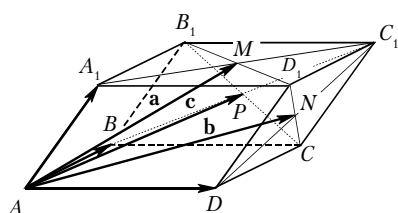


Рис. 4.4

► Введем векторы $\mathbf{p} = \overrightarrow{AA_1}$, $\mathbf{q} = \overrightarrow{AB}$, $\mathbf{r} = \overrightarrow{AD}$ (рис. 4.4). Тогда $\mathbf{a} = \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{A_1M} = \mathbf{p} + \frac{1}{2}\mathbf{q} + \frac{1}{2}\mathbf{r}$.

Аналогично находим $\mathbf{b} = \frac{1}{2}\mathbf{p} + \frac{1}{2}\mathbf{q} + \mathbf{r}$, $\mathbf{c} = \frac{1}{2}\mathbf{p} + \mathbf{q} + \frac{1}{2}\mathbf{r}$.

Заметим, что $\overrightarrow{AC_1} = \mathbf{p} + \mathbf{q} + \mathbf{r}$. Получим

$$\begin{aligned} \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} &= \left(\mathbf{p} + \frac{1}{2}\mathbf{q} + \frac{1}{2}\mathbf{r} \right) + \left(\frac{1}{2}\mathbf{p} + \mathbf{q} + \frac{1}{2}\mathbf{r} \right) + \left(\frac{1}{2}\mathbf{p} + \frac{1}{2}\mathbf{q} + \mathbf{r} \right) = \\ &= 2(\mathbf{p} + \mathbf{q} + \mathbf{r}) = 2\overrightarrow{AC_1}. \end{aligned}$$

Отсюда $\overrightarrow{AC_1} = \frac{1}{2}\mathbf{a} + \frac{1}{2}\mathbf{b} + \frac{1}{2}\mathbf{c}$, т.е. $\overrightarrow{AC_1} = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\}$.

ПРИМЕР 4.4. Дан правильный шестиугольник $ABCDEF$. Точка M — середина стороны CD . Разложить вектор $\overrightarrow{FM}$ по базису $\mathbf{a} = \overrightarrow{AC}$, $\mathbf{b} = \overrightarrow{AE}$.

► Проще разложить вектор $\overrightarrow{FM}$ по базису из векторов $\mathbf{p} = \overrightarrow{AB}$, $\mathbf{q} = \overrightarrow{AF}$ (рис. 4.5, задача 4.11):

$$\begin{aligned}\overrightarrow{FM} &= \overrightarrow{FC} + \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{FC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CD} = \\ &= 2\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AF} = 2\mathbf{p} + \frac{1}{2}\mathbf{q}.\end{aligned}$$

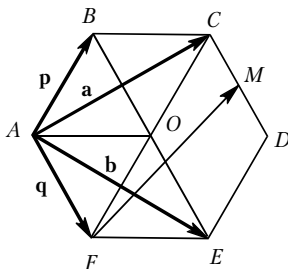


Рис. 4.5

Установим связь между базисами $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ и $\mathbf{p}, \mathbf{q}$. Пусть точка O — центр шестиугольника. Тогда $\overrightarrow{AO} = \mathbf{p} + \mathbf{q}$. Отсюда получаем $\mathbf{a} = \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \mathbf{p} + (\mathbf{p} + \mathbf{q}) = 2\mathbf{p} + \mathbf{q}$. Аналогично находим $\mathbf{b} = \mathbf{p} + 2\mathbf{q}$. Решив систему уравнений $\mathbf{a} = 2\mathbf{p} + \mathbf{q}$, $\mathbf{b} = \mathbf{p} + 2\mathbf{q}$ относительно $\mathbf{p}$ и $\mathbf{q}$, получим

$$\mathbf{p} = \frac{2}{3}\mathbf{a} - \frac{1}{3}\mathbf{b}, \quad \mathbf{q} = \frac{2}{3}\mathbf{b} - \frac{1}{3}\mathbf{a}.$$

$$\begin{aligned}\text{Следовательно, } \overrightarrow{FM} &= \overrightarrow{FC} + \overrightarrow{CM} = 2\mathbf{p} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CD} = 2\mathbf{p} + \frac{1}{2}\mathbf{q} = \\ &= \frac{4}{3}\mathbf{a} - \frac{2}{3}\mathbf{b} + \frac{1}{3}\mathbf{b} - \frac{1}{6}\mathbf{a} = \frac{7}{6}\mathbf{a} - \frac{1}{3}\mathbf{b}.\end{aligned}$$

4.28. На сторонах OA , OB треугольника OAB соответственно взяты точки M и N такие, что $OM : MA = 2 : 1$, $ON : NB = 1 : 3$. Пусть P — точка пересечения отрезков AN и BM . Разложить вектор $\overrightarrow{OP}$ по базису $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}$, $\mathbf{b} = \overrightarrow{OB}$.

4.29. В пирамиде $ABCD$ M — середина ребра BD . Разложить вектор $\overrightarrow{CM}$ в базисе из ребер $\mathfrak{B} = \{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB}\}$.

4.30. В правильной пирамиде $SAB CDEF$ с вершиной S найти координаты вектора $\overrightarrow{SE}$ в базисе из ребер $\mathfrak{B} = \{\overrightarrow{AS}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AF}\}$.

4.31. Основанием пирамиды с вершиной S служит параллелограмм $ABCD$. Найти координаты вектора $\overrightarrow{SD}$ в базисе $\mathfrak{B} = \{\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{SB}, \overrightarrow{SC}\}$.

4.32. Основанием пирамиды $SABCD$ служит параллелограмм $ABCD$ с центром O . Точка M — точка пересечения медиан треугольника SCD . Найти координаты векторов $\overrightarrow{SC}$, $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{SO}$ в базисе $\mathfrak{B} = \{\overrightarrow{AS}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\}$.

4.33. Пусть $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ — некопланарные векторы. Определить, при каких значениях α и β вектор $3\mathbf{a} + \alpha\mathbf{b} + \beta\mathbf{c}$ коллинеарен вектору $(\alpha - 2)\mathbf{a} + \mathbf{b} + \alpha\mathbf{c}$.

4.34. При каких значениях α и β векторы $\mathbf{a} = -2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \alpha\mathbf{k}$ и $\mathbf{b} = \beta\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ коллинеарны?

4.35. Доказать, что если в базисе $\mathfrak{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ имеют координаты $\mathbf{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$, $\mathbf{b} = \{b_1, b_2, b_3\}$ и k — действительное число, то

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \{a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3\} \text{ и } k\mathbf{a} = \{ka_1, ka_2, ka_3\}.$$

4.36. При каких значениях α и β векторы $\{1, \alpha, \beta\}$ и $\{\alpha - \beta, 5, 4\}$ коллинеарны?

4.37. При каких значениях α и β точки с координатами $\{1, \alpha, -3\}$, $\{2, \alpha + 3, 5\}$ и $\{\beta, 3, \alpha - \beta\}$ лежат на одной прямой?

4.38. При каких значениях α векторы $\{1, -1, 0\}$, $\{2, 1, 1\}$ и $\{1, 2 - \alpha, 3\}$ компланарны?



В дальнейшем, если не оговаривается противное, считается, что векторы представлены своими координатами в некотором прямоугольном базисе. Запись $\mathbf{a} = \{X, Y, Z\}$ означает, что координаты вектора $\mathbf{a}$ равны X , Y и Z , т.е. $\mathbf{a} = X\mathbf{i} + Y\mathbf{j} + Z\mathbf{k}$.



4.39. Заданы векторы $\mathbf{a}_1 = \{-1, 2, 0\}$, $\mathbf{a}_2 = \{3, 1, 1\}$, $\mathbf{a}_3 = \{2, 0, 1\}$ и $\mathbf{a} = \mathbf{a}_1 - 2\mathbf{a}_2 + \frac{1}{3}\mathbf{a}_3$. Вычислить:

а) $|\mathbf{a}_1|$ и координаты орта $\mathbf{a}_{1,0}$ вектора $\mathbf{a}_1$;

б) $\cos(\widehat{\mathbf{a}_1, \mathbf{j}})$;

в) координату X вектора $\mathbf{a}$; г) $\text{пр}_j \mathbf{a}$.

В задачах 4.40—4.41 доказать, что данные векторы $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ образуют базис в множестве всех векторов плоскости. В базисе $\mathfrak{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ вычислить координаты вектора $\mathbf{a}$ и написать его разложение по базису $\mathfrak{B}$.

4.40. $\mathbf{e}_1 = \{1, -1\}$, $\mathbf{e}_2 = \{1, 1\}$ и $\mathbf{a} = -2\mathbf{i} - \mathbf{j}$.

4.41. $\mathbf{e}_1 = \{-1, 2\}$, $\mathbf{e}_2 = \{2, 1\}$ и $\mathbf{a} = 5\mathbf{i} - 15\mathbf{j}$.

В задачах 4.42 и 4.43 доказать, что данные векторы $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ образуют базис в множестве всех векторов пространства.

В базисе $\mathfrak{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ вычислить координаты вектора $\mathbf{a}$ и написать его разложение по базису $\mathfrak{B}$.

4.42. $\mathbf{e}_1 = \{1, 0, 0\}, \mathbf{e}_2 = \{1, 1, 0\}, \mathbf{e}_3 = \{1, 1, 1\}$ и $\mathbf{a} = -2\mathbf{i} - \mathbf{k}$.

4.43. $\mathbf{e}_1 = \{1, 0, -1\}, \mathbf{e}_2 = \{1, -1, 0\}, \mathbf{e}_3 = \{-1, 1, 1\}$ и $\mathbf{a} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$.

3. Декартовы прямоугольные координаты точки на плоскости и в пространстве. Простейшие задачи аналитической геометрии. Говорят, что в трехмерном пространстве *введена декартова прямоугольная система координат* $\langle O, \mathfrak{B} \rangle$, если заданы:

- 1) некоторая точка O , называемая *началом координат*;
- 2) некоторый ортонормированный базис $\mathfrak{B} = \{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ в множестве всех геометрических векторов.

Оси Ox , Oy и Oz , проведенные через точку O в направлении базисных ортов $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ и $\mathbf{k}$, называются координатными осями системы координат $\langle O, \mathfrak{B} \rangle = Ox y z$.

Если M — произвольная точка пространства, то направленный отрезок $\overrightarrow{OM}$ называется радиус-вектором точки M . Координатами точки M в системе $\langle O, \mathfrak{B} \rangle$ называются координаты ее радиус-вектора $\overrightarrow{OM}$ как геометрического вектора в базисе $\mathfrak{B}$

$$x(M) = X(\overrightarrow{OM}), \quad y(M) = Y(\overrightarrow{OM}), \quad z(M) = Z(\overrightarrow{OM}).$$

Если $M_1 = (x_1, y_1, z_1)$ и $M_2 = (x_2, y_2, z_2)$ — две произвольные точки в пространстве, то координаты вектора $\overrightarrow{M_1 M_2}$ равны

$$X = x_2 - x_1, \quad Y = y_2 - y_1, \quad Z = z_2 - z_1.$$

Отсюда на основании (4.2) расстояние между точками выражается формулой

$$\rho(M_1, M_2) = |\overrightarrow{M_1 M_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

При решении задач аналитической геометрии целесообразно максимально использовать методы векторной алгебры.

ПРИМЕР 4.5. Заданы вершины $A = (-1, 2, 3)$, $B = (0, 1, 4)$ треугольника и точка $E = (5, 7, -1)$ пересечения его медиан. Найти координаты вершины C .

- Так как координаты вершины A заданы, то для вычисления координат вершины C достаточно найти координаты вектора $\overrightarrow{AC}$. Пусть $\overrightarrow{BM}$ — медиана, проведенная из вершины B . Тогда

$$\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AM} = 2(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM}) = 2\left(\overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{BE}\right)$$

(здесь учтено, что медиана треугольника делится точкой пересечения медиан в отношении 2 : 1).

Так как $\overrightarrow{AB} = \{1, -1, 1\}$ и $\overrightarrow{BE} = \{5, 6, -5\}$, то $\overrightarrow{AC} = \{17, 16, -13\}$. Тогда

$$x(C) = x(A) + X(\overrightarrow{AC}) = 16, \quad y(C) = y(A) + Y(\overrightarrow{AC}) = 18,$$

$$z(C) = z(A) + Z(\overrightarrow{AC}) = -10. \quad \blacktriangleleft$$

4.44. Вычислить расстояние между точками $M_1 = (6, -3)$ и $M_2 = (9, -7)$ и расстояние от точки M_2 до начала координат.

4.45. Вычислить периметр треугольника с вершинами в точках $A = (-1, -3)$, $B = (2, -3)$, $C = (2, 1)$.

4.46. Показать, что треугольник ABC с вершинами $A = (-3, -3)$, $B = (-1, 3)$, $C = (11, -1)$ — прямоугольный.

4.47. Могут ли векторы $\mathbf{a}_1 = \{-2, 1, -2\}$, $\mathbf{a}_2 = \{-2, -4, 4\}$ и $\mathbf{a}_3 = \{4, 3, -2\}$ быть сторонами треугольника?

4.48. Вершины треугольника имеют координаты $(3, -1, 4)$, $(2, 5, 7)$ и $(1, -1, -5)$. Найти координаты точки пересечения медиан треугольника.

4.49. Найти точку пересечения медиан тетраэдра с вершинами $(3, -1, 4)$, $(5, 2, 0)$, $(3, 3, -3)$, $(1, 6, 7)$.

4.50. Даны координаты середин сторон треугольника $(-1, 2, 3)$, $(0, 1, 4)$, $(5, 7, -1)$. Найти координаты вершин.

4.51. Даны две смежные вершины параллелограмма $A = (-2, 6)$, $B = (2, 8)$ и точка пересечения его диагоналей $M = (2, 2)$. Найти две другие вершины.

4.52. Даны координаты трех вершин параллелограмма $ABCD$: $A = (3, -1, 2)$, $B = (2, 2, 5)$, $C = (4, 1, -1)$. Найти координаты четвертой вершины.

4.53. Центр параллелограмма $ABCD$ имеет координаты $(3, 5, 7)$, а координаты середин сторон BC , CD есть $(-1, 0, 1)$ и $(2, 4, -3)$ соответственно. Найти координаты вершин A и B .

4.54. Точка $M = (1, 2, 3)$ задана своими координатами в декартовой прямоугольной системе координат $\langle O, \mathfrak{B} = \{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\} \rangle$.

Убедиться в том, что базис $\mathfrak{B}' = \{\mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}'\}$ — прямоугольный и найти координаты точки M в системе $\langle O', \mathfrak{B}' \rangle$, если:

а) $\overrightarrow{OO'} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$ и $\mathbf{i}' = \mathbf{i}, \mathbf{j}' = \mathbf{j}, \mathbf{k}' = \mathbf{k}$;

б) $O = O'$ и $\mathbf{i}' = -\mathbf{k}, \mathbf{j}' = \mathbf{i}, \mathbf{k}' = \mathbf{j}$;

в) $\overrightarrow{OO'} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$ и $\mathbf{i}' = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{i} + \mathbf{j}), \mathbf{j}' = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{i} - \mathbf{j}), \mathbf{k}' = \mathbf{k}$.

4.55. Найти координаты орта $\mathbf{a}_0$, если $\mathbf{a} = \{1, -2, 2\}$.

4.56. Даны точки $A = (x_1, y_1, z_1)$, $B = (x_2, y_2, z_2)$ и число

λ . Найти координаты точки C такой, что $\overrightarrow{AB} : \overrightarrow{CB} = \lambda$.

4.57. Вершины треугольника имеют координаты $A = (1, -1, -3)$, $B = (2, 1, -2)$ и $C = (-5, 2, -6)$. Вычислить длину биссектрисы его внутреннего угла при вершине A .

4.58. Заданы векторы $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$, $\mathbf{b} = -3\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$, $\mathbf{c} = \mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$. Найти:

а) координаты орта $\mathbf{a}_0$;

б) координаты вектора $\mathbf{a} - 2\mathbf{b} + 3\mathbf{c}$;

в) разложение вектора $\mathbf{a} + \mathbf{b} - 2\mathbf{c}$ по базису $\mathfrak{B} = \{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$;

г) $\text{pr}_{\mathfrak{B}}(\mathbf{a} - \mathbf{b})$.

4.59. Найти вектор $\mathbf{x}$, коллинеарный вектору $\mathbf{a} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ и имеющий длину $|\mathbf{x}| = 15$.

4.60. Найти вектор $\mathbf{x}$, образующий со всеми тремя базисными ортами равные острые углы, если $|\mathbf{x}| = 2\sqrt{3}$.

4.61. Найти вектор $\mathbf{x}$, образующий с ортом $\mathbf{j}$ угол 60° , с ортом $\mathbf{k}$ угол 120° , если $|\mathbf{x}| = 5\sqrt{2}$.

4.62. Найти вектор $\mathbf{x}$, направленный по биссектрисе угла между векторами $\mathbf{a} = 7\mathbf{i} - 4\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$ и $\mathbf{b} = -2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, если $|\mathbf{x}| = 5\sqrt{6}$.

4.63. В правильной призме $ABCA_1B_1C_1$ $AB = AA_1 = a$. Точка M — середина ребра BB_1 , точка N — середина ребра CC_1 . Найдите длину вектора $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{NB_1}$.

4.64. В правильной призме $ABCDEF A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ $AB = AA_1 = a$. Найти длину вектора $\overrightarrow{FA_1} + \overrightarrow{EF_1}$.

4.65. В правильной пирамиде с вершиной S и основанием $ABCD$ $AB = SA = a$. Точка M — центр грани SCD , O — центр основания. Найти длину вектора $\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{AC}$.

4.66. В правильной пирамиде с вершиной S и основанием $ABCDEF$ $AB = a$, $SA = 2a$. Найти длину вектора $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{CF}$.

4.67. В четырехугольной пирамиде $SABCD$ основание $ABCD$ — прямоугольник, $SA = 2$, $SB = 3$, $SC = 4$. Найти SD .

4.68. В треугольной пирамиде $SBCE$ угол BCE прямой, $SB = 4$, $SC = 5$, $SD = 6$. Найти расстояние от вершины S до точки A такой, что $ABCE$ — прямоугольник.

4. Скалярное произведение векторов. Скалярным произведением ненулевых векторов $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2$ (обозначается $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$ или $\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2$) называется число $\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 = |\mathbf{a}_1| \cdot |\mathbf{a}_2| \cdot \cos(\widehat{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2})$.

Алгебраические свойства скалярного произведения векторов:

- 1) $\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 = \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_1$;
- 2) $\mathbf{a}(\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2) = \mathbf{a}\mathbf{b}_1 + \mathbf{a}\mathbf{b}_2$;
- 3) $(\lambda \mathbf{a}_1) \mathbf{a}_2 = \lambda(\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2)$.

Геометрические свойства скалярного произведения векторов:

1) $\mathbf{a}_1 \perp \mathbf{a}_2 \Leftrightarrow \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 = 0$ (условие перпендикулярности векторов);

2) если $\varphi = (\widehat{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2})$, то $0 \leq \varphi < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 > 0$ и $\frac{\pi}{2} < \varphi \leq \pi \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 < 0$.

Пусть $\mathbf{a}_1 = \{X_1, Y_1, Z_1\}$, $\mathbf{a}_2 = \{X_2, Y_2, Z_2\}$ — векторы, заданные своими координатами в декартовой прямоугольной системе координат, тогда

$$\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 = X_1 X_2 + Y_1 Y_2 + Z_1 Z_2. \quad (4.3)$$

Из формулы (4.3), в частности, следует формула определения косинуса угла между векторами

$$\cos(\widehat{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2}) = \frac{\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2}{|\mathbf{a}_1| |\mathbf{a}_2|} = \frac{X_1 X_2 + Y_1 Y_2 + Z_1 Z_2}{\sqrt{X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2} \sqrt{X_2^2 + Y_2^2 + Z_2^2}}.$$

ПРИМЕР 4.6. Пусть $|\mathbf{a}_1| = 2$, $|\mathbf{a}_2| = 3$, $(\widehat{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2}) = \frac{2\pi}{3}$. Найти:

а) $|\mathbf{a}_1 + 2\mathbf{a}_2|$; б) $\text{пр}_{\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2}(\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2)$; в) $\cos(\widehat{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2})$.

► а) По определению находим $\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 = |\mathbf{a}_1| |\mathbf{a}_2| \cos(\widehat{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2}) = 2 \cdot 3 \cdot (-0,5) = -3$. Тогда

$$|\mathbf{a}_1 + 2\mathbf{a}_2| = \sqrt{(\mathbf{a}_1 + 2\mathbf{a}_2)^2} = \sqrt{|\mathbf{a}_1|^2 + 4\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 + 4|\mathbf{a}_2|^2} =$$

$$= \sqrt{4 - 12 + 36} = 2\sqrt{7};$$

$$\begin{aligned} \text{б) } \operatorname{пр}_{\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2}(\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2) &= \frac{(\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2)(\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2)}{|\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2|} = \\ &= \frac{|\mathbf{a}_1|^2 - |\mathbf{a}_2|^2}{\sqrt{|\mathbf{a}_1|^2 - 2\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2 + |\mathbf{a}_2|^2}} = \frac{4 - 9}{\sqrt{4 + 6 + 9}} = -\frac{5}{\sqrt{19}}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{в) } \cos(\widehat{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2}) &= \frac{\mathbf{a}_1(\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2)}{|\mathbf{a}_1| |\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2|} = \\ &= \frac{|\mathbf{a}_1|^2 + \mathbf{a}_1\mathbf{a}_2}{|\mathbf{a}_1| \sqrt{|\mathbf{a}_1|^2 + 2\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2 + |\mathbf{a}_2|^2}} = \frac{4 - 3}{2\sqrt{4 - 6 + 9}} = \frac{1}{2\sqrt{7}}. \end{aligned}$$

4.69. Пусть $|\mathbf{a}_1| = 2$, $|\mathbf{a}_2| = \sqrt{3}$, $\widehat{(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)} = \frac{5\pi}{6}$. Вычислить:

- а) $\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2$; б) $(\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2)(2\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2)$;
 в) $|\mathbf{3a}_1 - \mathbf{a}_2|$; г) $\operatorname{пр}_{\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2} \mathbf{a}_1$; д) $\cos(\widehat{\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_1 + 2\mathbf{a}_2})$.

4.70. Найти угол между векторами $\mathbf{i} + \mathbf{j}$ и $2\mathbf{k} - \mathbf{j}$.

4.71. Определить, при каком значении λ векторы $\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ и $\mathbf{i} + \lambda(\mathbf{j} + \mathbf{k})$ перпендикулярны.

4.72. Пусть $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ — такие векторы, что $|\mathbf{a}_1| = 3$, $|\mathbf{a}_2| = 5$. Выяснить, при каких λ векторы $\mathbf{a}_1 + \lambda\mathbf{a}_2$ и $\mathbf{a}_1 - \lambda\mathbf{a}_2$ перпендикулярны друг другу.

4.73. Доказать, что вектор $\mathbf{b}(\mathbf{ac}) - \mathbf{c}(\mathbf{ab})$ перпендикулярен вектору $\mathbf{a}$.

4.74. Векторы $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ таковы, что $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{0}$ и $|\mathbf{a}| = 3$, $|\mathbf{b}| = 7$, $|\mathbf{c}| = 8$. Найти значение выражения $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + (\mathbf{b}, \mathbf{c}) + (\mathbf{c}, \mathbf{a})$.

4.75. Пусть $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ — векторы единичной длины и $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{0}$. Доказать, что углы между векторами равны 120° .

4.76. Найти угол между ненулевыми векторами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, если известно, что вектор $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ перпендикулярен вектору $\mathbf{a} - 6\mathbf{b}$, а вектор $2\mathbf{a} + 3\mathbf{b}$ перпендикулярен вектору $2\mathbf{a} - 3\mathbf{b}$.

4.77. Найти косинус угла между векторами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ единичной длины, если известно, что вектор $\mathbf{a} + 4\mathbf{b}$ перпендикулярен вектору $13\mathbf{a} - 7\mathbf{b}$.

4.78. Найти косинус угла между ненулевыми векторами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ одинаковой длины, если известно, что $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| = |\mathbf{a} - 0,75\mathbf{b}|$.

4.79. Найти косинус угла между векторами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, если $|\mathbf{a}| = 2$, $|\mathbf{b}| = 3$ и $\cos(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{a} + \mathbf{b}}) = \frac{1}{3}$.

4.80. Найти угол между ненулевыми векторами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, если известно, что $|\mathbf{a}| = 2|\mathbf{b}|$ и $|\mathbf{a} - \mathbf{b}| = |\mathbf{a} + 3\mathbf{b}|$.

4.81. Найти $|\mathbf{a} - 2\mathbf{b}|$, если $|\mathbf{a}| = 2$, $|\mathbf{b}| = 3$, $\text{пр}_{\mathbf{b}}\mathbf{a} = 1,5$.

4.82. Найти $|\mathbf{a}|$, если $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| = \sqrt{39}$, $\text{пр}_{\mathbf{a}}\mathbf{b} = -1$, $\text{пр}_{\mathbf{b}}\mathbf{a} = -0,5$.

4.83. Вычислить $|\mathbf{b}|$, если $|\mathbf{a}| = |\mathbf{a} + \mathbf{b}| = 3$, $|2\mathbf{a} - \mathbf{b}| = 4\sqrt{3}$.

4.84. Определить, какие значения может принимать $|\mathbf{a}|$, если $|\mathbf{a} + 3\mathbf{b}| = 1$, $|2\mathbf{a} - \mathbf{b}| = 3$.

4.85. Найти $\text{пр}_{\mathbf{b}}\mathbf{a}$, если $|\mathbf{a}| = 6$, $|\mathbf{b}| = 8$, $|\mathbf{a} - \mathbf{b}| = 12$.

4.86. В треугольнике ABC проведена высота BH . Выразить вектор $\overrightarrow{BH}$ через векторы $\mathbf{a} = \overrightarrow{AB}$, $\mathbf{b} = \overrightarrow{AC}$.

4.87. Найти величину угла A и длину медианы AM треугольника ABC , вершины которого имеют координаты $A = (-3, 1, 3)$, $B = (0, 2, 1)$, $C = (4, 1, 1)$.

4.88. Даны точки $A = (3, 1, -2)$, $B = (0, 1, 1)$, $C = (-4, 1, 2)$, $D = (-3, 5, 0)$. Найти расстояние между серединой ребра AB и точкой пересечения медиан треугольника ACD .

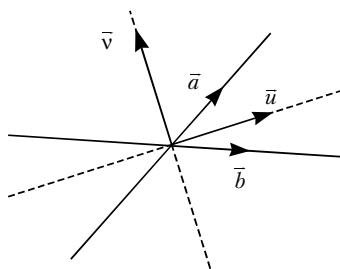


Рис. 4.6

4.89. Доказать, что если $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ — векторы, то вектор

$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} + \frac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|}$ направлен по

биссектрисе угла, образованного векторами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, а вектор

$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} - \frac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|}$ — по бис-

сектрисе смежного угла (рис. 4.6); если $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}|$, то

$\mathbf{u} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$, а $\mathbf{v} = \mathbf{a} - \mathbf{b}$.

4.90. Вектор $\mathbf{a}$ составляет с осями абсцисс и ординат углы 60° и 45° соответственно. Определить, какой угол составляет вектор $\mathbf{a}$ с осью аппликата.

4.91. Найдите вектор длины 5, составляющий одинаковые углы с осями координат.

ПРИМЕР 4.7. Боковые грани правильной шестиугольной призмы являются квадратами. Найти угол между скрещивающимися диагоналями двух смежных боковых граней призмы.

- Пусть дана призма $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ (рис. 4.7). Найдем угол между прямыми AB_1 и FA_1 . Введем векторы $\overrightarrow{AB} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{AF} = \mathbf{b}$, $\overrightarrow{AA_1} = \mathbf{c}$. Пусть ребра призмы равны a , т. е. $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}| = |\mathbf{c}| = a$. Вычислим скалярные произведения

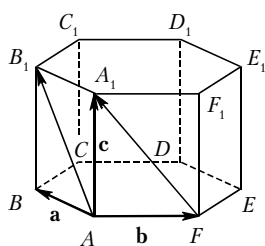


Рис. 4.7

$$\begin{aligned} \mathbf{ab} &= |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \cos(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}}) = \\ &= aa \cos 120^\circ = -\frac{a^2}{2}, \end{aligned}$$

$$\mathbf{ac} = \mathbf{bc} = 0.$$

Имеем $\overrightarrow{AB_1} = \mathbf{a} + \mathbf{c}$, $\overrightarrow{FA_1} = \mathbf{c} - \mathbf{b}$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \cos(\widehat{\overrightarrow{AB_1}, \overrightarrow{FA_1}}) &= \frac{(\mathbf{a} + \mathbf{c})(\mathbf{c} - \mathbf{b})}{|\mathbf{a} + \mathbf{c}| \cdot |\mathbf{c} - \mathbf{b}|} = \frac{\mathbf{ac} + \mathbf{c}^2 - \mathbf{ab} - \mathbf{cb}}{|\mathbf{a} + \mathbf{c}|^2} = \\ &= \frac{0 + a^2 - (-0,5a^2) - 0}{a^2 + 0 + a^2} = \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

Таким образом, $\widehat{(\overrightarrow{AB_1}, \overrightarrow{FA_1})} = \arccos \frac{3}{4}$. ◀

4.92. Все грани параллелепипеда — ромбы со стороной a и острым углом 60° . Найти длины диагоналей параллелепипеда.

4.93. Все ребра правильной треугольной призмы равны между собой. Найти угол между скрещивающимися диагоналями двух боковых граней призмы.

4.94. Три луча с общей вершиной образуют углы, все равные α . Найти углы между биссектрисами данных углов.

4.95. К вершине куба приложены три силы, равные соответственно 1, 2 и 3 и направленные по диагоналям граней куба. Найти величину равнодействующей этих сил.

4.96. В пирамиде $ABCD$ плоские углы при вершине A равны 60° , $AB = 1$, $AC = 2$, $AD = 3$. Найти длину отрезка, соединяющего вершину B с точкой пересечения медиан противоположной грани.

4.97. Три диагонали параллелепипеда взаимно перпендикулярны и равны соответственно a , b и c . Найти длину четвертой диагонали.

Если задан некоторый вектор $\mathbf{e}$, то *ортогональной составляющей* произвольного вектора $\mathbf{a}$ *вдоль* вектора $\mathbf{e}$ называется такой вектор $\mathbf{a}_e$, который коллинеарен $\mathbf{e}$, а разность $\mathbf{a} - \mathbf{a}_e$ перпендикулярна вектору $\mathbf{e}$.

Аналогично, *ортогональной составляющей* вектора $\mathbf{a}$ *в плоскости* P называется вектор $\mathbf{a}_P$, компланарный плоскости P , причем разность $\mathbf{a} - \mathbf{a}_P$ перпендикулярна этой плоскости.

4.98. Для вектора $\mathbf{a} = \{-1, 2, 1\}$ найти ортогональную составляющую вдоль базисного вектора $\mathbf{j}$ и ортогональную составляющую в плоскости векторов $\mathbf{i}$ и $\mathbf{k}$.

4.99. Заданы векторы $\mathbf{e} = \{1, 1, 1\}$ и $\mathbf{a} = \{-1, 2, 1\}$. Найти:

а) ортогональную составляющую вектора $\mathbf{a}$ вдоль вектора $\mathbf{e}$;
б) ортогональную составляющую вектора $\mathbf{a}$ в плоскости, перпендикулярной вектору $\mathbf{e}$.

4.100. Заданы векторы $\mathbf{e}_1 = \{1, -2, 0\}$, $\mathbf{e}_2 = \{1, 1, 1\}$ и $\mathbf{a} = \{-2, 0, 1\}$. Найти ортогональную составляющую $\mathbf{a}_{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2}$ вектора $\mathbf{a}$ в плоскости векторов $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$.

Если $\mathfrak{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$ — прямоугольный базис, то координаты произвольного вектора $\mathbf{a} = X_1\mathbf{e}_1 + X_2\mathbf{e}_2 + X_3\mathbf{e}_3$ в этом базисе могут быть вычислены по формуле

$$X_i = \mathbf{a}\mathbf{e}_i, \quad i = 1, 2, 3. \quad (4.4)$$

где числа X_1, X_2, X_3 называются координатами вектора $\mathbf{a}$ в базисе $\mathfrak{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$.

В частности, формула (4.4) позволяет найти связь между координатами одного и того же вектора в различных прямоугольных базисах.

ПРИМЕР 4.8. Пусть базис $\mathfrak{B}' = \{\mathbf{i}', \mathbf{j}'\}$ получен из базиса $\mathfrak{B} = \{\mathbf{i}, \mathbf{j}\}$ поворотом последнего вокруг точки O на угол $\varphi > 0$ (считается, что $\varphi > 0$, если поворот производится против часовой стрелки, и $\varphi < 0$ в противном случае) (рис. 4.8). Установить связь между координатами вектора $\mathbf{a}$ в базисах $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{B}'$.

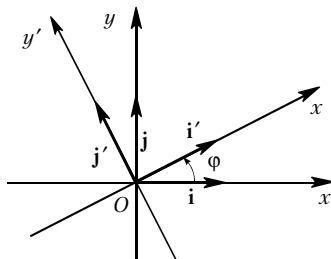


Рис. 4.8

► Пусть $\mathbf{a} = X\mathbf{i} + Y\mathbf{j}$. Тогда

$$\begin{aligned} X' &= \mathbf{a}\mathbf{i}' = (X\mathbf{i} + Y\mathbf{j})\mathbf{i}' = X\mathbf{i}\mathbf{i}' + Y\mathbf{j}\mathbf{i}', & Y' &= \mathbf{a}\mathbf{j}' = (X\mathbf{i} + Y\mathbf{j})\mathbf{j}' = \\ &= X\mathbf{i}\mathbf{j}' + Y\mathbf{j}\mathbf{j}'. \end{aligned}$$

С другой стороны, имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{i}\mathbf{i}' &= \cos \varphi, & \mathbf{j}\mathbf{j}' &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \sin \varphi, \\ \mathbf{i}\mathbf{j}' &= \cos\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right) = -\sin \varphi, & \mathbf{j}\mathbf{j}' &= \cos \varphi. \end{aligned}$$

Поэтому формулы преобразования координат приобретают вид

$$X' = X \cos \varphi + Y \sin \varphi, \quad Y' = -X \sin \varphi + Y \cos \varphi. \quad \blacktriangleleft$$

4.101. Вывести формулы преобразования координат точек плоскости при переходе от системы координат $\langle O, \mathfrak{B} = \{\mathbf{i}, \mathbf{j}\} \rangle$ к системе $\langle O', \mathfrak{B}' = \{\mathbf{i}', \mathbf{j}'\} \rangle$, если $\overrightarrow{OO'} = x_0\mathbf{i} + y_0\mathbf{j}$, а базис $\mathfrak{B}'$ получен из базиса $\mathfrak{B}$ поворотом на угол $\varphi > 0$ вокруг точки O .

4.102. Вывести формулы преобразования координат векторов от базиса $\mathfrak{B} = \{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ к базису $\mathfrak{B}' = \{\mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}'\}$, если

$$\mathbf{i}' = \cos \varphi \cdot \mathbf{i} + \sin \varphi \cdot \mathbf{j}, \quad \mathbf{j}' = -\sin \varphi \cdot \mathbf{i} + \cos \varphi \cdot \mathbf{j}, \quad \mathbf{k}' = -\mathbf{k}.$$

4.103. В прямоугольном базисе $\mathfrak{B} = \{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ вектор $\mathbf{a}$ имеет разложение $\mathbf{a} = -2\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$. Убедиться, что тройка векторов

$$\mathbf{i}' = \mathbf{i}, \quad \mathbf{j}' = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{j} - \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{k}, \quad \mathbf{k}' = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{j} + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{k}$$

также образует прямоугольный базис $\mathfrak{B}' = \{\mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}'\}$, и найти в этом базисе координаты вектора $\mathbf{a}$.

4.104. Проверить, что тройка векторов $\mathbf{e}_1 = \{1, -2, 0\}$, $\mathbf{e}_2 = \{0, 1, 1\}$, $\mathbf{e}_3 = \{1, 2, 2\}$ образует (косоугольный) базис. Выразить скалярное произведение векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ через их координаты в этом базисе, если $\mathbf{a}_1 = X_1^{(1)}\mathbf{e}_1 + X_2^{(1)}\mathbf{e}_2 + X_3^{(1)}\mathbf{e}_3$ и $\mathbf{a}_2 = X_1^{(2)}\mathbf{e}_1 + X_2^{(2)}\mathbf{e}_2 + X_3^{(2)}\mathbf{e}_3$.

5. Векторное произведение векторов. Упорядоченную тройку некопланарных векторов $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ называют *правой тройкой*, если она удовлетворяет следующему условию: если смотреть из конца вектора $\mathbf{c}$, то кратчайший поворот от вектора $\mathbf{a}$ к вектору $\mathbf{b}$ осуществляется против часовой стрелки. Иначе $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ — *левая тройка*. Система координат *Охуз* — *правая*, если векторы $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ образуют правую тройку, и *левая*, если $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ левую тройку.

Векторным произведением вектора **a** на вектор **b** называется вектор, обозначаемый символом $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ или $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$, определенный следующими тремя условиями:

1) длина вектора $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ численно равна площади параллелограмма, построенного на векторах **a** и **b**, т.е. $|\mathbf{a}, \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \sin(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}})$;

2) вектор $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ перпендикулярен плоскости векторов **a** и **b**;

3) упорядоченная тройка векторов **a**, **b**, $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ правая.

Алгебраические свойства векторного произведения векторов:

1) $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = -[\mathbf{b}, \mathbf{a}]$; 2) $[\mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{c}] = [\mathbf{a}, \mathbf{c}] + [\mathbf{b}, \mathbf{c}]$;

3) $[\lambda \mathbf{a}, \mathbf{b}] = \lambda [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$.

Пусть $\mathbf{a}_1 = \{X_1, Y_1, Z_1\}$, $\mathbf{a}_2 = \{X_2, Y_2, Z_2\}$ — векторы, заданные своими координатами в правой прямоугольной системе координат. Тогда

$$[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2] = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \end{vmatrix} =$$

$$= (Y_1 Z_2 - Z_1 Y_2) \mathbf{i} + (X_2 Z_1 - Z_2 X_1) \mathbf{j} + (X_1 Y_2 - X_2 Y_1) \mathbf{k}. \quad (4.5)$$



ПРИМЕР 4.9. Вычислить площадь треугольника с вершинами $A = (1, 3, -2)$, $B = (4, -1, 1)$ и $C = (5, 0, 3)$.

► Площадь параллелограмма, построенного на векторах $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$, численно равна модулю вектора $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]$.

Следовательно, площадь треугольника ABC будет равна половине модуля этого вектора. Произведем вычисления.

$\overrightarrow{AB} = \{3, -4, 3\}$, $\overrightarrow{AC} = \{4, -3, 5\}$. Следовательно,

$$[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & -4 & 3 \\ 4 & -3 & 5 \end{vmatrix} = \{-11, -3, 7\},$$

отсюда получаем

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}| = \frac{1}{2} \sqrt{11^2 + 3^2 + 7^2} = \frac{1}{2} \sqrt{179}. \quad \blacktriangleleft$$

4.105. Пусть $|\mathbf{a}_1| = 3$, $|\mathbf{a}_2| = 2$ и $(\widehat{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2}) = \frac{5\pi}{6}$. Вычислить:

а) $|\left[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\right]|$; б) $|\left[2\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_1 + 2\mathbf{a}_2\right]|$;

в) $|\left[2\mathbf{a}_1 - 3\mathbf{a}_2, 4\mathbf{a}_1 + 3\mathbf{a}_2\right]|$.

4.106. Зная, что $[\mathbf{3a} + \mathbf{b}, \mathbf{a} - \mathbf{b}] = A$, найти $[\mathbf{a} + \mathbf{b}, 2\mathbf{a} - \mathbf{b}]$.

4.107. Доказать, что $[\alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{b}, \gamma \mathbf{a} + \delta \mathbf{b}] = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} \cdot [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$.

ПРИМЕР. 4.10. Площадь треугольника ABC равна S . На сторонах AB, BC, AC соответственно взяты точки M, N, P такие, что $AM : MB = 2 : 1$, $BN : NC = 1 : 1$, $CP : PA = 3 : 2$. Найти площадь треугольника MNP .

► Пусть $\overrightarrow{AB} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{AC} = \mathbf{b}$ (рис. 4.9). Выразим через эти векторы $\overrightarrow{MP}$ и $\overrightarrow{MN}$: $\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AP} = -\frac{2}{3}\mathbf{a} + \frac{2}{5}\mathbf{b}$,

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BN} = \frac{1}{3}\mathbf{a} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{3}\mathbf{a} + \frac{1}{2}(\mathbf{b} - \mathbf{a}) = -\frac{1}{6}\mathbf{a} + \frac{1}{2}\mathbf{b}.$$

Отсюда, используя результат задачи 4.107, получаем

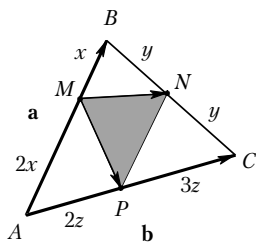


Рис. 4.9

$$\begin{aligned} S_{\triangle MNP} &= \frac{1}{2} \left| \left[\overrightarrow{MP}, \overrightarrow{MN} \right] \right| = \\ &= \frac{1}{2} \left| \begin{vmatrix} -2/3 & 2/5 \\ -1/6 & 1/2 \end{vmatrix} \cdot [\mathbf{a}, \mathbf{b}] \right| = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{15} \cdot |[\mathbf{a}, \mathbf{b}]| = \frac{4}{15} S. \quad \blacktriangleleft \end{aligned}$$

Упростить выражения.

4.108. $[\mathbf{i}, \mathbf{j} + \mathbf{k}] - [\mathbf{j}, \mathbf{i} + \mathbf{k}] + [\mathbf{k}, \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}]$.

4.109. $[\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}, \mathbf{c}] + [\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}, \mathbf{b}] + [\mathbf{b} + \mathbf{c}, \mathbf{a}]$.

4.110. $[2\mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{c} - \mathbf{a}] + [\mathbf{b} + \mathbf{c}, \mathbf{a} + \mathbf{b}]$.

4.111. $2\mathbf{i}[\mathbf{j}, \mathbf{k}] + 3\mathbf{j}[\mathbf{i}, \mathbf{k}] + 4\mathbf{k}[\mathbf{i}, \mathbf{j}]$.

Найти координаты единичных векторов, перпендикулярных данным векторам $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$.

4.112. $\mathbf{a} = \{1, 3, -4\}$, $\mathbf{b} = \{-2, 0, 1\}$.

4.113. $\mathbf{a} = \{2, 1, -1\}$, $\mathbf{b} = \{3, 0, 1\}$.

4.114. Найти координаты вектора $\mathbf{c}$, если известно, что он перпендикулярен векторам $\{4, -2, -3\}$ и $\{0, 1, 3\}$, образует с ортом $\mathbf{j}$ тупой угол и $|\mathbf{c}| = 26$.

4.115. Определить, при каких значениях α и β вектор $\alpha\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \beta\mathbf{k}$ будет коллинеарен вектору $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$, если $\mathbf{a} = \{1, -2, 2\}$, $\mathbf{b} = \{-2, 1, 1\}$.

4.116. Найти $|[\mathbf{a}, \mathbf{b}]|$, если $|\mathbf{a}| = 3$, $|\mathbf{b}| = 4$ и $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 10$.

4.117. Найти координаты вектора $\mathbf{c}$, если известно, что он перпендикулярен векторам $\{2, -3, 1\}$ и $\{1, -2, 3\}$, а также удовлетворяет условию $\mathbf{c}(\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 7\mathbf{k}) = 10$.

4.118. Доказать, что $[\mathbf{a} - \mathbf{b}, \mathbf{a} + \mathbf{b}] = 2[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ и выяснить геометрический смысл этого тождества.

4.119. Найти вектор $[\mathbf{a}, \mathbf{a} + \mathbf{b}] + [\mathbf{a}, [\mathbf{a}, \mathbf{b}]]$, если $\mathbf{a} = \{1, -2, 0\}$, $\mathbf{b} = \{0, 1, 1\}$.

4.120. Найти площадь треугольника:

а) построенного на векторах $\mathbf{a} - 2\mathbf{b}$ и $3\mathbf{a} + 2\mathbf{b}$, если $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}| = 5$ и $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \pi/4$;

б) построенного на векторах $\mathbf{a} = 6\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ и $\mathbf{b} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$;

в) координаты вершин которого равны $(-1, 2, 2)$, $(0, 3, 5)$ и $(1, -1, 4)$.

4.121. Найти длину высоты, опущенной из вершины A треугольника ABC на сторону BC , если $A = (3, -1, 1)$, $B = (0, 1, 2)$, $C = (4, 4, -1)$.

4.122. На сторонах BC и CD параллелограмма $ABCD$ взяты точки M и N так, что $BM = \frac{1}{3}BC$, $CN = \frac{1}{4}CD$. Площадь параллелограмма равна S . Найти площадь треугольника AMN .

4.123. На сторонах AB , BC и CA треугольника ABC взяты точки M , N , P так, что $BM = \frac{1}{3}BA$, $BN = \frac{1}{2}BC$, $PC = \frac{1}{3}AC$. Найти площадь треугольника MNP , если площадь треугольника ABC равна S .

4.124. Как изменится формула (4.5), если координаты векторов задать в левом прямоугольном базисе? Будет ли верна эта формула в случае косоугольного базиса?

4.125. Доказать, что расстояние от точки P до прямой l в пространстве выражается формулой

$$\rho(P, l) = \frac{|\overrightarrow{[AP, \mathbf{q}]}|}{|\mathbf{q}|},$$

где A — произвольная точка прямой, $\mathbf{q}$ — направляющий вектор прямой.

4.126. Доказать равенства:

1) $[\mathbf{a}, [\mathbf{b}, \mathbf{c}]] = \mathbf{b}(\mathbf{a}, \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ (формула двойного векторного произведения);

2) $[\mathbf{a}, [\mathbf{b}, \mathbf{c}]] + [\mathbf{b}, [\mathbf{c}, \mathbf{a}]] + [\mathbf{c}, [\mathbf{a}, \mathbf{b}]] = 0$ (тождество Якоби).

6. Смешанное произведение векторов. Смешанным произведением упорядоченной тройки векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ называется число $([\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2], \mathbf{a}_3)$.

Геометрические свойства смешанного произведения.

1) Если V — объем параллелепипеда, построенного на векторах $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$, то

$$[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2] \mathbf{a}_3 = \begin{cases} +V, & \text{если тройка } (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3) \text{ — правая,} \\ -V, & \text{если тройка } (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3) \text{ — левая.} \end{cases} \quad (4.6)$$

2) Для того чтобы три вектора $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ были компланарны, необходимо и достаточно выполнения условия $[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2] \mathbf{a}_3 = 0$.

Основное алгебраическое свойство смешанного произведения состоит в том, что циклическая перестановка векторов не меняет его величины, т.е. $[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2] \mathbf{a}_3 = [\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3] \mathbf{a}_1 = [\mathbf{a}_3, \mathbf{a}_1] \mathbf{a}_2$.

Это свойство позволяет ввести обозначение $[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2] \mathbf{a}_3 = \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_3$ (результат не зависит от того, как расставлены квадратные скобки в правой части).

Следующие два свойства, взятые вместе, выражают *линейность* смешанного произведения векторов по первому аргументу

$$(\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2) \mathbf{b} \mathbf{c} = \mathbf{a}_1 \mathbf{b} \mathbf{c} + \mathbf{a}_2 \mathbf{b} \mathbf{c} \quad \text{и} \quad (\lambda \mathbf{a}) \mathbf{b} \mathbf{c} = \lambda (\mathbf{a} \mathbf{b} \mathbf{c}).$$

Имеет место также линейность по второму и третьему аргументам.

Пусть

$\mathbf{a}_1 = \{X_1, Y_1, Z_1\}$, $\mathbf{a}_2 = \{X_2, Y_2, Z_2\}$, $\mathbf{a}_3 = \{X_3, Y_3, Z_3\}$ — векторы, заданные своими координатами в правой прямоугольной системе координат. Тогда

$$\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_3 = \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix}. \quad (4.7)$$



ПРИМЕР 4.11. Пусть $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ — некопланарные векторы. Найти λ , при котором векторы: $\mathbf{p} = \mathbf{a} - 2\mathbf{b} + \lambda\mathbf{c}$, $\mathbf{q} = 3\mathbf{a} + \mathbf{b} - \mathbf{c}$, $\mathbf{r} = \mathbf{a} - \lambda\mathbf{c}$ компланарны.

► Векторы $\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}$ — компланарны, если $\mathbf{pqr} = 0$. Так как

$$\begin{aligned}\mathbf{pqr} &= [\mathbf{a} - 2\mathbf{b} + \lambda\mathbf{c}, 3\mathbf{a} + \mathbf{b} - \mathbf{c}](\mathbf{a} - \lambda\mathbf{c}) = \\ &= ([\mathbf{a}, \mathbf{b}] - [\mathbf{a}, \mathbf{c}] - 6[\mathbf{b}, \mathbf{a}] + 2[\mathbf{b}, \mathbf{c}] + 3\lambda[\mathbf{c}, \mathbf{a}] + \lambda[\mathbf{c}, \mathbf{b}])(\mathbf{a} - \lambda\mathbf{c}) = \\ &= 2[\mathbf{b}, \mathbf{c}]\mathbf{a} + \lambda[\mathbf{c}, \mathbf{b}]\mathbf{a} - \lambda[\mathbf{a}, \mathbf{b}]\mathbf{c} + 6\lambda[\mathbf{b}, \mathbf{a}]\mathbf{c} = (2 - 8\lambda)\mathbf{abc}\end{aligned}$$

и $\mathbf{abc} \neq 0$, следовательно, $-8\lambda + 2 = 0$, а значит, $\lambda = \frac{1}{4}$. ◀

4.127. Доказать, что если $\mathbf{p} = \alpha_1\mathbf{a} + \beta_1\mathbf{b} + \gamma_1\mathbf{c}$, $\mathbf{q} = \alpha_2\mathbf{a} + \beta_2\mathbf{b} + \gamma_2\mathbf{c}$, $\mathbf{r} = \alpha_3\mathbf{a} + \beta_3\mathbf{b} + \gamma_3\mathbf{c}$, то

$$\mathbf{pqr} = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} \cdot \mathbf{abc}.$$

4.128. Проверить, компланарны ли данные векторы:

а) $\mathbf{a} = -2\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{b} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$, $\mathbf{c} = 14\mathbf{i} - 13\mathbf{j} + 7\mathbf{k}$;

б) $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 3\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, $\mathbf{c} = \mathbf{i} - 4\mathbf{j} + \mathbf{k}$.

4.129. Доказать, что векторы $\mathbf{a} - 2\mathbf{b} + 3\mathbf{c}$, $3\mathbf{a} + \mathbf{b}$ и $2\mathbf{a} + 2\mathbf{b} + \mathbf{c}$ некопланарны, если векторы $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ некопланарны.

4.130. Доказать, что векторы $4\mathbf{a} - 5\mathbf{b} + 7\mathbf{c}$, $2\mathbf{a} - \mathbf{b} + 2\mathbf{c}$ и $2\mathbf{a} + 2\mathbf{b} - \mathbf{c}$ компланарны, каковы бы ни были векторы $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$.

4.131. Доказать, что при любых $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ векторы $\mathbf{a} - \mathbf{b}$, $\mathbf{b} - \mathbf{c}$, и $\mathbf{c} - \mathbf{a}$ компланарны. Каков геометрический смысл этого факта?

4.132. Определить значения λ , при которых векторы $\{-1, 2, 4\}$, $\{3, 5 - \lambda, 0\}$ и $\{2, 4, -5\}$ будут компланарны.

4.133. Найти $(\mathbf{a} + 2\mathbf{b})(2\mathbf{a} - \mathbf{b} + 3\mathbf{c})(3\mathbf{a} + 4\mathbf{c})$, если $\mathbf{abc} = A$.

4.134. Найти $\mathbf{abc}$, если

$$(2\mathbf{a} - \mathbf{b} - \mathbf{c})(3\mathbf{a} + \mathbf{b})(2\mathbf{a} - 2\mathbf{b} + 3\mathbf{c}) = A.$$

ПРИМЕР 4.12. Объем параллелепипеда равен V . Найти объем треугольной пирамиды, одна из вершин которой — вершина параллелепипеда, а три другие — центры противоположных граней параллелепипеда.

► Введем векторы $\mathbf{a} = \overrightarrow{AD}$, $\mathbf{b} = \overrightarrow{AB}$, $\mathbf{c} = \overrightarrow{AA_1}$ (рис. 4.10). Тогда в соответствии с определением (4.6) $V = |\mathbf{abc}|$. Векторы

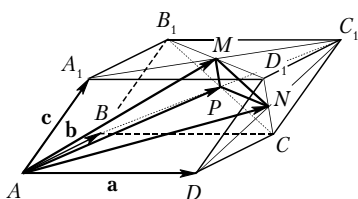


Рис. 4.10

$\vec{AM}$, $\vec{AN}$, $\vec{AP}$ в базисе из векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ имеют разложения

$$\vec{AM} = \mathbf{c} + \frac{1}{2}\mathbf{a} + \frac{1}{2}\mathbf{b},$$

$$\vec{AN} = \mathbf{a} + \frac{1}{2}\mathbf{b} + \frac{1}{2}\mathbf{c},$$

$$\vec{AP} = \mathbf{b} + \frac{1}{2}\mathbf{a} + \frac{1}{2}\mathbf{c}.$$

Отметим, что объем треугольной пирамиды, построенной на векторах $\vec{AM}$, $\vec{AN}$, $\vec{AP}$, будет в 6 раз меньше объема параллелепипеда, построенного на этих векторах. Отсюда, используя результат задачи 4.127, получаем

$$\begin{aligned} V_{AMNP} &= \frac{1}{6} \left| \vec{AM} \vec{AN} \vec{AP} \right| = \frac{1}{6} \left| \begin{vmatrix} 1/2 & 1/2 & 1 \\ 1 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1 & 1/2 \end{vmatrix} \mathbf{abc} \right| = \\ &= \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} V = \frac{1}{12} V. \end{aligned} \quad \blacktriangleleft$$

Вычислить объем пирамиды $ABCD$ в 4.135, 4.136.

4.135. $\vec{AB} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$, $\vec{AC} = -3\mathbf{i} + \mathbf{k}$, $\vec{AD} = 2\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$.

4.136. $A = (-1, 3, 5)$, $B = (0, 2, 1)$, $C = (1, 4, -1)$, $D = (0, 0, 3)$.

4.137. Найти высоту пирамиды $ABCD$, опущенную из вершины B , если $A = (2, 1, 0)$, $B = (-1, 4, 3)$, $C = (0, 2, -1)$, $D = (1, 0, -4)$.

4.138. Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ с ребром, равным a . Найти:

а) объем пирамиды $A_1 C_1 D M$, где M — середина ребра BB_1 ;

б) объем пирамиды, вершины которой — середины ребер AA_1 , AD и центры граней $A_1 B_1 C_1 D_1$, $AA_1 D_1 D$.

4.139. Дан куб с ребром 2. На диагонали куба и на скрещивающемся с ней ребре куба взяты отрезки AB и CD длиной 1. Найти объем пирамиды $ABCD$.

4.140. Доказать, что объем параллелепипеда, построенного на диагоналях граней данного параллелепипеда, равен удвоенному объему данного параллелепипеда.

4.141. Найти объем пирамиды, вершинами которой являются вершина параллелепипеда, имеющего объем,

равный V , и середины ребер, примыкающих к противоположной вершине.

4.142. Найти координаты четвертой вершины тетраэдра $ABCD$, если известно, что она лежит на оси Oy , а объем тетраэдра равен V :

а) $A = (-1, 10, 0)$, $B = (0, 5, 2)$, $C = (6, 32, 2)$, $V = 29$;

б) $A = (0, 1, 1)$, $B = (4, 3, -3)$, $C = (2, -1, 1)$, $V = 2$.

4.143. Доказать тождества:

1) $(a + c)b(a + b) = -abc$; 2) $(a - b)(a - b - c)(a + 2b - c) = 3abc$;

3) $(a + b)(b + c)(c + a) = 2abc$; 4) $\forall \alpha, \beta (ab(c + \alpha a + \beta b) = abc)$.

4.2. Линейные геометрические объекты

1. Прямая на плоскости. Прямая l на плоскости в декартовой прямоугольной системе координат Oxy может быть задана уравнением одного из следующих видов:

1) $Ax + By + C = 0$ — *общее уравнение прямой*;

2) $A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$ — уравнение прямой, проходящей через точку $M_0 = (x_0, y_0)$ перпендикулярно нормальному вектору $\mathbf{n} = \{A, B\}$;

3) $\frac{x - x_0}{q_1} = \frac{y - y_0}{q_2}$ — уравнение прямой, проходящей че-

рез точку $M_0 = (x_0, y_0)$ параллельно направляющему вектору $\mathbf{q} = \{q_1, q_2\}$ (*каноническое уравнение прямой*);

4) $\begin{cases} x = x_0 + q_1 t, \\ y = y_0 + q_2 t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$ — *параметрические уравнения*

прямой. Число t называется *параметром*. Параметрические уравнения в векторной форме имеют вид

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + \mathbf{q}t,$$

где $\mathbf{r}_0 = \{x_0, y_0\}$ — радиус-вектор принадлежащей прямой точки $M_0 = (x_0, y_0)$; $\mathbf{q} = \{q_1, q_2\}$ — направляющий вектор прямой;

5) $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ — уравнение прямой в *отрезках*, где a и b —

величины направленных отрезков, отсекаемых прямой на координатных осях Ox и Oy соответственно;

6) $x \cos \alpha + y \cos \beta - p = 0$ — *нормальное уравнение* прямой, где $\cos \alpha$ и $\cos \beta$ — направляющие косинусы нормального

вектора $\mathbf{n}$, направленного из начала координат в сторону прямой, а $p > 0$ – расстояние от начала координат до прямой.

Общее уравнение приводится к нормальному виду умножением на нормирующий множитель

$$\mu = -\frac{\operatorname{sign} C}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Если прямая l задана уравнением 6), а $M = (x, y)$ – некоторая точка плоскости, то выражение

$$\delta(M, l) = x \cos \alpha + y \cos \beta - p$$

задает *отклонение* точки M от прямой l . Знак $\delta(M, l)$ указывает на взаимное расположение точки M , прямой l и начала координат, а именно: если точка M и начало координат лежат по разные стороны от прямой l , то $\delta(M, l) > 0$, а если точка M и начало координат находятся по одну сторону от прямой l , то $\delta(M, l) < 0$. Расстояние $\rho(M, l)$ от точки M до прямой l определяется равенством $\rho(M, l) = |\delta(M, l)|$.



ПРИМЕР 4.13. Написать каноническое, параметрические и общее уравнения прямой, проходящей через точки $A = (-1, 3)$ и $B = (4, 1)$.

► Направляющим вектором прямой AB можно считать вектор $\mathbf{q} = \overrightarrow{AB} = \{5, -2\}$. Пусть, например, $M_0 = A = (-1, 3)$. Тогда получим каноническое уравнение прямой

$$AB: \frac{x+1}{5} = \frac{y-3}{-2}.$$

Из этого равенства получаем общее уравнение прямой AB : $2x + 5y - 13 = 0$.

Приравняв в каноническом уравнении левую и правую часть равенства к числу t , т.е. $\frac{x+1}{5} = \frac{y-3}{-2} = t$, получим параметрические уравнения прямой AB :

$$\begin{cases} x = -1 + 5t, \\ y = 3 - 2t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$$



В задачах 4.144–4.146 требуется:

1) написать уравнение прямой, привести его к общему виду и построить прямую;

2) привести общее уравнение к нормальному виду и указать расстояние от начала координат до прямой.

4.144. Прямая l задана точкой $M_0 = (x_0, y_0) \in l$ и нормальным вектором $\mathbf{n} = \{A, B\}$:

а) $M_0 = (2, 1)$, $\mathbf{n} = \{1, -1\}$; б) $M_0 = (-1, 0)$, $\mathbf{n} = \{-2, 2\}$.

4.145. Прямая l задана точкой $M_0 = (x_0, y_0) \in l$ и направляющим вектором $\mathbf{q} = \{q_1, q_2\}$:

а) $M_0 = (-1, 2)$, $\mathbf{q} = \{3, -1\}$; б) $M_0 = (1, 1)$, $\mathbf{q} = \{0, -1\}$;

в) $M_0 = (-1, 1)$, $\mathbf{q} = \{2, 0\}$.

4.146. Прямая l задана двумя своими точками $M_1 = (x_1, y_1)$ и $M_2 = (x_2, y_2)$:

а) $M_1 = (1, 2)$, $M_2 = (-2, 1)$; б) $M_1 = (2, 2)$, $M_2 = (0, 2)$.

4.147. Найти расстояние от начала координат до прямой $3x - 4y + 2 = 0$.

4.148. Даны точки $P = (3, 1)$ и $Q = (-1, 6)$. Вывести уравнения прямых, проходящих через концы отрезка PQ перпендикулярно этому отрезку.

4.149. При каком a прямые $3x - 2y + 1 = 0$ и $ax + 5y - 2008 = 0$ перпендикулярны?

4.150. Даны точки $A = (3, -2)$ и $B = (1, 5)$. Найти точку пересечения прямой AB с осью ординат.

4.151. Вывести уравнение средней линии $MN \parallel AB$ треугольника ABC , если $A = (2, 3)$, $B = (-1, 4)$, $C = (8, 1)$.

4.152. Даны точка $M = (-2, 5)$ и прямая $l: 3x + 4y - 6 = 0$. Вывести уравнение геометрического места точек B , являющихся серединами отрезков MA , где $A \in l$.

4.153. Вывести уравнение геометрического места точек, равноудаленных от точек $A = (3, 7)$ и $B = (2, -5)$.

Заданы прямая l и точка M . В примере 4.14 и задачах 4.154, 4.155 требуется:

- 1) вычислить расстояние $\rho(M, l)$ от точки M до прямой l ;
- 2) написать уравнение прямой l_1 , проходящей через точку M перпендикулярно прямой l ;
- 3) написать уравнение прямой l_2 , проходящей через точку M параллельно прямой l .

ПРИМЕР 4.14. $l: 3x - 4y + 2 = 0$, $M = (4, -1)$.

► Приводим общее уравнение данной прямой $3x - 4y + 2 = 0$ с помощью нормирующего множителя $\mu = -\frac{\text{sign } C}{\sqrt{A^2 + B^2}} = -\frac{1}{5}$ к нормальному виду $-\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y - \frac{2}{5} = 0$.

Тогда

$$\delta(M, l) = -\frac{3}{5} \cdot 4 + \frac{4}{5} \cdot (-1) - \frac{2}{5} = -\frac{18}{5},$$

и так как $\rho(M, l) = |\delta(M, l)|$, то $\rho(M, l) = \frac{18}{5}$.

Нормальный вектор $\mathbf{n} = \{3, -4\}$ прямой l является направляющим вектором прямой l_1 , а значит, можно записать ее каноническое уравнение: $\frac{x-4}{3} = \frac{y+1}{-4}$. Отсюда

$-4(x-4) = 3(y+1)$ и общее уравнение прямой l_1 имеет вид $4x + 3y - 13 = 0$.

Взяв $M_0 = M$ и записав равенство $3(x-4) - 4(y+1) = 0$, получаем из него общее уравнение прямой l_2 : $3x - 4y - 16 = 0$. ◀

4.154. l : $-2x + y - 1 = 0$, $M = (-1, 2)$.

4.155. l : $2y + 1 = 0$, $M = (1, 0)$.



Пусть заданы две прямые l_1 и l_2 . Возможны два случая их взаимного расположения:

1) l_1 и l_2 — параллельные прямые, в частности, они совпадают;

2) l_1 и l_2 пересекаются. Угол φ между прямыми l_1 и l_2 равен углу между их нормальными векторами $\mathbf{n}_1$ и $\mathbf{n}_2$ или дополняет его до π , т.е. $\cos \varphi = \left| \cos(\widehat{\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2}) \right| = \frac{|\mathbf{n}_1 \mathbf{n}_2|}{|\mathbf{n}_1| \cdot |\mathbf{n}_2|}$.

$$\cos \varphi = \left| \cos(\widehat{\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2}) \right| = \frac{|\mathbf{n}_1 \mathbf{n}_2|}{|\mathbf{n}_1| \cdot |\mathbf{n}_2|}.$$

В задачах 4.156—4.159 исследовать взаимное расположение прямых l_1 и l_2 . При этом в случае 1) найти расстояние $\rho(l_1, l_2)$ между прямыми, а в случае 2) найти косинус угла

$(\widehat{l_1, l_2})$ и точку пересечения прямых.

4.156. l_1 : $-2x + y - 1 = 0$, l_2 : $2y + 1 = 0$.

4.157. l_1 : $\frac{x-1}{-2} = \frac{y}{1}$, l_2 : $\frac{x+2}{1} = \frac{y}{0}$.

4.158. l_1 : $2x - 5y + 1 = 0$, l_2 : $4x + y + 3 = 0$.

4.159. l_1 : $x + y - 1 = 0$, l_2 : $\frac{x}{2} = \frac{y+1}{-2}$.

ПРИМЕР 4.15. Составить уравнение высоты AH , медианы AM и биссектрисы AL треугольника ABC , если

$A = (-8, 3), B = (10, -1),$
 $C = (-1, 9).$

► Имеем: $\overrightarrow{BC} = \{-11, 10\}$
 (рис. 4.11). Так как вектор $\overrightarrow{BC}$ является нормальным вектором прямой AH , то $\mathbf{n} = \{-11, 10\}$. В качестве точки M_0 прямой AH возьмем точку A . Запишем теперь уравнение высоты AH :

$-11(x+8)+10(y-3)=0$, т.е. $11x-10y+118=0$.

Далее, направляющим вектором прямой AM может служить вектор $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$, поэтому возьмем $\mathbf{q} =$

$= 2\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \{25, 2\}$. Отсюда получаем уравнение

прямой AM : $\frac{x+8}{25} = \frac{y-3}{2}$, или $2x-25y+91=0$.

Составим теперь уравнение биссектрисы AL . Найдём

длины векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$: $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{18^2 + 4^2} = 2\sqrt{9^2 + 2^2} =$

$= 2\sqrt{85}$; $|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{7^2 + 6^2} = \sqrt{85}$. Векторы $\overrightarrow{AB}$ и $2\overrightarrow{AC}$ име-

ют одинаковую длину, поэтому вектор $\mathbf{u} = \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$ направлен по биссектрисе угла A , значит, является направляющим вектором прямой AL . Вычисляем $\mathbf{u} =$

$= \{18, -4\} + 2\{7, 6\} = \{32, 8\} = 8\{4, 1\}$. Запишем каноническое уравнение прямой AL : $\frac{x+8}{4} = \frac{y-3}{1}$, откуда $x-4y+20=0$. ◀

4.160. Даны координаты одной из вершин треугольника: $(3; -1)$ и уравнения двух его медиан: $3x - y + 4 = 0$, $x - 2 = 0$. Найти координаты двух других вершин треугольника.

4.161. Вывести уравнения сторон треугольника, зная одну его вершину $B = (2, 6)$, а также уравнения высоты $x - 7y + 15 = 0$ и биссектрисы $x + 7y - 11 = 0$, проведенных из одной вершины.

4.162. Вывести уравнения сторон треугольника, зная одну его вершину $B = (2, -7)$, а также уравнения высоты $3x + y + 11 = 0$ и медианы $x + 2y + 7 = 0$, проведенных из разных вершин.

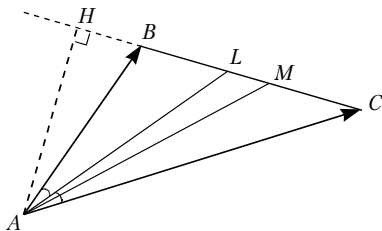


Рис. 4.11

4.163. Даны уравнения $5x + 4y = 0$ и $3x - y = 0$ медиан треугольника и координаты $(-5, 2)$ одной из его вершин. Вывести уравнения сторон треугольника.

4.164. Известно уравнение стороны AB параллелограмма $ABCD$: $3x - 2y + 4 = 0$, его диагонали AC : $x - y = 0$ и вершина $D = (-5, 4)$. Найти координаты вершин A, B и C .

4.165. Даны уравнения двух сторон параллелограмма: $3x - 2y + 1 = 0$, $4x + y - 5 = 0$ и координаты его центра: $(-5; 6)$. Вывести уравнения двух других сторон и уравнения диагоналей.



Если прямая задана общим уравнением $Ax + By + C = 0$ — и при этом $B \neq 0$ (т.е. прямая не параллельна оси Oy), то эта прямая может быть описана в виде $y = kx + b$ уравнением с угловым коэффициентом.



4.166. Доказать, что если прямые l_1 и l_2 заданы уравнениями с угловыми коэффициентами, то $\operatorname{tg}(\widehat{l_1, l_2}) = \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_2 k_1} \right|$.

4.167. В уравнении прямой $4x + \lambda y - 20 = 0$ подобрать значение λ так, чтобы угол между этой прямой и прямой $2x - 3y + 6 = 0$ равнялся 45° .

ПРИМЕР 4.16. Выяснить, лежит ли точка $M = (2, 5)$ внутри треугольника ABC , если $A = (-1, 9)$, $B = (0, 4)$, $C = (7, 2)$.

► Составим уравнения прямых AB, BC и AC .

$$\mathbf{q}_{AB} = \overrightarrow{AB} = \{1, -5\},$$

$$\text{уравнение: } \frac{x+1}{1} = \frac{y-9}{-5}, \text{ т.е. } 5x + y - 4 = 0;$$

$$\mathbf{q}_{BC} = \overrightarrow{BC} = \{7, -2\},$$

$$\text{уравнение: } \frac{x-0}{7} = \frac{y-4}{-2}, \text{ т.е. } 2x + 7y - 28 = 0;$$

$$\mathbf{q}_{AC} = \overrightarrow{AC} = \{8, -7\},$$

$$\text{уравнение: } \frac{x+1}{8} = \frac{y-9}{-7}, \text{ т.е. } 7x + 8y - 65 = 0.$$

Для того чтобы точка лежала внутри треугольника ABC , необходимо и достаточно, чтобы она лежала: 1) по ту же сторону от прямой AB , где лежит точка C , 2) по ту же сторону

от прямой BC , где лежит точка A , и 3) по ту же сторону от прямой AC , где лежит точка B . Вычисляя соответствующие отклонения, убеждаемся, что

$$\delta(M, AB) = \frac{10 + 5 - 14}{\sqrt{26}} > 0, \quad \delta(C, AB) = \frac{35 + 2 - 4}{\sqrt{26}} > 0 \text{ одно-}$$

го знака;

$$\delta(M, BC) = \frac{2 \cdot 2 + 7 \cdot 5 - 28}{\sqrt{53}} > 0, \quad \delta(A, BC) = \frac{2 \cdot (-1) + 7 \cdot 9 - 28}{\sqrt{53}} > 0$$

одного знака;

$$\delta(M, AC) = \frac{7 \cdot 2 + 8 \cdot 5 - 65}{\sqrt{113}} < 0, \quad \delta(B, AC) = \frac{7 \cdot 0 + 8 \cdot 4 - 65}{\sqrt{113}} < 0$$

одного знака.

Следовательно, точка M лежит внутри треугольника ABC . 

4.168. Определить, по одну или по разные стороны от прямой $3x + 5y - 7 = 0$ расположены точки $(1, 1)$ и $(-3, 3)$.

4.169. Определить, пересекает ли отрезок PQ прямую l , если $P = (3, 1)$, $Q = (-1, 4)$, а прямая l задана уравнением $2x + 3y - 5 = 0$.

4.170. Определить, лежит ли точка с координатами $(1, 2)$ между параллельными прямыми $3x - y - 2 = 0$ и $2y - 6x + 3 = 0$.

4.171. Определить, точка $M = (-1, 4)$ лежит внутри тупого или внутри острого угла, образованного прямыми $4x - 3y + 2 = 0$ и $x + 2y - 6 = 0$.

4.172. Определить, лежит ли точка M внутри угла ABC , если $A = (2, -7)$, $B = (-4, -9)$, $C = (-8, 1)$, $M = (-9, 12)$.

4.173. Определить, точки $(-1, 3)$ и $(5, 13)$ лежат в одном, в смежных или в вертикальных углах, образованных прямыми $3x - 7y + 46 = 0$ и $4x + y - 11 = 0$.

4.174. Доказать, что расстояние от точки M_0 до прямой l выражается формулой

$$\rho(M_0, l) = |\text{пр}_{\mathbf{n}} \overrightarrow{M_0 A}| = \frac{|(\mathbf{n}, \overrightarrow{M_0 A})|}{|\mathbf{n}|},$$

где $\mathbf{n}$ — нормальный вектор прямой l ; A — произвольная точка этой прямой.

4.175. Доказать, что расстояние от точки $M_0 = (x_0, y_0)$ до прямой l , заданной уравнением $ax + by + c = 0$, выражается формулой

$$\rho(M_0, l) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \quad (4.8)$$

4.176. Используя формулу (4.8), найти расстояние от точки $(-3, 1)$ до прямой $y = 2x$.

В задачах 4.177–4.178, используя формулу (4.8), найти расстояние между параллельными прямыми l_1 и l_2 , заданными своими уравнениями:

4.177. $l_1: 3x - 5y + 1 = 0$ и $l_2: 3x - 5y - 2 = 0$.

4.178. $l_1: x = 2 - 5t, y = 1 + 2t$ и $l_2: x = 1 + 10t, y = 3 - 4t$.

4.179. На оси абсцисс найти все точки, равноудаленные от прямых $x - y + 3 = 0$ и $x + 7y - 1 = 0$.

4.180. На прямой $y = x$ найти все точки, равноудаленные от прямых $y = x + 1$ и $y = 7x - 1$.

4.181. Вывести уравнение геометрического места точек, для которых расстояние до прямой $3x - 5y + 1 = 0$ в 3 раза больше расстояния до прямой $10x + 6y - 3 = 0$.

ПРИМЕР 4.17. Найти проекцию точки $P = (3, 5)$ на прямую $y = 2x + 1$.

► Обозначим через l прямую $y = 2x + 1$ (рис. 4.12). Уравнение этой прямой можно переписать в виде $2x - y + 1 = 0$.

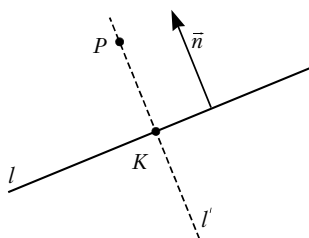


Рис. 4.12

Найдем нормальный вектор прямой l : $\mathbf{n} = \{2, -1\}$. Этот вектор может быть принят в качестве направляющего вектора прямой l' : $\mathbf{q}' = \{2, -1\}$. Запишем параметрические уравнения прямой l' :

$$x = 3 + 2t, \quad y = 5 - t. \quad (4.9)$$

Теперь найдем координаты точки K пересечения прямых l и l' : подставив формулы (4.9) в уравнение прямой l , получим $5 - t =$

$$= 2(3 + 2t) + 1. \text{ Отсюда } t = -\frac{2}{5}. \text{ Подставим теперь это значение } t \text{ в (4.9), получим: } x = 3 + 2 \cdot (-0,4) = 2,2, \quad y = 5 -$$

$-(-0,4) = 5,4$. Таким образом, $K = (2,2, 5,4)$. Точка K — это и есть проекция точки P на прямую l . ◀

4.182. Найти проекцию точки $P = (1, -1)$ на прямую $2x - 2y + 1 = 0$.

В задачах 4.183–4.186 вывести уравнения прямых l , проходящих через данную точку M_0 и удовлетворяющих заданным условиям.

4.183. $M_0 = (-1, 3)$, прямая l отсекает от осей координат треугольник площадью 2.

4.184. $M_0 = (1, 2)$, прямая l пересекает положительные части осей координат и образует с осями координат треугольник наименьшей площади.

4.185. $M_0 = (-1, 3)$, прямая l пересекает положительные части координатных осей так, что ее отрезок, заключенный между осями координат, имеет наименьшую длину.

4.186. $M_0 = (3, 1)$, прямая l касается окружности $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 17$.

ПРИМЕР 4.18. Вывести уравнение прямой, симметричной прямой $l: 3x + y - 5 = 0$ относительно: а) начала координат; б) оси абсцисс; в) точки $A = (-1, 4)$.

► а) Симметрия относительно начала координат переводит точку (x, y) в точку $(-x, -y)$. Поэтому уравнение симметричной прямой мы получим, заменяя x на $-x$ и y на $-y$. Таким образом, искомое уравнение имеет вид $-3x - y - 5 = 0$, или $3x + y + 5 = 0$.

б) Симметрия относительно оси абсцисс задается формулами $x' = x$, $y' = -y$. Отсюда получаем $3x - y - 5 = 0$.

в) Возьмем какую-нибудь точку прямой l , например $M_0 = (0, 5)$ (рис. 4.13). Для этого достаточно подобрать числа x и y , удовлетворяющие уравнению $3x + y - 5 = 0$. Пусть M_1 — точка, симметричная точке M_0 относительно точки A .

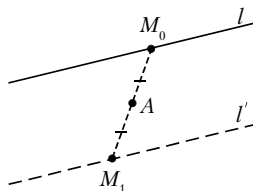


Рис. 4.13

Тогда $\overrightarrow{AM_1} = \overrightarrow{M_0A} = \{-1, -1\}$ и $\overrightarrow{OM_1} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM_1} = \{-1, 4\} + \{-1, -1\} = \{-2, 3\}$. Следовательно, $M_1 = (-2, 3)$. Откуда получаем уравнение прямой l' : $3(x+2) + (y-3) = 0$, т.е. $3x + y + 3 = 0$. ◀

4.187. Найти точку, симметричную точке $(2, 1)$ относительно прямой $6x - 4y + 5 = 0$.

4.188. Вывести уравнение прямой, симметричной прямой $l: x + 2y - 2 = 0$ относительно:

- а) начала координат; б) оси абсцисс;
в) точки $A = (2, -1)$.

2. Плоскость и прямая в пространстве. Плоскость P в декартовой прямоугольной системе координат $Oxyz$ может быть задана уравнением одного из следующих видов:

1) $Ax + By + Cz + D = 0$ — *общее уравнение* плоскости;

2) $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$ — уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ перпендикулярно нормальному вектору $\mathbf{n} = \{A, B, C\}$;

3) $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ — уравнение плоскости *в отрезках*, где a , b и c — величины направленных отрезков, отсекаемых прямой на координатных осях Ox , Oy и Oz соответственно;

4) $x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - p = 0$ — *нормальное уравнение* плоскости, где $\cos \alpha$, $\cos \beta$ и $\cos \gamma$ — направляющие косинусы нормального вектора $\mathbf{n}$, направленного из начала координат в сторону плоскости, а $p > 0$ — расстояние от начала координат до плоскости.

Общее уравнение приводится к нормальному виду умножением на нормирующий множитель

$$\mu = -\frac{\text{sign } D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Если плоскость P задана нормальным уравнением, а $M = (x, y, z)$ — некоторая точка пространства, то выражение

$$\delta(M, P) = x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - p$$

определяет отклонение точки M от плоскости P . Знак $\delta(M, P)$ указывает на взаимное расположение точки M , плоскости P и начала координат, а именно: если точка M и начало координат лежат по разные стороны от плоскости P , то $\delta(M, P) > 0$, а если точка M и начало координат находятся по одну сторону от плоскости P , то $\delta(M, P) < 0$. Расстояние $\rho(M, P)$ от точки M до плоскости P определяется равенством $\rho(M, P) = |\delta(M, P)|$.

Прямая l в пространстве может быть задана:

1) как линия пересечения двух плоскостей, заданных своими общими уравнениями

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \end{cases}$$

где коэффициенты A_1, B_1, C_1 не пропорциональны коэффициентам A_2, B_2, C_2 ;

$$2) \text{ параметрическими уравнениями } \begin{cases} x = x_0 + q_1 t, \\ y = y_0 + q_2 t, \\ z = z_0 + q_3 t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$$

или в векторной форме $\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + \mathbf{q}t$, где $\mathbf{r}_0 = \{x_0, y_0, z_0\}$ — радиус-вектор принадлежащей прямой точки $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$, а $\mathbf{q} = \{q_1, q_2, q_3\}$ — направляющий вектор прямой;

$$3) \text{ каноническими уравнениями } \frac{x - x_0}{q_1} = \frac{y - y_0}{q_2} = \frac{z - z_0}{q_3}, \text{ что}$$

равносильно заданию прямой как линии пересечения трех плоскостей, проектирующих эту прямую на координатные плоскости.

Условия параллельности и перпендикулярности прямых и плоскостей.

1. Пусть α_1 и α_2 — две плоскости, заданные уравнениями $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ соответственно. Тогда

$$a) \alpha_1 \parallel \alpha_2 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2};$$

$$б) \alpha_1 = \alpha_2 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2};$$

$$в) \alpha_1 \perp \alpha_2 \Leftrightarrow \mathbf{n}_1 \perp \mathbf{n}_2 \Leftrightarrow \mathbf{n}_1 \mathbf{n}_2 = 0 \Leftrightarrow A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2 = 0.$$

2. Пусть l_1 и l_2 — две прямые и $\mathbf{q}$ и $\mathbf{p}$ — их направляющие векторы. Тогда

$$a) (l_1 \parallel l_2 \text{ или } l_1 = l_2) \Leftrightarrow \mathbf{q} \parallel \mathbf{p}; \quad б) l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow \mathbf{q} \perp \mathbf{p} \Leftrightarrow \mathbf{q} \mathbf{p} = 0.$$

Углом φ между прямой l_1 и плоскостью α называется угол между прямой и ее проекцией на плоскость. Если направляющий вектор прямой $\mathbf{q}$ и нормальный вектор плоскости $\mathbf{n}$ направлены в одну сторону от плоскости, то угол между ними равен $\frac{\pi}{2} - \varphi$, если же векторы направлены в разные

стороны от плоскости, то угол между ними равен $\frac{\pi}{2} + \varphi$. Таким образом,

$$\sin \varphi = \left| \cos \left(\frac{\pi}{2} \pm \varphi \right) \right| = \left| \cos (\widehat{\mathbf{n}, \mathbf{q}}) \right| = \frac{|\mathbf{n} \mathbf{q}|}{|\mathbf{n}| \cdot |\mathbf{q}|}.$$



ПРИМЕР 4.19. Прямая l задана как линия пересечения плоскостей, заданных общими уравнениями

$$\begin{cases} x - 10y + 2z + 10 = 0, \\ 3x - 2y - z + 2 = 0. \end{cases}$$

Написать каноническое уравнение этой прямой, а также уравнение ее проекции на координатную ось Oyz .

- Точка $M = (-2, 0, -4)$ удовлетворяет общим уравнениям плоскостей, следовательно, лежит на прямой l . В качестве направляющего вектора этой прямой может быть взят вектор $\mathbf{q} = [\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2]$, где $\mathbf{n}_1 = \{1, -10, 2\}$ и $\mathbf{n}_2 = \{3, -2, -1\}$ — нормальные векторы плоскостей, линией пересечения которых является заданная прямая. Таким образом,

$$\mathbf{q} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & -10 & 2 \\ 3 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 14\mathbf{i} + 7\mathbf{j} + 28\mathbf{k}.$$

Следовательно, канонические уравнения прямой имеют вид $\frac{x+2}{14} = \frac{y}{7} = \frac{z+4}{28}$.

Полученная пропорция эквивалентна системе трех уравнений

$$7x - 14y + 14 = 0,$$

$$2x - z = 0,$$

$$4y - z - 4 = 0,$$

описывающих три плоскости, проектирующие прямую на координатные плоскости Oxy , Oxz , Oyz соответственно (уравнение прямой в проекциях). В частности, уравнение $4y - z - 4 = 0$ есть уравнение проекции заданной прямой на плоскость Oyz . ◀

Вывести уравнения плоскостей, проходящих через заданную точку M и перпендикулярных заданной прямой l .

4.189. $M = (-2, 3, 4)$, $l: x = t, y = 3 - t, z = 4 + 2t$.

4.190. $M = (-2, 1, 3)$, $l: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z-3}{-4}$.

Вывести уравнения плоскостей α_1 , проходящих через заданные точки M_1 и M_2 перпендикулярных заданной плоскости α .

4.191. $\alpha: x - 2y + 3z - 2 = 0$, $M_1 = (1, 2, 3)$, $M_2 = (1, 0, -1)$.

4.192. $\alpha: -x + 2y + z + 1 = 0$, $M_1 = (-1, 2, 0)$, $M_2 = (-1, 2, 1)$.

Вывести уравнения плоскостей, проходящих через точку M параллельно векторам $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2$.

4.193. $M = (1, 1, 1)$, $\mathbf{a}_1 = \{0, 1, 2\}$, $\mathbf{a}_2 = \{-1, 0, 1\}$.

4.194. $M = (0, 1, 2)$, $\mathbf{a}_1 = \{2, 0, 1\}$, $\mathbf{a}_2 = \{1, 1, 0\}$.

Вывести уравнения плоскостей, проходящих через заданные точки M_1 и M_2 и параллельных вектору $\mathbf{a}$.

4.195. $M_1 = (1, 2, 0)$, $M_2 = (2, 1, 1)$; $\mathbf{a} = \{3, 0, 1\}$.

4.196. $M_1 = (1, 1, 1)$, $M_2 = (2, 3, -1)$; $\mathbf{a} = \{0, -1, 2\}$.

Вывести уравнения плоскостей, проходящих через три заданные точки M_1 , M_2 и M_3 .

4.197. $M_1 = (1, 2, 0)$, $M_2 = (2, 1, 1)$, $M_3 = (3, 0, 1)$.

4.198. $M_1 = (1, 1, 1)$, $M_2 = (0, -1, 2)$, $M_3 = (2, 3, -1)$.

4.199. $M_1 = (-1, 2, 3)$, $M_2 = (0, 1, 4)$, $M_3 = (2, 3, 5)$.

4.200. Найти расстояние от начала координат до плоскости $3x - y + 5z - 2 = 0$.

Вывести уравнения плоскостей, удовлетворяющих заданным условиям.

4.201. Плоскость проходит через прямую $\frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{-3} = \frac{z}{2}$

и точку $(-1, 4, 1)$.

4.202. Плоскость проходит через прямые $x = 3 + 2t$, $y = t$, $z = 4 - t$ и $x = 4 + 2t$, $y = 1 + t$, $z = -1 - t$.

4.203. Плоскость проходит через точку $(3, -2, -5)$ параллельно плоскости $3x + 4y - 2z + 2008 = 0$.

4.204. Плоскость проходит через точки $(-1, 3, 5)$ и $(3, -1, -3)$ перпендикулярно плоскости $3x + 5y - 4z = 0$.

4.205. Плоскость проходит через точку $A = (1, 1, 1)$ и перпендикулярна к плоскостям $2x - y + 5z + 3 = 0$ и $x + 3y - z - 7 = 0$.

4.206. Плоскость проходит через концы отрезка AB перпендикулярно этому отрезку, если $A = (3, 3, -4)$, $B = (-3, 1, 0)$.

4.207. Плоскость перпендикулярна отрезку PQ и проходит через его середину, если $P = (0, 4, 3)$, $Q = (-1, 2, 5)$.



Пусть заданы две плоскости α_1 и α_2 . Возможны два случая их взаимного расположения:

1) α_1 и α_2 — параллельные плоскости, в частности, они совпадают;

2) α_1 и α_2 пересекаются.

Исследовать взаимное расположение плоскостей α_1 и α_2 . При этом в случае 1) найти расстояние $\rho(\alpha_1, \alpha_2)$ между плоскостями, а в случае 2) найти косинус угла между ними.

4.208. $\alpha_1: 3x - y + 2z + 4 = 0, \quad \alpha_2: 4x + y - 5z + 17 = 0.$

4.209. $\alpha_1: 2x - y + z - 1 = 0, \quad \alpha_2: -4x + 2y - 2z - 1 = 0.$

4.210. $\alpha_1: 2x - y - z + 1 = 0, \quad \alpha_2: -4x + 2y + 2z - 2 = 0.$

4.211. $\alpha_1: 4x + 3y - 5z - 8 = 0, \quad \alpha_2: 4x + 3y - 5z + 12 = 0.$

Написать канонические и параметрические уравнения прямых, проходящих через две заданные точки M_1 и M_2 .

4.212. $M_1 = (1, 2, 3), \quad M_2 = (2, 0, -1).$

4.213. $M_1 = (-1, 2, 0), \quad M_2 = (-1, -2, 1).$

Написать канонические уравнения прямых, заданных как линии пересечения плоскостей, определяемых общими уравнениями.

4.214. $\begin{cases} 2x - y + 2z - 3 = 0, \\ x + 2y - z - 1 = 0; \end{cases} \quad 4.215. \begin{cases} x + 2y - 3z - 5 = 0, \\ 2x - y + z + 2 = 0. \end{cases}$

Вывести уравнения плоскостей, симметричных плоскости $3x + 5y - 2z + 7 = 0$ относительно указанных объектов.

4.216. Точки $(-1, 4, 3).$

4.217. Оси абсцисс.

4.218. Плоскости Oxz .

4.219. Доказать, что расстояние от точки M до плоскости α выражается следующими формулами:

1) если $\mathbf{n}$ — нормальный вектор плоскости α , A — произвольная точка плоскости, то

$$\rho(M, \alpha) = |pr_{\mathbf{n}} \overrightarrow{MA}| = \frac{|(\mathbf{n}, \overrightarrow{MA})|}{|\mathbf{n}|}; \quad (4.10)$$

2) если $M = (x_0, y_0, z_0)$ и $\alpha: Ax + By - Cz + D = 0$, то

$$\rho(M, \alpha) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \quad (4.11)$$

Используя формулу (4.11), найти расстояние от точки M до плоскости α .

4.220. $M = (5, 1, -1)$, $\alpha: x - 2y - 2z + 4 = 0$.

4.221. $M = (-1, 3, 2)$, $\alpha: 2x - y - 2z + 4 = 0$.

4.222. Найти расстояние между плоскостью $2x - 3z - 5 = 0$ и осью ординат.

4.223. На оси абсцисс найти все точки, расположенные вдвое ближе к плоскости $x - y + z + 1 = 0$, чем к плоскости $x + y - z + 3 = 0$.

Вывести уравнение плоскости α_1 , проходящей через точку M параллельно плоскости α , и вычислить расстояние $\rho(\alpha, \alpha_1)$.

4.224. $\alpha: x - 2y + 3z - 2 = 0$, $M = (1, 2, 3)$.

4.225. $\alpha: 2x + y - z - 1 = 0$, $M = (1, 1, 1)$.

4.226. Вывести уравнения плоскостей, находящихся на расстоянии 5 от плоскости $2x + 2y - z + 5 = 0$.

4.227. Вывести уравнение плоскости, находящейся на одинаковом расстоянии от плоскостей $2x - y + 3z + 4 = 0$ и $4x - 2y + 6z - 1 = 0$.

4.228. Вывести уравнение геометрического места точек, равноудаленных от точек $(-1, 3, 2)$ и $(4, 0, 6)$.

4.229. Найти высоту AH пирамиды $ABCD$, если $A = (1, -2, 3)$, $B = (0, -1, 4)$, $C = (3, 3, -4)$, $D = (-2, 0, 1)$.

4.230. Написать канонические и параметрические уравнения прямой, проходящей через точки $(1, 3, -2)$ и $(2, 5, 7)$.

4.231. Вывести уравнение прямой, проходящей через точку $(3, 2, -5)$ параллельно прямой $\frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{4} = \frac{z}{-2}$.

4.232. Написать уравнение прямой, проходящей через точки пересечения плоскости $x - 3y + 2z + 1 = 0$ с прямыми:

$$l_1: \frac{x-5}{5} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-3}{-1} \text{ и } l_2: \frac{x-3}{4} = \frac{y+4}{-6} = \frac{z-5}{2}.$$

4.233. Через прямую $\frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-2}{3}$ провести плоскость, параллельную прямой $\frac{x}{-1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-3}{-3}$.

Найти углы между прямыми l_1 и l_2 .

4.234. $l_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{3} = \frac{z}{-2}$ и $l_2: x = 3+t, y = -2t, z = 1+t$.

4.235. $l_1: \begin{cases} x - y + z - 4 = 0, \\ 2x + y - 2z + 5 = 0 \end{cases}$ и $l_2: \begin{cases} x + y + z - 4 = 0, \\ 2x + 3y - z - 6 = 0. \end{cases}$

Найти расстояние от точки M до прямой l .

4.236. $M = (1, 3, -2)$, $l: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z}{-3}$.

4.237. $M = (0, 2, -1)$, $l: x = 2-t, y = 3+2t, z = 4t$.

4.238. Доказать, что расстояние между прямыми l_1 и l_2 может быть найдено по формулам

$$\rho(l_1, l_2) = \frac{|[\mathbf{q}, \overrightarrow{M_1M_2}]|}{|\mathbf{q}|}, \quad (4.12)$$

если прямые l_1 и l_2 параллельны, где $\mathbf{q}$ — направляющий вектор прямых, а точки $M_1 \in l_1$ и $M_2 \in l_2$;

$$\rho(l_1, l_2) = \frac{|\overrightarrow{M_1M_2} \mathbf{q}_1 \mathbf{q}_2|}{|[\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2]|}, \quad (4.13)$$

если прямые l_1 и l_2 скрещиваются и $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2$ — соответственно их направляющие векторы, а точки $M_1 \in l_1, M_2 \in l_2$.

ПРИМЕР 4.20. Заданы прямые $l_1: \frac{x}{-2} = \frac{y-1}{0} = \frac{z+2}{1}$ и

$l_2: \frac{x+1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{-1}$. Доказать, что они скрещивающиеся, найти расстояние $\rho(l_1, l_2)$ между ними и написать уравнения общего перпендикуляра l к этим прямым.

► Из канонических уравнений прямых находим направляющие векторы $\mathbf{q}_1 = \{-2, 0, 1\}$, $\mathbf{q}_2 = \{1, 2, -1\}$ данных прямых и точки $M_1 = (0, 1, -2) \in l_1$ и $M_2 = (-1, -1, 2) \in l_2$. Прямые l_1 и l_2 скрещиваются, так как смешанное произведение векторов $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2$ и $\overrightarrow{M_1M_2} = \{-1, -2, 4\}$ отлично от нуля:

$$\overrightarrow{M_1M_2} \mathbf{q}_1 \mathbf{q}_2 = \begin{vmatrix} -1 & -2 & 4 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -1 \cdot (-2) - (-2) \cdot 1 + 4 \cdot (-4) =$$

$= -12 \neq 0$, т.е. они не лежат в одной плоскости.

Найдем уравнение плоскости α , проходящей через прямую l_1 параллельно прямой l_2 (рис. 4.14). Точка $M_1 = (0, 1, -2)$ лежит на прямой l_1 и, следовательно, принадлежит искомой плоскости α . В качестве нормального вектора к этой плоскости возьмем вектор

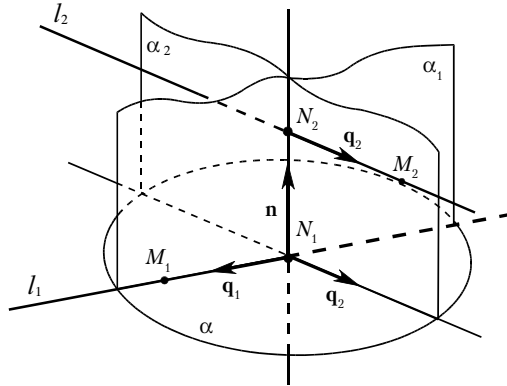


Рис. 4.14

$$\mathbf{n} = [\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2] = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -2\mathbf{i} - \mathbf{j} - 4\mathbf{k}.$$

Уравнение плоскости α : $-2x - (y - 1) - 4(z + 2) = 0$, или в общем виде $2x + y + 4z + 7 = 0$.

Расстояние $\rho(l_1, l_2)$ равно расстоянию от любой точки прямой l_2 , например от точки $M_2 = (-1, -1, 2)$, до плоскости α . Нормальное уравнение плоскости α имеет вид

$$-\frac{2}{\sqrt{21}}x - \frac{1}{\sqrt{21}}y - \frac{4}{\sqrt{21}}z - \frac{7}{\sqrt{21}} = 0,$$

откуда

$$\rho(l_1, l_2) = |\delta(M_2, \alpha)| = \left| \frac{2}{\sqrt{21}} + \frac{1}{\sqrt{21}} - \frac{8}{\sqrt{21}} - \frac{7}{\sqrt{21}} \right| = \frac{12}{\sqrt{21}}.$$

Для того чтобы составить уравнения общего перпендикуляра l , найдем уравнения плоскостей α_1 и α_2 , проходящих через заданные прямые l_1 и l_2 соответственно и перпендикулярных плоскости α . Имеем $M_1 = (0, 1, -2) \in \alpha_1$ и $\mathbf{n}_1 = [\mathbf{q}_1, \mathbf{n}] = \mathbf{i} - 10\mathbf{j} + 2\mathbf{k} \perp \alpha_1$, откуда $\alpha_1: x - 10y + 2z + 14 = 0$. Аналогично $M_2 = (-1, -1, 2) \in \alpha_2$ и $\mathbf{n}_2 = [\mathbf{q}_2, \mathbf{n}] = -9\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + 3\mathbf{k} \perp \alpha_2$, откуда $\alpha_2: 3x - 2y - z + 3 = 0$. Следовательно,

$$\begin{cases} x - 10y + 2z + 11 = 0, \\ 3x - 2y - z + 3 = 0 \end{cases}$$

описывают линию пересечения плоскостей $l = \alpha_1 \cap \alpha_2$, заданных общими уравнениями. 

Убедиться, что прямые l_1 и l_2 параллельны и, используя формулу (4.12), найти расстояние между ними.

4.239. $l_1: \frac{x-1}{3} = \frac{y}{-4} = \frac{z+1}{2}; l_2: \frac{x}{3} = \frac{y+1}{-4} = \frac{z+2}{2}.$

4.240. $l_1: x = 2 + 3t, y = -1 + 4t, z = 2t;$
 $l_2: x = 7 + 3t, y = 1 + 4t, z = 3 + 2t.$

4.241. $l_1: \frac{x+7}{3} = \frac{y-5}{-1} = \frac{z-9}{4}$ и $l_2: \begin{cases} 2x + 2y - z - 10 = 0, \\ x - y - z - 22 = 0. \end{cases}$

Используя формулу (4.13), найти расстояние между скрещивающимися прямыми l_1 и l_2 .

4.242. $l_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z}{4}; l_2: x = 3 - t, y = t, z = 1 + 2t.$

4.243. $l_1: x = y = z, l_2: x = 1 - 2t, y = 3t, z = 2 + t.$

4.244. Вывести уравнение общего перпендикуляра к прямым $l_1: \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-8}{5}$ и $l_2: \frac{x+6}{1} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z-3}{-1}$. Определить, в каких точках он пересекает эти прямые.

4.245. Вывести уравнение прямой, проходящей через точку $(3, -1, 2)$ перпендикулярно плоскости $2x + 4y - 5z + 2008 = 0$.

4.246. Доказать, что прямые l_1 и l_2 пересекаются. Найти точку их пересечения, если

$$l_1: \frac{x+3}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z+1}{1} \text{ и } l_2: \begin{cases} x = 3z - 4, \\ y = z + 2. \end{cases}$$

Спроецировать точку M_0 на прямую l или плоскость α

4.247. $M_0 = (0, -3, 5), l: \frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-2}{-2}.$

4.248. $M_0 = (3, 5, -4), \alpha: x + 2y - 3z - 53 = 0.$

В задачах 4.249, 4.250 спроецировать прямую l или плоскость α

$$4.249. l: \frac{x-1}{3} = \frac{y+3}{1} = \frac{z-9}{-5}, \quad \alpha: x-2y+3z-6=0.$$

$$4.250. l: \begin{cases} x+y+z-5=0, \\ 2x-3y+z-4=0, \end{cases} \quad \alpha: 3x-2y-z+15=0.$$

Найти координаты точки M , симметричной данной точке M_0 относительно заданной прямой l или плоскости α

$$4.251. M_0 = (4, 0, 1), \text{ прямая } l: \frac{x-2}{1} = \frac{y+3}{-2} = \frac{z-9}{3}.$$

$$4.252. M_0 = (-3, 1, -1), \text{ прямая } l: \begin{cases} 4x-3y-13=0, \\ y-2z+5=0. \end{cases}$$

$$4.253. M_0 = (-3, 1, 5), \text{ плоскость } \alpha: 2x+3y-z+1=0.$$

4.254. Вывести уравнение высоты, выходящей из вершины A треугольника ABC , если $A = (3, 1, -4)$, $B = (0, 0, 2)$, $C = (-2, 3, 3)$.

Используя формулу (4.12), доказать, что прямые l_1 и l_2 принадлежат одной плоскости, и написать уравнение этой плоскости.

$$4.255. l_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z-5}{4} \text{ и } l_2: \frac{x-7}{3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-1}{-2}.$$

$$4.256. l_1: \frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-3}{-2} \text{ и } l_2: \frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+3}{-2}.$$

4.257. Определить, при каком значении a прямые $l_1: x=3-t, y=2+3t, z=4-3t$ и $l_2: x=2+at, y=-1-t, z=2+2t$ пересекаются. Составить уравнение плоскости, проходящей через эти пересекающиеся прямые.

Для заданных прямых l_1 и l_2 :

а) доказать, что прямые не лежат в одной плоскости, т.е. являются скрещивающимися;

б) написать уравнение плоскости, проходящей через прямую l_2 параллельно прямой l_1 ;

в) вычислить расстояние между прямыми l_1 и l_2 ;

г) написать уравнение общего перпендикуляра к прямым l_1 и l_2 .

$$4.258. l_1: \frac{x+7}{3} = \frac{y+4}{4} = \frac{z+3}{-2} \text{ и } l_2: \frac{x-21}{6} = \frac{y+5}{-4} = \frac{z-2}{-1}.$$

$$4.259. l_1: \frac{x-6}{3} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z+3}{4} \text{ и } l_2: \frac{x+1}{3} = \frac{y+7}{-3} = \frac{z-4}{8}.$$

4.260. Вывести уравнение плоскости, равноудаленной от прямых $x = 2y = z$ и $x = 3 - t$, $y = 2 + 2t$, $z = -1 + 3t$.

4.261. Найти угол между плоскостью $3x - 5y + 2z - 7 = 0$ и осью ординат.

4.262. В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ $AB = 1$, $AA_1 = 3$, $AD = 2$. Точка M — центр грани $A_1 B_1 C_1 D_1$. Найти:

а) расстояние от вершины D_1 до плоскости $A_1 C_1 D$;

б) угол между плоскостями $A_1 C_1 D$ и $AA_1 D_1$;

в) угол между прямой AM и плоскостью $A_1 C_1 D$.

4.263. В правильной пирамиде $SABCD$ с вершиной S сторона основания равна 6, высота равна 8. Точки M и N лежат на ребрах SD и SC соответственно, причем $SM = \frac{1}{3}SD$,

$SN = \frac{1}{2}SC$. Найти:

а) расстояние от вершины S до плоскости AMN ;

б) угол между плоскостью AMN и плоскостью основания;

в) угол между прямой CM и плоскостью BSD .

ГЛАВА 5

КРИВЫЕ НА ПЛОСКОСТИ, КРИВЫЕ И ПОВЕРХНОСТИ В ПРОСТРАНСТВЕ

5.1. Кривые на плоскости

1. Уравнение кривой в декартовой системе координат.
Говорят, что кривая Γ в декартовой прямоугольной системе координат Oxy имеет уравнение

$$F(x, y) = 0, \quad (5.1)$$

если точка $M = (x, y)$ принадлежит кривой Γ в том и только том случае, когда ее координаты x и y удовлетворяют соотношению (5.1). Если, в частности, $F(x, y) = f(x) - y$, то уравнение (5.1) может быть записано в виде

$$y = f(x), \quad (5.2)$$

и в этом случае кривая Γ совпадает с графиком функции $f(x)$ (см. 2.2).

В настоящем пункте изучается связь между геометрическими свойствами кривой и ее уравнением в некоторых наиболее простых случаях.

ПРИМЕР 5.1. Написать уравнение геометрического места точек, равноудаленных от двух данных точек $A_1 = (x_1, y_1)$ и $A_2 = (x_2, y_2)$.

- Пусть $A = (x, y)$ — произвольная точка рассматриваемого геометрического места точек. Найдем расстояние от точки A до каждой из точек A_1 и A_2

$$d_1 = \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2}, \quad d_2 = \sqrt{(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2}.$$

Поскольку $d_1 = d_2$, то

$$\sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2} = \sqrt{(x-x_2)^2 + (y-y_2)^2},$$

или

$$\begin{aligned} x^2 - 2xx_1 + x_1^2 + y^2 - 2yy_1 + y_1^2 &= \\ = x^2 - 2xx_2 + x_2^2 + y^2 - 2yy_2 + y_2^2, \end{aligned}$$

откуда

$$2(x_2 - x_1)x + 2(y_2 - y_1)y + (x_1^2 + y_1^2 - x_2^2 - y_2^2) = 0.$$

Обозначив коэффициенты при x и y соответственно через a и b , а свободный член через c , получим искомое уравнение данного геометрического места точек как уравнение прямой $ax + by + c = 0$, где $a = 2(x_2 - x_1)$, $b = 2(y_2 - y_1)$ и $c = x_1^2 + y_1^2 - x_2^2 - y_2^2$. ◀

ПРИМЕР 5.2. Написать уравнение кривой, сумма квадратов расстояний от каждой точки которой до точек $A = (-a, 0)$, $B = (0, a)$ и $C = (a, 0)$ равна $3a^2$.

► Пусть Γ — кривая, удовлетворяющая условиям задачи. Точка $M = (x, y) \in \Gamma$ в том и только том случае, когда

$$\rho^2(M, A) + \rho^2(M, B) + \rho^2(M, C) = 3a^2,$$

или

$$(x+a)^2 + y^2 + x^2 + (y-a)^2 + (x-a)^2 + y^2 = 3a^2,$$

откуда $x^2 + y^2 - \frac{2}{3}ay = 0$, или после выделения полного квадрата

$$x^2 + \left(y - \frac{a}{3}\right)^2 = \frac{a^2}{9}$$

получаем искомое уравнение кривой, являющейся окружностью радиуса $\frac{a}{3}$ с центром в точке $M_0 = \left(0, \frac{a}{3}\right)$. ◀

5.1. Написать уравнение кривой, каждая точка которой находится на одинаковом расстоянии от точек $M_1 = (3, 2)$ и $M_2 = (2, 3)$.

5.2. Написать уравнение кривой, разность квадратов расстояний от каждой точки которой до точек $M_1 = (-a, 0)$ и $M_2 = (a, 0)$ равна c .

5.3. Написать уравнение кривой, расстояние от каждой точки которой до оси Ox вдвое больше расстояния до оси Oy .

5.4. Написать уравнение кривой, сумма квадратов расстояний от каждой точки которой до точек $M_1 = (-a, 0)$ и $M_2 = (a, 0)$ равна c .

5.5. Написать уравнение кривой, расстояние от каждой точки которой до точки $M_1 = (-a, 0)$ вдвое меньше расстояния до точки $M_2 = (a, 0)$.

5.6. Написать уравнение кривой, сумма расстояний от каждой точки которой до точек $F_1 = (-2, 0)$ и $F_2 = (2, 0)$ равна $2\sqrt{5}$.

5.7. Написать уравнение кривой, модуль разности расстояний от каждой точки которой до точек $F_1 = (-2, -2)$ и $F_2 = (2, 2)$ равен 4.

5.8. Окружности проходят через точку $M = (2, 1)$ и касаются оси Ox . Составить уравнение фигуры, состоящей из центров всех таких окружностей.

5.9. Написать уравнение кривой, каждая точка которой находится на одинаковом расстоянии от точки $F = (2, 2)$ и от оси Ox .

5.10. Установить, что каждое из следующих уравнений определяет окружность, найти ее центр C и радиус R :

а) $x^2 + y^2 - 4x = 0$. б) $x^2 + y^2 + 8y = 0$.

в) $x^2 + y^2 - 4x + 8y - 13 = 0$.

5.11. Написать уравнение окружности в каждом из следующих случаев (где C — центр окружности, R — радиус, M, M_1, M_2, M_3 — точки на окружности):

а) $C = (2, -3)$, $R = 5$. б) $C = (2, -3)$, $M = (5, 1)$.

в) $M_1 = (-6, -2)$, $M_2 = (2, 4)$ — концы диаметра.

г) $C = (1, -1)$, прямая $5x - 12y + 9 = 0$ — касательная к окружности.

д) $M_1 = (3, 1)$, $M_2 = (-1, 3)$, $C \in l: 3x - y - 2 = 0$.

е) $M_1 = (3, 1)$, $M_2 = (0, 2)$, $M_3 = (1, -1)$.

5.12. Определить, как расположена прямая относительно окружности — пересекает, касается или проходит вне ее, если прямая и окружность заданы уравнениями:

а) $2x - y - 3 = 0$, $x^2 + y^2 - 3x + 2y - 3 = 0$;

$$\text{б) } x - 2y - 1 = 0, \quad x^2 + y^2 - 8x + 2y + 12 = 0;$$

$$\text{в) } x - y + 10 = 0, \quad x^2 + y^2 - 1 = 0.$$

2. Уравнение кривой в полярной системе координат.

Говорят, что на плоскости задана *полярная система координат* $\langle O, u \rangle$, если заданы:

- 1) некоторая точка O , называемая *полюсом*;
- 2) некоторый луч u , исходящий из точки O и называемый *полярной осью* (рис. 5.1).

Полярными координатами точки $M \neq O$ называются два числа: *полярный радиус* $r(M) = |\overline{OM}| > 0$ и *полярный угол* $\varphi(M)$ — угол, на который следует повернуть ось u для того, чтобы ее направление совпало с направлением вектора $\overline{OM}$ (при этом, как обычно, $\varphi(M) > 0$, если поворот осуществляется против часовой стрелки, и $\varphi(M) < 0$ в противном случае). Запись $M = (r, \varphi)$ означает, что точка M имеет полярные координаты r и φ .

Полярный угол $\varphi(M)$ имеет бесконечно много возможных значений (отличающихся друг от друга на величину $2\pi n, n \in \mathbb{Z}$). Значение полярного угла, удовлетворяющего условию $0 \leq \varphi < 2\pi$, называется *главным*. В некоторых случаях главным значением полярного угла называется значение φ , удовлетворяющее условию $-\pi < \varphi \leq \pi$.

Пусть на плоскости введена правая декартова прямоугольная система координат Oxy (т.е. такая, что кратчайший поворот от оси Ox к оси Oy осуществляется против часовой стрелки) и полярная система $\langle O, u \rangle$, причем полярная ось совпадает с положительной полуосью абсцисс (рис. 5.2). Тогда связь между декартовыми и полярными

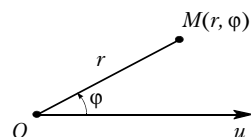


Рис. 5.1

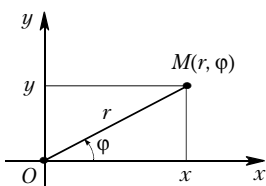


Рис. 5.2

координатами произвольной точки $M \neq O$ задается формулами

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi; \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}. \quad (5.3)$$

Уравнение кривой в полярных координатах имеет вид $F(r, \varphi) = 0$ или $r = f(\varphi)$. Оно может быть получено либо непосредственно, исходя из геометрических свойств кривой, либо переходом к полярным координатам в уравнении этой кривой, заданном в декартовых прямоугольных координатах.

ПРИМЕР 5.3. Определить кривую, заданную уравнением $r = 2a \cos \varphi$, $a > 0$.

- Заметим, что если $M = (r, \varphi)$ принадлежит заданной кривой, то для этой точки $\cos \varphi = \frac{r}{2a} \geq 0$, и, следовательно

но, вся кривая расположена в секторе $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$.

Для того чтобы построить заданную кривую, перейдем в ее уравнении к декартовым координатам. Умножив обе части уравнения $r = 2a \cos \varphi$ на r , получаем уравнение $r^2 = 2a \cdot r \cos \varphi$, откуда на основании формул (5.3) имеем $x^2 + y^2 = 2ax$, или $(x - a)^2 + y^2 = a^2$. Таким образом, заданная кривая — окружность радиуса a с центром в точке $M_0 = (a, 0)$.

ПРИМЕР 5.4. Вывести уравнение прямой в полярной системе координат.

- Если прямая l проходит через полюс и ее угловой коэффициент по отношению к полярной оси равен k , то уравнение этой прямой имеет вид $\operatorname{tg} \varphi = k$.

Пусть теперь прямая l не проходит через полюс. Запишем нормальное уравнение этой прямой в декартовой прямоугольной системе координат

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0$$

и перейдем в этом уравнении к полярным координатам. Учитывая, что $\cos \beta = \sin \alpha$, получаем

$$r \cos \varphi \cos \alpha + r \sin \varphi \sin \alpha - p = 0, \text{ т.е. } r \cos(\varphi - \alpha) = p,$$

или

$$r = \frac{p}{\cos(\varphi - \alpha)}.$$

Это уравнение и есть искомое уравнение прямой в полярной системе координат.

Записать в полярных координатах уравнения кривых, заданных в декартовых координатах.

5.13. $y = x$.

5.14. $y = 1$.

5.15. $x + y - 1 = 0$.

5.16. $x^2 + y^2 = a^2$.

5.17. $x^2 - y^2 = a^2$.

5.18. $x^2 + y^2 = ax$.

5.19. $2xy = x^2 - y^2$.

5.20. $x = y^2 - \frac{1}{4}$.

5.21. $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2)$ (лемниската Бернулли).

5.22. $y^2(1 - x) = x^3$ (циссоида).

5.23. $(x^2 + y^2)^2 = a(4x^3 - 3y^3 - 3xy^2)$ (трехлепестковая роза).

5.24. $(x^2 + y^2)^3 = 4a^2x^2y^2$ (четырёхлепестковая роза).

Записать уравнения заданных кривых в декартовых прямоугольных координатах и построить эти кривые.

5.25. $r = 5$.

5.26. $\operatorname{tg} \varphi = -1$.

5.27. $r \cos \varphi = 2$.

5.28. $r \sin \varphi = 1$.

5.29. $r = \frac{1}{\sqrt{2} \cos(\varphi + \pi/4)}$.

5.30. $r = \frac{\sqrt{2}}{\sin(\varphi + \pi/4)}$.

5.31. $r = 2a \sin \varphi$.

5.32. $\sin \varphi = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

5.33. $\sin r = \frac{1}{2}$.

5.34. $r = \cos \varphi + \sin \varphi$.

Построить графики функций в полярной системе координат.

5.35. $r = \varphi$, $\varphi \in [0, +\infty)$ (спираль Архимеда).

5.36. $r = \frac{1}{\varphi}$ (гиперболическая спираль).

5.37. $r = e^\varphi$ (логарифмическая спираль).

5.38. $r = 8 \sin\left(\varphi - \frac{\pi}{3}\right)$.

5.39. $r = \frac{1}{1 - \sin \varphi}$.

3. Алгебраические кривые второго порядка. Алгебраической кривой второго порядка называется кривая Γ , уравнение которой в декартовой системе координат имеет вид

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a_3 = 0, \quad (5.4)$$

где не все коэффициенты a_{11} , a_{12} и a_{22} равны одновременно нулю (в противном случае Γ — прямая, т.е. алгебраическая кривая первого порядка).

В некоторых случаях может оказаться, что уравнение (5.4) определяет так называемую *вырожденную* кривую (пустое множество, точку, прямую, пару прямых).

Если кривая Γ невырожденная, то для нее найдется такая декартова прямоугольная система координат, в которой уравнение имеет один из следующих видов (*каноническое уравнение*):

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a \geq b > 0, \quad (5.5)$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a, b > 0, \quad (5.6)$$

$$y^2 = 2px, \quad p > 0. \quad (5.7)$$

При этом кривая Γ называется соответственно *эллипсом*, *гиперболой* или *параболой*, а сама система координат, в которой ее уравнение имеет вид (5.5), (5.6) или (5.7), называется *канонической* системой координат для заданной кривой.

Приведение общего уравнения кривой второго порядка к каноническому виду рассматривается в 7.3. В настоящем пункте изучаются основные геометрические свойства невырожденных кривых второго порядка на основе их канонических уравнений.

Эллипс с каноническим уравнением $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a \geq b > 0$, имеет форму, изображенную на рис. 5.3.

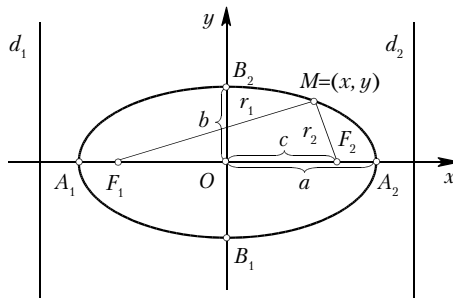


Рис. 5.3

Параметры a и b называются *полуосями* эллипса (большой и малой соответственно), точки $A_1 = (-a, 0)$, $A_2 = (a, 0)$, $B_1 = (0, -b)$ и $B_2 = (0, b)$ — его *вершинами*, оси симметрии Ox и Oy — *главными осями*, а центр симметрии O — *центром* эллипса.

Точки $F_1 = (-c, 0)$, $F_2 = (c, 0)$, где $c = \sqrt{a^2 - b^2} \geq 0$, называются *фокусами* эллипса, векторы $\overrightarrow{F_1M}$ и $\overrightarrow{F_2M}$ — *фокальными радиус-векторами*, а числа $r_1 = |\overrightarrow{F_1M}|$ и $r_2 = |\overrightarrow{F_2M}|$ — *фокальными радиусами* точки M , принадлежащей эллипсу. В частном случае $a = b$ фокусы F_1 и F_2 совпадают с центром, а каноническое уравнение имеет вид $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$, или $x^2 + y^2 = a^2$, т.е. описывает окружность радиуса a с центром в начале координат.

Число $e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$ ($0 \leq e < 1$) называется *эксцентриситетом* эллипса и является мерой его «сплюснутости» (при $e = 0$ эллипс является окружностью).

Прямые $d_1: x = -\frac{a}{e}$ и $d_2: x = \frac{a}{e}$, перпендикулярные главной оси и проходящие на расстоянии $\frac{a}{e}$ от центра, называются *директрисами* эллипса.

ПРИМЕР 5.5. Написать каноническое уравнение эллипса $x^2 + 9y^2 + 4x - 54y + 76 = 0$. Найти его характеристики:

- Приведем это уравнение к каноническому виду. Выделим полные квадраты по x и по y : $(x^2 + 4x + 4 - 4) + 9(y^2 - 6y + 9 - 9) + 76 = 0$. Тогда $(x + 2)^2 + 9(y - 3)^2 = 9$, и, поделив обе части на 9, получим каноническое уравнение эллипса $\frac{(x + 2)^2}{9} + \frac{(y - 3)^2}{1} = 1$. Его центр $C = (-2, 3)$. Полуоси: $a = 3$, $b = 1$. Для нахождения координат

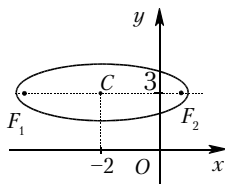


Рис. 5.4

фокусов находим параметр c (половину расстояния между фокусами): $c = \sqrt{a^2 - b^2} = 2\sqrt{2}$. Отсюда получаем фокусы $F_1 = (-2 - 2\sqrt{2}; 3)$, $F_2 = (-2 + 2\sqrt{2}; 3)$ (рис. 5.4). Эксцентриситет эллипса: $e = c / a = 2\sqrt{2} / 3$. ◀

5.40. Построить эллипс $9x^2 + 16y^2 = 144$. Найти его: полуоси, координаты фокусов, эксцентриситет и уравнения директрис.

5.41. Написать каноническое уравнение эллипса, если:

а) $a = 3$, $b = 2$; б) $a = 5$, $c = 4$; в) $c = 3$, $e = \frac{3}{5}$;

г) $b = 5$, $e = \frac{12}{13}$;

д) $c = 2$ и расстояние между директрисами равно 5;

е) $e = \frac{1}{2}$ и расстояние между директрисами равно 32.

5.42. Написать уравнение эллипса с полуосями a и b и центром в точке $C = (x_0, y_0)$, если известно, что его главные оси параллельны осям Ox и Oy .

5.43. Установить, что каждое из следующих уравнений определяет эллипс, найти его центр C , полуоси, координаты фокусов, эксцентриситет и уравнения директрис:

а) $5x^2 + 9y^2 - 30x + 18y + 9 = 0$;

б) $16x^2 + 25y^2 + 32x - 100y - 284 = 0$;

в) $4x^2 + 3y^2 - 8x + 12y - 32 = 0$.

5.44. Доказать следующие утверждения, в которых сформулированы некоторые свойства эллипса:

1) Если $M = (x, y)$ — произвольная точка эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $a \geq b$, то фокальные радиусы этой точки равны

$$r_1(M) = a + ex, \quad r_2(M) = a - ex,$$

(см. рис. 5.3). Отсюда, в частности, следует, что для всякой точки эллипса M выполняется равенство

$$r_1(M) + r_2(M) = \text{const} = 2a.$$

2) Пусть заданы точки $F_1 = (-c, 0)$ и $F_2 = (c, 0)$, где $c \geq 0$. Тогда множество точек M , удовлетворяющих условию

$|\overrightarrow{F_1M}| + |\overrightarrow{F_2M}| = \text{const} = 2a$, есть эллипс $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, где $b^2 = a^2 - c^2$.

5.45. Доказать следующие утверждения:

1) Если $M = (x, y)$ — произвольная точка эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $a > b$, $r_1(M)$ и $r_2(M)$ — фокальные радиусы этой точки, а $\rho(M, d_1)$ и $\rho(M, d_2)$ — расстояния от нее до директрис (см. **рис. 5.3**), то выполняется равенство

$$\frac{r_1(M)}{\rho(M, d_1)} = \frac{r_2(M)}{\rho(M, d_2)} = \text{const} = e.$$

2) Пусть заданы точка $F = (c, 0)$ и прямая $l: x - d = 0$, $d > c > 0$. Тогда множество точек M , удовлетворяющих условию $\frac{|\overrightarrow{FM}|}{\rho(M, l)} = \text{const} = e < 1$, есть эллипс $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, где $a = de$ и $b^2 = a^2 - c^2$.

5.46. Эллипс, главные оси которого совпадают с координатными осями, проходит через точки $M_1 = (2, \sqrt{3})$ и $M_2 = (0, 2)$. Написать его уравнение, найти фокальные радиусы точки M_1 и расстояния от этой точки до директрис.

5.47. На эллипсе $9x^2 + 25y^2 = 225$ найти точку, расстояние от которой до фокуса F_2 в четыре раза больше расстояния до фокуса F_1 .

5.48. Составить уравнение линии, каждая точка которой является серединой хорд эллипса с полуосями a и b , проведенных через конец малой оси.

5.49. Определить, как расположена прямая относительно эллипса — пересекает, касается или проходит вне его, если прямая и эллипс заданы уравнениями:

а) $2x - y - 3 = 0$, $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$;

б) $2x + y - 10 = 0$, $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$;

в) $3x + 2y - 20 = 0$, $\frac{x^2}{40} + \frac{y^2}{10} = 1$;

ПРИМЕР 5.6. Написать уравнение касательной к эллипсу $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ в его точке $M_0 = (x_0, y_0)$.

- Пусть сначала $y_0 \neq 0$, т.е. точка M_0 не совпадает ни с одной из вершин $A_1 = (-a, 0)$ и $A_2 = (a, 0)$. В этом случае уравнение $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ неявно определяет функцию $y = y(x)$, $-a < x < a$, график которой проходит через точку $M_0 = (x_0, y_0)$ и совпадает с соответствующей (верхней при $y_0 > 0$ или нижней при $y_0 < 0$) половиной эллипса. Дифференцируя по x тождество $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2(x)}{b^2} = 1$, найдем, что производная $y'(x_0)$ равна

$$y'(x_0) = -\frac{b^2 x_0}{a^2 y_0},$$

откуда уравнение касательной к эллипсу в его точке $M_0 = (x_0, y_0)$ имеет вид

$$y - y_0 = -\frac{b^2 x_0}{a^2 y_0} (x - x_0),$$

или с учетом равенства $\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1$

$$\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1. \quad (5.8)$$

Если $y_0 = 0$ (и, следовательно, $x_0 = \pm a$), то касательные к эллипсу имеют вид $x_0 = \pm a$, т.е. и в этом случае задаются формулой (5.8). ◀

5.50. Написать уравнения касательных к эллипсу:

- а) $\frac{x^2}{10} + \frac{y^2}{5/2} = 1$, параллельных прямой $3x + 2y - 5 = 0$;
 б) $\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{5} = 1$, перпендикулярных прямой $2x - 2y + 5 = 0$.

5.51. Доказать, что касательные к эллипсу $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, проведенные через концы одного и того же диаметра, параллельны.

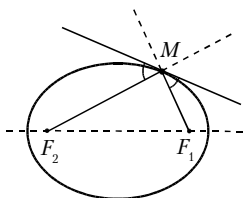


Рис. 5.5

Если прямая l касается эллипса в точке M , то фокальные радиусы $\overrightarrow{F_1M}$ и $\overrightarrow{F_2M}$ образуют равные углы с касательной l (рис. 5.5). Иначе говоря, лучи света, выпущенные из одного фокуса, отразившись от эллипса, пройдут через другой фокус (*оптическое свойство эллипса*).

5.52. Доказать, что касательная к эллипсу в его произвольной точке M составляет равные углы с фокальными радиус-векторами $\overrightarrow{F_1M}$ и $\overrightarrow{F_2M}$ этой точки.

5.53. Из левого фокуса эллипса $\frac{x^2}{45} + \frac{y^2}{20} = 1$ под тупым углом α к оси Ox направлен луч света, причем $\operatorname{tg} \alpha = -2$. Написать уравнение прямой, на которой лежит луч, отраженный от эллипса.



Гипербола с каноническим уравнением $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, $a, b > 0$, имеет форму, изображенную на рис. 5.6.

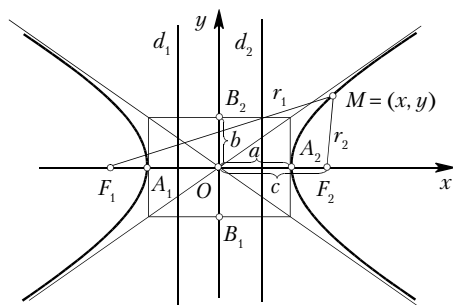


Рис. 5.6

Параметры a и b называются *полуосями* гиперболы, точки $A_1 = (-a, 0)$ и $A_2 = (a, 0)$ — ее *вершинами*, оси симметрии Ox и Oy — *действительной и мнимой осями*, а центр симметрии O — *центром* гиперболы.

Прямые $y = \pm \frac{b}{a}x$ являются асимптотами гиперболы.

Точки $F_1 = (-c, 0)$, $F_2 = (c, 0)$, где $c = \sqrt{a^2 + b^2} > 0$, называются *фокусами* гиперболы, векторы $\overrightarrow{F_1M}$ и $\overrightarrow{F_2M}$ — *фокальными радиус-векторами*, а числа $r_1 = |\overrightarrow{F_1M}|$ и $r_2 = |\overrightarrow{F_2M}|$ — *фокальными радиусами* точки M , принадлежащей гиперболе.

Число $e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}}$ ($1 < e < +\infty$) называется *эксцентриситетом* гиперболы и является мерой ее «сплюснутости». В частном случае $a = b$ гипербола называется *равносторонней*; ее эксцентриситет $e = \sqrt{2}$, а угол между асимптотами равен $\frac{\pi}{2}$.

Прямые $d_1: x = -\frac{a}{e}$ и $d_2: x = \frac{a}{e}$, перпендикулярные главной оси и проходящие на расстоянии $\frac{a}{e}$ от центра, называются *директрисами* гиперболы.

5.54. Построить гиперболу $25x^2 - 9y^2 = 225$. Найти:
а) полуоси; б) координаты фокусов; в) эксцентриситет; г) уравнения директрис.

5.55. Написать каноническое уравнение гиперболы, если:

а) $a = 2, b = 3$; б) $b = 4, c = 5$; в) $c = 3, e = \frac{3}{2}$; г) $a = 8, e = \frac{5}{4}$;

д) $c = 10$ и уравнения асимптот $y = \pm \frac{4}{3}x$;

е) $e = \frac{3}{2}$ и расстояние между директрисами равно $\frac{8}{3}$.

5.56. Написать уравнение гиперболы с асимптотами $y = \pm 0,8(x - 3) - 2$, касающейся оси Ox .

5.57. Написать уравнение гиперболы с полуосями a и b и центром в точке $C = (x_0, y_0)$, если известно, что ее действительная и мнимая оси параллельны осям Ox и Oy .

5.58. Установить, что каждое из следующих уравнений определяет гиперболу, найти ее центр C , полуоси, координаты фокусов, эксцентриситет, уравнения асимптот и директрис:

а) $16x^2 - 9y^2 - 64x - 54y - 161 = 0$.

б) $9x^2 - 16y^2 + 90x + 32y - 367 = 0$.

в) $16x^2 - 9y^2 - 64x - 18y + 199 = 0$.

5.59. Доказать следующие утверждения:

1) Если $M = (x, y)$ — произвольная точка гиперболы $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, то фокальные радиусы этой точки равны

$$r_1(M) = a + ex, \quad r_2(M) = -a + ex,$$

если точка M лежит на правой ветви гиперболы, и

$$r_1(M) = -a - ex, \quad r_2(M) = a - ex,$$

если точка M лежит на ее левой ветви. Отсюда, в частности, следует, что для всякой точки M эллипса выполняется равенство

$$|r_1(M) - r_2(M)| = \text{const} = 2a.$$

2) Пусть заданы точки $F_1 = (-c, 0)$ и $F_2 = (c, 0)$, где $c > 0$. Тогда множество точек M , удовлетворяющих условию $||\overrightarrow{F_1M}| - |\overrightarrow{F_2M}|| = \text{const} = 2a$, $a > 0$, есть гипербола $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, где $b^2 = c^2 - a^2$.

5.60. Доказать следующие утверждения:

1) Если $M = (x, y)$ — произвольная точка гиперболы $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, $r_1(M)$ и $r_2(M)$ — фокальные радиусы этой точки, а $\rho(M, d_1)$ и $\rho(M, d_2)$ — расстояния от нее до директрис (см. рис. 5.6), то выполняется равенство

$$\frac{r_1(M)}{\rho(M, d_1)} = \frac{r_2(M)}{\rho(M, d_2)} = \text{const} = e.$$

2) Пусть заданы точка $F = (c, 0)$ и прямая $l: x - d = 0$, $c > d > 0$. Тогда множество точек M , удовлетворяющих усло-

вию $\frac{|\overrightarrow{FM}|}{\rho(M, l)} = \text{const} = e > 1$, есть гипербола $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, где $a = de$ и $b^2 = c^2 - a^2$.

5.61. Убедившись, что точка $M = \left(-5, \frac{9}{4}\right)$ лежит на гиперболе $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$, найти фокальные радиусы этой точки и ее расстояния до директрис.

5.62. Найти точки гиперболы $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$, находящиеся на расстоянии 7 от фокуса F_1 .



Касательная к гиперболе является биссектрисой угла между фокальными радиусами, проведенными в точку касания, т.е. биссектрисой угла F_1MF_2 (рис. 5.7). Другими словами: лучи света, выпущенные из фокуса F_1 , отразившись от гиперболы, будут образовывать расходящийся пучок лучей, причем лучи, противоположные отраженным, проходят через фокус F_2 (оптическое свойство гиперболы).

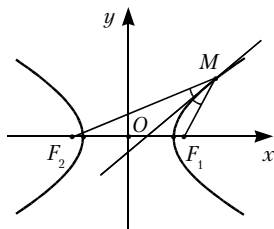


Рис. 5.7

5.63. Написать уравнение касательной к гиперболе $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ в ее точке $M_0 = (x_0, y_0)$.

5.64. Составить уравнение касательных к гиперболе:

- $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{64} = 1$, параллельных прямой $10x - 3y - 5 = 0$;
- $\frac{x^2}{20} - \frac{y^2}{5} = 1$, перпендикулярных прямой $4x + 3y - 2 = 0$.

5.65. Доказать, что касательные к гиперболе $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, проведенные через концы одного и того же диаметра, параллельны.

5.66. Доказать, что касательная к гиперболе в произвольной точке M составляет равные углы с фокальными радиус-векторами $\vec{F_1M}$ и $\vec{F_2M}$ этой точки.

5.67. Из левого фокуса гиперболы $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{4} = 1$ под углом α ($\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$) к оси Ox направлен луч света, причем $\operatorname{tg} \alpha = 2$.

Написать уравнение прямой, на которой лежит луч, отраженный от гиперболы.

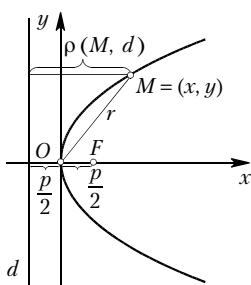


Рис. 5.8

Парабола с каноническим уравнением $y^2 = 2px$, $p > 0$, имеет форму, изображенную на рис. 5.8.

Число p называется *параметром* параболы, точка O — ее *вершиной* гиперболы, а ось Ox — осью параболы.

Точка $F = (p/2, 0)$ называется *фокусом* параболы, векторы $\vec{FM}$ — *фокальным радиус-вектором*, а число $r = |\vec{FM}|$ — *фокальным радиусом* точки M параболы.

Эксцентриситет параболы считается равным единице: $e = 1$.

Прямая $d: x = -p/2$, перпендикулярная оси и проходящая на расстоянии $p/2$ от вершины параболы, называется ее *директрисой*.

5.68. Построить параболы и найти их параметры:

а) $y^2 = 6x$; б) $x^2 = 5y$; в) $y^2 = -4x$; г) $x^2 = -y$.

5.69. Написать уравнение параболы с вершиной в начале координат, если известно, что:

а) парабола расположена в левой полуплоскости симметрично относительно оси Ox и $p = \frac{1}{2}$;

б) парабола расположена симметрично относительно оси Ox и проходит через точку $M = (4, -8)$;

в) фокус параболы находится в точке $M = (0, -3)$.

5.70. Написать уравнение параболы, если известно, что ее вершина находится в точке $A = (x_0, y_0)$, параметр

равен p , ось параллельна оси Ox и парабола расположена относительно прямой $x = x_0$:

а) в правой полуплоскости; б) в левой полуплоскости.

5.71. Построить параболы, заданные следующими уравнениями; найти координаты их вершины и величины параметра p :

а) $y^2 = 4x - 8$; б) $x^2 = 2 - y$; в) $y = 4x^2 - 8x + 7$;

г) $y = -\frac{1}{6}x^2 + 2x - 7$; д) $x = -\frac{1}{4}y^2 + y$;

е) $x = 2y^2 - 12y + 14$.

5.72. Доказать следующие утверждения:

1) Если $M = (x, y)$ — произвольная точка параболы $y^2 = 2px$, $r(M)$ — ее фокальный радиус, а $\rho(M, d)$ — расстояние от точки M до директрисы (см. рис. 5.8), то выполняется равенство

$$\frac{r(M)}{\rho(M, d)} = \text{const} = 1.$$

2) Пусть заданы точка $F = (p/2, 0)$ и прямая $d: x = -p/2$. Тогда множество точек M , удовлетворяющих условию $\frac{r(M)}{\rho(M, d)} = \text{const} = 1$, есть парабола $y^2 = 2px$.

5.73. Вычислить фокальный радиус точки M параболы $y^2 = 12x$, если $y(M) = 6$.

5.74. Написать уравнение параболы, если известны:

а) фокус $F = (4, 3)$ и директриса $d: y + 1 = 0$;

б) фокус $F = (2, -1)$ и директриса $d: x - y - 1 = 0$.



Касательная к параболе образует равные углы с осью параболы и фокальным радиусом, проведенным в точку касания (рис. 5.9). Другими словами: лучи света, выпу-

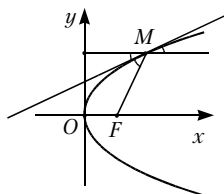


Рис. 5.9

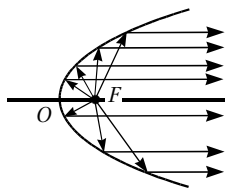


Рис. 5.10

щенные из фокуса параболы, отразившись от нее, будут образовывать пучок прямых, параллельных оси (рис. 5.10) (оптическое свойство параболы).



5.75. Написать уравнение касательной к параболе $y^2 = 2px$ в ее точке $M_0 = (x_0, y_0)$.

5.76. Составить уравнение касательной к параболе:

а) $y^2 = 8x$, параллельной прямой $4x + 4y - 5 = 0$;

б) $x^2 = 16y$, перпендикулярной прямой $x + 2y - 2 = 0$.

5.77. Доказать, что касательная к гиперболе в ее произвольной точке M составляет равные углы с фокальным радиус-вектором точки M и с лучом, исходящим из точки M и сонаправленным с осью параболы.

5.78. Из фокуса параболы $y^2 = 12x$ под острым углом α к оси Ox направлен луч света, причем $\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{4}$. Написать уравнение прямой, на которой лежит луч, отраженный от параболы.

4. Полярные уравнения эллипса, гиперболы и параболы.

ПРИМЕР 5.7. Пусть кривая Γ — эллипс, ветвь гиперболы или парабола, F — фокус этой кривой, d — соответствующая директриса. Вывести уравнение кривой Γ в полярной системе координат, полюс которой совпадает с фокусом, а полярная ось сонаправлена с осью кривой.

► Как следует из задач 5.45, 5.60 и 5.72, общее свойство эллипса, гиперболы и параболы состоит в следующем:

$$M \in \Gamma \Leftrightarrow \frac{r(M, F)}{\rho(M, d)} = \operatorname{const} = e, \quad (5.9)$$

где e — эксцентриситет кривой ($e < 1$ для эллипса, $e > 1$ для гиперболы и $e = 1$ для параболы).

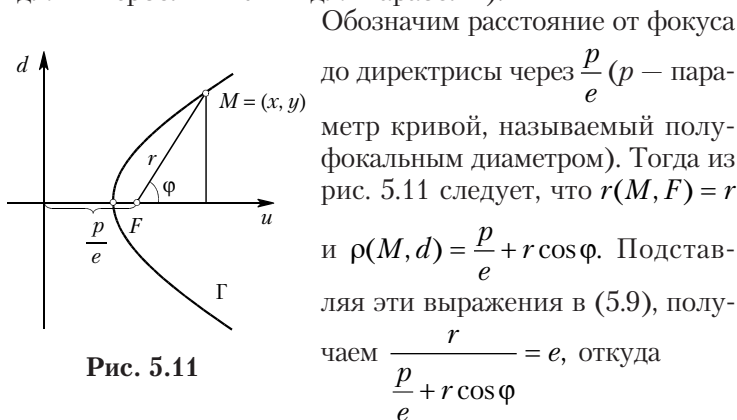


Рис. 5.11

Обозначим расстояние от фокуса до директрисы через $\frac{p}{e}$ (p — параметр кривой, называемый полуфокальным диаметром). Тогда из рис. 5.11 следует, что $r(M, F) = r$ и $\rho(M, d) = \frac{p}{e} + r \cos \varphi$. Подставляя эти выражения в (5.9), получаем $\frac{r}{\frac{p}{e} + r \cos \varphi} = e$, откуда

$$r = \frac{p}{1 - e \cos \varphi}. \quad (5.10)$$

Уравнение (5.10) и есть искомое уравнение в полярной системе координат, общее для эллипса, гиперболы и параболы. ◀

5.79. Вывести полярное уравнение эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

при условии, что полярная ось сонаправлена с осью Ox , а полюс находится в центре эллипса.

5.80. Дан эллипс $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$. Составить его полярное

уравнение, считая, что направление полярной оси совпадает с положительным направлением оси абсцисс, а полюс находится:

а) в левом фокусе; б) в правом фокусе; в) в центре эллипса.

5.81. Вывести полярное уравнение гиперболы $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

при условии, что полярная ось сонаправлена с осью Ox , а полюс находится в центре гиперболы.

5.82. Дана гипербола $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1$. Составить полярное

уравнение ее левой (правой) ветви, считая, что направление полярной оси совпадает с положительным направлением оси абсцисс, а полюс находится:

а) в левом фокусе; б) в правом фокусе.

5.83. Составить полярное уравнение параболы $y^2 = 2px$ при условии, что полярная ось сонаправлена с осью Ox , а полюс находится:

а) в фокусе параболы; б) в вершине параболы.

В задачах 5.84–5.88 установить, какие кривые заданы уравнениями в полярной системе координат, и вывести их канонические уравнения.

$$5.84. r = \frac{15}{3 - 7 \cos \varphi}. \quad 5.85. r = \frac{7}{5 - 2 \cos \varphi}. \quad 5.86. r = \frac{3}{4 - 4 \cos \varphi}.$$

$$5.87. r = \frac{5}{3 - 4 \cos \varphi}. \quad 5.88. r = \frac{5}{4 - 3 \cos \varphi}.$$

5. Преобразование декартовых координат при параллельном переносе и повороте. Общее уравнение кривой второго порядка в прямоугольной декартовой системе координат Oxy имеет вид

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a_3 = 0,$$

причем предполагается, что хотя бы одно из чисел a_{11}, a_{12}, a_{22} не равно нулю.

Существует прямоугольная декартова система координат (называемая *канонической*), в которой уравнение кривой второго порядка имеет *канонический вид*.

Рассмотрим формулы перехода к новой системе $Ox'y'$, полученной из системы Oxy поворотом вокруг точки O на угол φ

$$x = x' \cos \varphi - y' \sin \varphi, \quad y = x' \sin \varphi + y' \cos \varphi,$$

где угол φ задается уравнением $\operatorname{ctg} 2\varphi = \frac{a_{11} - a_{22}}{2a_{12}}$. Здесь

$a_{12} \neq 0$ (в противном случае выполнять поворот не требуется). Отсюда $\cos 2\varphi = \frac{\operatorname{ctg} 2\varphi}{\pm \sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 2\varphi}}$, $\sin \varphi = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos 2\varphi}{2}}$,
 $\cos \varphi = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos 2\varphi}{2}}$.

В системе координат $Ox'y'$ уравнение фигуры будет иметь вид

$$b_{11}x'^2 + b_{22}y'^2 + 2b_1x' + 2b_2y' + b = 0.$$

Используя параллельный перенос системы координат $Ox'y'$, выражаемый формулами

$$x' = x'' + c_1, \quad y' = y'' + c_2,$$

можно добиться, чтобы в уравнении исчезли члены первой степени и свободный член или, по крайней мере, некоторые из них. Новая система координат $O'x''y''$ является канонической.

ПРИМЕР 5.8. Вывести канонические уравнения кривой второго порядка и построить ее в исходной системе координат $2x^2 + xy + 2y^2 = 1$.

- Из уравнения $\operatorname{ctg} 2\varphi = \frac{a_{11} - a_{22}}{2a_{12}} = 0$ получаем, что $\varphi = 45^\circ$.

Поворотом системы координат на угол 45° можно избавиться от произведения xy в уравнении кривой. Напишем формулы поворота на угол φ

$$x = x' \cos \varphi - y' \sin \varphi, \quad y = x' \sin \varphi + y' \cos \varphi,$$

где x, y — координаты точки в исходной системе координат, а x', y' — координаты той же точки в системе координат, повернутой на угол φ (рис. 5.12). При $\varphi = 45^\circ$ получаем

$$x = \frac{x' - y'}{\sqrt{2}}, \quad y = \frac{x' + y'}{\sqrt{2}}.$$

Подставляя их в уравнение кривой, имеем

$$2\left(\frac{x' - y'}{\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{x' - y'}{\sqrt{2}} \cdot \frac{x' + y'}{\sqrt{2}} + 2\left(\frac{x' + y'}{\sqrt{2}}\right)^2 = 1,$$

откуда $\frac{3}{2}x'^2 + \frac{1}{2}y'^2 = 1$

или

$$\frac{x'^2}{(\sqrt{2/3})^2} + \frac{y'^2}{(\sqrt{1/2})^2} = 1.$$

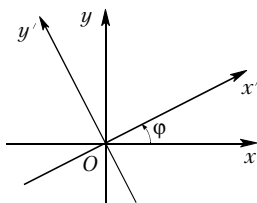


Рис. 5.12

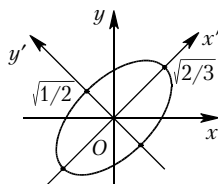


Рис. 5.13

Следовательно, данная кривая — эллипс, $a = \sqrt{2/3}$, $b = \sqrt{1/2}$ (рис. 5.13). ◀

Установить, какие плоские фигуры второго порядка задаются данными уравнениями.

5.89. $x^2 - 5x + 6 = 0$.

5.90. $9x^2 + 4y^2 - 18x + 16y - 11 = 0$.

5.91. $9x^2 + 4y^2 - 18x + 16y + 25 = 0$.

5.92. $x^2 - 4y^2 + 4x + 24y - 36 = 0$.

5.93. $x^2 - 4y^2 + 4x + 24y - 32 = 0$.

5.94. $x^2 + 4xy + 4y^2 - 4x - 8y + 3 = 0$.

$$5.95. x^2 + 4xy + 4y^2 - 4x - 8y + 4 = 0.$$

$$5.96. x^2 + 4xy + 4y^2 - 4x - 8y + 5 = 0.$$

Вывести канонические уравнения кривых второго порядка и построить данные кривые в исходной системе координат.

$$5.97. 5x^2 + 4xy + 8y^2 - 32x - 56y + 80 = 0.$$

$$5.98. 5x^2 + 4xy + 8y^2 - 32x - 56y + 116 = 0.$$

$$5.99. 5x^2 + 4xy + 5y^2 - 18x - 18y + 9 = 0.$$

$$5.100. 19x^2 + 6xy + 11y^2 + 38x + 6y + 29 = 0.$$

$$5.101. 6xy + 8y^2 - 12x - 26y + 11 = 0.$$

$$5.102. 6xy + 8y^2 - 12x - 26y + 20 = 0.$$

$$5.103. 7x^2 + 16xy - 23y^2 - 14x - 16y - 218 = 0.$$

$$5.104. x^2 + 2xy + y^2 + 3x + y = 0.$$

$$5.105. x^2 + 4xy + 4y^2 - 4x + 2y - 5 = 0.$$

$$5.106. \text{Показать, что кривая, заданная уравнением } y = \frac{1}{x},$$

есть равнобочная гиперболa. Написать каноническое уравнение, найти эксцентриситет, фокусы и уравнения директрис.

5.107. Как преобразуется уравнение гиперболы, если за оси координат принять ее асимптоты:

$$a) 2xy - 6x + 4y - 1 = 0; \quad б) 2x^2 - 12xy - 7y^2 + 8x + 6y = 0.$$

5.108. Составить уравнение параболы, фокус которой находится в точке $F = \left(-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)$ и директриса дана уравнением $3x - 3y + 8 = 0$.

5.109. Составить уравнение кривой второго порядка, зная ее эксцентриситет $e = \sqrt{5}$, фокус $F = (1, 1)$ и соответствующую директрису $x + 2y - 1 = 0$.

5.110. Написать уравнение гиперболы, если известно, что ее фокусами являются точки $F_1 = (-3, -4)$ и $F_2 = (3, 4)$, а расстояния между директрисами равно 3,6.

5.111. Написать уравнение равнобочной гиперболы, директриса которой дана уравнением $x + y - 1 = 0$ и соответствующий фокус находится в точке $F = (1, 1)$.

5.112. Написать уравнение параболы, если известны ее фокус $F = (2, -1)$ и директриса $d: x - y - 1 = 0$.

5.113. Найти фокус и директрису параболы $9x^2 - 24xy - 16y^2 - 16x - 12y - 4 = 0$.

6. Параметрические уравнения кривой. Пусть заданы функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$, непрерывные на некотором промежутке I числовой оси (промежуток I может быть интервалом (a, b) , отрезком $[a, b]$, а также одним из полуинтервалов $(a, b]$ или $[a, b)$, причем не исключаются случаи, когда $a = -\infty$ и (или) $b = +\infty$). Уравнения

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad t \in I, \quad (5.11)$$

называются *параметрическими уравнениями* кривой Γ в декартовой прямоугольной системе координат, если выполнено следующее условие: для всякого значения параметра $t \in I$ точка $M(\varphi(t), \psi(t))$ принадлежит кривой Γ и, наоборот, для всякой точки $M(x, y)$ кривой Γ существует такое значение параметра $t \in I$, что $x = \varphi(t)$ и $y = \psi(t)$. Исключением параметра t из (5.11) уравнение кривой может быть представлено в виде $F(x, y) = 0$.

ПРИМЕР 5.9. Показать, что параметрические уравнения

$$x = a \cos t, \quad y = a \sin t, \quad t \in [0, 2\pi),$$

определяют окружность $x^2 + y^2 = a^2$.

- Если точка $M(x, y)$ такова, что $x = a \cos t$ и $y = a \sin t$ для некоторого значения $t \in [0, 2\pi)$, то

$$x^2 + y^2 = a^2 \cos^2 t + a^2 \sin^2 t = a^2,$$

т.е. точка $M(x, y)$ принадлежит окружности $x^2 + y^2 = a^2$.

Верно и обратное утверждение: если точка $M(x, y)$ принадлежит окружности $x^2 + y^2 = a^2$, то, полагая $t = \widehat{(\overrightarrow{OM}, \mathbf{i})}$, $t \in [0, 2\pi)$, получим $x = a \cos t$ и $y = a \sin t$. ◀

ПРИМЕР 5.10. Кривая Γ задана полярным уравнением $r = 2R \sin \varphi$. Составить параметрические уравнения этой кривой в полярных и декартовых прямоугольных координатах, выбирая в качестве параметра полярный угол φ .

- Нетрудно убедиться, что заданная кривая — окружность радиуса R с центром в точке $C = (0, R)$. Параметрические уравнения этой кривой в полярных координатах

$$r = 2R \sin \varphi, \quad \varphi = t, \quad t \in [0, \pi).$$

Параметрические уравнения в декартовых прямоугольных координатах получаются, если в формулах перехода $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$ вместо r и φ подставить их выражения в виде функций параметра t . В итоге получим

$$\begin{cases} x = r(t) \cos \varphi(t) = R \sin 2t, \\ y = r(t) \sin \varphi(t) = R(1 - \cos 2t), \end{cases} \quad t \in [0, \pi). \quad \blacktriangleleft$$

5.114. Составить параметрические уравнения луча $\Gamma = \{(x, y) | x - y + 1 = 0, y \geq 0\}$, принимая в качестве параметра:

- а) абсциссу x ; б) ординату y ;
- в) расстояние $\rho(M, M_0)$ от точки $M \in \Gamma$ до вершины M_0 луча;
- г) полярный угол, если полюс совпадает с началом координат, а полярная ось сонаправлена с осью Ox .

5.115. Составить параметрические уравнения отрезка с концами в точках $M_1 = (1, 1)$ и $M_2 = (2, 3)$, принимая для точек $M \in [M_1, M_2]$ в качестве параметра:

- а) расстояние $\rho(M, M_1)$; б) расстояние $\rho(M, M_2)$.

5.116. Составить параметрические уравнения окружности радиуса R с центром в точке $M_0 = (x_0, y_0)$, принимая в качестве параметра t угол между осью Ox и вектором $\overrightarrow{M_0 M}$, отсчитываемый против часовой стрелки.

5.117. Составить параметрические уравнения окружности $x^2 + y^2 = 2Rx$, принимая в качестве параметра t полярный угол, если полярная ось сонаправлена с осью Ox , а полюс находится:

- а) в начале координат; б) в центре окружности.

Исключением параметра t найти уравнения заданных кривых в виде $F(x, y) = 0$ и построить эти кривые.

5.118. $x = -1 + 2t$, $y = 2 - t$, $t \in (-\infty, +\infty)$.

5.119. $x = t^2 - 2t + 1$, $y = t - 1$, $t \in (-\infty, +\infty)$.

5.120. $x = -1 + 2\cos t$, $y = 3 + 2\sin t$, $t \in [0, 2\pi)$.

5.121. $x = a \cos t$, $y = b \sin t$, $t \in [0, 2\pi)$.

5.122. $x = \frac{a}{2} \left(t + \frac{1}{t} \right)$, $y = \frac{b}{2} \left(t - \frac{1}{t} \right)$, $t \in (0, +\infty)$.

5.123. $x = 2R \cos^2 t$, $y = R \sin 2t$, $t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right)$.

5.124. $x = R \sin 2t$, $y = 2R \sin^2 t$, $t \in [0, \pi)$.

$$5.125. \quad x = 2p \operatorname{ctg}^2 t, \quad y = 2p \operatorname{ctg} t, \quad t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right].$$

5.126. Составить параметрические уравнения эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, принимая в качестве параметра t угол между осью Ox и радиус-вектором $\overrightarrow{OM}$, отсчитываемый против часовой стрелки.

5.127. Составить параметрические уравнения гиперболы $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, принимая в качестве параметра t угол между осью Ox и радиус-вектором $\overrightarrow{OM}$, отсчитываемый против часовой стрелки.

5.128. Составить параметрические уравнения параболы $y^2 = 2px$, принимая в качестве параметра t :

- а) ординату y ;
- б) угол между осью Ox и радиус-вектором $\overrightarrow{OM}$, отсчитываемый против часовой стрелки;
- в) угол между осью Ox и фокальным радиус-вектором $\overrightarrow{FM}$, отсчитываемый против часовой стрелки.

5.2. Кривые и поверхности в пространстве

1. Уравнение поверхности и кривой в декартовой прямоугольной системе координат. Говорят, что поверхность S в декартовой прямоугольной системе координат $Oxyz$ имеет уравнение

$$F(x, y, z) = 0, \quad (5.12)$$

если выполнено следующее условие: точка $M = (x, y, z)$ принадлежит поверхности S в том и только том случае, когда ее координаты x , y и z удовлетворяют уравнению (5.12). Если, в частности, $F(x, y, z) = f(x, y) - z$, то (5.12) может быть записано в виде

$$z = f(x, y). \quad (5.13)$$

Кривая Γ в пространстве в общем случае определяется как линия пересечения некоторых поверхностей S_1 и S_2

(определяемых неоднозначно), т.е. заданием системы уравнений

$$\begin{cases} F_1(x, y, z) = 0, \\ F_2(x, y, z) = 0. \end{cases} \quad (5.14)$$

ПРИМЕР 5.11. Определить какая поверхность задается следующим условием: сумма квадратов расстояний от каждой точки которой до двух точек F_1 и F_2 равна постоянной величине $4a^2$, а расстояние между точками F_1 и F_2 равно $2a$.

- Введем в пространстве прямоугольную декартову систему координат $Oxyz$ с центром O в середине отрезка F_1F_2 и осью Ox , содержащей отрезок F_1F_2 . Направление оси Ox выберем так, чтобы точки F_1 и F_2 имели координаты $F_1 = (-a, 0, 0)$ и $F_2 = (a, 0, 0)$. Пусть точка $M = (x, y, z)$ лежит на искомой поверхности. Тогда

$$F_1M = \sqrt{(x+a)^2 + y^2 + z^2} \quad \text{и} \quad F_2M = \sqrt{(x-a)^2 + y^2 + z^2}.$$

По условию $F_1M^2 + F_2M^2 = 4a^2$, откуда получаем

$$\left(\sqrt{(x+a)^2 + y^2 + z^2}\right)^2 + \left(\sqrt{(x-a)^2 + y^2 + z^2}\right)^2 = 4a^2$$

$$\text{или} \quad (x+a)^2 + y^2 + z^2 + (x-a)^2 + y^2 + z^2 = 4a^2.$$

Следовательно, во введенной системе координат искомая поверхность имеет уравнение

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2.$$

Полученное уравнение задает сферу радиуса a с центром в середине отрезка F_1F_2 . ◀

ПРИМЕР 5.12. Исследовать форму кривой Γ , заданной уравнениями

$$\begin{cases} (x-1)^2 + y^2 + z^2 = 36, \\ y + z = 0. \end{cases} \quad (5.15)$$

Определить вид ее проекций на плоскость Oxy .

- Кривая Γ задана как линия пересечения сферы $(x-1)^2 + y^2 + z^2 = 36$ с плоскостью $y + z = 0$ и, следовательно, есть окружность. Так как центр сферы $C = (1, 0, 0)$ лежит в плоскости сечения $y + z = 0$, то

центр окружности совпадает с точкой C , а ее радиус равен радиусу сферы, т.е. $R = 4$.

Установим форму проекции окружности Γ на плоскость Oxy . Исключая z из системы (5.15), получаем

$$(x-1)^2 + 2y^2 = 36, \text{ или } \frac{(x-1)^2}{36} + \frac{y^2}{18} = 1. \text{ Отсюда заключаем, что искомая проекция — эллипс, главные оси которого сонаправлены с осями } Ox \text{ и } Oy, \text{ центр находится в точке } C = (1, 0), \text{ а полуоси равны } a = 6, b = 3\sqrt{2}. \blacktriangleleft$$

5.129. Вывести уравнение поверхности, каждая точка которой расположена вдвое ближе к точке $A = (2, 0, 0)$, чем к точке $B = (-4, 0, 0)$.

Установить, какие геометрические образы определяются заданными уравнениями.

$$\mathbf{5.130.} \quad z + 5 = 0. \quad \mathbf{5.131.} \quad x + 2y + 3z = 0.$$

$$\mathbf{5.132.} \quad (x-1)^2 + y^2 + (z+2)^2 = 36.$$

$$\mathbf{5.133.} \quad 2x^2 + 3y^2 + 4z^2 = 0.$$

$$\mathbf{5.134.} \quad x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 7 = 0. \quad \mathbf{5.135.} \quad x^2 + 4y^2 = 0.$$

$$\mathbf{5.136.} \quad x^2 - 4z^2 = 0. \quad \mathbf{5.137.} \quad x^2 + 4x = 0.$$

$$\mathbf{5.138.} \quad xz = 0. \quad \mathbf{5.139.} \quad xyz = 0.$$

5.140. Вывести уравнение поверхности, разность квадратов расстояний от каждой точки которой до точек $F_1 = (2, 3, -5)$ и $F_2 = (2, -7, -5)$ равна 13.

Установить, какие кривые определяются заданными уравнениями.

$$\mathbf{5.141.} \quad \begin{cases} x - 5 = 0, \\ z + 2 = 0. \end{cases} \quad \mathbf{5.142.} \quad \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 36, \\ y = 0. \end{cases}$$

$$\mathbf{5.143.} \quad \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 20, \\ z - 2 = 0. \end{cases} \quad \mathbf{5.144.} \quad \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 49, \\ x^2 + y^2 + z^2 - 4z - 25 = 0. \end{cases}$$

Найти центр и радиус окружности.

$$\mathbf{5.145.} \quad \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 10y, \\ x + 2y + 2z - 19 = 0. \end{cases}$$

$$\mathbf{5.146.} \quad \begin{cases} (x-3)^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 100, \\ 2x - 2y - z + 9 = 0. \end{cases}$$

2. Алгебраические поверхности второго порядка. Алгебраической поверхностью второго порядка называют поверхность S , уравнение которой в некоторой декартовой прямоугольной системе координат имеет вид

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_1x + 2a_2y + 2a_3z + a_4 = 0, \quad (5.16)$$

причем предполагается, что хотя бы одно из чисел a_{11}, a_{22}, a_{33} ненулевое (в противном случае S — алгебраическая поверхность первого порядка, т.е. плоскость).

В общем случае может оказаться, что уравнение (5.16) определяет так называемую *вырожденную* поверхность (пустое множество, точку, плоскость, пару плоскостей). Если же поверхность *невырожденная*, то преобразованием декартовой прямоугольной системы координат ее уравнение может быть приведено к одному из указанных ниже видов, называемых *каноническими* и определяющих тип поверхности (*канонические уравнения*):

1. *Эллипсоид* $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ (рис. 5.14)

2. *Гиперболоид*:

а) *однополостный* $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ (рис. 5.15);

б) *двуполостный* $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$ (рис. 5.16).

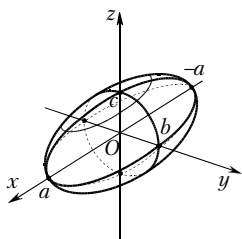


Рис. 5.14

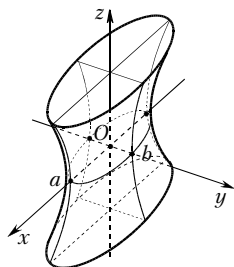


Рис. 5.15

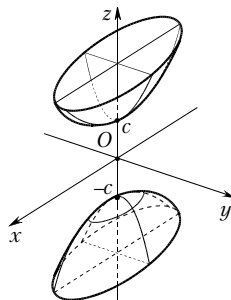


Рис. 5.16

3. Конус второго порядка $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$ (рис. 5.17).

4. Параболоид:

а) эллиптический $z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ (рис. 5.18);

б) гиперболический $z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$ (рис. 5.19).

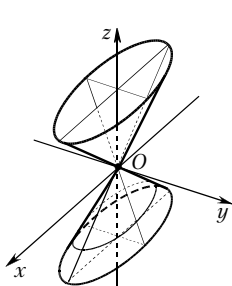


Рис. 5.17

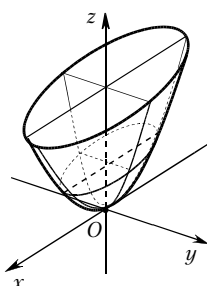


Рис. 5.18

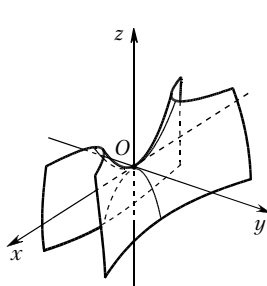


Рис. 5.19

5. Цилиндр второго порядка:

а) эллиптический $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (рис. 5.20);

б) гиперболический $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ (рис. 5.21);

в) параболический $y^2 = 2px$ (рис. 5.22).

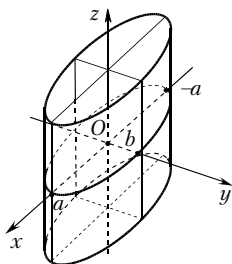


Рис. 5.20

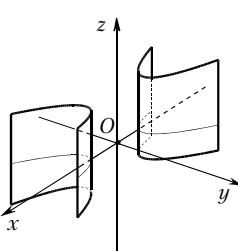


Рис. 5.21

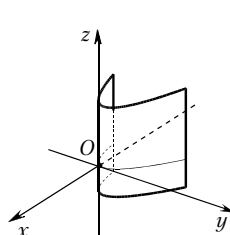


Рис. 5.22

6. Мнимый эллипсоид: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1$ (эта «поверхность» не имеет действительных точек).

7. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0$ — точка или мнимый конус с действительной вершиной.

8. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$ — мнимый эллиптический цилиндр (эта «поверхность» не имеет действительных точек).

9. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$ — пара пересекающихся плоскостей.

10. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$ — пара мнимых плоскостей с общей действительной прямой.

11. $x^2 = A$, $A > 0$ — пара параллельных плоскостей.

12. $x^2 = 0$ — пара совпадающих плоскостей.

Общие методы приведения уравнения (5.16) к каноническому виду опираются на теорию квадратичных форм и рассматриваются в пункте 7 параграфа 3.4. Цель настоящего пункта состоит в изучении основных геометрических свойств невырожденных поверхностей второго порядка с использованием их канонических уравнений.

Одним из основных методов исследования формы поверхности по ее уравнению является *метод сечений*.

ПРИМЕР 5.13. Методом сечений исследовать форму и построить поверхность, заданную уравнением

$$z = 2 - \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{25}.$$

► В сечении поверхности горизонтальной плоскостью $z = h$ получаем кривую Γ_h , проекция которой на плоскость Oxy определяется уравнением

$$h = 2 - \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{25}$$

или

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 2 - h. \quad (5.17)$$

Уравнение (5.17) при $h > 2$ не имеет решений относительно (x, y) . Это означает, что рассматриваемая поверхность целиком расположена ниже плоскости $z = 2$. При $h \leq 2$ уравнение (5.17) определяет эллипс с полуосями $a = 4\sqrt{2-h}$ и $b = 5\sqrt{2-h}$, вырождающийся в точку $x = y = 0$ при $h = 2$. Заметим, что все эллипсы, получающиеся в сечении поверхности плоскостями $z = h \leq 2$, подобны между собой $\left(\frac{a}{b} = \text{const} = \frac{4}{5}\right)$, причем

с уменьшением h их полуоси неограниченно и монотонно возрастают.

Полученной информации достаточно, чтобы построить эскиз поверхности. Дальнейшее уточнение ее формы можно получить, если рассматривать сечения координатными плоскостями Oxy и Oyz . Сечение плоскостью Oxy : $y = 0$ дает кривую $x^2 = 16(2-z)$, т.е. параболу с параметром $p = 8$, вершиной в точке $x = 0, z = 2$ и ветвями, направленными в сторону убывания значений z . Наконец, сечение плоскостью Oyz : $x = 0$ дает кривую $y^2 = 25(2-z)$ с параметром $p = \frac{25}{2}$, вершиной в точке

$y = 0, z = 2$ и аналогично направленными ветвями. Выполненное исследование позволяет теперь достаточно детально изобразить заданную поверхность (рис. 5.23). ◀

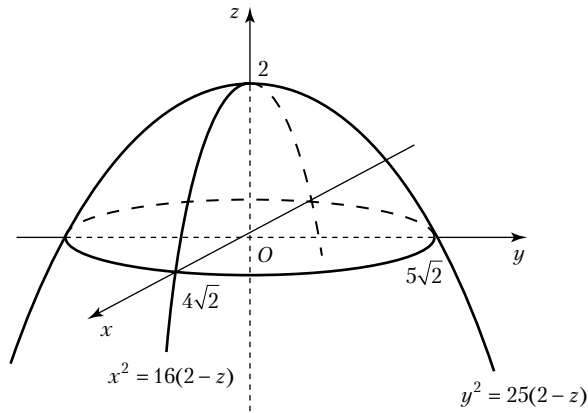


Рис. 5.23

Установить тип заданных поверхностей и построить их.

$$5.147. \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{25} = 1. \quad 5.148. x^2 + y^2 - z^2 = -1.$$

$$5.149. x^2 + y^2 = 2az, \quad a \neq 0. \quad 5.150. 2z = x^2 + \frac{y^2}{2}.$$

$$5.151. z = 2 + x^2 + y^2. \quad 5.152. x^2 + y^2 - z^2 = 4.$$

$$5.153. \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{36} = 1. \quad 5.154. x^2 - y^2 = z^2.$$

$$5.155. x^2 - y^2 = 2az, \quad a \neq 0. \quad 5.156. x^2 = 2az, \quad a \neq 0.$$

$$5.157. \frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{4} = 6z. \quad 5.158. x^2 - \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} + 4 = 0.$$

$$5.159. x^2 + 2y^2 + 6x - 18y + 8z + 49 = 0.$$

$$5.160. 2x^2 - 3y^2 + 12x + 12y - 12z - 42 = 0.$$

5.161. Написать уравнение поверхности, полученной вращением вокруг оси Ox прямой $\begin{cases} z - 2 = 0, \\ y = 0. \end{cases}$

5.162. Написать уравнение поверхности, полученной вращением эллипса $\begin{cases} \frac{x^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1, \\ y = 0 \end{cases}$ вокруг оси:

а) Ox ; б) Oz .

5.163. Даны вершины эллипсоида $A_1 = (8, 0, 0)$, $A_2 = (-2, 0, 0)$. Написать уравнение этого эллипсоида, если известно, что плоскость Oyz пересекает его по эллипсу:

$$x = 0, \quad \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1.$$

5.164. Написать уравнение кругового конуса, если:

а) ось Oz является его осью, вершина находится в начале координат, точка $M = (3, -4, 7)$ лежит на конусе;

б) ось Oy является его осью, вершина находится в начале координат, а образующие составляют с осью Oy угол $\frac{\pi}{3}$.

5.165. Доказать, что уравнение $z^2 = xy$ определяет конус с вершиной в начале координат.

5.166. Доказать, что уравнение $z = xy$ определяет гиперболический параболоид.

5.167. Написать уравнения проекций на координатные плоскости сечения эллиптического параболоида $y^2 + z^2 = x$ плоскостью $x + 2y - z = 0$.

5.168. Доказать, что через точку $A = (4, 3, 0)$, принадлежащую гиперболическому параболоиду $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 2z$, проходят две прямые, все точки которых лежат на поверхности параболоида. Написать их уравнения.

5.169. Доказать, что через точку $A = (2, 3, -4)$ однополостного гиперболоида $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{16} = 1$ проходят две прямые, все точки которых лежат на поверхности гиперболоида. Написать их уравнения.

5.170. Написать уравнения поверхности, отношение расстояний каждой точки которой от точки $F = (0, 0, 2)$ и плоскости $z = 1$ равно $\sqrt{2}$.

5.171. Написать уравнения поверхности, каждая точка которой одинаково удалена от точки $F = (-a, 0, 2)$ и плоскости $x = a$.

5.172. Написать каноническое уравнение однополостного гиперболоида, содержащего:

а) точку $M = (\sqrt{5}, 3, 2)$ и фигуру
$$\begin{cases} \frac{x^2}{5} - \frac{z^2}{4} = 1, \\ y = 0; \end{cases}$$

б) фигуры
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 9, \\ z = 0 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} \frac{x^2}{9} - \frac{z^2}{10} = 1, \\ y = 0. \end{cases}$$

5.173. Написать каноническое уравнение двуполостного гиперболоида, содержащего:

а) точки $M_1 = (3, 1, 2)$, $M_2 = (2, \sqrt{11}, 3)$ и $M_3 = (6, 2, \sqrt{15})$;

б) фигуры
$$\begin{cases} \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = -1, \\ z = 0 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{16} = 1, \\ x = 0. \end{cases}$$

5.174. Установить, какие кривые определяются следующими уравнениями:

$$\text{а) } \begin{cases} \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{6} = 2z, \\ 3x - y + 6z - 14 = 0. \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{3} = 2z, \\ x - 2y + 2 = 0. \end{cases}$$

Найти точки пересечения поверхностей и прямых, перейдя к параметрическим уравнениям прямых.

$$\text{5.175. } \frac{x^2}{81} + \frac{y^2}{36} + \frac{z^2}{9} = 1 \quad \text{и} \quad \frac{x-3}{3} = \frac{y-4}{-6} = \frac{z+2}{4}.$$

$$\text{5.176. } \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{4} = 1 \quad \text{и} \quad \frac{x}{4} = \frac{y}{-3} = \frac{z+2}{4}.$$

$$\text{5.177. } \frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{3} = z \quad \text{и} \quad \frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+3}{-2}.$$

Глава 6

СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

6.1. Правило Крамера

Пусть задана система n линейных уравнений с n неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n, \end{cases} \quad (6.1)$$

или в матричной форме $AX = B$, где

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Правило Крамера. Если в системе (6.1) $\det A = \Delta \neq 0$, то система (6.1) имеет, и притом единственное решение

$$X = A^{-1}B,$$

или в покомпонентной записи

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Lambda}, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

где Δ_i — определитель, получаемый из определителя Δ заменой i -го столбца на столбец свободных членов.



ПРИМЕР 6.1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 6, \\ x_1 + 5x_2 = -3. \end{cases}$$

► Матрица $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 5 & 0 \end{pmatrix}$ невырожденная, так как

$\det A = -2 \neq 0$. Присоединенная матрица

$$A^\vee = \begin{pmatrix} -5 & 1 & 11 \\ 5 & -1 & -13 \\ 3 & -1 & -7 \end{pmatrix},$$

следовательно, $A^{-1} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -5 & 5 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 11 & -13 & -7 \end{pmatrix}$.

Тогда

$$X = A^{-1}B = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -5 & 5 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 11 & -13 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ т.е.}$$

$$x_1 = 2, x_2 = -1, x_3 = 1. \quad \blacktriangleleft$$

Решить системы уравнений, используя правило Крамера.

$$6.1. \begin{cases} 3x - 5y = 16, \\ 2x + 7y = -10. \end{cases} \quad 6.2. \begin{cases} 3x - 4y = 7, \\ 3x + 4y = -1. \end{cases}$$

$$6.3. \begin{cases} 7x + 2y + 3z = 15, \\ 5x - 3y + 2z = 15, \\ 10x - 11y + 5z = 36. \end{cases} \quad 6.4. \begin{cases} x + y + 2z = -1, \\ 2x - y + 2z = -4, \\ 4x + y + 4z = -2. \end{cases}$$

$$6.5. \begin{cases} 4x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 5x_4 = 0, \\ 2x_1 + 3x_3 - x_4 = 10, \\ x_1 + x_2 - 5x_3 = -10, \\ 3x_2 + 2x_3 = 1. \end{cases}$$

$$6.6. \begin{cases} 2x_1 + x_2 - 5x_3 + x_4 = 8, \\ x_1 - 3x_2 - 6x_4 = 9, \\ 2x_2 - x_3 + 2x_4 = -5, \\ x_1 - 4x_2 - 7x_3 + 6x_4 = 0. \end{cases}$$

6.7. Доказать, что для любых различных чисел x_1, x_2, x_3 и любых чисел y_1, y_2, y_3 существует, и притом только один, многочлен $y = f(x)$ степени ≤ 2 , для которого $f(x_i) = y_i, i = 1, 2, 3$. Когда степень этого многочлена < 2 (равна 1, равна 0)?

По заданным условиям найти многочлен $y = f(x)$.

$$6.8. f(1) = -1, f(-1) = 9, f(2) = -3.$$

$$6.9. f_j(x_i) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j \end{cases} \quad i, j = 1, 2, 3.$$

Решить системы уравнений, используя правило Крамера.

$$6.10. \begin{cases} 5x_1 + 8x_2 + x_3 = 2, \\ 3x_1 - 2x_2 + 6x_3 = -7, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = -5. \end{cases} \quad 6.11. \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -7, \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 = -1, \\ x_1 - 4x_2 = -5, \end{cases}$$

$$6.12. \begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 12, \\ 3x_1 + 5x_2 + 7x_3 + x_4 = 0, \\ 5x_1 + 7x_2 + x_3 + 3x_4 = 4, \\ 7x_1 + x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 16. \end{cases}$$

$$6.13. \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 + 3 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 5x_4 + 6 = 0, \\ 6x_1 + 8x_2 + x_3 + 5x_4 + 8 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 7x_4 + 8 = 0. \end{cases}$$

$$6.14. \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 13, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 10, \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 11, \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 + 2x_5 = 6, \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 + x_5 = 3. \end{cases}$$

► Выпишем основную и расширенную матрицы системы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -3 \\ 4 & 0 & 1 & -7 \\ 0 & 2 & -3 & 1 \\ 2 & 3 & -4 & -2 \end{pmatrix}, \quad \bar{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -3 & 2 \\ 4 & 0 & 1 & -7 & 3 \\ 0 & 2 & -3 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -4 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Так как $\text{rang } A = \text{rang } \bar{A} = 2$, то исходная система совместна. Выберем в качестве базисного минор $M_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 0 \end{vmatrix}$.

Тогда неизвестные x_1, x_2 — базисные, x_3, x_4 — свободные, а укороченная система имеет вид

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 2 + x_3 + 3x_4, \\ 4x_1 = 3 - x_3 + 7x_4. \end{cases}$$

Полагая $x_3 = c_1, x_4 = c_2$ и решая относительно базисных неизвестных, получаем

$$\begin{cases} x_1 = \frac{3}{4} - \frac{1}{4}c_1 + \frac{7}{4}c_2, \\ x_2 = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}c_1 - \frac{1}{2}c_2, \end{cases}$$

следовательно, общее решение исходной системы имеет вид

$$X(c_1, c_2) = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} - \frac{1}{4}c_1 + \frac{7}{4}c_2 \\ \frac{1}{2} + \frac{3}{2}c_1 - \frac{1}{2}c_2 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}. \quad \blacktriangleleft$$

Исследовать совместность и найти общие решения систем уравнений.

$$6.15. \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 1, \\ 4x_1 - 6x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 2, \\ 2x_1 - 3x_2 - 11x_3 - 15x_4 = 1. \end{cases}$$

$$6.16. \begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 6, \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 4, \\ 9x_1 + 4x_2 + x_3 + 7x_4 = 2. \end{cases}$$

$$6.17. \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 + x_5 = 4, \\ 3x_1 + 6x_2 + 5x_3 - 4x_4 + 3x_5 = 5, \\ x_1 + 2x_2 + 7x_3 - 4x_4 + x_5 = 11, \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 3x_4 + 3x_5 = 6. \end{cases}$$

$$6.18. \begin{cases} 6x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 5, \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 4, \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_5 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + 7x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 1. \end{cases}$$

2. Однородные системы. Однородная система $AX = O$ всегда совместна, так как имеет тривиальное решение $X = O$. Для существования нетривиального решения однородной системы необходимо и достаточно, чтобы $r = \text{rang } A < n$ (при $m = n$ это условие означает, что $\det A = 0$).

Пусть $Q \subset \mathbb{R}^n$ — множество всех решений однородной системы. Всякий базис в множестве Q состоит из $n - r$ векторов $e_1, \dots, e_{n-r}$. Соответствующая ему в каноническом базисе (см 3.4) система вектор-столбцов $E_1, \dots, E_{n-r}$ называется *фундаментальной системой решений*. Общее решение однородной системы тогда принимает вид

$$X = c_1 E_1 + \dots + c_{n-r} E_{n-r},$$

где $c_1, \dots, c_{n-r}$ — произвольные постоянные.

Базисные решения $E_1, \dots, E_{n-r}$ могут быть получены по формуле (6.6), если свободным неизвестным придавать поочередно значение 1, полагая остальные равными 0.

ПРИМЕР 6.3. Найти фундаментальную систему решений и общее решение однородной системы уравнений

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 8x_3 + 2x_4 + x_5 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 7x_4 + 2x_5 = 0, \\ x_1 + 11x_2 - 12x_3 + 34x_4 - 5x_5 = 0, \\ x_1 - 5x_2 + 2x_3 - 16x_4 + 3x_5 = 0. \end{cases}$$

► Ранг матрицы коэффициентов

$$A = \left(\begin{array}{cc|ccc} 3 & 1 & -8 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & -3 & -7 & 2 \\ 1 & 11 & -12 & 34 & -5 \\ 1 & -5 & 2 & -16 & 3 \end{array} \right) \text{ равен } r = 2.$$

Выберем в качестве базисного минор $M_2 = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} \neq 0$.

Тогда укороченная система имеет вид

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 = 8x_3 - 2x_4 - x_5, \\ 2x_1 - 2x_2 = 3x_3 + 7x_4 - 2x_5, \end{cases}$$

откуда, полагая $x_3 = c_1, x_4 = c_2, x_5 = c_3$, находим

$$\begin{cases} x_1 = \frac{19}{8}c_1 + \frac{3}{8}c_2 - \frac{1}{2}c_3, \\ x_2 = \frac{7}{8}c_1 - \frac{25}{8}c_2 + \frac{1}{2}c_3. \end{cases}$$

Общее решение исходной системы имеет вид

$$X(c_1, c_2, c_3) = \begin{pmatrix} \frac{19}{8}c_1 + \frac{3}{8}c_2 - \frac{1}{2}c_3 \\ \frac{7}{8}c_1 - \frac{25}{8}c_2 + \frac{1}{2}c_3 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}.$$

Из общего решения находим фундаментальную систему решений

$$E_1 = X(1, 0, 0) = \begin{pmatrix} \frac{19}{8} \\ \frac{7}{8} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, E_2 = X(0, 1, 0) = \begin{pmatrix} \frac{3}{8} \\ -\frac{25}{8} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \dots,$$

$$E_3 = X(0, 0, 1) = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

С использованием фундаментальной системы решений общее решение однородной системы может быть записано в виде $X(c_1, c_2, c_3) = c_1 E_1 + c_2 E_2 + c_3 E_3$. ◀

6.19. Доказать, что всякая линейная комбинация решений однородной системы уравнений является ее решением.

Найти фундаментальную систему решений и общее решение однородной системы уравнений.

$$6.20. \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0, \\ 2x_1 + 9x_2 - 3x_3 = 0. \end{cases} \quad 6.21. \begin{cases} x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 0, \\ -2x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 0. \end{cases}$$

$$6.22. \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 0, \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases} \quad 6.23. \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$$

$$6.24. \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 0, \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 8x_2 + 24x_3 - 19x_4 = 0. \end{cases}$$

$$6.25. \begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0, \\ 4x_1 - 8x_2 + 17x_3 + 11x_4 = 0. \end{cases}$$

$$6.26. \begin{cases} 6x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 5x_4 + 7x_5 = 0, \\ 9x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 8x_4 + 9x_5 = 0, \\ 6x_1 - 2x_2 + 6x_3 + 7x_4 + x_5 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + 4x_3 + 4x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$$

$$6.27. \begin{cases} x_1 + x_3 + x_5 = 0, \\ x_2 - x_4 + x_6 = 0, \\ x_1 - x_2 - x_5 - x_6 = 0, \\ x_2 + x_3 + x_6 = 0, \\ x_1 - x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$$

$$6.28. \begin{cases} 5x_1 + 6x_2 - 2x_3 + 7x_4 + 4x_5 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 4x_4 + 2x_5 = 0, \\ 7x_1 + 9x_2 - 3x_3 + 5x_4 + 6x_5 = 0, \\ 5x_1 + 9x_2 - 3x_3 + x_4 + 6x_5 = 0. \end{cases}$$



Если задана неоднородная система линейных уравнений общего вида $AX = B$, то ее общее решение может быть найдено как сумма общего решения соответствующей однородной системы $AX = O$ и произвольного частного решения неоднородной системы.



Найти решения данных систем линейных уравнений общего вида как сумму общего решения соответствующей однородной системы и произвольного частного решения неоднородной системы.

$$6.29. \begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = 1, \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5 = 0, \\ 3x_1 + 3x_2 - 3x_3 - 3x_4 + 4x_5 = 2, \\ 4x_1 + 5x_2 - 5x_3 - 5x_4 + 7x_5 = 3. \end{cases}$$

$$6.30. \begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 1, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 = 1, \\ 4x_1 - 10x_2 + 5x_3 - 5x_4 + 7x_5 = 1, \\ 2x_1 - 14x_2 + 7x_3 - 7x_4 + 11x_5 = -1. \end{cases}$$

$$6.31. \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 - x_6 = 1, \\ 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 + x_4 - x_5 + x_6 = 1. \end{cases}$$

$$6.32. \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 0, \\ x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 4x_4 - 5x_5 = 2, \\ 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 = -1. \end{cases}$$

- Производя элементарные преобразования над строками расширенной матрицы, получим

$$\begin{aligned} \bar{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 & -3 \\ 3 & -1 & -2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & -1 & 4 \\ 1 & 3 & -2 & -2 & 7 \end{array} \right) &\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 5 & -2 & -3 & 10 \\ 0 & 5 & -2 & -3 & 10 \\ 0 & 5 & -2 & -3 & 10 \end{array} \right) \rightarrow \\ &\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -4/5 & -1/5 & 1 \\ 0 & 1 & -2/5 & -3/5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right). \end{aligned}$$

Первые две строки последней матрицы составляют расширенную матрицу системы уравнений

$$\begin{cases} x_1 - \frac{4}{5}x_3 - \frac{1}{5}x_4 = 1, \\ x_2 - \frac{2}{5}x_3 - \frac{3}{5}x_4 = 2, \end{cases}$$

эквивалентной исходной. Считая неизвестные x_1, x_2 базисными, а x_3, x_4 свободными, получаем общее решение исходной системы

$$X(c_1, c_2) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \frac{4}{5}c_1 + \frac{1}{5}c_2 \\ 2 + \frac{2}{5}c_1 + \frac{3}{5}c_2 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}. \quad \blacktriangleleft$$

Решить системы уравнений.

$$6.33. \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0, \\ 7x_1 + 14x_2 + 20x_3 + 27x_4 = 0, \\ 5x_1 + 10x_2 + 16x_3 + 19x_4 = -2, \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 + 13x_4 = 5. \end{cases}$$

$$6.34. \begin{cases} x_1 + x_2 & = 1, \\ x_1 + x_2 + x_3 & = 4, \\ x_2 + x_3 + x_4 & = -3, \\ x_3 + x_4 + x_5 & = 2, \\ x_3 + x_4 + & = -1. \end{cases}$$

- 6.35.
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 3, \\ x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 2, \\ 2x_1 + 9x_2 + 8x_3 + 3x_4 = 7, \\ 3x_1 + 7x_2 + 7x_3 + 2x_4 = 12, \\ 5x_1 + 7x_2 + 9x_3 + 2x_4 = 20. \end{cases}$$
- 6.36.
$$\begin{cases} 8x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 21, \\ 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 1x_4 = 10, \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 1x_4 = 8, \\ 3x_1 + 5x_2 + 1x_3 + 1x_4 = 15, \\ 7x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 18. \end{cases}$$
- 6.37.
$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 + 2x_5 = -2, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 - x_5 = -3, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 10, \\ x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 = -5, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 + 4x_5 = 1. \end{cases}$$
- 6.38.
$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 2, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 3, \\ 9x_1 + x_2 + 4x_3 - 5x_4 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5, \\ 7x_1 + x_2 + 6x_3 - x_4 = 7. \end{cases}$$
- 6.39.
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 13, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 10, \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 11, \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 + 2x_5 = 6, \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 + x_5 = 3. \end{cases}$$

Глава 7

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

7.1. Линейные пространства и пространства со скалярным произведением

1. Линейное пространство. Множество $\mathcal{L}$ будем называть *линейным (векторным) пространством*, если выполнены следующие условия.

1. В $\mathcal{L}$ введена операция сложения элементов, которая всякой паре элементов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ из $\mathcal{L}$ ставит в соответствие однозначно определенный элемент $\mathbf{z} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$ из $\mathcal{L}$, называемый их *суммой*. Операция сложения элементов удовлетворяет следующим свойствам:

а) $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}$; б) $(\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z} = \mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z})$;
в) $\exists \mathbf{0} \in \mathcal{L} : \forall \mathbf{x} \in \mathcal{L} \quad \mathbf{0} + \mathbf{x} = \mathbf{x}$ (элемент $\mathbf{0}$ называется *нулевым*);

г) $\forall \mathbf{x} \in \mathcal{L} \quad \exists (-\mathbf{x}) \in \mathcal{L} : \mathbf{x} + (-\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ (элемент $(-\mathbf{x})$ называется *противоположным* элементу $\mathbf{x}$).

2. В $\mathcal{L}$ введена операция умножения элементов на действительные (комплексные) числа, которая всякому действительному (комплексному) числу λ и всякому элементу $\mathbf{x}$ из $\mathcal{L}$ ставит в соответствие определенный элемент $\mathbf{y} = \lambda \mathbf{x} \in \mathcal{L}$. Операция умножения элемента на число удовлетворяет следующим свойствам:

а) $1 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x}$; б) $\lambda(\mu \mathbf{x}) = (\lambda\mu)\mathbf{x}$.

3. Операции сложения элементов и умножения их на число удовлетворяют свойствам дистрибутивности:

а) $\lambda(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \lambda \mathbf{x} + \lambda \mathbf{y}$; б) $(\lambda + \mu)\mathbf{x} = \lambda \mathbf{x} + \mu \mathbf{x}$.

Элементы линейного пространства называются *векторами*. Пространство $\mathcal{L}$ называется *действительным*, если в $\mathcal{L}$ операция умножения векторов на число определена только для действительных чисел, и *комплексным*, если — для комплексных чисел.



Проверить, являются ли множества линейными пространствами:

7.1. Множества $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2, \mathcal{V}_3$ геометрических векторов с операциями сложения и умножения вектора на действительное число, определенными обычным образом (см. 4.1).

7.2. Множество $\mathbb{R}^n$ всех арифметических n -компонентных векторов $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, для которых операция сложения векторов $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ и $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ определена покомпонентно, т.е. $\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n)$, а произведением вектора $\mathbf{a}$ на число λ называется вектор $\lambda \mathbf{a} = (\lambda a_1, \lambda a_2, \dots, \lambda a_n)$.

7.3. Множество $\mathcal{C}_{[a,b]}$ всех функций $f(x)$, непрерывных на отрезке $[a, b]$, с обычным образом введенными операциями сложения функций и умножения их на число.

7.4. Множество $\mathcal{P}_n$ всех многочленов $p(t) = a_{n-1}t^{n-1} + \dots + a_1t + a_0$ степени, не превышающей $n-1$, с обычным образом введенными операциями сложения многочленов и умножения их на число.

7.5. Множество $M_{m,n}$ всех матриц размера $m \times n$ с операциями сложения матриц и умножения матрицы на число.

7.6. Множество всех сходящихся последовательностей.

2. Конечномерное пространство. Базис в n -мерном пространстве. Система векторов $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_k\} \subset \mathcal{L}$ называется *линейно зависимой*, если найдутся числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$, не равные одновременно нулю и такие, что $\lambda_1 \mathbf{x}_1 + \lambda_2 \mathbf{x}_2 + \dots + \lambda_k \mathbf{x}_k = \mathbf{0}$; в противном случае эта система называется *линейно независимой*.

Пусть $Q \subset \mathcal{L}$ — произвольное конечное или бесконечное множество векторов линейного пространства. Упорядоченная система векторов $\mathfrak{B} = \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_m\}$ из Q называется *базисом* в Q , если:

- а) система векторов $\mathfrak{B} = \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_m\}$ линейно независима;
- б) для любого $\mathbf{x} \in Q$ найдутся такие числа $x_1, x_2, \dots, x_m$, что

$$\mathbf{x} = \sum_{k=1}^m x_k \mathbf{e}_k. \quad (7.1)$$

Формула (7.1) называется *разложением вектора $\mathbf{x}$ по базису $\mathfrak{B}$* . Коэффициенты $x_1, x_2, \dots, x_m$ однозначно определяются вектором $\mathbf{x}$ и называются координатами этого вектора в базисе $\mathfrak{B}$. При обычной записи координаты вектора пишутся в строчку, заключенную в круглые скобки, например

$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_m)$, в матричной записи — столбцом в круглых скобках.

Если множество $Q \subset \mathcal{L}$ имеет несколько базисов, то все они состоят из одинакового числа векторов, называемого *рангом* Q и обозначаемого $\text{rang } Q$. В частности, если все пространство $\mathcal{L}$ имеет базис, то оно называется *конечномерным* и обозначается $\mathcal{L}_n$, где $n = \dim \mathcal{L}$ — число векторов в любом базисе, называемое *размерностью* пространства. В противном случае пространство $\mathcal{L}$ называется *бесконечномерным*.

Пусть $\mathcal{L}_n$ — произвольное n -мерное пространство, $\mathfrak{B} = \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ — фиксированный базис в нем. Тогда каждому вектору $\mathbf{x} \in \mathcal{L}_n$ взаимно однозначно соответствует столбец его координат в этом базисе

$$\mathbf{x} = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + \dots + x_n \mathbf{e}_n \Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

При этом линейные операции над векторами в координатной форме выглядят следующим образом:

$$\mathbf{z} = \mathbf{x} + \mathbf{y} \Leftrightarrow Z = X + Y,$$

$$\mathbf{y} = \lambda \mathbf{x} \Leftrightarrow Y = \lambda X.$$

Пусть $\mathfrak{B} = \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ и $\mathfrak{B}' = \{\mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_n\}$ — два различных базиса в $\mathcal{L}_n$. Каждый из векторов базиса $\mathfrak{B}'$ разложим по базису $\mathfrak{B}$

$$\mathbf{e}'_k = t_{1k} \mathbf{e}_1 + \dots + t_{nk} \mathbf{e}_n \Leftrightarrow E'_k = \begin{pmatrix} t_{1k} \\ \vdots \\ t_{nk} \end{pmatrix}, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Матрицей перехода $T_{\mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{B}'}$ от базиса $\mathfrak{B}$ к базису $\mathfrak{B}'$ называется матрица

$$T_{\mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{B}'} = \begin{pmatrix} t_{11} & \dots & t_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ t_{n1} & \dots & t_{nn} \end{pmatrix},$$

k -й столбец которой есть столбец E'_k координат вектора $\mathbf{e}'_k$ в базисе $\mathfrak{B}$. Таким образом, базисы $\mathfrak{B}'$ и $\mathfrak{B}$ связаны матричным равенством

$$(\mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_n) = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n) T_{\mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{B}'}.$$

Пусть $\mathbf{x}$ — произвольный вектор из $\mathcal{L}_n$. Его координаты $x_1, x_2, \dots, x_n$ и $x'_1, x'_2, \dots, x'_n$ в базисах $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{B}'$ соответственно связаны равенствами $x_i = \sum_{j=1}^n t_{ij} x'_j$, или в матричной форме

$$X' = (T_{\mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{B}'})^{-1} X, \quad (7.2)$$

где X и X' — столбцы его координат в базисах $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{B}'$ соответственно. Формула (7.2) называется *формулой преобразования координат* при преобразовании базиса. ◁

ПРИМЕР 7.1. Найти координаты геометрического вектора $\mathbf{x} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$ в базисе $\mathfrak{B}'$, состоящем из векторов $\mathbf{e}'_1 = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{e}'_2 = \mathbf{i} - \mathbf{j}$, $\mathbf{e}'_3 = \mathbf{j} - \mathbf{k}$.

► В исходном базисе $\mathfrak{B} = \{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ векторы $\mathbf{e}'_1$, $\mathbf{e}'_2$, $\mathbf{e}'_3$ имеют

координаты $E'_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $E'_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $E'_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Следовательно-

но, матрица перехода $T_{\mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{B}'}$ имеет вид

$$T_{\mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Обращая матрицу $T_{\mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{B}'}$ и используя формулу (7.2), находим

$$X' = (T_{\mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{B}'})^{-1} X = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 4/3 \\ -1/3 \end{pmatrix},$$

$$\text{т.е. } \mathbf{x} = \frac{2}{3} \mathbf{e}'_1 + \frac{4}{3} \mathbf{e}'_2 - \frac{1}{3} \mathbf{e}'_3. \quad \blacktriangleleft$$

7.7. Показать, что если среди векторов $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_m$ содержится нуль-вектор, то рассматриваемые векторы линейно зависимы.

Доказать, что системы многочленов линейно независимы.

7.8. $t^3 + t^2 + t + 1$, $t^2 + t + 1$, $t + 1$, 1 .

7.9. $2 + 3t - 2t^2$, $1 - 2t + 3t^2$, $3 + 8t - 6t^2$.

7.10. Пусть в линейном пространстве задана система векторов: $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_k$ и пусть каждый из векторов $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \dots, \mathbf{g}_m$ есть линейная комбинация векторов $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_k$. Доказать, что если векторы $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \dots, \mathbf{g}_m$ линейно независимы, то $m < k$.

7.11. Доказать, что произвольную систему из k линейно независимых векторов $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_k$, где $k < n$, можно дополнить до базиса в n -мерном пространстве $\mathcal{L}$.

7.12. Если заданы произвольные k векторов $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_k$, то из них можно построить не более k линейно независимых комбинаций. Используя этот результат, доказать: если $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{B}'$ — два различных базиса в системе Q , то они состоят из одинакового числа векторов (т.е. имеет смысл ранга системы Q).

7.13. Найти ранг и какой-либо базис системы геометрических векторов $\mathbf{x}_1 = -\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$, $\mathbf{x}_2 = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{x}_3 = -4\mathbf{i} + 5\mathbf{j} - \mathbf{k}$, $\mathbf{x}_4 = 3\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$.

7.14. Доказать, что система арифметических векторов $\mathbf{x}_1 = (1, 2, 0, 4)$, $\mathbf{x}_2 = (-1, 0, 5, 1)$, $\mathbf{x}_3 = (1, 4, 5, 9)$ линейно зависима, и написать какое-нибудь нетривиальное соотношение вида $\lambda_1 \mathbf{x}_1 + \lambda_2 \mathbf{x}_2 + \lambda_3 \mathbf{x}_3 = \mathbf{0}$. Найти ранг и все базисы этой системы.

7.15. Пусть Q — произвольная система векторов в $\mathcal{L}_n$. Подсистема $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_k\} \in Q$ называется максимальной линейно независимой подсистемой в Q , если $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_k$ — линейно независимая система и всякая расширенная система $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_k, \mathbf{x}$, где $\mathbf{x}$ — произвольный вектор из Q , линейно зависима. Доказать, что всякий базис в Q есть максимальная линейно независимая подсистема в Q , и наоборот.

7.16. Как изменится матрица перехода от базиса $\mathfrak{B}$ к базису $\mathfrak{B}'$, если:

- поменять два вектора базиса $\mathfrak{B}$;
- поменять местами два вектора базиса $\mathfrak{B}'$;
- записать векторы каждого базиса в обратном порядке?

Доказать, что в пространстве $\mathbb{R}^n$ указанные системы векторов образуют базис.

7.17. $\mathbf{x}_1 = (1, 0, 0, \dots, 0)$, $\mathbf{x}_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$, $\mathbf{x}_3 = (0, 0, 1, \dots, 0)$,
 $\dots$, $\mathbf{x}_n = (0, 0, 0, \dots, 1)$;

7.18. $\mathbf{x}_1 = (1, 1, 1, \dots, 1)$, $\mathbf{x}_2 = (0, 1, 1, \dots, 1)$, $\mathbf{x}_3 = (0, 0, 1, \dots, 1)$,
 $\dots$, $\mathbf{x}_n = (0, 0, 0, \dots, 1)$.

7.19. В линейном пространстве в базисе $\mathfrak{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ задан вектор $\mathbf{x} = \mathbf{e}_1 + 4\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3$. Найти его координаты в базисе $\mathfrak{B}'$, если $T_{\mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{B}'} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

7.20. В пространстве $\mathcal{V}_3$ заданы векторы $\mathbf{e}'_1 = \mathbf{i} + \mathbf{j}$, $\mathbf{e}'_2 = \mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{e}'_3 = \mathbf{i} + \mathbf{k}$. Доказать, что $\mathfrak{B}' = \{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3\}$ — базис в $\mathcal{V}_3$, написать матрицу перехода $T_{\mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{B}'}$, где $\mathfrak{B} = \{\mathbf{e}_1 = \mathbf{i}, \mathbf{e}_2 = \mathbf{j}, \mathbf{e}_3 = \mathbf{k}\}$. Найти координаты вектора $\mathbf{x} = -\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$.

В задачах 7.21—7.23 найти матрицу перехода $T_{\mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{B}'}$ и выписать столбец координат вектора $\mathbf{x} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$ в базисе $\mathfrak{B}'$, если $\mathfrak{B} = \{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ и $\mathfrak{B}' = \{\mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}'\}$ — прямоугольные базисы в $\mathcal{V}_3$.

7.21. Базис $\mathfrak{B}'$ получен изменением на противоположное направление всех трех базисных ортов $\mathfrak{B}$.

7.22. Базис $\mathfrak{B}'$ получен перестановкой $\mathbf{i}' = \mathbf{j}, \mathbf{j}' = \mathbf{k}, \mathbf{k}' = \mathbf{i}$.

7.23. Базис $\mathfrak{B}'$ получен поворотом базиса $\mathfrak{B}$ на угол φ вокруг орта $\mathbf{i}$.

7.24. В пространстве $\mathbb{R}^4$ заданы векторы $\mathbf{e}'_1 = (1, 1, 1, 1)$, $\mathbf{e}'_2 = (1, 1, -1, -1)$, $\mathbf{e}'_3 = (1, -1, 1, -1)$, $\mathbf{e}'_4 = (1, -1, -1, 1)$. Доказать, что $\mathfrak{B}' = \{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3, \mathbf{e}'_4\}$ — базис в $\mathbb{R}^4$, написать матрицу перехода $T_{\mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{B}'}$, где $\mathfrak{B}$ — канонический базис в $\mathbb{R}^4$ (см. 3.4). Найти в базисе $\mathfrak{B}'$ координаты вектора $\mathbf{x}$, имеющего в каноническом базисе координаты $(1, 2, 1, 1)$.

7.25. В пространстве $\mathbb{R}^4$ заданы векторы $\mathbf{e}'_1 = (1, 1, 0, 1)$, $\mathbf{e}'_2 = (2, 1, 3, 1)$, $\mathbf{e}'_3 = (1, 1, 0, 0)$, $\mathbf{e}'_4 = (0, 1, -1, -1)$. Доказать, что $\mathfrak{B}' = \{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3, \mathbf{e}'_4\}$ — базис в $\mathbb{R}^4$, написать матрицу перехода $T_{\mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{B}'}$, где $\mathfrak{B}$ — канонический базис в $\mathbb{R}^4$. Найти в базисе $\mathfrak{B}'$ координаты вектора $\mathbf{x}$, имеющего в каноническом базисе координаты $(0, 0, 0, 1)$.

7.26. Доказать, что система матриц вида

$$A_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} i, \quad j$$

где $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$, образует базис в пространстве $M_{m,n}$ всех матриц размера $m \times n$ и, следовательно, $\dim M_{m,n} = mn$. Чему равны координаты произвольной матрицы $A = \|a_{ij}\| \in M_{m,n}$ в этом базисе?

В задачах 7.27–7.31 доказать утверждения.

7.27. Матрица перехода $T_{\mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{B}'}$ всегда невырождена, и $T_{\mathfrak{B}' \rightarrow \mathfrak{B}} = (T_{\mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{B}'})^{-1}$.

7.28. Если $T_{\mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{B}'} = \begin{pmatrix} t_{11} & \dots & t_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ t_{n1} & \dots & t_{nn} \end{pmatrix}$ — невырожденная ма-

трица и $\mathfrak{B} = \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ — некоторый базис в пространстве $\mathcal{L}_n$, то система векторов $\mathbf{e}'_k = t_{1k}\mathbf{e}_1 + \dots + t_{nk}\mathbf{e}_n$, $k = 1, 2, \dots, n$, также образует базис в $\mathcal{L}_n$.

7.29. Если $\mathfrak{B}, \mathfrak{B}'$ и $\mathfrak{B}''$ — базисы в $\mathcal{L}_n$, то справедливо матричное равенство

$$T_{\mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{B}''} = T_{\mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{B}'} T_{\mathfrak{B}' \rightarrow \mathfrak{B}''}.$$

7.30. Система многочленов $1, t, t^2, \dots, t^{n-1}$ образует базис в пространстве $\mathcal{P}_n$ всех многочленов степени $\leq n-1$, и, следовательно, $\dim \mathcal{P}_n = n$ (этот базис называется *каноническим*).

7.31. Для произвольного t_0 система многочленов $1, t - t_0, (t - t_0)^2, \dots, (t - t_0)^{n-1}$ образует базис в $\mathcal{P}_n$.

7.32. Пусть в линейном пространстве заданы базисы $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}'$ и $\mathfrak{B}''$. Найти $T_{\mathfrak{B}' \rightarrow \mathfrak{B}''}$, если $T_{\mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{B}'} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ и

$$T_{\mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{B}''} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

7.33. Найти координаты:

а) многочлена $4t^2 - 2t$ в каноническом базисе пространства $\mathcal{P}_3$;

б) многочлена $t^2 + 2t - 1$ в каноническом базисе пространства $\mathcal{P}_4$.

7.34. Доказать, что система многочленов $t^2 + 1$, $-t^2 + 1$, $t - 1$ образует базис в $\mathcal{P}_3$. Записать в этом базисе координаты многочлена $t^2 - 2t - 2$.

7.35. Найти матрицу перехода от канонического базиса $1, t, t^2, \dots, t^{n-1}$ к базису $1, t - t_0, (t - t_0)^2, \dots, (t - t_0)^{n-1}$ в $\mathcal{P}_n$.

3. Изоморфизм n -мерных пространств. Пусть $\mathcal{L}$ и $\mathcal{L}'$ — два действительных (или комплексных) линейных пространства. Об отображение $\varphi: \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}'$ пространства $\mathcal{L}$ на пространство $\mathcal{L}'$ называется *изоморфизмом*, если:

а) φ взаимно однозначное отображение;

б) $\varphi(\lambda \mathbf{x}) = \lambda \varphi(\mathbf{x})$ и $\varphi(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \varphi(\mathbf{x}) + \varphi(\mathbf{y})$ для любых $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{L}$ и любого числа λ .

Если существует изоморфизм $\mathcal{L}$ на $\mathcal{L}'$, то пространства $\mathcal{L}$ и $\mathcal{L}'$ называются *изоморфными*: $\mathcal{L} \cong \mathcal{L}'$.

7.36. Доказать, что все линейные пространства одинаковой размерности изоморфны друг другу.

7.37. Даны изоморфные пространства $\mathcal{L}$ и $\mathcal{L}'$. Доказать, что если $\varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{x}'$, то $\varphi(-\mathbf{x}) = -\mathbf{x}'$.

Установить, является ли изоморфизмом заданное отображение $\mathcal{V}_3$ на $\mathbb{R}^3$.

7.38. $\varphi(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) = (2x - y, z, x + y + z)$.

7.39. $\varphi(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) = (x + y - 1, 2z, 3y)$.

7.40. $\varphi(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) = (x + y, -y + 2z, x + 2y - 2z)$.

7.41. Отображение $\varphi: \mathcal{L}_n \rightarrow \mathbb{R}^n$ произвольного пространства $\mathcal{L}_n$ на пространство арифметических векторов $\mathbb{R}^n$ имеет вид

$$\varphi(x_1 \mathbf{e}_1 + \dots + x_n \mathbf{e}_n) = (x_1, \dots, x_n) \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

где $\mathfrak{B} = \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ — некоторый базис в пространстве $\mathcal{L}_n$, а $A = (a_{ij})$ — невырожденная матрица порядка n . Доказать, что это отображение — изоморфизм и, следовательно, что $\mathcal{L}_n \cong \mathbb{R}^n$.

7.42. Доказать, что множество всех комплексных чисел с обычным сложением и умножением на действительное число образует линейное пространство, изоморфное пространству $\mathbb{R}^2$. Написать матрицу перехода от базиса $\mathfrak{B} = \{1, i\}$

к базису $\mathfrak{B}' = \{1+i, -i\}$ в этом пространстве и для числа $-2+3i$ написать разложение по базису $\mathfrak{B}'$.

4. Подпространства линейного пространства и линейные многообразия. Подпространством L пространства $\mathcal{L}$ называется подмножество $L \subset \mathcal{L}$, которое обладает свойствами:

- а) $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in L \Rightarrow \mathbf{x} + \mathbf{y} \in L$;
- б) $\forall \mathbf{x} \in L \Rightarrow \lambda \mathbf{x} \in L$ для любого числа λ .

Если L — некоторое подпространство в $\mathcal{L}$, то множество векторов

$$L + \mathbf{x}_0 = \{\mathbf{x} \in L \mid \mathbf{x} = \mathbf{x}' + \mathbf{x}_0, \mathbf{x}' \in L \text{ для некоторого } \mathbf{x}_0 \in L\}$$

называется *линейным многообразием*, полученным сдвигом подпространства L на вектор $\mathbf{x}_0$.

Проверить, являются ли множества векторов подпространствами.

7.43. Множество n -мерных векторов $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$, у которых:

- а) координаты — целые числа;
- б) координаты с четными номерами равны нулю.

7.44. Все векторы плоскости, каждый из которых лежит на одной из осей координат Ox и Oy .

7.45. Множество всех матриц A порядка n , удовлетворяющих условиям:

- а) $A^T = A$ (симметрические матрицы); б) $\det A = 0$;
- в) $a_{ii} = 0, i = 1, 2, \dots, n$.

7.46. Множество всех многочленов $\mathcal{P}$, удовлетворяющих условию $p(0) = 0$, относительно обычных операций сложения многочленов и умножения многочленов на число.

7.47. Доказать, что данные множества являются подпространствами:

- а) нулевое подпространство, т.е. состоящее из единственного элемента — нуля;
- б) в пространстве $\mathcal{V}_3$ совокупность векторов, параллельных фиксированной плоскости.

7.48. Доказать, что в пространстве $\mathbb{R}^n$ все n -мерные векторы, у которых координаты с четными номерами равны между собой, образуют подпространство. Найти базис и размерность этого подпространства.

7.49. Доказать, что всякое подпространство L пространства $\mathcal{L}$ также является линейным подпространством (при этом $\dim L \leq \dim \mathcal{L}$).

7.50. Доказать, что если сумма размерностей двух линейных подпространств n -мерного пространства больше n , то эти подпространства имеют общий ненулевой вектор.



Пусть Q — произвольная система векторов из линейного пространства $\mathcal{L}$. *Линейной оболочкой* системы Q называется множество векторов вида

$$\mathcal{L}(Q) = \{ \mathbf{x} \mid \mathbf{x} = \lambda_1 \mathbf{x}_1 + \lambda_2 \mathbf{x}_2 + \dots + \lambda_n \mathbf{x}_n; \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n \in Q, \\ \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R} \}.$$



7.51. Доказать, что

а) $\mathcal{L}(Q)$ — подпространство в $\mathcal{L}$;

б) $\dim \mathcal{L}(Q) = \text{rang } Q$, причем в качестве базиса в $\mathcal{L}(Q)$ можно взять любой базис системы Q .

Найти размерность и базис линейной оболочки данной системы векторов.

7.52. $\mathbf{a}_1 = (-1, 0, 0, 1)$, $\mathbf{a}_2 = (0, 1, 1, 2)$, $\mathbf{a}_3 = (1, 1, 1, 1)$, $\mathbf{a}_4 = (3, 1, 2, 0)$, $\mathbf{a}_5 = (4, 2, 3, 1)$.

7.53. $\mathbf{a}_1 = (0, 1, 1, 1, 1)$, $\mathbf{a}_2 = (-1, -1, 1, 1, -1)$, $\mathbf{a}_3 = (-1, 0, 2, 2, 0)$, $\mathbf{a}_4 = (0, 0, 1, -1, -1)$.

7.54. Задана система уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 - x_4 + x_5 = 1, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 + 4x_4 + 3x_5 = 4, \\ x_1 - 5x_2 - 9x_3 - 6x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$$

а) Доказать, что множество решений этой системы есть линейное многообразие в пространстве $\mathbb{R}^5$.

б) Сдвигом какого пространства получается это линейное многообразие? Найти ранг и какой-нибудь базис этого подпространства.

в) Найти какой-либо вектор сдвига.

5. Сумма и пересечение подпространств. Пусть L_1 и L_2 — линейные подпространства пространства $\mathcal{L}$. *Пересечением* подпространств L_1 и L_2 называется множество векторов

$$L_1 \cap L_2 = \{ \mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in L_1 \text{ и } \mathbf{x} \in L_2 \}.$$

Суммой подпространств L_1 и L_2 называется множество векторов

$$L_1 + L_2 = \{ \mathbf{x} \mid \mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1 \in L_1, \mathbf{x}_2 \in L_2 \}.$$

Если для каждого вектора $\mathbf{x} \in L = L_1 + L_2$ представление $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2$, $\mathbf{x}_1 \in L_1$, $\mathbf{x}_2 \in L_2$, единственно, то L называется *прямой суммой* подпространств L_1 и L_2 и обозначается $L = L_1 \oplus L_2$.

7.55. Доказать, что сумма и пересечение двух линейных подпространств пространства $\mathcal{L}$ сами являются линейными подпространствами этого пространства.

7.56. Доказать, что для любых линейных подпространств L_1 и L_2 справедлива формула

$$\dim L_1 + \dim L_2 = \dim (L_1 + L_2) + \dim (L_1 \cap L_2). \quad (7.3)$$

7.57. Доказать, что сумма линейных подпространств $L_1, L_2, \dots, L_k$ будет их прямой суммой в том и только том случае, если всякая система ненулевых векторов $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_k$, где $\mathbf{x}_1 \in L_1$, $\mathbf{x}_2 \in L_2, \dots, \mathbf{x}_k \in L_k$, линейно независима.

ПРИМЕР 7.2. Найти базис пересечения подпространств $L_1 \cap L_2$, если L_1 натянуто на векторы $\mathbf{a}_1 = (1, 2, 1, 0)$ и $\mathbf{a}_2 = (-1, 1, 1, 1)$, а L_2 — на векторы $\mathbf{b}_1 = (2, -1, 0, 1)$ и $\mathbf{b}_2 = (1, -1, 3, 7)$.

► Векторы $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{b}_1$ и $\mathbf{b}_2$ линейно независимы. Воспользуемся формулой (7.3)

$\dim (L_1 \cap L_2) = \dim L_1 + \dim L_2 - \dim (L_1 + L_2) = k + r - s$, где $k = 2$ — число независимых векторов, порождающих подпространство L_1 , $r = 2$ — число независимых векторов, порождающих подпространство L_2 , а s — число независимых векторов, порождающих подпространство $\dim (L_1 + L_2)$.

Найдем s . Для этого вычислим ранг системы векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1$ и $\mathbf{b}_2$. Получаем, что $s = 3$.

Следовательно, $\dim (L_1 \cap L_2) = 2 + 2 - 3 = 1$.

Найдем базис $L_1 \cap L_2$ из условия: $\mathbf{d} = x_1 \mathbf{a}_1 + x_2 \mathbf{a}_2 = x_3 \mathbf{b}_1 + x_4 \mathbf{b}_2$.

$$\text{Получаем систему уравнений} \begin{cases} 1x_1 - 1x_2 = 2x_3 + 1x_4, \\ 2x_1 + 1x_2 = -1x_3 - 1x_4, \\ 1x_1 + 1x_2 = 0x_3 + 3x_4, \\ 0x_1 + 1x_2 = 1x_3 + 7x_4. \end{cases}$$

Решая эту систему, получим $x_1 = -c$, $x_2 = 4c$, $x_3 = -3c$, $x_4 = c$, где c — произвольная постоянная. Принимая $c = -1$, получим $\mathbf{d} = \mathbf{a}_1 - 4\mathbf{a}_2 = 3\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2 = (5, -2, -3, -4)$. Таким образом, базис пересечения подпространств состоит из одного вектора $\mathbf{d} = (5, -2, -3, -4)$. ◀

7.58. Найти базис пересечения подпространств $L_1 \cap L_2$, а если L_1 натянуто на векторы $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2$, а L_2 — на векторы $\mathbf{b}_1$ и $\mathbf{b}_2$, если:

а) $\mathbf{a}_1 = (1, 2, 0, 3)$, $\mathbf{a}_2 = (1, 1, -1, 3)$, $\mathbf{b}_1 = (1, 0, -2, 3)$ и $\mathbf{b}_2 = (-1, 3, 1, 1)$;

б) $\mathbf{a}_1 = (2, 3, -2, 2)$, $\mathbf{a}_2 = (1, 1, -1, 1)$, $\mathbf{b}_1 = (1, 0, 2, 1)$ и $\mathbf{b}_2 = (2, 3, 1, 2)$.

6. Пространства со скалярным произведением. Действительное линейное пространство $\mathcal{E}$ называется *евклидовым пространством*, если каждой паре векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ из $\mathcal{E}$ поставлено в соответствие действительное число, обозначаемое символом $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ и называемое *скалярным произведением* векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$, причем выполнены следующие условия:

1) $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{y}, \mathbf{x})$; 2) $(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2, \mathbf{y}) = (\mathbf{x}_1, \mathbf{y}) + (\mathbf{x}_2, \mathbf{y})$;

3) $(\lambda \mathbf{x}, \mathbf{y}) = \lambda(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, $\lambda \in \mathbb{R}$;

4) $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \geq 0$, причем $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = 0$.

Длиной вектора $\mathbf{x}$ называется число $|\mathbf{x}| = \sqrt{(\mathbf{x}, \mathbf{x})}$. Вектор $\mathbf{x}$, длина которого равна 1, называется *нормированным*.

Для любых векторов $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ евклидова пространства справедливо *неравенство Коши — Буняковского*

$$|(\mathbf{x}, \mathbf{y})|^2 = (\mathbf{x}, \mathbf{x})(\mathbf{y}, \mathbf{y}), \quad (7.4)$$

которое позволяет следующим образом определить угол между ненулевыми векторами:

$$\cos \varphi = \frac{(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{|\mathbf{x}| \cdot |\mathbf{y}|}.$$

Ненулевые векторы $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{E}$ называются *ортogonalными*, если $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$.

Базис $\mathfrak{B} = \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ n -мерного евклидова пространства $\mathcal{E}_n$ называется *ортogonalным*, если

$$(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ 1, & i = j. \end{cases}$$

Если в пространстве $\mathcal{E}_n$ задан произвольный базис $(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_n)$, то векторы

$$\mathbf{e}_1 = \mathbf{f}_1, \quad \mathbf{e}_k = \mathbf{f}_k - \sum_{i=1}^{k-1} c_{i,k-1} \mathbf{e}_i, \quad k = 2, 3, \dots, n, \quad (7.5)$$

где $c_{i,k-1} = \frac{(\mathbf{f}_k, \mathbf{e}_i)}{(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_i)}$, образуют ортогональный базис в этом пространстве (*процесс ортогонализации Шмидта*).

Комплексное линейное пространство $\mathcal{U}$ называется *унитарным*, если каждой паре векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ из $\mathcal{U}$ поставлено в соответствие комплексное число, обозначаемое символом $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ и называемое *скалярным произведением* векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$, причем выполнены следующие условия:

- 1) $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \overline{(\mathbf{y}, \mathbf{x})}$; 2) $(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2, \mathbf{y}) = (\mathbf{x}_1, \mathbf{y}) + (\mathbf{x}_2, \mathbf{y})$;
- 3) $(\lambda \mathbf{x}, \mathbf{y}) = \lambda (\mathbf{x}, \mathbf{y})$, $\lambda \in \mathbb{C}$;
- 4) $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \geq 0$, причем $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0$, $\Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$.

В унитарном пространстве не определяется угол между векторами. Однако все остальные определения и результаты, сформулированные выше для евклидова пространства, остаются справедливыми и для унитарного пространства.

Евклидовы и унитарные пространства в дальнейшем называются *пространствами со скалярным произведением*. ◁

7.59. Доказать, что скалярное произведение любых двух векторов $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ и $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$ евклидова пространства тогда и только тогда выражается равенством

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n,$$

когда базис, в котором заданы координаты, является ортонормированным.

7.60. Доказать, что в пространстве $\mathcal{P}_n$ многочленов степени $\leq n-1$ скалярное произведение многочленов $p(t) = a_0 + a_1 t + \dots + a_{n-1} t^{n-1}$ и $q(t) = b_0 + b_1 t + \dots + b_{n-1} t^{n-1}$ можно определить любым из следующих способов:

а) $(p, q) = a_0 b_0 + a_1 b_1 + \dots + a_{n-1} b_{n-1}$;

б) $(p, q) = \sum_{k=1}^n p(t_k) q(t_k)$, где t_k — произвольные попарно

различные действительные числа.

Вычислить скалярное произведение многочленов $p(t) = 1 + t + t^2$ и $q(t) = 1 - 2t^2 + 3t^3$ каждым из указанных

способов ($n = 4$), если в случае б) $t_1 = -2$, $t_2 = -1$, $t_3 = 1$, $t_4 = 2$.

7.61. Пусть L_1 и L_2 — линейные подпространства евклидова пространства $\mathcal{E}_n$ (или унитарного $\mathcal{U}_n$), причем размерность L_1 меньше размерности L_2 ; доказать, что в L_2 найдется ненулевой вектор, ортогональный всем векторам L_1 .

7.62. Доказать, что любая система попарно ортогональных ненулевых векторов линейно независима.

7.63. Пользуясь неравенством Коши — Буняковского (7.4), доказать следующие неравенства треугольника:

а) $|\mathbf{x} + \mathbf{y}| = |\mathbf{x}| + |\mathbf{y}|$; б) $||\mathbf{x}| - |\mathbf{y}|| \leq |\mathbf{x} + \mathbf{y}|$.

7.64. Доказать, что в пространстве $\mathbb{R}^n$ формула

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n,$$

где $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$, $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$, задает скалярное произведение (получаемое евклидово пространство арифметических векторов в дальнейшем будем также обозначать $\mathbb{R}^n$).

7.65. Показать, что в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ канонический базис является ортонормированным.

7.66. Написать неравенство Коши — Буняковского для евклидова пространства $\mathbb{R}^n$.

7.67. Написать неравенства треугольника в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$.

Применить процесс ортогонализации к системам векторов евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ (со скалярным произведением из задачи 7.64).

7.68. $\mathbf{f}_1 = (1, 1, 1, 1)$, $\mathbf{f}_2 = (3, 3, -1, -1)$, $\mathbf{f}_3 = (-2, 0, 6, 8)$.

7.69. $\mathbf{f}_1 = (1, 2, 1, 3)$, $\mathbf{f}_2 = (4, 1, 1, 1)$, $\mathbf{f}_3 = (3, 1, 1, 0)$.

Применяя процесс ортогонализации, построить ортогональные базисы подпространств, натянутых на данные системы векторов в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$.

7.70. $\mathbf{f}_1 = (1, 2, 2, -1)$, $\mathbf{f}_2 = (1, 1, -5, 3)$, $\mathbf{f}_3 = (3, 2, 8, -7)$.

7.71. $\mathbf{f}_1 = (2, 1, 3, -1)$, $\mathbf{f}_2 = (7, 4, 3, -3)$, $\mathbf{f}_3 = (1, 1, -6, 0)$, $\mathbf{f}_4 = (5, 7, 7, 8)$.

Проверить ортогональность систем векторов в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ и дополнить их до ортогональных базисов.

7.72. $\mathbf{e}_1 = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$, $\mathbf{e}_2 = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$.

7.73. $\mathbf{e}_1 = (1, -2, 1, 3), \mathbf{e}_2 = (2, 1, -3, 1).$

7.74.

$\mathbf{e}_1 = (1, 1, 1, 1, 1), \mathbf{e}_2 = (-1, -1, 0, 0, 0), \mathbf{e}_3 = (0, 0, -1, 1, 0).$

7.75. Пусть L — линейное подпространство в $\mathcal{E}_n$. Доказать, что:

а) любой вектор $\mathbf{x} \in \mathcal{E}_n$ однозначно представим в виде $\mathbf{x} = \mathbf{y} + \mathbf{z}$, где $\mathbf{y} \in L$ и $\mathbf{z}$ ортогонален к L ($\mathbf{y}$ называется *ортогональной проекцией* вектора $\mathbf{x}$ на L , а $\mathbf{z}$ — *ортогональной составляющей* $\mathbf{x}$ относительно L);

б) если $\mathfrak{B} = \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k\}$ — базис L , то $\mathbf{y} = \sum_{i=1}^k c_i \mathbf{e}_i$, где коэффициенты $c_i, i = 1, 2, \dots, k$, однозначно находятся из системы уравнений

$$\sum_{i=1}^k (\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_i) c_i = (\mathbf{e}_j, \mathbf{y}), \quad j = 1, 2, \dots, k,$$

а $\mathbf{z} = \mathbf{x} - \mathbf{y}$.

Используя результат задачи 7.75, найти ортогональную проекцию $\mathbf{y}$ и ортогональную составляющую $\mathbf{z}$ вектора $\mathbf{x}$ на линейное подпространство L евклидова пространства $\mathbb{R}^n$.

7.76. $\mathbf{x} = (-3, 5, 9, 3), L$ натянуто на векторы

$\mathbf{e}_1 = (1, 1, 1, 1), \mathbf{e}_2 = (2, -1, 1, 1), \mathbf{e}_3 = (2, -7, -1, -1).$

7.77. $\mathbf{x} = (4, -1, -3, 4), L$ натянуто на векторы

$\mathbf{e}_1 = (1, 1, 1, 1), \mathbf{e}_2 = (1, 2, 2, -1), \mathbf{e}_3 = (1, 0, 0, 3).$

7.2. Линейные операторы

1. Алгебра линейных операторов. *Линейным оператором* в линейном пространстве $\mathcal{L}$ называется всякое отображение $\mathbf{A}: \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}$ пространства $\mathcal{L}$ в себя, обладающее свойствами

$$\mathbf{A}(\lambda \mathbf{x}) = \lambda \mathbf{A}(\mathbf{x}) \quad \text{и} \quad \mathbf{A}(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \mathbf{A}(\mathbf{x}) + \mathbf{A}(\mathbf{y}).$$

Пусть $\mathbf{A}$ — линейный оператор в конечномерном пространстве $\mathcal{L}_n$ и $\mathfrak{B} = \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ — некоторый заданный базис. Разложим векторы $\mathbf{A}(\mathbf{e}_k), k = 1, 2, \dots, n$, по базису $\mathfrak{B}$.

$$\mathbf{A}(\mathbf{e}_k) = a_{1k} \mathbf{e}_1 + \dots + a_{nk} \mathbf{e}_n, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Тогда матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

называется *матрицей линейного оператора A в базисе $\mathfrak{B}$* . Матрицу линейного оператора A будем иногда обозначать также символом $[A]$ или $[A]_{\mathfrak{B}}$, если существенно, о каком базисе идет речь.

Заданием матрицы оператор определяется однозначно, а именно: если $\mathbf{y} = A(\mathbf{x})$, то $Y = AX$, где X, Y — столбцы координат векторов $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ и A — матрица оператора A в базисе $\mathfrak{B}$.

ПРИМЕР 7.3. В базисе $\mathfrak{B} = \{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ записать матрицу оператора проектирования P_{α} на плоскость α : $x + y + z = 0$.

► Оператор проектирования P_{α} на плоскость α определяется равенством $P_{\alpha}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}_{\alpha}$, где $\mathbf{x}_{\alpha}$ — ортогональная проекция вектора $\mathbf{x}$ на плоскость α . Имеем

$$P_{\alpha}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - \mathbf{x}_n = \mathbf{x} - \text{пр}_n \mathbf{x} \cdot \frac{\mathbf{n}}{|\mathbf{n}|} = \mathbf{x} - \frac{(\mathbf{n}, \mathbf{x})}{|\mathbf{n}|^2} \mathbf{n},$$

где $\mathbf{n}$ — нормальный вектор плоскости α . В данном случае $\mathbf{n} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$, $|\mathbf{n}|^2 = (\mathbf{n}, \mathbf{n}) = 1 + 1 + 1 = 3$, $(\mathbf{n}, \mathbf{i}) = (\mathbf{n}, \mathbf{j}) = (\mathbf{n}, \mathbf{k}) = 1$, и, следовательно,

$$P_{\alpha}(\mathbf{i}) = \mathbf{i} - \frac{(\mathbf{n}, \mathbf{i})}{|\mathbf{n}|^2} \mathbf{n} = \mathbf{i} - \frac{1}{3} \mathbf{n} = \frac{2}{3} \mathbf{i} - \frac{1}{3} \mathbf{j} - \frac{1}{3} \mathbf{k},$$

$$P_{\alpha}(\mathbf{j}) = \mathbf{j} - \frac{(\mathbf{n}, \mathbf{j})}{|\mathbf{n}|^2} \mathbf{n} = \mathbf{j} - \frac{1}{3} \mathbf{n} = -\frac{1}{3} \mathbf{i} + \frac{2}{3} \mathbf{j} - \frac{1}{3} \mathbf{k},$$

$$P_{\alpha}(\mathbf{k}) = \mathbf{k} - \frac{(\mathbf{n}, \mathbf{k})}{|\mathbf{n}|^2} \mathbf{n} = \mathbf{k} - \frac{1}{3} \mathbf{n} = -\frac{1}{3} \mathbf{i} - \frac{1}{3} \mathbf{j} + \frac{2}{3} \mathbf{k},$$

откуда

$$P_{\alpha} = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & -1/3 & 2/3 \end{pmatrix}.$$

В задачах 7.78–7.84 установить, какие из заданных отображений пространства $\mathcal{V}_3$ в себя являются линейными операторами. Записать их матрицы в прямоугольном базисе $\mathfrak{B} = \{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$.

7.78. $\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \lambda \mathbf{x}$, λ — заданное число.

7.79. $\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \lambda \mathbf{x} + \mathbf{a}$, λ и $\mathbf{a}$ заданы.

7.80. $\mathbf{A}(\mathbf{x}) = (\mathbf{x}, \mathbf{e})\mathbf{e}$, где $\mathbf{e}$ — заданный единичный вектор. Выяснить геометрический смысл этого отображения.

7.81. $\mathbf{A}(\mathbf{x}) = [\mathbf{a}, \mathbf{x}]$, где $\mathbf{a}$ — заданный вектор.

7.82. $\mathbf{A}(\mathbf{x}) = (\mathbf{a}, \mathbf{x})\mathbf{x}$, где $\mathbf{a}$ — заданный вектор.

7.83. $\mathbf{A} = \mathbf{U}(\mathbf{e}, \varphi)$ — отображение, состоящее в повороте на угол φ вокруг оси, заданной вектором $\mathbf{e}$.

7.84. Если $\mathbf{x} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, то $\mathbf{A}(\mathbf{x}) = (y + z)\mathbf{i} + (2x + z)\mathbf{j} + (3x - y + z)\mathbf{k}$.

В задачах 7.85–7.89 установить, какие из заданных отображений пространства арифметических векторов $\mathbb{R}^n$ в себя являются линейными операторами. Записать их матрицы в каноническом базисе.

7.85. $\mathbf{A}(\mathbf{x}) = (x_2 + x_3, -2x_1 + 2x_3, 4x_1 - x_2 + 5x_3)$.

7.86. $\mathbf{A}(\mathbf{x}) = (x_1 + x_3, x_2 + x_3, x_3 + 1)$.

7.87. $\mathbf{A}(\mathbf{x}) = (0, x_2 - x_3, 0)$.

7.88. $\mathbf{A}(\mathbf{x}) = (-x_1 + x_3 + 1, 2x_2 + x_3 + 1, -x_2 + x_3 + 1)$.

7.89. $\mathbf{A}(\mathbf{x}) = (x_1 - x_2, x_1 - x_2 - x_3, -x_1 + x_2 + 2x_3)$.



В линейном пространстве $\mathcal{L}$ вводятся следующие операции:

а) сложение операторов $(\mathbf{A} + \mathbf{B})(\mathbf{x}) = \mathbf{A}(\mathbf{x}) + \mathbf{B}(\mathbf{x})$; при этом $[\mathbf{A} + \mathbf{B}] = [\mathbf{A}] + [\mathbf{B}]$;

б) умножение оператора на число $(\lambda \mathbf{A})(\mathbf{x}) = \lambda(\mathbf{A}(\mathbf{x}))$; при этом $[\lambda \mathbf{A}] = \lambda[\mathbf{A}]$;

в) умножение операторов $(\mathbf{AB})(\mathbf{x}) = \mathbf{A}(\mathbf{B}(\mathbf{x}))$; при этом $[\mathbf{AB}] = [\mathbf{A}] \cdot [\mathbf{B}]$.

Обратным к оператору $\mathbf{A}$ называется оператор $\mathbf{A}^{-1}$ такой, что $\mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{E}$, где $\mathbf{E}$ — единичный оператор, реализующий тождественное отображение. Оператор $\mathbf{A}$ имеет для себя обратный (и в этом случае называется невырожденным) в том и только том случае, когда его матрица A невырождена (в любом базисе). В этом случае $[\mathbf{A}^{-1}] = A^{-1}$.



Установить, какие из линейных операторов в $\mathbb{R}^3$ являются невырожденными, и найти явный вид обратных операторов.

7.90. $A(\mathbf{x}) = (x_1 - x_2 + x_3, x_3, x_2).$

7.91. $A(\mathbf{x}) = (x_2 + x_3, -x_2, 2x_2 - x_3).$

7.92. $A(\mathbf{x}) = (x_1 + 2x_2 + 2x_3, 2x_1 + x_2 - 2x_3, 2x_1 - 2x_2 + x_3).$

ПРИМЕР 7.4. В пространстве $\mathbb{R}^3$ заданы два линейных оператора A и B . Найти матрицу $[C]$ линейного оператора $C = AB - BA$ и его явный вид в каноническом базисе $\mathbb{R}^3$.

$$A(\mathbf{x}) = (2x_2, -2x_1 + 3x_2 + 2x_3, 4x_1 - x_2 + 5x_3),$$

$$B(\mathbf{x}) = (-3x_1 + x_3, 2x_2 + x_3, -x_2 + 3x_3).$$

► Так как $A(\mathbf{e}_1) = (0, -2, 4)$, $A(\mathbf{e}_2) = (2, 3, -1)$, $A(\mathbf{e}_3) = (0, 2, 5)$ и $B(\mathbf{e}_1) = (-3, 0, 0)$, $B(\mathbf{e}_2) = (0, 2, -1)$, $B(\mathbf{e}_3) = (1, 1, 3)$, то $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -2 & 3 & 2 \\ 4 & -1 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$. Далее,

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 6 & 4 & 7 \\ -12 & -7 & 18 \end{pmatrix}, BA = \begin{pmatrix} 4 & -7 & 5 \\ 0 & 5 & 9 \\ 14 & -6 & 13 \end{pmatrix}, \text{ поэтому } [C] =$$

$$= AB - BA = \begin{pmatrix} -4 & 11 & -3 \\ 6 & -1 & -2 \\ -26 & -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

По определению матрицы линейного оператора в каноническом базисе $\mathbb{R}^n$ ее столбцы являются наборами компонент образов базисных векторов, т.е.

$C(\mathbf{e}_1) = (-4, 6, -26)$, $C(\mathbf{e}_2) = (11, -1, -1)$, $C(\mathbf{e}_3) = (-3, -2, 5)$, откуда находим

$$C(\mathbf{x}) = C(x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3) = x_1C(\mathbf{e}_1) + x_2C(\mathbf{e}_2) + x_3C(\mathbf{e}_3) = (-4x_1 + 11x_2 - 3x_3, 6x_1 - x_2 - 2x_3, -26x_1 - x_2 + 5x_3). \blacktriangleleft$$

Для заданных в пространстве $\mathbb{R}^3$ линейных операторов A и B найти матрицу $[C]$ линейного оператора $C = AB - BA$ и его явный вид в каноническом базисе $\mathbb{R}^3$.

7.93. $\mathbf{A}(\mathbf{x}) = (7x_1 + 4x_3, 4x_2 - 9x_3, 3x_1 + x_2)$, $\mathbf{B}(\mathbf{x}) = (x_2 - 6x_3, 3x_1 + 7x_3, x_1 + x_2 - x_3)$.

7.94. $\mathbf{A}(\mathbf{x}) = (2x_1 - x_2 + 5x_3, x_1 + 4x_2 - x_3, 3x_1 - 5x_2 + 2x_3)$, $\mathbf{B}(\mathbf{x}) = (x_1 + 4x_2 + 3x_3, 2x_1 + x_3, 3x_2 - x_3)$.

7.95. $\mathbf{A}(\mathbf{x}) = (3x_1 + x_2 - 2x_3, 3x_1 - 2x_2 + 4x_3, -3x_1 + 5x_2 - x_3)$, $\mathbf{B}(\mathbf{x}) = (2x_1 + x_2, x_1 + x_2 + 2x_3, -x_1 + 2x_2 + x_3)$.

Для заданного матрицей A в базисе $\mathfrak{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ в трехмерном линейном пространстве линейного оператора найти в этом базисе $\mathbf{A}(\mathbf{a})$.

7.96. $\mathbf{a} = 2\mathbf{e}_1 - 3\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$ и $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -3 \\ 0 & -4 & 1 \end{pmatrix}$.

7.97. $\mathbf{a} = \mathbf{e}_1 - 4\mathbf{e}_2 + 3\mathbf{e}_3$ и $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 1 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

Пусть A и A' — матрицы оператора $\mathbf{A}$ в базисах $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{B}'$, а $T = T_{\mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{B}'}$ — матрица перехода от базиса $\mathfrak{B}$ к базису $\mathfrak{B}'$. Тогда формула преобразования матрицы оператора при преобразовании базиса имеет вид

$$A' = T^{-1}AT. \quad (7.6)$$

7.98. Найти матрицу линейного оператора в каноническом базисе $\mathfrak{B} = \{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$, переводящего векторы $\mathbf{a}_1 = (2, 0, 3)$, $\mathbf{a}_2 = (4, 1, 5)$, $\mathbf{a}_3 = (3, 1, 2)$ соответственно в векторы: $\mathbf{b}_1 = (1, 2, -1)$, $\mathbf{b}_2 = (4, 5, -2)$, $\mathbf{b}_3 = (1, -1, 1)$.

7.99. Найти матрицу линейного оператора в базисе $\mathfrak{B}' = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\}$, где $\mathbf{b}_1 = (1, -2)$, $\mathbf{b}_2 = (3, -1)$, если в базисе $\mathfrak{B} = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}$, где $\mathbf{a}_1 = (1, 2)$, $\mathbf{a}_2 = (-1, 1)$, его матрица имеет вид $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$.

ПРИМЕР 7.5. Найти матрицу линейного оператора $\mathbf{A}(\mathbf{x}) = [\mathbf{a}, \mathbf{x}]$, $\mathbf{a}$ — фиксированный вектор, действующего в пространстве $\mathcal{V}_3$, в базисе $\mathfrak{B}'$, полученным поворотом канонического базиса $\mathfrak{B} = \{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ на угол φ вокруг орта $\mathbf{i}$.

► Пусть $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$. Тогда матрица линейного оператора $\mathbf{A}$ в базисе $\mathfrak{B} = \{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ имеет вид

$$[\mathbf{A}]_{\mathfrak{B}} = \begin{pmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{pmatrix},$$

так как

$$\mathbf{A}(\mathbf{i}) = [\mathbf{a}, \mathbf{i}] = a_3\mathbf{j} - a_2\mathbf{k}, \mathbf{A}(\mathbf{j}) = [\mathbf{a}, \mathbf{j}] = a_3\mathbf{i} + a_1\mathbf{k},$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{k}) = [\mathbf{a}, \mathbf{k}] = a_2\mathbf{i} - a_1\mathbf{j}.$$

Матрица перехода от базиса $\mathfrak{B}$ к базису $\mathfrak{B}'$ имеет вид

$$T_{\mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi \\ 0 & \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix};$$

так как $T_{\mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{B}'}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & \sin \varphi \\ 0 & -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$, то, используя форму-

лу (7.6), находим

$$\begin{aligned} [\mathbf{A}]_{\mathfrak{B}'} &= T_{\mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{B}'}^{-1} \cdot [\mathbf{A}]_{\mathfrak{B}} \cdot T_{\mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{B}'} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & \sin \varphi \\ 0 & -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi \\ 0 & \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -a_3 \cos \varphi + a_2 \sin \varphi & a_3 \sin \varphi + a_2 \cos \varphi \\ a_3 \cos \varphi - a_2 \sin \varphi & 0 & -a_1 \\ -a_3 \sin \varphi - a_2 \cos \varphi & a_1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

В задачах 7.100–7.102 найти матрицу линейного оператора $\mathbf{A}$, действующего в пространстве $\mathcal{V}_3$, в базисе $\mathfrak{B}'$, полученным поворотом канонического базиса $\mathfrak{B} = \{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ на угол φ вокруг орта $\mathbf{i}$.

7.100. $\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \lambda \mathbf{x}$, λ — заданное число.

7.101. $\mathbf{A}(\mathbf{x}) = (\mathbf{x}, \mathbf{e})\mathbf{e}$, где $\mathbf{e}$ — заданный единичный вектор.

7.102. $\mathbf{A}(\mathbf{x}) = (\mathbf{a}, \mathbf{x})\mathbf{x}$, где $\mathbf{a}$ — заданный вектор.

7.103. В $\mathcal{L}_4$ задан линейный оператор $\mathbf{A}$, матрица которого в некотором базисе $\mathfrak{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4\}$ равна

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Найти матрицу этого оператора в базисах:

а) $\mathfrak{B}' = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_4\}$;

б) $\mathfrak{B}' = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_4\}$.

7.104. В пространстве $\mathcal{L}_2$ линейный оператор $\mathbf{A}$ в базисе $\mathfrak{B}'$: $\mathbf{e}'_1 = \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}'_2 = 2\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2$ имеет матрица $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$. Оператор $\mathbf{B}$ в базисе $\mathfrak{B}''$: $\mathbf{e}''_1 = 3\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}''_2 = 4\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2$ имеет матрицу $\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}$. Найти матрицу оператора $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ в базисе $\mathfrak{B}''$.

7.105. В пространстве $\mathcal{P}_n$ задан линейный оператор дифференцирования $D = \frac{d}{dt}$. Найти матрицу этого оператора в базисе:

а) $1, t, t^2, \dots, t^{n-1}$;

б) $1, (t - t_0), \frac{(t - t_0)^2}{2!}, \dots, \frac{(t - t_0)^{n-1}}{(n-1)!}, t_0 \in \mathbb{R}$.



Образом $\text{Im}(\mathbf{A})$ линейного оператора $\mathbf{A}$ называется множество всех векторов $\mathbf{A}(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \mathcal{L}$. Образ линейного оператора $\mathbf{A}$ является линейным подпространством в $\mathcal{L}$, и его размерность называется *рангом оператора*, обозначается $\text{rang } \mathbf{A} = \dim(\text{Im}(\mathbf{A})) = r$.

Ядром $\text{Ker}(\mathbf{A})$ линейного оператора $\mathbf{A}$ называется множество всех векторов $\mathbf{x} \in \mathcal{L}$, для которых $\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$. Ядро линейного оператора $\mathbf{A}$ является линейным подпространством в $\mathcal{L}$, и его размерность называют *дефектом оператора*, обозначают $d = \text{Def}(\mathbf{A}) = \dim(\text{Ker}(\mathbf{A}))$.

Для линейного оператора, действующего в n -мерном линейном пространстве $\mathcal{L}_n$, справедливы следующие утверждения:

1) сумма ранга и дефекта оператора равна размерности пространства, в котором действует оператор, $\text{Def}(\mathbf{A}) + \text{rang}(\mathbf{A}) = n$;

2) ранг оператора равен рангу его матрицы;

3) ядро оператора совпадает с множеством решений линейной однородной системы с матрицей $\mathbf{A}$, размерность пространства решений этой системы равна дефекту оператора, а ее фундаментальная система решений образует базис в ядре оператора;

4) столбцы, входящие в базисный минор матрицы оператора, образуют базис образа оператора.



7.106. Описать образ и ядро каждого из следующих линейных операторов, действующих в пространстве $\mathcal{V}_3$:

а) $\mathbf{A}(\mathbf{x}) = (\mathbf{x}, \mathbf{e})\mathbf{e}$, $|\mathbf{e}| = 1$; б) $\mathbf{A}(\mathbf{x}) = [\mathbf{x}, \mathbf{a}]$, $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$.

7.107. Описать образ и ядро линейного оператора дифференцирования D , действующего в пространстве $\mathcal{P}_n$.

ПРИМЕР 7.6. Для линейного оператора $\mathbf{A}(\mathbf{x}) = (2x_2 + 2x_3, -2x_1 + 3x_2 + x_3, 4x_1 - x_2 + 3x_3)$, действующего в пространстве $\mathbb{R}^3$, определить ранг и дефект, а также найти базисы образа и ядра.

► Для представления арифметических векторов и заданного линейного оператора воспользуемся каноническим базисом в $\mathbb{R}^3$. В этом базисе матрица оператора имеет вид

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

По определению $\mathbf{y} \in \text{Im}(\mathbf{A})$ в том и только том случае, когда найдется вектор $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ такой, что $\mathbf{y} = \mathbf{A}(\mathbf{x})$, или в координатной записи

$$\mathbf{Y} = \mathbf{A}\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Последнее равенство означает, что образ $\text{Im}(\mathbf{A})$ совпадает с линейной оболочкой системы столбцов матрицы $\mathbf{A}$. Следовательно, ранг оператора $\mathbf{A}$ совпадает с рангом его матрицы, т.е. равен двум, а в качестве базиса $\text{Im}(\mathbf{A})$ может быть выбран любой из базисов системы столбцов матрицы $\mathbf{A}$, например

$$E_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Аналогично $\mathbf{x} \in \text{Ker}(\mathbf{A})$ в том и только том случае, когда $\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$, или в координатной записи

$$AX = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (7.7)$$

Отсюда следует, что ядро $\text{Ker}(\mathbf{A})$ совпадает с подсистемой решений однородной системы (7.7), т.е. дефект оператора $\mathbf{A}$ равен $\text{Def}(\mathbf{A}) = n - \text{rang}(\mathbf{A}) = 3 - 2 = 1$, а в качестве базиса в $\text{Ker}(\mathbf{A})$ может быть выбрана фундаментальная систе-

ма решений системы (7.7), например $E = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. ◀

Для указанных линейных операторов, действующих в пространстве $\mathbb{R}^3$, определить ранг и дефект, а также найти базисы образа и ядра.

7.108. $\mathbf{A}(\mathbf{x}) = (x_1 + 2x_2 + x_3, x_1 - x_3, x_1 + x_2)$.

7.109. $\mathbf{A}(\mathbf{x}) = (x_1 + x_2 + x_3, x_1 + x_2 + x_3, x_1 + x_2 + x_3)$.

7.110. Доказать, что оператор $\mathbf{A}$ невырожденный тогда и только тогда, когда его дефект равен нулю, а следовательно, ранг совпадает с размерностью пространства.

2. Собственные числа и собственные векторы линейного оператора.

Пусть число λ и вектор $\mathbf{x} \in \mathcal{L}$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, таковы, что

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \lambda \mathbf{x}. \quad (7.8)$$

Тогда число λ называется собственным числом линейного оператора $\mathbf{A}$, а вектор $\mathbf{x}$ — собственным вектором, соответствующим собственному числу λ .

В конечномерном пространстве $\mathcal{L}_n$ векторное равенство (7.8) эквивалентно матричному равенству

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E})\mathbf{X} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{X} \neq \mathbf{0}. \quad (7.9)$$

Отсюда следует, что число λ есть собственное число оператора $\mathbf{A}$ в том и только том случае, когда $\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) = 0$, т.е.

число λ есть корень многочлена $p(\lambda) = \det(A - \lambda E)$, называемого *характеристическим многочленом* оператора A . Столбец координат X любого собственного вектора, соответствующего собственному числу λ , есть некоторое нетривиальное решение однородной системы (7.9).

В некоторых случаях собственные числа и собственные векторы линейного оператора можно найти из геометрических соображений.

ПРИМЕР 7.7. Найти собственные числа и собственные векторы оператора P_{Oxy} проектирования на плоскость Oxy в пространстве V_3 . (см. задачу 7.1, с. 231).

► Равенство $P_{Oxy}(\mathbf{x}) = \lambda \mathbf{x}$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, означает, что ортогональная проекция вектора $\mathbf{x}$ на плоскость Oxy коллинеарна самому вектору $\mathbf{x}$. Но это возможно лишь в двух случаях.

1) Вектор $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, компланарен плоскости Oxy . Для всех таких векторов $P_{Oxy}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$, т.е. все они являются собственными векторами оператора P_{Oxy} , соответствующими собственному числу $\lambda_1 = 1$.

2) Вектор $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, ортогонален плоскости Oxy . Для всех таких векторов $P_{Oxy}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} = 0 \cdot \mathbf{x}$, т.е. все они являются собственными векторами оператора P_{Oxy} , соответствующими собственному числу $\lambda_2 = 0$.

В результате получаем, что оператор P_{Oxy} имеет два собственных числа $\lambda_1 = 1$ и $\lambda_2 = 0$. Соответствующие им собственные векторы:

$$\lambda_1 = 1: \mathbf{x}^{(\lambda_1)} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}, \quad \mathbf{x}^{(\lambda_1)} \neq \mathbf{0},$$

и

$$\lambda_2 = 0: \mathbf{x}^{(\lambda_2)} = z\mathbf{k}, \quad \mathbf{x}^{(\lambda_2)} \neq \mathbf{0}.$$

В задачах 7.111–7.114 найти собственные числа и собственные векторы операторов в V_3 .

7.111. $A(\mathbf{x}) = a\mathbf{x}$, a — заданное число.

7.112. $A(\mathbf{x}) = (x, y)\mathbf{j}$ — оператор проектирования на ось Ox .

7.113. $A(\mathbf{x}) = [y, x]$.

7.114. $A(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - 2(\mathbf{x}, \mathbf{e})\mathbf{e}$ — оператор зеркального отражения относительно плоскости с нормальным вектором $\mathbf{e}$.

ПРИМЕР 7.8. Найти собственные числа и собственные векторы линейного оператора, заданного в некотором

базисе матрицей $A = \begin{pmatrix} 7 & -12 & 6 \\ 10 & -19 & 10 \\ 12 & -24 & 13 \end{pmatrix}$.

- Составляем характеристическое уравнение и находим его корни

$$\begin{aligned}
 |A - \lambda E| &= \begin{vmatrix} 7 - \lambda & -12 & 6 \\ 10 & -19 - \lambda & 10 \\ 12 & -24 & 13 - \lambda \end{vmatrix} = \\
 &= (7 - \lambda) \begin{vmatrix} -19 - \lambda & 10 \\ -24 & 13 - \lambda \end{vmatrix} - (-12) \begin{vmatrix} 10 & 10 \\ 12 & 13 - \lambda \end{vmatrix} + 6 \begin{vmatrix} 10 & -19 - \lambda \\ 12 & -24 \end{vmatrix} = \\
 &= (7 - \lambda)(\lambda^2 + 6\lambda - 7) + 120(1 - \lambda) + 72(\lambda - 1) = -(\lambda - 1)^2(\lambda + 1),
 \end{aligned}$$

откуда получаем, что собственными числами оператора являются $\lambda_1 = 1$ и $\lambda_2 = -1$.

Найдем собственные векторы, соответствующие собственному числу $\lambda_1 = 1$. При $\lambda = 1$ система (7.6) принимает вид

$$(A - \lambda E)X = \begin{pmatrix} 6 & -12 & 6 \\ 10 & -20 & 10 \\ 12 & -24 & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Фундаментальная система решений имеет вид $E_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

и $E_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, а общее решение $\alpha_1 E_1 + \alpha_2 E_2 = \alpha_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$,

где $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 \neq 0$.

Получаем, что собственные векторы, соответствующие собственному числу $\lambda_1 = 1$, имеют вид $\mathbf{x}^{(\lambda_1)} = \alpha_1(2, 1, 0) + \alpha_2(1, 0, -1)$, где $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 \neq 0$.

Аналогично рассматривая случай $\lambda_2 = -1$, получаем $\mathbf{x}^{(\lambda_2)} = \alpha(3, 5, 6)$, где $\alpha \neq 0$. ◀

В задачах 7.115–7.121 найти собственные числа и собственные векторы линейных операторов, заданных в некотором базисе матрицами.

7.115. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}.$

7.116. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$

$$7.117. \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$7.118. \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$7.119. \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}.$$

$$7.120. \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 3 & -3 & -1 \\ 3 & -5 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$7.121. \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

7.122. В пространстве $\mathcal{V}_2$ геометрических векторов на плоскости задан оператор поворота $\mathbf{U}(\varphi)$ на угол $0 \leq \varphi < 2\pi$ вокруг начала координат. Проверить (геометрически и аналитически), что при $\varphi \neq 0, \pi$ этот оператор не имеет собственных чисел. Этот пример показывает, что линейный оператор в действительном пространстве может не иметь собственных чисел (и собственных векторов).

7.123. В комплексном пространстве $\mathcal{L}_2$ оператор $\mathbf{A} = \mathbf{A}(\varphi)$ задан матрицей

$$\begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi.$$

Найти его собственные числа и собственные векторы. Сравнить полученные результаты с результатами задачи 7.122.

7.124. Доказать, что собственные векторы линейного оператора, соответствующие различным собственным числам, линейно независимы.

7.125. Доказать, что:

а) оператор $\mathbf{A}$ имеет обратный в том и только том случае, когда он не имеет нулевых собственных чисел;

б) если оператор $\mathbf{A}$ имеет обратный, то $\mathbf{A}$ и $\mathbf{A}^{-1}$ имеют одни и те же собственные векторы.

7.126. Зная собственные числа невырожденного линейного оператора $\mathbf{A}$, найти собственные числа обратного линейного оператора $\mathbf{A}^{-1}$.

3. Линейные операторы в пространстве со скалярным произведением. Пусть $\mathbf{A}$ — линейный оператор, действующий в линейном пространстве $\mathcal{L}$ со скалярным

произведением $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$. Линейный оператор $\mathbf{A}^*$ называется сопряженным к оператору $\mathbf{A}$, если для любых векторов $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ выполняется равенство

$$(\mathbf{A}(\mathbf{x}), \mathbf{y}) = (\mathbf{x}, \mathbf{A}^*(\mathbf{y})).$$

Для всякого оператора $\mathbf{A}$ сопряженный оператор $\mathbf{A}^*$ существует и единственен.

Если оператор $\mathbf{A}$ в ортонормированном базисе имеет матрицу $A = \|a_{ij}\|$, то сопряженный оператор $\mathbf{A}^*$ в том же базисе имеет матрицу $A^* = \|a_{ij}^*\|$, где $a_{ij}^* = \bar{a}_{ji}$ (матрица A^* называется сопряженной к матрице A). В частном случае евклидова пространства $A^* = A^T$.

Пусть $[\mathbf{A}]_{\mathfrak{B}}$ и $[\mathbf{A}]_{\mathfrak{B}'}$ — матрицы оператора $\mathbf{A}$ в базисах $\mathfrak{B} = \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ и $\mathfrak{B}' = \{\mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_n\}$, соответственно, а $T = T_{\mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{B}'}$ — матрица перехода от базиса $\mathfrak{B}$ к базису $\mathfrak{B}'$. Тогда

$$[\mathbf{A}^*]_{\mathfrak{B}'} = T_{\mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{B}'}^{-1} [\mathbf{A}^*]_{\mathfrak{B}} T_{\mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{B}'}.$$

ПРИМЕР 7.9. Доказать формулу $(\mathbf{A}^*)^* = \mathbf{A}$.

► Запишем цепочку равенств, верных для любых векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$

$$\begin{aligned} (\mathbf{A}(\mathbf{x}), \mathbf{y}) &= (\mathbf{x}, \mathbf{A}^*(\mathbf{y})) = (\mathbf{A}^*(\mathbf{y}), \mathbf{x}) = (\mathbf{y}, (\mathbf{A}^*)^*(\mathbf{x})) = \\ &= ((\mathbf{A}^*)^*(\mathbf{x}), \mathbf{y}) = ((\mathbf{A}^*)^*(\mathbf{x}), \mathbf{y}), \end{aligned}$$

отсюда $(\mathbf{A}(\mathbf{x}) - (\mathbf{A}^*)^*(\mathbf{x}), \mathbf{y}) = 0$ для любого $\mathbf{y}$. Отсюда, в силу произвольности векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$, получаем $\mathbf{A} = (\mathbf{A}^*)^*$. ◀

7.127. Доказать, что справедливы следующие формулы:

а) $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^* = \mathbf{A}^* + \mathbf{B}^*$; б) $(\mathbf{AB})^* = \mathbf{B}^* \mathbf{A}^*$;

в) $(\alpha \mathbf{A})^* = \bar{\alpha} \mathbf{A}^*$; г) $(\mathbf{A}^{-1})^* = (\mathbf{A}^*)^{-1}$, если $\mathbf{A}$ невырожденный.

Линейный оператор $\mathbf{A}$ в базисе $\mathfrak{B}' = \{\mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_n\}$ имеет матрицу A . Найти матрицу сопряженного оператора $\mathbf{A}^*$ в том же базисе $\mathfrak{B}'$, если векторы $\mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_n$ заданы столбцами своих координат в некотором ортонормированном базисе $\mathfrak{B} = \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$.

$$7.128. A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad E'_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad E'_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$7.129. A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & -1 \\ 2 & 7 & -3 \end{pmatrix}, E'_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, E'_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, E'_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$7.130. A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 \\ 1 & \varepsilon^2 & \varepsilon \end{pmatrix}, \varepsilon = e^{2\pi i/3}, E'_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, E'_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, E'_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

7.132. Найти матрицу линейного оператора $\mathbf{A}^*$ в ортонормированном базисе $\mathfrak{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$, если оператор $\mathbf{A}$ переводит векторы $\mathbf{a}_1 = (0, 0, 1)$, $\mathbf{a}_2 = (0, 1, 1)$, $\mathbf{a}_3 = (1, 1, 1)$ в векторы $\mathbf{b}_1 = (1, 2, 1)$, $\mathbf{b}_2 = (3, 1, 2)$, $\mathbf{b}_3 = (7, -1, 4)$ соответственно, считая, что координаты всех векторов даны в базисе $\mathfrak{B}$.

7.133. Найти сопряженный оператор для поворота евклидовой плоскости на угол φ вокруг начала координат против часовой стрелки.

7.134. Пусть Oxy — декартова прямоугольная система координат на плоскости и $\mathbf{A}$ — оператор отражения точек плоскости относительно прямой $l: ax + by = 0$. Найти матрицу оператора $\mathbf{A}^*$.



Линейный оператор $\mathbf{H}$ в пространстве со скалярным произведением называется *самосопряженным*, если $\mathbf{H} = \mathbf{H}^*$. Самосопряженный оператор в унитарном (евклидовом) пространстве называется также *эрмитовым (симметричным)*. Для того чтобы оператор $\mathbf{A}$ был эрмитовым (симметричным), необходимо и достаточно, чтобы в любом ортонормированном базисе его матрица $A = \|a_{ij}\|$ удовлетворяла соотношениям $a_{ij} = \bar{a}_{ji}$ ($a_{ij} = a_{ji}$). Такие матрицы называются *эрмитовыми (симметричными)*.

Линейный оператор $\mathbf{U}$ в унитарном (евклидовом) пространстве называется *унитарным (ортогональным)*, если

$$\mathbf{U}\mathbf{U}^* = \mathbf{U}^*\mathbf{U} = \mathbf{E}, \text{ т.е. } \mathbf{U}^* = \mathbf{U}^{-1}.$$

Для того чтобы оператор $\mathbf{A}$ был унитарным (ортогональным), необходимо и достаточно, чтобы в любом ортонормированном базисе его матрица $A = \|a_{ij}\|$ удовлетворяла соотношениям $A^{-1} = A^*$ ($A^{-1} = A^T$). Такие матрицы называют *унитарными (ортогональными)*.



Доказать свойства самосопряженного оператора.

7.135. Собственные числа действительны.

7.136. Собственные векторы, соответствующие различным собственным числам, ортогональны.

Доказать свойства унитарного оператора.

7.137. Собственные числа по модулю равны единице.

7.138. Для того чтобы линейный оператор был унитарным, необходимо и достаточно, чтобы он переводил ортонормированный базис снова в ортонормированный.

7.139. Унитарный оператор сохраняет скалярное произведение и длины векторов.

7.140. Доказать, что если один и тот же вектор $\mathbf{x}$ является собственным для линейного оператора $\mathbf{A}$ с собственным значением λ_1 и для сопряженного оператора $\mathbf{A}^*$ с собственным значением λ_2 , то $\lambda_1 = \overline{\lambda_2}$.

7.141. Доказать, что если линейный оператор $\mathbf{A}$ унитарного пространства имеет собственные значения $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, то собственными значениями оператора $\mathbf{A}^*$ будут числа $\overline{\lambda_1}, \overline{\lambda_2}, \dots, \overline{\lambda_n}$.

7.142. Показать, что в пространстве $\mathcal{V}_3$ следующие операторы являются симметричными:

а) $\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \lambda \mathbf{x}$, λ — фиксированное число;

б) $\mathbf{A}(\mathbf{x}) = (\mathbf{x}, \mathbf{e})\mathbf{e}$, $|\mathbf{e}| = 1$;

в) $\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - (\mathbf{x}, \mathbf{e})\mathbf{e}$, $|\mathbf{e}| = 1$.

4. Приведение матрицы линейного оператора к диагональному виду. Если оператор $\mathbf{A}$, действующий в пространстве $\mathcal{L}_n$, имеет n линейно независимых векторов $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$, соответствующих собственным числам $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, то в базисе из этих векторов матрица оператора $\mathbf{A}$ имеет диагональный вид

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}. \quad (7.10)$$

Матрица $\mathbf{A}$ самосопряженного оператора всегда приводится к диагональному виду. При этом, используя понятие унитарного оператора, ее можно представить в виде

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{U}^{-1},$$

где U — матрица унитарного оператора, осуществляющего переход от исходного базиса к базису из собственных векторов оператора A , а D — диагональная матрица вида (7.10).



Найти ортонормированный базис из собственных векторов и матрицу в этом базисе для линейного оператора, заданного в некотором ортонормированном базисе матрицей A (искомый базис определен неоднозначно).

$$7.143. A = \begin{pmatrix} 11 & 2 & -8 \\ 2 & 2 & 10 \\ -8 & 10 & 5 \end{pmatrix}. \quad 7.144. A = \begin{pmatrix} 17 & -8 & 4 \\ -8 & 17 & -4 \\ 4 & -4 & 11 \end{pmatrix}.$$

$$7.145. A = \begin{pmatrix} 3 & -i & 0 \\ i & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}. \quad 7.146. A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Для данной матрицы найти диагональную матрицу D и унитарную (ортогональную) матрицу U такие, что $A = UDU^{-1}$.

$$7.147. A = \begin{pmatrix} 3 & 2+2i \\ 2-2i & 1 \end{pmatrix}. \quad 7.148. A = \begin{pmatrix} 3 & 2-i \\ 2+i & 7 \end{pmatrix}.$$

$$7.149. A = \begin{pmatrix} 1 & 4i & 0 \\ -4i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad 7.150. A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -2 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$7.151. A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Найти собственные векторы линейного оператора A , заданного в некотором базисе матрицей A . Построить базис из собственных векторов и матрицу данного оператора в этом базисе.

$$7.152. A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}. \quad 7.153. A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$7.154. A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

7.3. Билинейные и квадратичные формы

1. Линейные формы. Говорят, что в действительном линейном пространстве $\mathcal{L}$ задана *линейная форма*, если каждому вектору $\mathbf{x} \in \mathcal{L}$ поставлено в соответствие число $f(\mathbf{x})$, причем выполнены условия

$$f(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y}), \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{L},$$

$$f(\lambda \mathbf{x}) = \lambda f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathcal{L}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

В задачах 7.155–7.158 доказать, что в пространстве $\mathcal{L}$ заданная функция $f(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \mathcal{L}$, является линейной формой.

7.155. $f(\mathbf{x}) = \int_a^b x(t) dt$, $\mathcal{L} = C_{[a, b]}$, $\mathbf{x} = x(t)$.

7.156. $f(\mathbf{x}) = \dot{x}(t_0)$, $\mathcal{L} = C_{[a, b]}$, $\mathbf{x} = x(t)$, $t_0 \in [a, b]$.

7.157. $f(\mathbf{x}) = (\mathbf{x}, \mathbf{a})$, $\mathcal{L} = \mathcal{V}_3$, $\mathbf{a} \in \mathcal{V}_3$ — фиксированный вектор.

7.158. $f(\mathbf{x}) = \mathbf{a} \mathbf{b} \mathbf{x}$, $\mathcal{L} = \mathcal{V}_3$, $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathcal{V}_3$ — фиксированные векторы.

7.159. Пусть в пространстве $\mathcal{L}$ фиксирован базис $\mathfrak{B} = \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$. Пусть, далее, $f(\mathbf{e}_i) = a_i$, $i = 1, 2, \dots, n$, где $f(\mathbf{x})$ — линейная форма в $\mathcal{L}$.

а) Доказать, что $f(\mathbf{x}) = a_1 x_1 + \dots + a_n x_n$, где $x_1, \dots, x_n$ — координаты вектора $\mathbf{x}$ в базисе $\mathfrak{B}$.

б) Обозначим $\mathcal{L}^*$ множество линейных форм $f(\mathbf{x})$, в котором введены операции сложения и умножения на число следующим образом:

$$g = f_1 + f_2, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{L} \quad (g(\mathbf{x}) = f_1(\mathbf{x}) + f_2(\mathbf{x}));$$

$$h = \lambda f, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{L} \quad (h(\mathbf{x}) = \lambda f(\mathbf{x})).$$

Доказать, что $\mathcal{L}^*$ — линейное пространство.

в) Доказать что $\dim \mathcal{L}^* = n$ (пространство $\mathcal{L}^*$ называют *сопряженным* к пространству $\mathcal{L}$).

7.160. Доказать, что:

а) если $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$, то формула $f(\mathbf{x}) = x_1$ определяет линейную форму;

б) всякую не равную тождественно нулю линейную форму $f(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, надлежащим выбором базиса можно привести

к виду $f(\mathbf{x}) = x_1$, где x_1 — первая координата вектора $\mathbf{x}$ в этом базисе.

2. Билинейные формы. Числовая функция $A(\mathbf{x}, \mathbf{y}) : \mathcal{L} \times \mathcal{L} \rightarrow \mathbb{R}$, заданная на действительном линейном пространстве $\mathcal{L}$, называется *билинейной формой*, если при любом фиксированном $\mathbf{y}$ она является линейной формой по $\mathbf{x}$, а при любом фиксированном $\mathbf{x}$ — линейной формой по $\mathbf{y}$. Билинейная форма называется *симметрической*, если $A(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = A(\mathbf{y}, \mathbf{x})$, $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{L}$. Если в действительном линейном пространстве $\mathcal{L}_n$ задан некоторый базис $\mathfrak{B} = \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$, то матрица $A = \|a_{ij}\|$, $a_{ij} = A(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)$, называется *матрицей билинейной формы* $A(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ в базисе $\mathfrak{B}$.

Доказать, что в действительном линейном пространстве $\mathcal{L}$ функции $A(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ являются билинейными формами.

7.161. $A(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = f_1(\mathbf{x})f_2(\mathbf{y})$, где $f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{y})$ — линейные формы в $\mathcal{L}$.

7.162. $A(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i y_j$, где $\mathcal{L} = \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, $A = \|a_{ij}\|$ некоторая матрица.

7.163. Пусть в действительном линейном пространстве $\mathcal{L}_n$ задан базис $\mathfrak{B} = \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$, $A(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ — билинейная форма в $\mathcal{L}_n$ и $A(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = a_{ij}$. Доказать, что:

а) $A(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i y_j$, где x_i, y_j ($i, j = 1, 2, \dots, n$) — координаты векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ в базисе $\mathfrak{B}$;

б) если $A' = \|a'_{ij}\|$ — матрица билинейной формы $A(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ в базисе $\mathfrak{B}' = \{\mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_n\}$, то $A' = T^T A T$, где $T = T_{\mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{B}'}$ — матрица перехода от базиса $\mathfrak{B}$ к базису $\mathfrak{B}'$.

Пусть в пространстве $\mathbb{R}^3$ задана билинейная форма $A(\mathbf{x}, \mathbf{y})$. Найти ее матрицу в базисе $\mathfrak{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$.

7.164. $A(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1 y_1 + 2x_2 y_2 + 3x_3 y_3$, $\mathbf{e}_1 = (1, 1, 1)$, $\mathbf{e}_2 = (1, 1, -1)$, $\mathbf{e}_3 = (1, -1, -1)$.

7.165. $A(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1 y_2 + x_2 y_3 + x_3 y_1$, $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (1, 1, 0)$, $\mathbf{e}_3 = (1, 1, 1)$.

Пусть в пространстве $\mathbb{R}^n$ задана билинейная форма $A(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ в базисе $\mathfrak{B}$. Найти ее матрицу в базисе $\mathfrak{B}'$.

$$7.166. \quad n = 4, \quad A(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1 y_2 + x_2 y_3 + x_3 y_4,$$

$$T_{\mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$7.167. \quad n = 2, \quad A(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1 y_1 + x_1 y_2 + x_2 y_1 - x_2 y_2, \quad T_{\mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

7.168. Доказать, что скалярное произведение $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ в евклидовом пространстве $\mathcal{E}$ является билинейной формой.

3. Квадратичные формы. Пусть $A(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ — симметрическая билинейная форма. Форма $A(\mathbf{x}, \mathbf{x})$, которая получается из $A(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, если положить $\mathbf{x} = \mathbf{y}$, называется *квадратичной*. При этом $A(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ называется билинейной формой, полярной к квадратичной форме $A(\mathbf{x}, \mathbf{x})$.

Если в действительном линейном пространстве $\mathcal{L}_n$ фиксирован некоторый базис $\mathfrak{B} = \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$, то квадратичная форма $A(\mathbf{x}, \mathbf{x})$ в этом базисе имеет вид

$$A(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j, \quad (7.11)$$

где $A = \|a_{ij}\|$ — матрица квадратичной формы и $\mathbf{x} = x_1 \mathbf{e}_1 + \dots + x_n \mathbf{e}_n$.

Пусть в некотором базисе выражение (7.11) квадратичной формы не содержит произведений $x_i x_j$ ($i \neq j$), т.е.

$$A(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2. \quad (7.12)$$

Тогда выражение (7.12) называется каноническим видом квадратичной формы. В частности, если $\lambda_i \in \{-1, 0, 1\}$, $i = 1, 2, \dots, n$, то получаем *нормальный вид* квадратичной формы $A(\mathbf{x}, \mathbf{x})$.

Для всякой квадратичной формы существует такой базис $\mathfrak{B}'$, в котором она имеет канонический (и даже нормальный) вид.

Линейным преобразованием неизвестных называется такой переход от системы n неизвестных $x_1, x_2, \dots, x_n$ к системе n

В дальнейшем считаем $a_{11} \neq 0$ (если $a_{11} = 0$, то отличен от нуля коэффициент при квадрате какой-нибудь другой координаты, и к рассматриваемому случаю можно прийти, иначе занумеровав векторы $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$, что также является некоторым преобразованием базиса).

Рассмотрим часть квадратичной формы, содержащую x_1 , т.е.

$$\sigma_1 = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \dots + 2a_{1n}x_1x_n.$$

Дополним эту сумму до полного квадрата

$$\sigma_1 = \frac{1}{a_{11}}(a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n)^2 - \gamma,$$

где γ есть алгебраическая сумма членов, не зависящих от x_1 . Если теперь сделать замену

$$x'_1 = a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n,$$

$$x_i = x'_i, \quad i = 2, \dots, n,$$

то квадратичная форма в новом базисе примет вид

$$A(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = \frac{1}{a_{11}}x_1'^2 + \sum_{i=2}^n \sum_{j=2}^n a'_{ij}x'_ix'_j = \frac{1}{a_{11}}x_1'^2 + A_1.$$

В полученной форме выделено слагаемое $\frac{1}{a_{11}}x_1'^2$, а оставшаяся часть A_1 является квадратичной формой в $\mathcal{L}_{n-1}$. Далее рассуждения повторяются для квадратичной формы $A_1(\mathbf{x}, \mathbf{x})$, и т.д.



ПРИМЕР 7.10. Методом Лагранжа привести к каноническому виду квадратичную форму

$$A(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 4x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 3x_2x_3.$$

Найти линейное преобразование, приводящее данную квадратичную форму к каноническому виду.

- Так как коэффициент при x_1^2 отличен от нуля, то, выделяя полный квадрат, получим

$$\begin{aligned} A(\mathbf{x}, \mathbf{x}) &= 4(x_1^2 - x_1x_2 + x_1x_3) + x_2^2 + x_3^2 - 3x_2x_3 = \\ &= 4\left(x_1 - \frac{x_2}{2} + \frac{x_3}{2}\right)^2 - x_2^2 - x_3^2 + 2x_2x_3 + x_2^2 + x_3^2 - 3x_2x_3 = \end{aligned}$$

$$= 4 \left(x_1 - \frac{x_2}{2} + \frac{x_3}{2} \right)^2 - x_2 x_3.$$

Теперь последовательно выполним два линейных преобразования переменных.

$$1\text{-е преобразование } x'_1 = x_1 - \frac{x_2}{2} + \frac{x_3}{2}, x'_2 = x_2, x'_3 = x_3.$$

$$\text{Получаем } A = 4x_1'^2 - x_2'x_3'.$$

$$2\text{-е преобразование } x'_1 = x'', x'_2 = x_2'' - x_3'', x'_3 = x_2'' + x_3''. \text{ Получаем } A = 4x_1'^2 - x_2'^2 + x_3'^2.$$

$$\text{Для 1-го преобразования находим } x_1 = x'_1 + \frac{x'_2}{2} - \frac{x'_3}{2}, x_2 = x'_2, x_3 = x'_3, \text{ т.е.}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_n \end{pmatrix}.$$

$$\text{Для 2-го преобразования находим } x'_1 = x_1'', x'_2 = x_2'' - x_3'', x'_3 = x_2'' + x_3'', \text{ т.е.}$$

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1'' \\ x_2'' \\ x_n'' \end{pmatrix}.$$

Последовательное выполнение линейных преобразований дает

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_n \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_n \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1'' \\ x_2'' \\ x_n'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1'' \\ x_2'' \\ x_n'' \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Линейное преобразование $x_1 = x_1'' - x_3'', x_2 = x_2'' - x_3'', x_3 = x_2'' + x_3''$ неизвестных приводит квадратичную форму к каноническому виду $A = 4x_1'^2 - x_2'^2 + x_3'^2$. ◀



Метод собственных векторов. Будем рассматривать квадратичную форму (7.8) в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$. Так как ее матрица $A = \|a_{ij}\|$ симметрична, то она может быть представлена в виде $A = UDU^T$, где D — диагональная матрица, на диагонали которой стоят собственные числа матрицы A , а U — ортогональная матрица. Столбцы матрицы U являются координатами некоторого ортонормированного базиса $\mathfrak{B}' = \{\mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_n\}$, в котором матрица A имеет диагональный вид D , и, следовательно, квадратичная форма — искомым канонический вид. Соответствующее преобразование

координат определяется соотношением
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}.$$



ПРИМЕР 7.11. Найти ортогональное преобразование, приводящее квадратичную форму $A(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 5x_1^2 + 4x_1x_2 + 2x_2^2$, заданную в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^2$, к каноническому виду. Написать этот канонический вид.

► Матрица A квадратичной формы имеет вид $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.

Характеристическое уравнение $|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 2 \\ 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$

приводится к виду $\lambda^2 - 7\lambda + 6 = 0$. Корни квадратного уравнения $\lambda_1 = 6$, $\lambda_2 = 1$. Соответствующие ортонормированные собственные векторы $\mathbf{e}'_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{e}'_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$,

и, следовательно, $U = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $U^T = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

В базисе $\mathfrak{B}' = \{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2\}$ заданная квадратичная форма имеет вид $A = 6x_1'^2 + x_2'^2$, а соответствующее преобразование координат

$$\begin{cases} x_1 = \frac{2}{\sqrt{5}} x'_1 - \frac{1}{\sqrt{5}} x'_2, \\ x_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} x'_1 + \frac{2}{\sqrt{5}} x'_2. \end{cases}$$



Квадратичная форма $A(\mathbf{x}, \mathbf{x})$, определенная в действительном линейном пространстве $\mathcal{L}_n$, называется *положительно (отрицательно) определенной*, если для всякого $\mathbf{x} \in \mathcal{L}_n$ ($\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$)

$$A(\mathbf{x}, \mathbf{x}) > 0 \quad (< 0).$$

Пусть $A = \|a_{ij}\|$ — матрица квадратичной формы $A(\mathbf{x}, \mathbf{x})$ и

$$D_1 = a_{11}, D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \dots, D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} —$$

последовательность главных миноров матрицы A .

Критерием положительной определенности квадратичной формы является следующий критерий Сильвестра: *для того чтобы квадратичная форма $A(\mathbf{x}, \mathbf{x})$ была положительно определенной, необходимо и достаточно, чтобы все главные миноры ее матрицы $A = \|a_{ij}\|$ были положительны, т.е. $D_k > 0$, $k = 1, 2, \dots, n$.*

ПРИМЕР 7.12. Определить, является ли положительно определенной квадратичная форма $A(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2x_3$.

► Составим матрицу квадратичной формы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Главные миноры формы $D_1 = 1 > 0$, $D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 > 0$,
 $D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 < 0$. Согласно критерию Сильвестра

форма не является положительно определенной. ◀

Определить, какие квадратичные формы являются положительно либо отрицательно определенными, а какие нет.

7.169. $x_1^2 + 26x_2^2 + 10x_1x_2$. **7.170.** $x_1^2 + 26x_2^2 + 10x_1x_2$.

$$7.171. x_1^2 - 15x_2^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 + 6x_2x_3.$$

$$7.172. 12x_1x_2 - 12x_1x_3 + 6x_2x_3 - 11x_1^2 + 6x_2^2 - 6x_3^2.$$

$$7.173. 9x_1^2 + 6x_2^2 + 6x_3^2 + 12x_1x_2 - 10x_1x_3 - 2x_2x_3.$$

$$7.174. 2x_4^2 + x_1x_2 + x_1x_3 - 2x_2x_3 + 2x_2x_4.$$

$$7.175. x_1^2 + 4x_2^2 + 4x_3^2 + 8x_4^2 + 8x_2x_4.$$

4. Кривые и поверхности второго порядка. Приведение к каноническому виду. *Гиперповерхностью второго порядка* в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ называется множество точек, координаты которых удовлетворяют уравнению

$$A(\mathbf{x}, \mathbf{x}) + 2(\mathbf{b}, \mathbf{x}) + c = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}x_i x_j + 2 \sum_{k=1}^n b_k x_k + c = 0, \quad (7.14)$$

где в левой части стоит многочлен второй степени от n переменных $x_1, \dots, x_n$.

Задача классификации гиперповерхностей второго порядка состоит в нахождении такого базиса в $\mathbb{R}^n$, в котором левая часть уравнения в новых переменных $x'_1, \dots, x'_n$ имеет наиболее простой вид. Для этого сначала ищется такое ортогональное преобразование, что в новых переменных квадратичная

форма $A(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}x_i x_j$ имеет канонический вид. В новом базисе уравнение записывается следующим образом:

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k'^2 + 2 \sum_{k=1}^n b'_k x'_k + c = 0,$$

причем не все λ_k , $k = 1, 2, \dots, n$, равны нулю. Если $\lambda_k \neq 0$, то переносом начала координат можно уничтожить линейный член:

$$\lambda_k x_k'^2 + 2b'_k x'_k = \lambda_k \left(x'_k + \frac{b'_k}{\lambda_k} \right)^2 - \frac{b_k'^2}{\lambda_k} = \lambda_k x_k''^2 - \frac{b_k'^2}{\lambda_k}.$$

После таких преобразований получаем (изменяя нумерацию переменных, если это необходимо)

$$\lambda_1 x_1''^2 + \dots + \lambda_s x_s''^2 + b_{s+1}'' x_{s+1}'' + \dots + b_n'' x_n'' + c'' = 0. \quad (7.15)$$

Уравнение (7.15) называется *каноническим уравнением* гиперповерхности второго порядка.

Множество точек плоскости $\mathbb{R}^2$, удовлетворяющих уравнению (7.14) называется *кривой второго порядка*. В этом случае каноническое уравнение (7.15) может принимать один из следующих видов (в переменных x, y):

$$1) \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + c = 0 \quad (\lambda_1 \lambda_2 \neq 0);$$

$$2) \lambda_1 x^2 + by = 0 \quad (\lambda_1 \neq 0);$$

$$3) \lambda_1 x^2 + c = 0 \quad (\lambda_1 \neq 0).$$

ПРИМЕР 7.13. Написать каноническое уравнение кривой второго порядка

$$5x^2 + 4xy + 2y^2 + 2\sqrt{5}x + 8\sqrt{5}y + 1 = 0,$$

определить ее тип и найти каноническую систему координат.

► Матрица квадратичной части многочлена второй степени равна $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$. Ее собственные числа $\lambda_1 = 6$ и $\lambda_2 = 1$; соб-

ственные векторы $\mathbf{e}_1 = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}} \right)$, $\mathbf{e}_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}} \right)$. После выполнения преобразования, соответствующего повороту на угол $\varphi = \arctg \frac{1}{2}$ относительно начала координат,

$$x = \frac{2}{\sqrt{5}}x' - \frac{1}{\sqrt{5}}y', \quad y = \frac{1}{\sqrt{5}}x' + \frac{2}{\sqrt{5}}y'$$

уравнение кривой приведет к виду

$$6x'^2 + y'^2 + 2\sqrt{5}\left(\frac{2}{\sqrt{5}}x' - \frac{1}{\sqrt{5}}y'\right) + 8\sqrt{5}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}x' + \frac{2}{\sqrt{5}}y'\right) + 1 = 0.$$

Так как λ_1 и λ_2 отличны от нуля, то по каждой из новых переменных x' и y' можно выделить полный квадрат:

$$6(x'^2 + 2x' + 1) - 6 + (y'^2 + 14y' + 49) - 49 + 1 = 0,$$

или

$$6(x' + 1)^2 + (y' + 7)^2 = 54.$$

Заменой переменных $x' = x'' - 1$, $y' = y'' - 7$, соответствующей сдвигу по каждой из координатных осей, получаем

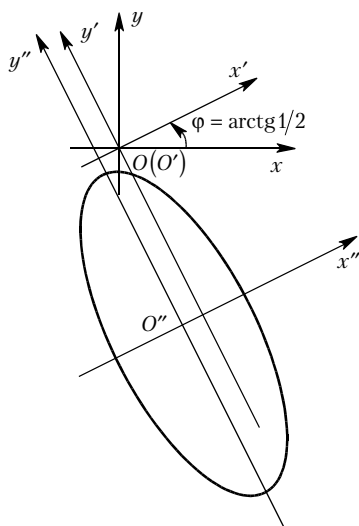


Рис. 7.1

$\frac{x''^2}{9} + \frac{y''^2}{54} = 1$, что представляет собой — уравнение эллипса (рис. 7.1). Результирующее преобразование имеет вид

$$\begin{aligned} x &= \frac{2}{\sqrt{5}} x'' - \frac{1}{\sqrt{5}} y'' + \sqrt{5}, \\ y &= \frac{1}{\sqrt{5}} x'' + \frac{2}{\sqrt{5}} y'' - 3\sqrt{5}. \end{aligned}$$

а каноническая система координат — $\langle O'', \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle$, где

$$O'' = (\sqrt{5}, -3\sqrt{5}),$$

$$\mathbf{e}_1 = \frac{2}{\sqrt{5}} \mathbf{i} - \frac{1}{\sqrt{5}} \mathbf{j},$$

$$\mathbf{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \mathbf{i} + \frac{2}{\sqrt{5}} \mathbf{j}. \quad \blacktriangleleft$$

Написать канонические уравнения кривых второго порядка, определить их тип и найти канонические системы координат.

7.176. $9x^2 - 4xy + 6y^2 + 16x - 8y - 2 = 0$.

7.177. $x^2 - 2xy + y^2 - 10x - 6y + 25 = 0$.

7.178. $5x^2 + 12xy - 22x - 12y - 19 = 0$.

7.179. $4x^2 - 4xy + y^2 - 6x + 3y - 4 = 0$.

7.180. $2x^2 + 4xy + 5y^2 - 6x - 8y - 1 = 0$.

7.181. $x^2 - 4xy + 4y^2 - 4x - 3y - 7 = 0$.



Множество точек евклидова пространства $\mathbb{R}^3$, удовлетворяющих уравнению (7.14) называется *поверхностью второго порядка*. В этом случае каноническое уравнение (7.15) может принимать один из следующих видов (в переменных x, y, z),

1) $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2 + c = 0 \quad (\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \neq 0);$

2) $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + bz = 0 \quad (\lambda_1 \lambda_2 \neq 0);$

3) $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + c = 0 \quad (\lambda_1 \lambda_2 \neq 0);$

4) $\lambda_1 x^2 + by = 0 \quad (\lambda_1 \neq 0);$

$$5) \lambda_1 x^2 + c = 0 \quad (\lambda_1 \neq 0).$$

Поверхности типов 3)–5) являются цилиндрами (эллиптическими, гиперболическими и т.д. в зависимости от типа кривой в сечении плоскостью $z = 0$).

ПРИМЕР 7.14. Написать каноническое уравнение поверхности второго порядка

$$4x^2 + 4y^2 - 8z^2 - 10xy + 4yz + 4zx - 16x - 16y - 8z + 72 = 0,$$

определить ее тип и найти каноническую систему координат.

► Матрица квадратичной части многочлена второй степени

$$\text{равна } \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ -5 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & -8 \end{pmatrix}.$$

Ее собственные числа $\lambda_1 = 9$, $\lambda_2 = -9$, $\lambda_3 = 0$, а соответствующие им собственные векторы $\mathbf{e}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right)$,

$$\mathbf{e}_2 = \left(\frac{1}{3\sqrt{2}}, \frac{1}{3\sqrt{2}}, -\frac{4}{3\sqrt{2}} \right), \quad \mathbf{e}_3 = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3} \right).$$

После выполнения линейного преобразования

$$x = \frac{1}{3\sqrt{2}}(3x' + y' + 2\sqrt{2}z'),$$

$$y = \frac{1}{3\sqrt{2}}(-3x' + y' + 2\sqrt{2}z'),$$

$$z = \frac{1}{3\sqrt{2}}(-4y' + \sqrt{2}z')$$

получим

$$9x'^2 - 9y'^2 - 72z' + 72 = 0.$$

Преобразование сдвига необходимо выполнить лишь по переменной z'

$$-72z' + 72 = -72(z' - 1) = -72z''.$$

Второе преобразование координат имеет вид $x'' = x'$, $y'' = y'$, $z'' = z' - 1$, откуда окончательно получаем каноническое уравнение гиперболического параболоида

$$\frac{x''^2}{8} - \frac{y''^2}{8} = z''.$$

Результирующее преобразование координат

$$\begin{aligned}x &= \frac{1}{3\sqrt{2}}(3x'' + y'' + 2\sqrt{2}z'') + \frac{2}{3}, \\y &= \frac{1}{3\sqrt{2}}(-3x'' + y'' + 2\sqrt{2}z'') + \frac{2}{3}, \\z &= \frac{1}{3\sqrt{2}}(-4y'' + \sqrt{2}z'') + \frac{1}{3},\end{aligned}$$

а каноническая система координат — $\langle O', \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \rangle$, где

$$\begin{aligned}O' &= \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3} \right), \\ \mathbf{e}_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i} - \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{j}, \\ \mathbf{e}_2 &= \frac{1}{3\sqrt{2}}\mathbf{i} + \frac{1}{3\sqrt{2}}\mathbf{j} - \frac{4}{3\sqrt{2}}\mathbf{k}, \\ \mathbf{e}_3 &= \frac{2}{3}\mathbf{i} + \frac{2}{3}\mathbf{j} + \frac{1}{3}\mathbf{k}.\end{aligned}$$

Написать канонические уравнения поверхностей второго порядка, определить их тип и найти канонические системы координат.

7.182. $7x^2 + 6y^2 + 5z^2 - 4xy - 4yz - 6x - 24y + 18z + 30 = 0.$

7.183. $2x^2 - 7y^2 - 4z^2 + 4xy + 20yz - 16zx + 60x - 12y + 12z - 90 = 0.$

7.184. $2x^2 + 2y^2 - 5z^2 + 2xy - 2x - 4y - 4z + 2 = 0.$

7.185. $2x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 4xy + 2yz + 2zx - 4x + 6y - 2z + 3 = 0.$

7.186. $4x^2 + y^2 + 4z^2 - 4xy + 4yz - 8zx - 28x + 2y + 16z + 45 = 0.$

7.187. $2x^2 + 5y^2 + 2z^2 - 2xy - 4xz + 2yz + 2x - 10y - 2z - 1 = 0.$

7.188. $x^2 + 5y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 6zx - 2x + 6y + 2z = 0.$

7.189. $x^2 - 2y^2 + z^2 + 4xy + 4yz - 10zx + 2x + 4y - 10z - 1 = 0.$

Глава 8

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

8.1. Производная

1. Определение производной. Пусть функция $y = f(x)$ определена в δ -окрестности $U_\delta(x_0)$ точки x_0 и $\Delta f(x_0, \Delta x) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ — приращение этой функции, соответствующее приращению аргумента Δx , $|\Delta x| < \delta$. *Производной 1-го порядка (или первой производной)* функции $y = f(x)$ в точке x_0 называется предел

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x_0, \Delta x)}{\Delta x}.$$

$$\text{Числа } f'_-(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{\Delta f(x_0, \Delta x)}{\Delta x} \text{ и } f'_+(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{\Delta f(x_0, \Delta x)}{\Delta x}$$

называются соответственно *левой и правой (односторонней) производными* функции $y = f(x)$ в точке x_0 . Для существования производной $f'(x_0)$ функции $y = f(x)$ в точке x_0 необходимо и достаточно, чтобы ее левая и правая производные в этой точке существовали и совпадали, т.е.

$$f'_-(x_0) = f'_+(x_0).$$

ПРИМЕР 8.1. Пользуясь определением производной, вычислить $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$, если $f(x) = \operatorname{tg} 3x$.

► Найдем приращение функции $f(x) = \operatorname{tg} 3x$

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \operatorname{tg} 3\left(\frac{\pi}{4} + \Delta x\right) - \operatorname{tg} \frac{3\pi}{4} =$$

$$= \frac{\sin(3\Delta x)}{\cos 3\left(\frac{\pi}{4} + \Delta x\right) \cos \frac{3\pi}{4}}.$$

Пользуясь определением производной и эквивалентностью $\sin(3\Delta x) \sim 3\Delta x$ при $\Delta x \rightarrow 0$, находим

$$\begin{aligned} f'\left(\frac{\pi}{4}\right) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin(3\Delta x)}{\Delta x \cos 3\left(\frac{\pi}{4} + \Delta x\right) \cos \frac{3\pi}{4}} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{3\Delta x}{\Delta x \cos 3\left(\frac{\pi}{4} + \Delta x\right) \cos \frac{3\pi}{4}} = \frac{3}{\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = 6. \quad \blacktriangleleft \end{aligned}$$

ПРИМЕР 8.2. Пользуясь определением правой и левой производной, вычислить $f'_-(x_0)$ и $f'_+(x_0)$, если $f(x) = |x|$.

► Имеем по определению

$$\begin{aligned} f'_-(x_0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{-\Delta x}{\Delta x} = -1, \\ f'_+(x_0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1. \end{aligned}$$

Заметим, что так как $f'_-(x_0) \neq f'_+(x_0)$, то функция $f(x) = |x|$ не имеет производной в точке $x_0 = 0$. ◀

Найти $\Delta f(x_0, \Delta x)$.

8.1. $f(x) = x^3$, $x_0 = 1$, $\Delta x = 0,1$.

8.2. $f(x) = \sqrt{x}$, $x_0 = 0$, $\Delta x = 0,25$.

8.3. $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $x_0 = 0$, $\Delta x = 0,27$.

8.4. $f(x) = \lg x$, $x_0 = 100$, $\Delta x = -90$.

Пользуясь определением производной, вычислить $f'(a)$.

8.5. $f(x) = x^2$, $a = 1$.

8.6. $f(x) = x^3$, $a = 2$.

8.7. $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $a = 3$.

8.8. $f(x) = \frac{1}{x^3}$, $a = 2$.

8.9. $f(x) = \sqrt{x}$, $a = 2$

8.10. $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $a = 8$.

8.11. $f(x) = \sin 2x$, $a = \frac{\pi}{4}$.

8.12. $f(x) = \cos 3x$, $a = \frac{\pi}{6}$.

$$8.13. f(x) = 2^x, a = 1. \quad 8.14. f(x) = 3^x, a = 0,5.$$

$$8.15. f(x) = \operatorname{tg} x, a = \frac{\pi}{4}. \quad 8.16. f(x) = \ln x, a = e.$$

Найти $f'_-(x_0)$ и $f'_+(x_0)$.

$$8.17. f(x) = |x-1| + |x+1|, x_0 = \pm 1.$$

$$8.18. f(x) = \begin{cases} x, & x \leq 1, \\ -x^2 + 2x, & x > 1, \end{cases} x_0 = 1.$$

$$8.19. f(x) = \sqrt{1 - e^{-x^2}}, x_0 = 0.$$

$$8.20. f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ \frac{1}{1 + e^{1/x}}, & x > 0, \end{cases} x_0 = 0.$$

8.21. Показать, что функция

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

непрерывна при $x = 0$, но не имеет в этой точке ни правой, ни левой производной.

8.22. Показать, что функция

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

имеет производную в точке $x = 0$.

2. Дифференцирование явно заданных функций.

Производные основных элементарных функций.

$$1. (x^a)' = ax^{a-1}.$$

$$2. (a^x)' = a^x \ln a, a > 0; (e^x)' = e^x.$$

$$3. (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}, a > 0, a \neq 1; (\ln x)' = \frac{1}{x}.$$

$$4. (\sin x)' = \cos x.$$

$$5. (\cos x)' = -\sin x.$$

$$6. (\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

$$7. (\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

$$8. (\arcsin x)' = -(\arccos x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$9. (\operatorname{arctg} x)' = -(\operatorname{arcctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}.$$

Правила дифференцирования функций.

I. Пусть C — постоянная, $f(x)$ и $g(x)$ — функции, имеющие производные в точке x_0 . Тогда:

$$1. (C)' = 0.$$

$$4. (fg)' = f'g + g'f.$$

$$2. (f \pm g)' = f' \pm g'. \quad 5. \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - g'f}{g^2} \text{ при } g \neq 0.$$

$$3. (Cf)' = Cf'.$$

II. Пусть функция $y = f(x)$ имеет производную в точке x_0 , а функция $z = g(y)$ имеет производную в точке $y_0 = f(x_0)$. Тогда сложная функция $h(x) = g(f(x))$ имеет производную в точке x_0 , равную

$h'(x_0) = g'(y_0)f'(x_0)$ (правило дифференцирования сложной функции).

ПРИМЕР 8.3. Найти производную функции

$$f(x) = x(\arcsin x)^2.$$

► Находим производную как производную произведения:

$$\begin{aligned} f'(x) &= x'(\arcsin x)^2 + x((\arcsin x)^2)' = \\ &= (\arcsin x)^2 + x((\arcsin x)^2)'. \end{aligned}$$

При нахождении производной функции $h(x) = (\arcsin x)^2$ полагаем $y(x) = \arcsin x$, $z(y) = y^2$ и используем правило дифференцирования сложной функции. Тогда $y'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $z'(y) = 2y = 2\arcsin x$, $h'(x) = 2\arcsin x \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Окончательно получаем

$$(x(\arcsin x)^2)' = (\arcsin x)^2 + \frac{2x \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Найти производные функций.

$$8.23. y = 3 - 2x + x^3. \quad 8.24. y = 2\sqrt{x} + \frac{1}{x}. \quad 8.25. y = x \cos x.$$

$$8.26. y = \cos x \cdot \sqrt[3]{x^5}. \quad 8.27. y = \frac{x}{\sin x}. \quad 8.28. y = \frac{\operatorname{arctg} x}{x}.$$

$$8.29. y = x \ln x + 2^x \quad 8.30. y = x \log_2 x - \frac{e^x}{x}.$$

$$8.31. y = (2x + 1)^{10}. \quad 8.32. y = \sqrt{(1 - 3x)^3}.$$

$$8.33. y = \arcsin 2x. \quad 8.34. y = \operatorname{arctg}(2x + 1).$$

$$8.35. y = \sqrt{1 - x^2}. \quad 8.36. y = \sqrt{1 - \cos x}. \quad 8.37. y = \arcsin \sqrt{x}.$$

$$8.38. y = \operatorname{arctg} \sqrt{x^3}. \quad 8.39. y = \cos^2 x. \quad 8.40. y = \sin x^2.$$

$$8.41. y = 2^{x/\ln x}. \quad 8.42. y = 3^{\sqrt{\sin^3 x}} \quad 8.43. y = \sqrt{\operatorname{arctg} \sqrt{x}}.$$

$$8.44. y = \sqrt{\log_3 \ln x}. \quad 8.45. f(x) = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1 - x^2}} + \ln \sqrt{\frac{1 - x}{1 + x}}.$$

$$8.46. f(x) = \frac{3 - x}{2} \sqrt{1 - 2x - x^2} + 2 \arcsin \frac{1 + x}{2}.$$

$$8.47. y = \ln |x|. \quad 8.48. y = \arcsin \frac{1}{|x|}.$$

Найти производные *гиперболических* функций.

$$8.49. \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad (\text{гиперболический синус}).$$

$$8.50. \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad (\text{гиперболический косинус}).$$

$$8.51. \operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} \quad (\text{гиперболический тангенс}).$$

$$8.52. \operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} \quad (\text{гиперболический котангенс}).$$



Логарифмической производной функции $y = f(x)$ называется производная от логарифма этой функции или ее модуля

$$(\ln y)' = \frac{y'}{y}, \quad (\ln |y|)' = \frac{y'}{y}.$$

Применение предварительного логарифмирования часто упрощает вычисление производной произведения, частного и степенно-показательных функций вида $y = u(x)^{v(x)}$.

ПРИМЕР 8.4. Найти производную функции

$$y = \sqrt[5]{\frac{x(x-1)^4}{(2x+3)^2}}.$$

- Воспользуемся предварительным логарифмированием модуля функции

$$\ln |y| = \frac{1}{5} \ln |x| + \frac{4}{5} \ln |x-1| - \frac{2}{5} \ln |2x+3|.$$

Продифференцировав последнее равенство, получим

$$(\ln |y|)' = \frac{y'}{y} = \frac{1}{5} \left(\frac{1}{x} + \frac{4}{x-1} - \frac{4}{2x+3} \right),$$

откуда находим

$$y' = \frac{y}{5} \left(\frac{1}{x} + \frac{4}{x-1} - \frac{4}{2x+3} \right) = \frac{2x^2 + 9x - 3}{5 \cdot \sqrt[5]{x^4(x-1)(2x+3)^7}}. \quad \blacktriangleleft$$

ПРИМЕР 8.5. Найти производную функции

$$y = (\sin 5x)^{\operatorname{tg} 2x}.$$

- Логарифмируя модуль функции, получим

$$\ln |y| = \operatorname{tg} 2x \cdot \ln |\sin 5x|;$$

$$\begin{aligned} \frac{y'}{y} &= (\operatorname{tg} 2x)' \ln(\sin 5x) + \operatorname{tg} 2x (\ln |\sin 5x|)' = \\ &= \frac{2 \ln(\sin 5x)}{\cos^2 2x} + \frac{\operatorname{tg} 2x \cdot 5 \cos 5x}{\sin 5x} = \\ &= \frac{2 \ln(\sin 5x)}{\cos^2 2x} + 5 \operatorname{tg} 2x \cdot \operatorname{ctg} 5x. \end{aligned}$$

Окончательно

$$y' = (\sin 5x)^{\operatorname{tg} 2x} \left(\frac{2 \ln(\sin 5x)}{\cos^2 2x} + 5 \operatorname{tg} 2x \cdot \operatorname{ctg} 5x \right). \quad \blacktriangleleft$$

Используя предварительное логарифмирование, найти производные функций.

$$8.53. y = \frac{(x-3)^2(2x-1)}{(x+1)^3}. \quad 8.54. y = \sqrt[3]{\frac{(x+2)(x-1)^2}{x^5}}.$$

$$8.55. y = \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt[3]{(x-1)^2(2x+1)}}. \quad 8.56. y = x^3 \sqrt{\frac{x-1}{(x+2)\sqrt{x-2}}}.$$

$$8.57. y = x^x. \quad 8.58. y = x^{2^x}. \quad 8.59. y = \sqrt{x^{\sqrt{x}}}.$$

$$8.60. y = (\ln x)^{1/x}. \quad 8.61. y = (\sin x)^{\arcsin x}. \quad 8.62. y = x^{x^x}.$$

$$8.63. y = \frac{(\ln x)^x}{x^{\ln x}}. \quad 8.64. y = x^{x^2} + x^{2^x} + 2^{x^x}.$$

3. Дифференцирование функций, заданных неявно и параметрически. Говорят, что функция $y = f(x)$, $x \in (a, b)$, задана неявно уравнением $F(x, y) = 0$, если для всех $x \in (a, b)$ выполняется равенство

$$F(x, f(x)) = 0.$$

Для нахождения производной функции $y = f(x)$ следует продифференцировать последнее тождество, рассматривая левую часть как сложную функцию x , а затем полученное уравнение разрешить относительно y' .

При неявном задании функций, а также при нахождении производных обратных функций и функций, заданных параметрически, используется обозначение y'_x там, где необходимо уточнить, по какой переменной ведется дифференцирование.

ПРИМЕР 8.6. Найти y'_x для функции, заданной неявно уравнением $\cos(xy) + x^2y = 0$.

► Продифференцируем уравнение, задающее функцию, по x

$$-\sin(xy)(y + xy') + 2xy + x^2y' = 0.$$

Выразим из последнего уравнения y' :

$$y' = \frac{2xy - y \sin(xy)}{x \sin(xy) - x^2}. \quad \blacktriangleleft$$

8.65. Найти значение y'_x в точке $x = 1$, если $x^3 - 2x^2y^2 + 5x + y - 5 = 0$, $y(1) = 1$.

8.66. Найти значение y'_x в точке $x = 0$, если $e^{xy} + xy = e$, $y(0) = 1$.

Найти y'_x для функций, заданных неявно.

8.67. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. **8.68.** $x^4 + y^4 = 6x^2y^2$.

8.69. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$, $a > 0$. **8.70.** $2y \ln y = x$.

8.71. $e^x \sin y - e^y \cos x = 0$. **8.72.** $\sin(xy) + \cos(xy) = 0$.

8.73. $2^x + 2^y = 2^{x+y}$. **8.74.** $x - y = \arcsin x - \arcsin y$.

8.75. $x^y = y^x$. **8.76.** $a^{x/y} = \left(\frac{x}{y}\right)^a$.



С помощью нахождения производной неявной функции можно вывести правило дифференцирования обратной функции.



ПРИМЕР 8.7. Пусть функция $x = f^{-1}(y)$, $y \in E$, — обратная к функции $y = f(x)$, $x \in D$. Найти x'_y .

► Обратная функция $x = f^{-1}(y)$ есть функция, заданная неявно уравнением $f(x) - y = 0$.

Для вычисления производной x'_y обратной функции дифференцируем последнее уравнение по y

$$f'(x)x'_y - 1 = 0,$$

откуда получаем

$$x'_y = \frac{1}{y_x}.$$



ПРИМЕР 8.8. Найти производную функции, обратной к $y = \operatorname{sh} x$.

► Имеем по определению $\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$. Так как $(\operatorname{sh} x)' = \frac{e^x + e^{-x}}{2} > 0$ для всех $x \in \mathbb{R}$, то функция $y = \operatorname{sh} x$ моно-

тонно возрастает на всей действительной оси и, следовательно, имеет обратную, обозначаемую $\operatorname{arsh} x$. По правилу дифференцирования обратной функции получаем

$$x'_y = (\operatorname{arsh} y)' = \frac{1}{y'_x} = \frac{1}{\operatorname{ch} x} = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1 + y^2}}.$$

Окончательно, переходя к обычным обозначениям, получаем

$$(\operatorname{arsh} x)' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Найти производные функций, обратных к заданным.

8.77. $y = \operatorname{ch} x$. **8.78.** $y = \operatorname{th} x$. **8.79.** $y = 2x^2 - x$, $x \in (0, 5; +\infty)$.

8.80. $y = \operatorname{ch} x$. **8.81.** $y = \arcsin 2^x$. **8.82.** $y = x^x$.



Пусть заданы функции

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad t \in (\alpha, \beta). \quad (8.1)$$

Если при этом функция $x = \varphi(t)$ на интервале (α, β) имеет обратную $t = \varphi^{-1}(x)$, то определена новая функция

$$y = \psi(\varphi^{-1}(x)), \quad (8.2)$$

называемая функцией, заданной *параметрически* соотношениями (8.1). Дифференцируя равенство (8.2) по x и используя правило дифференцирования обратной функции, получаем

$$y'_x = \psi'_t t'_x = \frac{\psi'_t}{\varphi'_x} = \frac{y'_t}{x'_x}.$$

ПРИМЕР 8.9. Найти производную параметрически заданной функции

$$x = t - \sin t, \quad y = 1 - \cos t, \quad t \in (0; \pi/2).$$

► Так как $y'_t = \sin t$, $x'_t = 1 - \cos t$, то

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{1 - \cos t}{\sin t} = \frac{2 \sin^2 \frac{t}{2}}{2 \sin \frac{t}{2} \cdot \cos \frac{t}{2}} = \operatorname{ctg} \frac{t}{2}.$$

Найти y'_x для следующих функций, заданных параметрически.

8.83. $x = 2t^3$, $y = 3t^2 - 2t$, $t \in (0, +\infty)$.

8.84. $x = t^3 + 2$, $y = 0,5t^2$, $t \in (-\infty, +\infty)$.

8.85. $x = a \cos \varphi$, $y = b \sin \varphi$, $\varphi \in (0, +\pi)$.

8.86. $x = \operatorname{tg} t$, $y = \sin 2t + 2 \cos 2t$, $t \in (-\pi/2, \pi/2)$.

$$8.87. x = \arccos \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}, \quad y = \arcsin \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \quad t \in (0, +\infty).$$

$$8.88. x = a \operatorname{sh} t, \quad y = b \operatorname{ch} t, \quad t \in (0, +\infty).$$

Найти y'_x в указанных точках для функций, заданных параметрически.

$$8.89. x = t \ln t, \quad y = \frac{\ln t}{t}, \quad t = 1.$$

$$8.90. x = t(t \cos t - 2 \sin t), \quad y = t(t \sin t + 2 \cos t), \quad t = \pi / 4.$$

$$8.91. x = e^t \cos t, \quad y = e^t \sin t, \quad t = \pi / 6.$$

$$8.92. x = \frac{3at}{\sqrt{1+t^2}}, \quad y = \frac{3at^2}{\sqrt{1+t^2}}, \quad t = 2.$$

4. Производные высших порядков. Производная функции $f(x)$, рассматриваемая на множестве тех точек, где она существует, сама является функцией. *Производной второго порядка* функции $y = f(x)$ называется производная от ее производной и обозначается $f''(x)$, т.е. $f''(x) = (f'(x))'$.

Производной n -го порядка или *n -й производной*, обозначаемой $f^{(n)}(x)$, называется производная от $(n-1)$ -й производной, т.е. $f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))'$, $n = 2, 3, \dots$

ПРИМЕР 8.10. Найти y'' , если $y = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$.

► Так как $y' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, то $y'' = \left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \right)' = -\frac{x}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$. ◀

Найти производные второго порядка функций.

$$8.93. y = \cos^2 x. \quad 8.94. y = \operatorname{arctg} x^2. \quad 8.95. y = \log_2 \sqrt[3]{1-x^2}.$$

$$8.96. y = e^{-x^2}. \quad 8.97. y = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}. \quad 8.98. y = x^{\sqrt{x}}.$$

Найти выражение для n -й производной функций.

$$8.99. y = x^m, \quad m \in \mathbb{N}. \quad 8.100. y = x^\alpha, \quad \alpha \notin \mathbb{N}. \quad 8.101. y = e^{ax}.$$

$$8.102. y = \ln x. \quad 8.103. y = \cos x. \quad 8.104. y = \sin x.$$

8.105. $y = \cos^2 x$. **8.106.** $y = \frac{1}{2x+1}$.



При вычислении n -й производной произведения двух функций используется *формула Лейбница*. Пусть функции $u(x)$ и $v(x)$ имеют производные до n -го порядка включительно. Тогда функция $u(x)v(x)$ также имеет n -ю производную и выполняется равенство

$$\begin{aligned}(uv)^{(n)} &= u^{(n)}v + nu^{(n-1)}v' + \frac{n(n-1)}{2}u^{(n-2)}v'' + \dots + uv^{(n)} = \\ &= \sum_{k=0}^n C_n^k u^{(n-k)}v^{(k)},\end{aligned}$$

где $u^{(0)} = u$, $v^{(0)} = v$ и $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ — биномиальные коэффициенты.



ПРИМЕР 8.11. Найти $y^{(20)}$, если $y = x^2 e^{2x}$.

► Применяя формулу Лейбница, получим

$$\left(x^2 e^{2x}\right)^{(20)} = \sum_{k=0}^{20} C_{20}^k \left(e^{2x}\right)^{(20-k)} \left(x^2\right)^{(k)}.$$

Так как $\left(x^2\right)' = 2x$, $\left(x^2\right)'' = 2$, $\left(x^2\right)^{(k)} = 0$ при $k \geq 3$, то

$$\begin{aligned}\left(x^2 e^{2x}\right)^{(20)} &= \left(e^{2x}\right)^{(20)} \left(x^2\right) + 20 \left(e^{2x}\right)^{(19)} \left(x^2\right)' + \frac{20 \cdot 19}{2} \left(e^{2x}\right)^{(18)} \left(x^2\right)'' = \\ &= 2^{20} x^2 e^{2x} + 20 \cdot 2^{20} x e^{2x} + 20 \cdot 19 \cdot 2^{17} e^{2x}.\end{aligned}$$



Применяя формулу Лейбница, найти производные указанных порядков.

8.107. $y = (x^2 + x + 1)\sin x$, найти $y^{(15)}$.

8.108. $y = (x^2 - x)e^x$, найти $y^{(20)}$.

8.109. $y = e^{-x} \sin x$, найти $y^{(5)}$.

8.110. $y = x \log_2 x$, найти $y^{(10)}$.

При вычислении второй производной функции $y = f(x)$, заданной неявно, необходимо продифференцировать дважды уравнение, задающее исходную функцию.

ПРИМЕР 8.12. Найти y'' , если функция $y(x)$ задана

уравнением $\sqrt{x^2 + y^2} = e^{\operatorname{arctg} \frac{y}{x}}$.

► Дифференцируя уравнение, определяющее функцию $y(x)$, получаем

$$\frac{x + yy'}{\sqrt{x^2 + y^2}} = e^{\operatorname{arctg} \frac{y}{x}} \frac{1}{1 + (y/x)^2} \cdot \frac{y'x - y}{x^2} = e^{\operatorname{arctg} \frac{y}{x}} \cdot \frac{y'x - y}{x^2 + y^2} = \frac{y'x - y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Отсюда

$$x + yy' = xy' - y, \quad (8.3)$$

следовательно,

$$y' = \frac{x + y}{x - y}. \quad (8.4)$$

Дифференцируя равенство (8.3) и используя найденное для y' выражение (8.4), получаем

$$1 + (y')^2 + yy'' = y' + xy'' - y',$$

$$\text{откуда } y'' = \frac{1 + (y')^2}{x - y} = \frac{2(x^2 + y^2)}{(x - y)^3}.$$

Найти производные второго порядка функций, заданных неявно.

8.111. $y = 2px$. **8.112.** $y = 1 + xe^y$. **8.113.** $y = \operatorname{tg}(x + y)$.

8.114. $e^{(x-y)} = xy$.

При вычислении второй производной функции $y = f(x)$, заданной параметрически, необходимо найти производную от первой производной, которая в свою очередь также представляет собой функцию, заданную параметрически.

ПРИМЕР 8.13. Найти y'' , если функция $y(x)$ задана параметрически $x = e^{-t} \cos t$, $y = e^{-t} \sin t$, $t \in (0, \pi/2)$.

► Найдем первую производную

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{e^{-t}(-\sin t + \cos t)}{e^{-t}(-\cos t - \sin t)} = \frac{\sin t - \cos t}{\cos t + \sin t} = z(t).$$

Вычислим $y''(x)$ как производную параметрически заданной функции z

$$\begin{aligned} y''(x) = z'_x &= \frac{z'_t}{x'_t} = \frac{(\cos t + \sin t)^2 + (\cos t - \sin t)^2}{(\cos t + \sin t)^3} = \\ &= \frac{2}{(\cos t + \sin t)^3}. \end{aligned}$$

Найти производные второго порядка функций, заданных параметрически.

8.115. $x = \sec t, \quad y = \operatorname{tg} t, \quad t \in (0, \pi/2).$

8.116. $x = \arcsin t, \quad y = \ln(1 - t^2), \quad t \in (-1, 1).$

8.117. $x = \operatorname{arctg} t, \quad y = \ln(1 + t^2), \quad t \in (-\infty, +\infty).$

8.118. $x = a \cos^3 t, \quad y = a \sin^3 t, \quad t \in (0, \pi/2).$

5. Геометрические и механические приложения производной. Значение производной $f'(x)$ функции $y = f(x)$ в точке x_0 равно угловому коэффициенту $k = \operatorname{tg} \varphi$ касательной KK' к графику этой функции, проведенной через точку $M_0(x_0, y_0)$, где $y_0 = f(x_0)$ (рис. 8.1). Уравнение касательной KK' к графику функции $y = f(x)$ в его точке $M_0(x_0, y_0)$ имеет вид

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0).$$

Прямая NN' , проходящая через точку касания M_0 перпендикулярно к касательной, называется *нормалью* к графику функции $y = f(x)$ в этой точке. Уравнение нормали имеет вид

$$x - x_0 + f'(x_0)(y - y_0) = 0.$$

Углом ω между кривыми $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$ в их

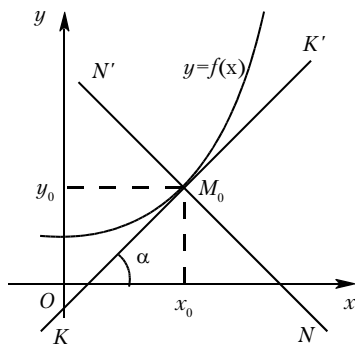


Рис. 8.1

общей точке $M_0(x_0, y_0)$ называется угол между касательными к этим кривым в точке M_0 . Тангенс этого угла вычисляется по формуле $\operatorname{tg} \omega = \left| \frac{f'_2(x_0) - f'_1(x_0)}{1 + f'_1(x_0)f'_2(x_0)} \right|$. Если $1 + f'_1(x_0)f'_2(x_0) = 0$, то касательные перпендикулярны.

Если $x = x(t)$ — функция, описывающая закон движения материальной точки, то первая производная $x'(t)$ есть скорость, а вторая производная — ускорение этой точки в момент времени t (*механический смысл первой и второй производных*).



Написать уравнения касательных и нормалей к графикам функции в заданных точках.

8.119. $y = (x - 1)(x - 2)(x - 3)$, $x_0 = 0$.

8.120. $y = \frac{2x}{1 + x^2}$, $x_0 = \sqrt{2}$. **8.121.** $y = \sqrt{5 - x^2}$, $x_0 = 1$.

8.122. $y = \operatorname{arctg} 2x$, $x_0 = 0$. **8.123.** $y = \ln \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + x + 1}$, $x_0 = 0$.

8.124. $y = e^{1-x^2}$, $x_0 = -1$.

8.125. Написать уравнения касательной и нормали к кривой $x = \frac{1+t}{t^3}$, $y = \frac{3}{2t^2} + \frac{1}{2t}$, $t \neq 0$, в точке $M_0(2, 2)$.

8.126. Написать уравнения касательной и нормали к кривой $x = t \cos t$, $y = t \sin t$, $t \in (-\infty, +\infty)$, в начале координат и в точке $t = \pi/4$.

8.127. Написать уравнения касательной и нормали к кривой $x^3 + y^2 + 2x - 6 = 0$ в точке с ординатой $y_0 = 3$.

8.128. Написать уравнения касательной и нормали к кривой $x^5 + y^5 - 2xy = 0$ в точке с ординатой $M_0(1, 1)$.

8.129. Найти уравнение касательной к графику функции $f(x) = 2 + x - x^2$, параллельной прямой $x - y + 7 = 0$.

8.130. Найти уравнение касательной к графику функции $f(x) = x^2 - 3x + 7$, параллельной прямой $3x - y + 2 = 0$.

8.131. Найти уравнение касательной к графику функции $f(x) = x^2 - x + 1$, перпендикулярной прямой $3x - y + 8 = 0$.

8.132. Найти уравнение касательной к графику функции $f(x) = 2x^2 + 3x - 7$, перпендикулярной прямой $x + y + 8 = 0$.

Найти углы, под которыми пересекаются следующие кривые.

8.133. $y = x^2$ и $y = x^3$.

8.134. $y = (x - 2)^2$ и $y = 4x - x^2 + 4$.

8.135. $y = \sin x$ и $y = \cos x$, $x \in [0, 2\pi]$.

8.136. $x^2 + y^2 = 8ax$ и $y^2 = \frac{x}{2a - x}$.

8.137. Закон движения материальной точки по прямой имеет вид $x = t^4 / 4 - 4t^3 + 16t^2$.

а) В какие моменты времени точка находится в начале координат?

б) В какие моменты времени направление ее движения совпадает с положительным направлением оси Ox ?

в) В какие моменты времени ее ускорение равно 0?

8.138. Тело массой 4 движется прямолинейно по закону $x = t^2 + t + 1$. Определить кинетическую энергию тела в момент времени $t = 5$.

8.139. Найти скорость гармонического колебания с амплитудой a , частотой ω и начальной фазой $\varphi = 0$.

8.140. Точка движется по логарифмической спирали $r = e^{a\varphi}$. Найти скорость изменения полярного радиуса, если известно, что он вращается с постоянной скоростью ω .

8.2. Дифференциал

1. Дифференциал первого порядка. Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0 . Если ее приращение $\Delta y(x_0, \Delta x)$ представимо в виде

$$\Delta y(x_0, \Delta x) = A\Delta x + o(\Delta x),$$

то функция $y = f(x)$ называется *дифференцируемой* в точке x_0 . Главная линейная часть $A\Delta x$ приращения $\Delta y(x_0, \Delta x)$ называется *дифференциалом* этой функции в точке x_0 , соответствующим приращению Δx , и обозначается символом $dy(x_0, \Delta x)$.

Для того чтобы функция $y = f(x)$ была дифференцируемой в точке x_0 , необходимо и достаточно, чтобы существовала производная $f'(x_0)$, при этом справедливо равенство $A = f'(x_0)$. Таким образом, дифференцируемой является функция, имеющая производную, при этом выполняется равенство $dy(x_0, \Delta x) = f'(x_0)\Delta x$. Дифференциал независимой переменной равен ее приращению: $\Delta x = dx$, поэтому выражение для дифференциала представимо в виде $dy(x_0, \Delta x) = f'(x_0)dx$.

Если $f'(x_0) \neq 0$, то при $\Delta x \rightarrow 0$ дифференциал функции и ее приращение являются эквивалентными бесконечно малыми, что можно записать в виде приближенного равенства $\Delta y(x_0, \Delta x) \approx f'(x_0)dx$.

ПРИМЕР 8.14. Найти приближенное значение V объема шара радиуса $r = 1,02$ м.

► Объем шара радиуса r равен $V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$. Рассмотрим приращение функции $\Delta V(x_0, \Delta x) \approx V'(x_0)\Delta x$ в точке $x_0 = 1$ при $\Delta x = 0,02$. Имеем $V'(x) = 4\pi r^2$, $V'(x_0) = 4\pi$, $\Delta V(x_0, \Delta x) \approx 4\pi \cdot 0,02 = 0,08\pi$. Откуда получаем

$$V(1,02) = V(x_0 + \Delta x) = V(x_0) + \Delta V(x_0, \Delta x) \approx \frac{4}{3}\pi + 0,08\pi \approx 4,43 (\text{м}^3).$$

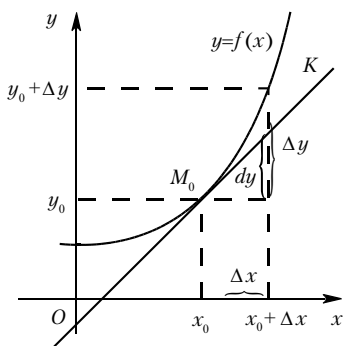


Рис. 8.2

Дифференциал $dy(x_0, \Delta x)$ равен приращению ординаты касательной M_0K к графику функции $y = f(x)$ в точке M_0 при приращении аргумента, равном Δx (геометрический смысл дифференциала, рис. 8.2).

8.141. Используя формулу $dy(x_0, \Delta x) = f'(x)dx$ и правила нахождения производных (см. 8.1.1), доказать следующие свойства дифференциала:

а) $d(C) = 0$, где C — константа;

б) $d(C_1u + C_2v) = C_1du + C_2dv$;

в) $d(uv) = u dv + v du$;

г) $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v du - u dv}{v^2}$ при $v \neq 0$.

8.142. Пусть $f(x) = z(y(x))$ — сложная функция, образованная композицией функций $y = y(x)$ и $z = z(y)$, дифференцируемых в точках x_0 и $y_0 = y(x_0)$. Доказать, что функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0 и выполняется равенство

$$df(x_0, \Delta x) = z'(y_0)dy(x_0, \Delta x),$$

т.е. выражение дифференциала сложной функции через дифференциал промежуточного аргумента имеет такую же форму, что и для независимого аргумента (*инвариантность формы первого дифференциала*).

8.143. Ребра куба увеличили на 1 см. При этом дифференциал dV объема V оказался равным 12 см^3 . Найти первоначальную длину ребер.

8.144. Радиус круга увеличили на 1 см. При этом дифференциал dS объема S оказался равным $6\pi \text{ см}^3$. Найти первоначальный радиус круга.

8.145. Обосновать приближенную формулу

$$\sqrt[3]{x + \Delta x} \approx \sqrt[3]{x} + \frac{\Delta x}{\sqrt[3]{x^2}}$$

и вычислить приближенно $\sqrt[3]{25}$.

Вычислить приближенно с помощью дифференциала значения выражений.

8.146. $\sin 0,05$. **8.147.** $\cos 0,02$. **8.148.** $\arcsin 0,05$.

8.149. $\arctg 0,01$. **8.150.** $\ln 0,2$.

Найти дифференциалы функций при произвольных значениях аргумента x и при произвольном его приращении $\Delta x = dx$.

8.151. $y = x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \arcsin \frac{x}{a} - 5$.

8.152. $y = \sin x - x \cos x + 4$.

8.153. $y = x \arctg x - \ln \sqrt{1 + x^2}$. **8.154.** $y = x \ln x - x + 1$.

При нахождении дифференциалов функций, заданных неявно уравнением $F(x, y) = 0$, необходимо продифференцировать обе части уравнения, вычисляя при этом дифференциал dF как дифференциал сложной функции и из полученного уравнения выразить дифференциал dy .

ПРИМЕР 8.15. Найти dy , если функция $y = y(x)$ задана неявно уравнением $\ln \frac{y}{x} = x^2 y^2$.

► Найдем дифференциалы обеих частей уравнения, используя свойства дифференциала,

$$d\left(\ln \frac{y}{x}\right) = d(\ln y - \ln x) = \frac{dy}{y} - \frac{dx}{x};$$

$$d(x^2 y^2) = x^2 d(y^2) + y^2 d(x^2) = 2x^2 y dy + 2xy^2 dx.$$

Приравнявая полученные выражения, получаем

$$\frac{dy}{y} - \frac{dx}{x} = 2x^2 y dy + 2xy^2 dx.$$

Из последнего уравнения находим выражение dy через x , y и dx

$$dy = \frac{y + 2x^3 y^2}{x - 2x^2 y^3} dx.$$

Найти дифференциалы dy неявно заданных функций.

8.155. $y^5 + y - x^2 = 1$.

8.156. $x^4 + y^4 = 4x^2 y^2$.

8.157. $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$.

8.158. $e^y = x + y$.

8.159. $y = x + \operatorname{arctg} y$.

8.160. $\operatorname{arctg} \frac{y}{x} = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$.

8.161. $y = \cos(x + y)$.

8.162. $\cos(xy) = x$.

2. Дифференциалы высших порядков. Рассмотрим дифференциал $dy(x, \Delta_1 x) = f'(x)\Delta_1 x$ как функцию аргумента x при фиксированном приращении $\Delta x = \Delta_1 x$. Предполагая, что функция $y = f(x)$ дважды дифференцируема в точке x , найдем дифференциал от $dy(x, \Delta_1 x)$ при $\Delta x = \Delta_2 x$

$$d(dy(x, \Delta_1 x))\Big|_{x, \Delta x = \Delta_2 x} = f''(x)\Delta_1 x \cdot \Delta_2 x.$$

Значение полученного выражения при $\Delta_1 x = \Delta_2 x = dx$ называется *вторым дифференциалом* или *дифференциалом 2-го порядка* функции $y = f(x)$ и обозначается символом $d^2 y(x, dx)$.

Таким образом,

$$d^2 y = f''(x)dx^2.$$

Аналогичным образом определяются дифференциалы более высоких порядков:

$$d^3 y = d(d^2 y) = f'''(x)dx^3,$$

.....

$$d^n y = d(d^{n-1} y) = f^{(n)}(x)dx^n.$$

Найти дифференциалы второго порядка функций.

8.163. $y = a \sin(bx + c)$.

8.164. $y = 3^{-x^2}$.

8.165. $y = \frac{\sin x}{x}$.

8.166. $y = ax^2 + bx + c$.

8.167. $y = \frac{1}{x^2 - 3x + 2}$.

8.168. $y = \sqrt{1 - x^2} \arcsin x$.

8.169. $y = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$.

8.170. $y = \arcsin(a \sin x)$.



При нахождении второго дифференциала $d^2 y$ функции $y = y(x)$, заданной неявно уравнением $F(x, y) = 0$, необходимо дважды продифференцировать обе части уравнения, вычисляя при этом дифференциал $d^2 F$ как дифференциал сложной функции, и из полученного уравнения выразить дифференциал $d^2 y$, предварительно вычислив первый дифференциал dy .



ПРИМЕР 8.16. Найти дифференциал $d^2 y$ функции $y = y(x)$, заданной неявно уравнением $xy + y^2 = 2$.

► Приравняем дифференциалы левой и правой части уравнения: $d(xy + y^2) = 0$,

$$xdy + ydx + 2ydy = 0. \quad (8.5)$$

Выразим из последнего уравнения dy : $dy = -\frac{y}{2y+x}dx$.

Продифференцируем левую и правую части уравнения (8.5), учитывая, что $d^2x = d(dx) = 0$,

$$dx dy + x d^2y + dy dx + 2y d^2y + 2 dy^2 = 0,$$

$$(x + 2y)d^2y = -2(dy dx + dy^2).$$

Подставляя полученное выражение для dy и выражая d^2y , получаем

$$d^2y(x + 2y) = -2 \left(-\frac{y}{2y+x}dx + \left(\frac{y}{2y+x} \right)^2 \right) dx^2,$$

$$(x + 2y)d^2y = \frac{2y(y+x)}{(2y+x)^2} dx^2, \text{ откуда } d^2y = \frac{2y(y+x)}{(2y+x)^3} dx^2. \blacktriangleleft$$

Найти дифференциал d^2y неявно заданных функций.

8.171. $x^2 + y^2 = 1$. **8.172.** $x^3 + y^3 = y$.

8.173. $y - x = a \sin y$. **8.174.** $xy + y^2 = 1$.

8.3. Исследование функций и построение графиков

1. Возрастание и убывание функции. Экстремумы.

Функция $f(x)$ называется *возрастающей (убывающей)* на интервале (a, b) , если для любых $x_1, x_2 \in (a, b)$ из неравенства $x_1 < x_2$ следует неравенство $f(x_1) < f(x_2)$ (соответственно $f(x_1) > f(x_2)$).

Если функция $f(x)$ дифференцируема на интервале (a, b) и $f'(x) > 0$ при всех $x \in (a, b)$, то функция $f(x)$ возрастает на (a, b) . Если же $f'(x) < 0$ при всех $x \in (a, b)$, то функция $f(x)$ убывает на (a, b) .

Если существует такая окрестность $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ точки x_0 , что для всякой точки x из этой окрестности выполняется неравенство $f(x) \leq f(x_0)$ ($f(x) \geq f(x_0)$) то точка x_0 называется *точкой максимума (минимума)* функции $f(x)$, а число $f(x_0)$ — *максимумом (минимумом)* функции. Точки максимума и минимума функции называются ее *точками экстремума*.

Если точка x_0 является точкой экстремума функции $f(x)$, дифференцируемой в этой точке, то $f'(x_0) = 0$ (необходимое

условие экстремума). Обратное, вообще говоря, неверно. Точки, в которых производная равна 0 или не существует, называются *критическими*.

Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в некоторой окрестности $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ критической точки x_0 , за исключением, быть может, самой точки x_0 . Если при этом в интервалах $(x_0 - \varepsilon, x_0)$ и $(x_0, x_0 + \varepsilon)$ производная $f'(x)$ имеет противоположные знаки, то x_0 — точка экстремума. Если $f'(x) > 0$ при $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0)$ и $f'(x) < 0$ при $x \in (x_0, x_0 + \varepsilon)$, то x_0 — точка максимума. Если $f'(x) < 0$ при $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0)$ и $f'(x) > 0$ при $x \in (x_0, x_0 + \varepsilon)$, то x_0 — точка минимума. Если же $f'(x)$ на множестве $(x_0 - \varepsilon, x_0) \cup (x_0, x_0 + \varepsilon)$ сохраняет знак, то x_0 не является точкой экстремума.

Пусть функция $f(x)$ дважды дифференцируема в критической точке x_0 и некоторой ее окрестности. Если $f''(x_0) > 0$, то x_0 — точка минимума функции $f(x)$, если $f''(x_0) < 0$, то x_0 — точка максимума. Если $f''(x_0) = 0$, то необходимо дополнительное исследование.

ПРИМЕР 8.17. Найти промежутки монотонности и точки экстремума функции $f(x) = \frac{|x-2|}{x^2}$.

► Найдем производную

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{x-2}{x^3} & \text{при } x \in (-\infty, 0) \cup (0, 1), \\ \frac{2-x}{x^3} & \text{при } x \in (1, +\infty). \end{cases}$$

Так как $f'(x) > 0$ при $x \in (-\infty, 0) \cup (1, 2)$, то функция $f(x)$ возрастает на интервалах $(-\infty, 0)$ и $(1, 2)$. Так как $f'(x) < 0$ при $x \in (0, 1) \cup (2, +\infty)$, то функция $f(x)$ убывает на интервалах $(0, 1)$ и $(2, +\infty)$.

В левой окрестности точки $x = 1$ производная положительна, в правой — отрицательна. Точка $x = 1$ — точка минимума. В левой окрестности точки $x = 2$ производная отрицательна, в правой — положительна. Точка $x = 2$ — точка максимума.

Заметим, что в точке $x = 1$ функция дифференцируема, а в точке $x = 2$ — нет. ◀

Найти промежутки монотонности и точки экстремума функций.

$$8.175. y = x\sqrt{1-x^2}.$$

$$8.176. y = \frac{2x^2-1}{x^4}.$$

$$8.177. y = \frac{x}{\ln x}.$$

$$8.178. y = x - 2\sin x.$$

$$8.179. y = x - 2\ln x.$$

$$8.180. y = \ln x - \operatorname{arctg} x.$$



Наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)$ на данном отрезке $[a, b]$ достигаются или в критических точках, или на концах этого отрезка.



Найти наибольшее и наименьшее значения функций на указанных отрезках.

$$8.181. y = -3x^4 + 6x^2; [-2, 2]. \quad 8.182. y = x + 2\sqrt{x}; [0, 4].$$

$$8.183. y = \frac{x-1}{x+1}; [0, 4]. \quad 8.184. y = \frac{1-x+x^2}{1+x-x^2}; [0, 1].$$

$$8.185. y = \sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x-1}; [0, 1].$$

$$8.186. y = \operatorname{arctg} \frac{1-x}{1+x}; [0, 1].$$

8.187. Два тела движутся с постоянными скоростями v_1 м/с и v_2 м/с по двум перпендикулярным прямым по направлению к точке пересечения этих прямых, от которой в начале движения первое тело находилось на расстоянии a м второе на расстоянии b м. Через сколько секунд после начала движения расстояние между телами будет наименьшим?

8.188. Окно имеет форму прямоугольника, завершенного полукругом. Периметр фигуры равен p . При каких размерах прямоугольника окно будет пропускать наибольшее количество света?

8.189. Из трех досок одинаковой ширины сколачивается желоб для подачи воды. При каком угле наклона боковых стенок к дну желоба площадь его поперечного сечения будет наибольшей?

8.190. В равнобедренный треугольник с основанием a и высотой h вписан прямоугольник, две вершины которого лежат на основании треугольника, а две — на боковых сторонах. Найти наибольшую площадь прямоугольника.

8.191. Периметр осевого сечения цилиндра равен $6a$. Найти наибольший объем такого цилиндра.

8.192. Цилиндр вписан в конус с высотой h и радиусом основания r . Найти наибольший объем цилиндра.

8.193. Найти наименьший объем конуса, описанного около шара радиуса r .

8.194. На параболе $y = x^2$ найти точку, наименее удаленную от прямой $y = 2x - 4$.

2. Направление выпуклости. Точки перегиба. График дифференцируемой функции $y = f(x)$ называется *выпуклым вниз* (*вверх*) на интервале (a, b) , если дуга кривой на этом промежутке расположена не ниже (не выше) касательной, проведенной к графику функции $y = f(x)$ в любой точке $x \in (a, b)$.

Если функция $y = f(x)$ дважды дифференцируема на интервале (a, b) и $f''(x) > 0$ ($f''(x) < 0$) при всех $x \in (a, b)$, то ее график является выпуклым вниз (вверх) на этом интервале.

В простейших случаях область определения функции $f(x)$ можно разбить на конечное число интервалов с постоянным направлением выпуклости. Каждый из этих интервалов ограничен точками, в которых $f''(x) = 0$ или не существует. Точка x_0 , в которой меняется направление выпуклости, называется *точкой перегиба*.

Пусть функция $f(x)$ дважды дифференцируема в некоторой окрестности $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ точки x_0 , за исключением, быть может, самой точки x_0 . Если при этом на интервалах $(x_0 - \delta, x_0)$ и $(x_0, x_0 + \delta)$ вторая производная $f''(x)$ имеет разные знаки, то x_0 — точка перегиба.

ПРИМЕР 8.18. Найти интервалы выпуклости и точки

перегиба функции $f(x) = \frac{|x-2|}{x^2}$.

► Найдем вторую производную

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{2(3-x)}{x^4} & \text{при } x \in (-\infty, 0) \cup (0, 1), \\ \frac{2(x-3)}{x^4} & \text{при } x \in (1, +\infty). \end{cases}$$

Точки $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 3$ разбивают числовую прямую на четыре интервала выпуклости.

Так как $f''(x) > 0$ при $x \in (-\infty, 0) \cup (0, 1) \cup (3, +\infty)$, то график функции $f(x)$ является выпуклым вниз на интервалах $(-\infty, 0)$, $(0, 1)$ и $(3, +\infty)$. Так как $f''(x) < 0$ при $x \in (1, 3)$, график функции $f(x)$ является выпуклым вниз на интервале $(1, 3)$.

Точки $x_2 = 1$, $x_3 = 3$ являются точками перегиба графика функции. 

Найти интервалы выпуклости, точки перегиба и угловые коэффициенты касательных в точках перегиба для функций.

8.195. $y = x^7 + 7x + 1$.

8.196. $y = x^4 + 6x^2$.

8.197. $y = \sqrt[3]{(x-2)^5} + 3$.

8.198. $y = \sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x-1}$.

8.199. $y = \sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[3]{(x-1)^2}$.

8.200. $y = xe^{2x} + 1$.

8.201. $y = x \ln |x|$.

8.202. $y = x^3 \ln x + 1$.

3. Асимптоты. Пусть для функции $y = f(x)$ существует такая прямая, что расстояние от точки $M(x, f(x))$ графика функции до нее стремится к 0 при бесконечном удалении точки M от начала координат. Тогда эта прямая называется *асимптотой* графика функции.

Если при этом абсцисса x точки M стремится к конечному числу a , то полупрямая $x = a$ ($y > 0$ либо $y < 0$) является вертикальной асимптотой. Для существования вертикальной асимптоты в точке $x = a$ необходимо и достаточно, чтобы хотя бы один из пределов $\lim_{x \rightarrow a \pm 0} f(x)$ был равен бесконечности.

Непрерывные на всей числовой прямой функции не имеют вертикальных асимптот.

Если же абсцисса x точки M стремится к $+\infty$ или $-\infty$, то для существования наклонной асимптоты $y = kx + b$ необходимо и достаточно существование двух пределов

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = k \text{ и } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - kx) = b.$$

При этом правая (при $x \rightarrow +\infty$) и левая (при $x \rightarrow -\infty$) асимптоты могут не совпадать. 

ПРИМЕР. 8.19. Найти асимптоты графика функции

$$y = \frac{x^2 + 1}{x - 1}.$$

- Так как функция непрерывна на всей числовой оси, кроме точки $x = 1$, то вертикальная асимптота может существовать лишь в этой точке.

Имеем $\lim_{x \rightarrow 1 \pm 0} \frac{x^2 + 1}{x - 1} = \pm\infty$, следовательно, прямая $x = 1$ — вертикальная асимптота.

Найдем наклонные асимптоты. Так как $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 + 1}{(x - 1)x} = 1 = k$

$$\text{и } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x - 1} - 1 \cdot x \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x - 1} = 0 = b, \text{ то прямая } y = x$$

является одновременно и правой, и левой наклонной асимптотой. ◀

Найти асимптоты графиков функций.

$$8.203. y = \sqrt[5]{\frac{x}{x-2}}. \quad 8.204. y = \sqrt[3]{x^3 - x^2}.$$

$$8.205. y = \frac{\sqrt{|x^2 - 3|}}{x}.$$

$$8.206. y = 3x + \operatorname{arctg} 5x.$$

$$8.207. y = \frac{\ln(x+1)}{x^2} + x.$$

$$8.208. y = \frac{\sin x}{x}.$$

$$8.209. y = x \ln \left(e + \frac{1}{x} \right).$$

$$8.210. y = e^{\frac{1}{x-1}}.$$

4. Построение графиков функций. При построении графика функции $y = f(x)$ с непрерывной второй производной (всюду в области определения функции, за исключением, быть может, конечного числа точек) сначала проводится элементарное исследование, выясняющее особенности функции (если они имеются): симметрия, периодичность, постоянство знака, находятся нули функции, точки пересечения с осью Oy , точки разрыва и т.п. Затем с использованием первой и второй производной находятся промежутки монотонности и выпуклости, точки экстремума и перегиба, а также асимптоты.

ПРИМЕР 8.20. Построить график функции $y = \frac{x^4}{x^3 - 1}$.

- Функция определена и непрерывна всюду, кроме точки $x = 1$, равна 0 при $x = 0$, положительна при $x > 1$, отрицательна при $x < 1$.

Интервалы возрастания и убывания, экстремумы функции находим с помощью первой производной:

$$y' = \frac{4x^3(x^3 - 1) - 3x^6}{(x^3 - 1)^2} = \frac{x^6 - 4x^3}{(x^3 - 1)^2} = \frac{x^3(x^3 - 4)}{(x^3 - 1)^2}.$$

Точки $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = \sqrt[3]{4}$ разбивают область определения функции на четыре промежутка монотонности. При $x \in (-\infty, 0) \cup (\sqrt[3]{4}, +\infty)$ производная $y' > 0$, функция возрастает на интервалах $(-\infty, 0)$ и $(\sqrt[3]{4}, +\infty)$. При $x \in (0, 1) \cup (1, \sqrt[3]{4})$ производная $y' < 0$, функция убывает на интервалах $(0, 1)$ и $(1, \sqrt[3]{4})$. Так как производная меняет знак при переходе через точки $x = 0$ и $x = \sqrt[3]{4}$, то это точки экстремумов, а именно, $x_1 = 0$ — точка максимума, $x_3 = \sqrt[3]{4}$ — точка минимума. Значения функции в точках экстремума: $y(0) = 0$, $y(\sqrt[3]{4}) = \frac{4\sqrt[3]{4}}{3}$.

Интервалы выпуклости и вогнутости, точки перегиба находим с помощью второй производной

$$\begin{aligned} y'' &= \frac{(6x^5 - 12x^2)(x^3 - 1)^2 - 6x^2(x^3 - 1)(x^6 - 4x^3)}{(x^3 - 1)^4} = \\ &= \frac{6x^2(x^3 - 1)((x^3 - 2)(x^3 - 1) - x^6 + 4x^3)}{(x^3 - 1)^4} = \\ &= \frac{6x^2(x^3 - 1)(x^3 + 2)}{(x^3 - 1)^4} = \frac{6x^2(x^3 + 2)}{(x^3 - 1)^3}. \end{aligned}$$

Точки $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_4 = -\sqrt[3]{2}$ разбивают область определения функции на четыре промежутка выпуклости.

При $x \in (-\infty, -\sqrt[3]{2}) \cup (1, +\infty)$ вторая производная $y'' > 0$, график функции является выпуклым вниз на интервалах $(-\infty, -\sqrt[3]{2})$ и $(1, +\infty)$. При $x \in (-\sqrt[3]{2}, 0) \cup (0, 1)$ вторая

производная $y'' < 0$, график функции является выпуклым вверх на интервалах $(-\sqrt[3]{2}, 0)$ и $(0, 1)$. При переходе через точку $x_4 = -\sqrt[3]{2}$ вторая производная меняет знак, $x_4 = -\sqrt[3]{2}$ — точка перегиба. При переходе через точку $x_1 = 0$ вторая производная знака не меняет, это не точка перегиба. Значения функции и первой производной в точке перегиба: $y(-\sqrt[3]{2}) = -\frac{2\sqrt[3]{2}}{3}$, $y'(-\sqrt[3]{2}) = \frac{4}{3}$.

Результаты проведенных исследований сводим в таблицу

Таблица 8.1

x	$(-\infty, -\sqrt[3]{2})$	$-\sqrt[3]{2}$	$(-\sqrt[3]{2}, 0)$	0	$(0, 1)$	$(1, \sqrt[3]{4})$	$\sqrt[3]{4}$	$(\sqrt[3]{4}, +\infty)$
y'	> 0			0	< 0	< 0	0	> 0
y''	> 0	0	< 0			> 0		
y	$\nearrow$	$-\frac{2\sqrt[3]{2}}{3}$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$\searrow$	$\frac{4\sqrt[3]{4}}{3}$	$\nearrow$
	Выпуклой вниз		Выпуклой вверх			Выпуклой вниз		

Найдем асимптоты. Так как функция непрерывна на всей числовой оси, кроме точки $x = 1$, то вертикальная асимптота может существовать лишь в этой точке. Имеем

$$\lim_{x \rightarrow 1 \pm 0} \frac{x^4}{x^3 - 1} = \pm \infty,$$

следовательно, прямая $x = 1$ — вертикальная асимптота.

Найдем наклонные асимптоты. Так как

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{x^4}{(x^3 - 1)x} = 1 = k$$

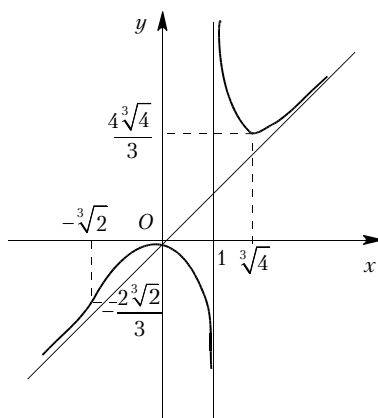


Рис. 8.3

и $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x^4}{x^3 - 1} - 1 \cdot x \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{x^3 - 1} \cdot 0 = b$, то прямая $y = x$

является одновременно и правой, и левой наклонной асимптотой. График функции приведен на рис. 8.3. ◀

Построить графики функций.

$$8.211. y = \frac{(x^2 - 5)^3}{125}. \quad 8.212. y = \frac{x^2(x^2 - 5)^2}{4}.$$

$$8.213. y = \frac{x^3}{2(x-1)^3}. \quad 8.214. y = \frac{x^4}{x^3 - 1}.$$

$$8.215. y = \frac{x^3 - 3x}{x^2 - 1}. \quad 8.216. y = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}.$$

$$8.217. y = \sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x-1}. \quad 8.218. y = \sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[3]{(x-1)^2}.$$

$$8.219. y = \sqrt[3]{x^2 - 2x}. \quad 8.220. y = \sqrt[3]{1 - x^3}.$$

$$8.221. y = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}. \quad 8.222. y = \frac{x^3}{\sqrt{x^4 + 1}}.$$

$$8.223. y = \sqrt[3]{|x^2 - 1|}. \quad 8.224. y = \sqrt{|x^2 - 2|}^3.$$

$$8.225. y = \frac{\sqrt{|x^2 - 3|}}{x}. \quad 8.226. y = \frac{x^2}{\sqrt{|x^2 - 1|}}.$$

$$8.227. y = \sin x + \cos x. \quad 8.228. y = \frac{1}{\sin x + \cos x}.$$

$$8.229. y = x \operatorname{arctg} x. \quad 8.230. y = \frac{x}{2} + \operatorname{arctg} x.$$

$$8.231. y = e^{2x-x^2}. \quad 8.232. y = xe^{-x^2/2}.$$

$$8.233. y = \frac{\ln x}{x}. \quad 8.234. y = \frac{1}{x \ln x}.$$

$$8.235. y = x^2 \ln x. \quad 8.236. y = \frac{\ln x}{x^2}.$$

8.4. Правило Лопиталья

Раскрытие неопределенностей типа $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$. Пусть при $x \rightarrow a$ функции $f(x)$ и $g(x)$ обе бесконечно малые или бесконечно большие. Тогда их отношение не определено в точке $x = a$, и в этом случае говорят, что оно представляет собой *неопределенность типа $\frac{0}{0}$ или соответственно $\frac{\infty}{\infty}$* . Однако

отношение функций может иметь предел при $x \rightarrow a$, конечный или бесконечный. Нахождение этого предела называется *раскрытием неопределенности*, которое можно осуществлять с помощью *правила Лопиталья*.

Пусть в некоторой окрестности U точки a функции $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы всюду, кроме, может быть, самой точки a , и $g'(x) \neq 0$ при $x \in U$, $x \neq a$. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ являются одновременно либо обе бесконечно малыми, либо обе бесконечно большими при $x \rightarrow a$ и при этом существует предел отношения $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ их производных при $x \rightarrow a$,

то тогда также существует предел отношения $\frac{f(x)}{g(x)}$ самих функций и выполняется равенство

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

ПРИМЕР 8.21. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \sin 3x}{\ln \sin 5x}$.

► Имеем отношение двух бесконечно больших функций, поэтому, применяя правило Лопиталья, получаем

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \sin 3x}{\ln \sin 5x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\ln \sin 3x)'}{(\ln \sin 5x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \cos 3x \cdot \sin 5x}{5 \cos 5x \cdot \sin 3x} =$$

$$= \frac{3}{5} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 3x}{\cos 5x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\sin 3x} = \frac{3}{5} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x}{3x} = 1.$$

На каждом этапе применения правила Лопиталя следует пользоваться упрощающими отношениями тождественными преобразованиями, а также комбинировать это правило с другими приемами вычисления пределов.

Раскрыть неопределенности типа $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$.

$$8.237. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos 2x}{\sin 2x}.$$

$$8.238. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{arctg} x}{x^3}.$$

$$8.239. \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^m - a^m}{x^n - a^n}, \quad m \neq n, \quad a \neq 0.$$

$$8.240. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - b^x}{c^x - d^x}, \quad a \neq b, \quad c \neq d.$$

$$8.241. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{\arcsin 3x}.$$

$$8.242. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}.$$

$$8.243. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\pi - 2 \operatorname{arctg} x}{e^{3/x} - 1}.$$

$$8.244. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x - \operatorname{tg} x}.$$

2. Раскрытие неопределенностей типа $0 \cdot \infty$ и $\infty - \infty$. Для вычисления предела $\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x)$, где $f(x)$ — бесконечно малая, а $g(x)$ — бесконечно большая при $x \rightarrow a$ (раскрытие неопределенности типа $0 \cdot \infty$), следует преобразовать произведение к виду $\frac{f(x)}{1/g(x)}$ (неопределенность типа $\frac{0}{0}$) или к виду $\frac{g(x)}{1/f(x)}$ (неопределенность типа $\frac{\infty}{\infty}$) и далее использовать правило Лопиталя.

ПРИМЕР 8.22. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 1} \sin(x-1) \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}$.

► Чтобы раскрыть неопределенность типа $0 \cdot \infty$, представим произведение в виде отношения двух бесконечно малых и применим правило Лопиталя

$$\lim_{x \rightarrow 1} \sin(x-1) \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x-1)}{\operatorname{ctg}(\pi x/2)} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cos(x-1)}{-(\pi/2)\left(1/\sin^2(\pi x/2)\right)} = -\frac{2}{\pi} \lim_{x \rightarrow 1} \cos(x-1) \sin^2 \frac{\pi x}{2} = -\frac{2}{\pi}. \blacktriangleleft$$

Раскрыть неопределенности типа $0 \cdot \infty$.

$$8.245. \lim_{x \rightarrow 0} x \ln^3 x. \quad 8.246. \lim_{x \rightarrow \pi} (\pi - x) \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}.$$

$$8.247. \lim_{x \rightarrow 1+0} \ln x \cdot \ln(x-1).$$

$$8.248. \lim_{x \rightarrow \infty} x(\ln(x+1) - \ln(x-1)).$$



Для вычисления предела $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) - g(x))$, где $f(x)$ и $g(x)$ — бесконечно большие при $x \rightarrow a$ (раскрытие неопределенности типа $\infty - \infty$), следует преобразовать произведение к виду $f(x) \left(1 - \frac{g(x)}{f(x)}\right)$, а затем раскрыть неопределенность

$\frac{g(x)}{f(x)}$ типа $\frac{\infty}{\infty}$. Если $\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{f(x)} \neq 1$, то $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) - g(x)) = \infty$.

Если $\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{f(x)} = 1$, то имеем неопределенность типа $0 \cdot \infty$, рассмотренную выше.



ПРИМЕР 8.23. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\operatorname{ctg} 2x - \frac{1}{2x} \right)$.

► Представим разность двух бесконечно больших функций в виде произведения бесконечно большой на бесконечно малую, а затем в виде частного двух бесконечно малых

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\operatorname{ctg} 2x - \frac{1}{2x} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{ctg} 2x \left(1 - \frac{\operatorname{tg} 2x}{2x} \right) = \\ &= \frac{2x \cos 2x - \sin 2x}{2x \sin 2x} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \cos 2x - \sin 2x}{x^2} = \\ &= \frac{1}{4} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cos 2x - 4x \sin 2x - 2 \cos 2x}{2x} = -\frac{4}{8} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin 2x}{x} = \\ &= -\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \sin 2x = 0. \quad \blacktriangleleft \end{aligned}$$

Раскрыть неопределенности типа $\infty - \infty$.

$$8.249. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\operatorname{ctg} x - \frac{1}{x} \right). \quad 8.250. \lim_{x \rightarrow 1+0} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{x}{\ln x} \right).$$

$$8.251. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\operatorname{arctg} x} - \frac{1}{x} \right). \quad 8.252. \lim_{x \rightarrow \pi/2} \left(\frac{x}{\operatorname{ctg} x} - \frac{\pi}{2 \cos x} \right).$$

3. Раскрытие неопределенностей типа 0^0 , ∞^0 , 1^∞ . Во всех трех случаях имеется в виду вычисление предела выражения $(f(x))^{g(x)}$. Логарифмируя выражение $y = (f(x))^{g(x)}$, получаем $\ln y = g(x) \ln f(x)$. Во всех трех случаях выражение $g(x) \ln f(x)$ является неопределенностью вида $0 \cdot \infty$.

ПРИМЕР 8.24. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow +0} x^{\frac{1}{\ln(e^x - 1)}}$.

► Выражение $y = x^{\frac{1}{\ln(e^x - 1)}}$ представляет собой неопределенность типа 0^0 при $x \rightarrow +0$. Рассмотрим выражение $\ln y = \frac{\ln x}{\ln(e^x - 1)}$, предел которого найдем по правилу Лопиталя

$$\lim_{x \rightarrow +0} \frac{\ln x}{\ln(e^x - 1)} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{e^x - 1}{xe^x} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow +0} e^x = 1.$$

Окончательно получаем

$$\lim_{x \rightarrow +0} x^{\frac{1}{\ln(e^x - 1)}} = \lim_{x \rightarrow +0} e^{\ln y} = e.$$

Раскрыть неопределенности типа 0^0 , ∞^0 , 1^∞ .

$$8.253. \lim_{x \rightarrow +0} x^{\sin x}. \quad 8.254. \lim_{x \rightarrow +0} (\arcsin x)^{\operatorname{tg} x}.$$

$$8.255. \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{1/x}. \quad 8.256. \lim_{x \rightarrow +0} \frac{1}{x^{\ln(e^x - 1)}}.$$

$$8.257. \lim_{x \rightarrow +\infty} (x + 2^x)^{1/x}. \quad 8.258. \lim_{x \rightarrow +0} (x + e^x)^{1/x}.$$

$$8.259. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^{1/x^2}. \quad 8.260. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{(1+x)^{1/x}}{e} \right)^{1/x}.$$

8.5. Формула Тейлора

Если функция $y = f(x)$ имеет производные до $(n+1)$ -го порядка включительно в некоторой окрестности $U_\delta(a)$ точки a , то для всякого $x \in U_\delta(a)$ справедлива *формула Тейлора* (порядка n)

$$\begin{aligned} f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \\ + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_{n+1}(x) \end{aligned} \quad (8.6)$$

или

$$f(x) = \sum_{k=0}^{k=n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + R_{n+1}(x),$$

где $R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(a + \theta(x-a))}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$, $0 < \theta < 1$ (остаточный член в *форме Лагранжа*).

Если функция $y = f(x)$ имеет непрерывные производные до n -го порядка включительно в некоторой окрестности $U_\delta(a)$, то имеет место формула Тейлора с остаточным членом в *форме Пеано*

$$\begin{aligned} f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \\ + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + o((x-a)^n). \end{aligned}$$

Формула Тейлора порядка n позволяет представить функцию $y = f(x)$ в виде суммы многочлена n -й степени и остаточного члена.

В частности, при $a = 0$ имеем

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(a)}{2!}x^2 + \dots + \\ + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1},$$

$0 < \theta < 1$ (формула Маклорена).

ПРИМЕР 8.25. Разложить функцию $y = \frac{x+3}{x+2}$ по степе-

ням $(x-a)$ до члена $(x-a)^3$ в точке $a = -1$.

► Находим производные до 4-го порядка включительно:

$$y = \frac{x+3}{x+2} = 1 + \frac{1}{x+2},$$

$$y' = \left(1 + \frac{1}{x+2}\right)' = -\frac{1}{(x+2)^2}, \quad y'' = \frac{2}{(x+2)^3},$$

$$y''' = -\frac{6}{(x+2)^4}, \quad y^{(4)} = -\frac{24}{(x+2)^5}.$$

При $a = -1$ находим $y(-1) = 2$, $y'(-1) = -1$, $y''(-1) = 2$, $y'''(-1) = -6$.

Воспользовавшись формулой Тейлора (8.6) при $a = -1$, находим

$$\frac{x+3}{x+2} = 2 - (x+1) + (x+1)^2 - (x+1)^3 + R_4(x),$$

где остаточный член в форме Лагранжа имеет вид $R_4(x) =$

$$= \frac{(x+1)^4}{(\theta(x+1)-1)^5}, \quad 0 < \theta < 1.$$

8.261. Многочлен $2x^3 - 3x^2 + 5x + 1$ разложить по степеням двучлена $x+1$.

8.262. Многочлен $x^4 + 4x^2 - x + 3$ разложить по степеням двучлена $x-1$.

Для заданных функций записать формулу Маклорена n -го порядка.

8.263. $y = e^x$. **8.264.** $y = \sin x$. **8.265.** $y = \cos x$.

$$8.266. y = \ln(1+x). \quad 8.267. y = \frac{1}{1+x}. \quad 8.268. y = (1+x)^\alpha.$$



Используя результаты задач 8.253—8.258, можно получить разложения по формуле Маклорена различных функций.



ПРИМЕР 8.26. Записать разложение функции $y = \frac{1}{4+x^2}$ по формуле Маклорена до n -го порядка с остаточным членом в форме Пеано.

► Преобразуем функцию: $y = \frac{1}{4+x^2} = \frac{1}{4} \frac{1}{1+x^2/4}$.

Для функции $y = \frac{1}{1+x}$ имеет место следующее разложе-

ние по формуле Маклорена (см. задачу 8.257): $y = \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \dots + (-1)^n x^n + o(x^n)$. Тогда для функции $y =$

$= \frac{1}{1+x^2/4}$ имеет место разложение

$$\frac{1}{1+x^2/4} = 1 - \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{16} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{4^n} + o(x^{2n}).$$

Окончательно получаем

$$y = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1+x^2/4} = 1 - \frac{x^2}{16} + \frac{x^4}{64} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{4^{n+1}} + o(x^{2n}). \quad \blacktriangleleft$$

Используя формулы Маклорена, полученные в задачах 8.253—8.258, записать разложение по формуле Маклорена до n -го порядка с остаточным членом в форме Пеано.

$$8.269. y = e^{2x}. \quad 8.270. y = e^{-x^2/2}. \quad 8.271. y = \sin 2x.$$

$$8.272. y = \sin^2 x. \quad 8.273. y = \ln(1+2x^2).$$

$$8.274. y = \ln(4+x). \quad 8.275. y = \frac{1}{2x+1}.$$

$$8.276. y = \frac{1}{x^2 - 2x + 3}.$$



Формула Тейлора широко используется при вычислениях приближенных значений функций.



ПРИМЕР 8.27. Вычислить приближенное значение $\ln 1,5$ с помощью разложения по формуле Тейлора до третьего порядка. Оценить остаточный член.

- Рассмотрим функцию $f(x) = \ln(1+x)$. Положим в формуле Тейлора $a = 0$, $x = 0,5$. Найдем производные заданной функции до 4-го порядка включительно:

$$f'(x) = \frac{1}{1+x}, \quad f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2},$$

$$f'''(x) = \frac{2}{(1+x)^3}, \quad f^{(4)}(x) = -\frac{6}{(1+x)^4}.$$

При $a = 1$ находим $f(1) = 0$, $f'(1) = 1$, $f''(1) = -1$, $f'''(1) = 2$. По формуле Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа получаем

$$\ln 1,5 = \ln 1 + 0,5 - \frac{0,5^2}{2} + \frac{0,5^3}{6} + R_4(x),$$

где $R_4(x) = \frac{f^{(4)}(\theta x)}{24} x^4 = -\frac{x^4}{4(1+\theta x)^4}$. Следовательно,

$$|R_4(x)| \leq \frac{0,5^4}{4} = \frac{1}{64} < 0,01.$$



Вычислить приближенные значения выражений с помощью разложения по формуле Тейлора до третьего порядка и оценить остаточный член.

8.277. $\sin 1$. **8.278.** $\sqrt{e}$. **8.279.** $\ln 1,05$. **8.280.** $\sqrt[5]{33}$.



Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано используется при вычислении пределов.



ПРИМЕР 8.28. Вычислить предел

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x - 2 \ln(1+x) - x^2}{x^3}.$$

- Воспользовавшись разложениями по формуле Маклорена до порядка, при котором главная часть разложения числителя отлична от 0, получим

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4), \quad \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3).$$

Подставляя эти выражения в предел, получаем

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sin x - 2\ln(1+x) - x^2}{x^3} &= \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x + \frac{x^3}{3} - 2x + x^2 - \frac{2x^3}{3} - x^2 + o(x^3)}{x^3} = -\frac{1}{3}. \end{aligned} \quad \blacktriangleleft$$

Вычислить пределы, используя разложения по формуле Тейлора.

$$8.281. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^3 x}{5x^2 + 7x^3}, \quad 8.282. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}.$$

$$8.283. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[5]{1+2x} - \sqrt[7]{1+x}}{x}, \quad 8.284. y = \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3 + x^4}.$$

8.6. Векторные и комплексные функции действительной переменной

1. Определение вектор-функции действительной переменной. Если каждому значению действительной переменной $t \in D \subset \mathbb{R}$ поставлен в соответствие вектор $\mathbf{a}(t)$, то $\mathbf{a} = \mathbf{a}(t)$ называется *вектор-функцией* действительной переменной t .

Задание вектор-функции $\mathbf{a} = \mathbf{a}(t)$ равносильно заданию трех числовых функций $a_x(t)$, $a_y(t)$, $a_z(t)$ — координат вектора $\mathbf{a}$:

$$\mathbf{a} = a_x(t)\mathbf{i} + a_y(t)\mathbf{j} + a_z(t)\mathbf{k},$$

или $\mathbf{a} = (a_x(t), a_y(t), a_z(t))$. Если вектор $\mathbf{a}$ является радиус-вектором точки $M(x, y, z)$, то соответствующая функция обозначается

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}.$$

Годографом вектор-функции $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ называется линия, описываемая в пространстве концом вектора $\mathbf{r}$. Всякую линию в пространстве можно рассматривать как годограф некоторой вектор-функции.

ПРИМЕР 8.29. Найти годограф вектор-функции

$$\mathbf{r}(t) = \frac{1-t^2}{1+t^2}\mathbf{i} + \frac{2t}{1+t^2}\mathbf{j} + \mathbf{k}.$$

► Запишем параметрическое уравнение годографа

$$x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad y = \frac{2t}{1+t^2}, \quad z = 1.$$

Исключая параметр t , получаем $x^2 + y^2 = \frac{(1-t^2)^2 + 4t^2}{(1+t^2)^2} = 1$.

Следовательно, годографом вектор-функции $\mathbf{r}(t)$ является окружность

$$x^2 + y^2 = 1, \quad z = 1,$$

из которой исключена точка $(-1; 0; 1)$, получающаяся в пределе при $t \rightarrow \pm\infty$.

Найти годографы вектор-функций.

8.285. $\mathbf{r}(t) = (2t-1)\mathbf{i} + (-3t+2)\mathbf{j} + 4t\mathbf{k}, \quad t \in \mathbb{R}.$

8.286. $\mathbf{r}(t) = \sqrt{1-t^2}\mathbf{i} + \sqrt{1+t^2}\mathbf{j}, \quad t \in [-1; 1].$

8.287. $\mathbf{r}(t) = \cos t \mathbf{i} + \sin t \mathbf{j} + t\mathbf{k}, \quad t \in \mathbb{R}.$

8.288. $\mathbf{r}(t) = \cos^3 t \mathbf{i} + \sin^3 t \mathbf{j}, \quad t \in [0; 2\pi].$

8.289. $\mathbf{r}(t) = \cos^2 t \mathbf{i} + \sin t \cos t \mathbf{j} + \sin t \mathbf{k}, \quad t \in [0; 2\pi].$

8.290. $\mathbf{r}(t) = 5 \cos t \mathbf{i} + 4 \sin t \mathbf{j} + 2\mathbf{k}, \quad t \in [0; 2\pi].$

2. Дифференцирование вектор-функций. Производной вектор-функции $\mathbf{a} = \mathbf{a}(t)$ называется новая вектор-функция

$$\frac{d\mathbf{a}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{a}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{a}(t + \Delta t) - \mathbf{a}(t)}{\Delta t}.$$

Если $\mathbf{a}(t) = (a_x(t), a_y(t), a_z(t))$, то

$$\frac{d\mathbf{a}}{dt} = \left(\frac{da_x(t)}{dt}, \frac{da_y(t)}{dt}, \frac{da_z(t)}{dt} \right).$$

Если $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, то производная $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$ есть вектор, направленный по касательной к годографу вектор-функции в сторону возрастания аргумента t .

В частности, если t — время, то $\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v}$ есть вектор скорости конца вектора $\mathbf{r}$.

Доказать следующие правила дифференцирования вектор-функции.

8.291. $\frac{d}{dt}(\varphi \mathbf{a}) = \frac{d\varphi}{dt} \mathbf{a} + \frac{d\mathbf{a}}{dt} \varphi$, где $\varphi = \varphi(t)$ — скалярная функция.

$$\mathbf{8.292.} \quad \frac{d}{dt}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \left(\frac{d\mathbf{a}}{dt}, \mathbf{b} \right) + \left(\mathbf{a}, \frac{d\mathbf{b}}{dt} \right).$$

$$\mathbf{8.293.} \quad \frac{d}{dt}[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \left[\frac{d\mathbf{a}}{dt}, \mathbf{b} \right] + \left[\mathbf{a}, \frac{d\mathbf{b}}{dt} \right].$$

8.294. $\frac{d}{dt} \mathbf{a}(\varphi(t)) = \frac{d\mathbf{a}}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dt}$, где $\varphi = \varphi(t)$ — скалярная функция.

8.295. Дано уравнение движения $\mathbf{r}(t) = 3t \mathbf{i} + 4t \mathbf{j}$. Определить траекторию и скорость движения.

8.296. Дано уравнение движения $\mathbf{r}(t) = 3t \mathbf{i} + (4t - t^2) \mathbf{j}$. Определить траекторию и скорость движения. Построить векторы скорости для моментов $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$, $t = 3$.

8.297. Найти единичный касательный вектор годографа вектор-функции $\mathbf{r}(t) = e^{2t} \mathbf{i} + (t + 8)^{4/3} \mathbf{j}$ при $t = 0$.

8.298. Найти единичный касательный вектор годографа вектор-функции $\mathbf{r}(t) = (t^3 + t) \mathbf{i} + t^2 \mathbf{j}$ при $t = -1$.

Найти производные вектор-функций.

$$\mathbf{8.299.} \quad \mathbf{r}(t) = \sin t \mathbf{i} + \cos^2 t \mathbf{j} + \sin t \cos t \mathbf{k}.$$

$$\mathbf{8.300.} \quad \mathbf{r}(t) = t \cos t \mathbf{i} + t \sin t \mathbf{j} + t \mathbf{k}.$$

$$\mathbf{8.301.} \quad \mathbf{r}(t) = (t + \cos t) \mathbf{i} + t \mathbf{j} + \sin t \mathbf{k}.$$

$$\mathbf{8.302.} \quad \mathbf{r}(t) = e^t \mathbf{i} + \cos t \mathbf{j} + (t^2 + 1) \mathbf{k}.$$

8.303. Найти $\frac{d}{dt}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$, если $\mathbf{a} = t\mathbf{i} - t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = \mathbf{i} + t\mathbf{j} + t^2\mathbf{k}$.

8.304. Найти $\frac{d}{dt}[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$, если $\mathbf{a} = \mathbf{i} + t\mathbf{j} + t^2\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = t\mathbf{i} + \mathbf{j} + t^2\mathbf{k}$.

8.305. Найти $\frac{d\mathbf{a}}{dt}$, если $\mathbf{a} = u\mathbf{i} + u^2\mathbf{j} + u^3\mathbf{k}$, где $u = \sin t$.

8.306. Найти $\frac{d\mathbf{a}}{dt}$, если $\mathbf{a} = \sqrt{u}\mathbf{i} + \sqrt{u^2 + 1}\mathbf{j} + u^2\mathbf{k}$, где $u = e^t$.



Если $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, то

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right) = \left(\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}, \frac{d^2z}{dt^2}\right).$$

Если t — время, то $\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{w}$ — вектор ускорения конца вектора $\mathbf{r}$.



Найти вторые производные вектор-функций.

8.307. $\mathbf{r}(t) = \cos t \mathbf{i} + e^t \mathbf{j} + (t^2 + 1)\mathbf{k}$.

8.308. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t \cos t \mathbf{j} + t \sin t \mathbf{k}$.

8.309. Дано уравнение движения $\mathbf{r}(t) = 2(t - \sin t)\mathbf{i} + 2(1 - \cos t)\mathbf{j}$. Определить ускорение движения. Построить векторы ускорения для моментов $t = \pi/2$, $t = \pi$.

8.310. Дано уравнение движения $\mathbf{r}(t) = te^t \mathbf{i} + t^2e^t \mathbf{j}$. Определить ускорение движения. Построить векторы ускорения для моментов $t = 0$, $t = 1$.

3. Касательная к пространственной кривой и нормальная плоскость. Уравнения касательной к пространственной кривой $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$, которой соответствует значение параметра t_0 , имеют вид

$$\frac{x - x_0}{x'(t_0)} = \frac{y - y_0}{y'(t_0)} = \frac{z - z_0}{z'(t_0)}.$$

Уравнение нормальной плоскости в той же точке имеет вид

$$x'(t_0)(x - x_0) + y'(t_0)(y - y_0) + z(t_0)(z - z_0) = 0.$$

ПРИМЕР 8.30. Написать уравнения касательной и нормальной плоскости к кривой $x = t^2 - 1$, $y = t + 1$, $z = t^3$ в точке $M_0(0, 2, 1)$.

- Данной точке соответствует значение параметра $t = 1$. Имеем $x'(t) = 2t$, $y'(t) = 1$, $z'(t) = 3t^2$. Подставляя значение $t = 1$, получаем $x'(1) = 2$, $y'(1) = 1$, $z'(1) = 3$.
Уравнения касательной

$$\frac{x}{2} = \frac{y - 2}{1} = \frac{z - 1}{3}.$$

Уравнение нормальной плоскости

$$2(x - 0) + 1(y - 2) + 3(z - 1) = 0, \text{ или } 2x + y + 3z - 5 = 0. \quad \blacktriangleleft$$

Для каждой из кривых написать уравнения касательной и уравнение нормальной плоскости.

8.311. $x = 4 \sin t^2$, $y = 4 \sin t \cos t$, $z = 2 \cos^2 t$ при $t = \pi/4$.

8.312. $x = \frac{1}{2}t^2$, $y = \frac{1}{3}t^3$, $z = \frac{1}{4}t^4$, при $t = 2$.

8.313. $x^2 + y^2 = 10$, $y^2 + z^2 = 25$ в точке $M_0(1, 3, 4)$.

8.314. $2x^2 + 3y^2 + z^2 = 9$, $3x^2 + y^2 - z^2 = 0$ в точке $M_0(1, -1, 2)$.

4. Комплексные функции действительной переменной. Если каждому значению действительной переменной $t \in D \subset \mathbb{R}$ поставлено в соответствие комплексное число $z = x + iy$, то $z(t)$ называется *комплексной функцией* действительной переменной t : $z = z(t) = x(t) + iy(t)$. Комплексная функция $z(t)$ однозначно определяется вещественными функциями $x(t)$ и $y(t)$.

ПРИМЕР 8.31. Определить вид кривой, заданной уравнением $z = e^{(\alpha + i\beta)t}$, $t \in \mathbb{R}$.

- Так как $z(t) = e^{(\alpha + i\beta)t} = e^{\alpha t} (\cos \beta t + i \sin \beta t)$, то $|z(t)| = e^{\alpha t}$ и $\arg z(t) = \beta t$. Полагая $\varphi = \beta t$, получаем $\varphi = \frac{t}{\beta}$, если

$\beta \neq 0$. Тогда $r = |z(t)| = e^{\frac{\alpha}{\beta}\varphi}$ ($\varphi \in \mathbb{R}$), и мы получили уравнение *логарифмической спирали*, если $\alpha\beta \neq 0$. При $\alpha = 0$, $\beta \neq 0$ окружность радиуса $r = 1$. При $\beta = 0$, $\alpha \neq 0$ луч $\varphi = 0$. Наконец, если $\alpha = \beta = 0$, точку $z = 1$. ◀



Производной комплексной функции $z(t)$ называется комплексная функция $z'(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta z(t, \Delta t)}{\Delta t} = x'(t) + iy'(t)$. На комплексные функции действительной переменной распространяются обычные правила дифференцирования. ◀

ПРИМЕР 8.32. Найти производную функции $z(t) = e^{\lambda t}$, где $\lambda = \alpha + i\beta$ — произвольное комплексное число.

► Так как $z(t) = e^{\alpha t}(\cos \beta t + i\sin \beta t)$, то $z(t) = x(t) + iy(t)$, где $x(t) = e^{\alpha t} \cos \beta t$, $y(t) = e^{\alpha t} \sin \beta t$. Отсюда находим

$x'(t) = e^{\alpha t}(\alpha \cos \beta t - \beta \sin \beta t)$, $y'(t) = e^{\alpha t}(\alpha \sin \beta t + \beta \cos \beta t)$, следовательно,

$$\begin{aligned} z'(t) &= x'(t) + iy'(t) = \\ &= e^{\alpha t}(\alpha \cos \beta t - \beta \sin \beta t + i(\alpha \sin \beta t + \beta \cos \beta t)) = \\ &= \alpha e^{\alpha t}(\cos \beta t + i \sin \beta t) + i\beta e^{\alpha t}(\cos \beta t + i \sin \beta t) = \\ &= (\alpha + i\beta)e^{\alpha t}(\cos \beta t + i \sin \beta t) = \lambda e^{\lambda t}. \end{aligned} \quad \blacktriangleleft$$

Определить вид кривых, заданных уравнениями, и найти производные для комплексных функций.

8.315. $z = t^2 + it$, $t \in \mathbb{R}$. **8.316.** $z = 1 - i + te^{i\pi/4}$, $t \in \mathbb{R}$.

8.317. $z = 2e^{it}$, $t \in [0; \pi]$. **8.318.** $z = 3e^{it} + e^{-it}$, $t \in \mathbb{R}$.

8.319. $z = t^2 + it^4$, $t \in \mathbb{R}$.

8.320. $z = t + i - ie^{-it}$, $t \in [0, 2\pi]$.

Глава 9

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

9.1. Основные методы вычисления неопределенного интеграла

1. Первообразная и неопределенный интеграл. Функция $F(x)$ называется *первообразной* функции $f(x)$ на интервале (a, b) , если для функции и всех x из этого интервала выполняется равенство: $F'(x) = f(x)$. Вместо интервала (a, b) можно рассматривать промежутки $[a, b]$, $(a, b]$ и $[a, b)$ и говорить тогда про односторонние производные $F'_+(a) = f(a)$ и $F'_-(b) = f(b)$.

Если $F(x)$ является первообразной функции $f(x)$ на промежутке I , тогда функции вида $F(x) + C$, где C — произвольная константа, и только они являются первообразными функции $f(x)$. Множество всех первообразных функции $f(x)$ на промежутке I называется *неопределенным интегралом* и обозначается $\int f(x)dx$. При этом если функция $F(x)$ — некоторая первообразная функции $f(x)$, то $\int f(x)dx = F(x) + C$.

Равенство интегралов $\int f(x)dx = \int g(x)dx$ понимается как равенство множеств первообразных функций $f(x)$ и $g(x)$, т.е. любые две первообразные $F(x)$ и $G(x)$ функций $f(x)$ и $g(x)$ соответственно отличаются на константу. Сумма двух интегралов $\int f(x)dx + \int g(x)dx$ понимается как множество всевозможных сумм первообразных функций $f(x)$ и $g(x)$ и т.д.

Свойства первообразных и неопределенного интеграла. Пусть функция $f(x)$ имеет первообразную $F(x)$ а функция $g(x)$ — первообразную $G(x)$ на промежутке I . Тогда

$$1. dF(x) = f(x)dx, \text{ или } d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx.$$

$$2. \int f'(x)dx = f(x) + C.$$

3. Функция $f(x) \pm g(x)$ будет иметь первообразную $F(x) \pm G(x)$ на промежутке I , т.е.

$$\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx.$$

4. Функция $kf(x)$ имеет первообразную $kF(x)$ на промежутке I , т.е.

$$\int (kf(x))dx = k \int f(x)dx.$$

При вычислении интегралов используется дополнительное свойство

5. Если $I = (c, d)$, то при $a \neq 0$ функция $f(ax + b)$ имеет первообразную $\frac{1}{a}F(ax + b)$ на интервале $\left(\frac{c-b}{a}, \frac{d-b}{a}\right)$, т.е.

если $\int f(x)dx = F(x) + C$, то $\int f(ax + b)dx = \frac{1}{a}F(ax + b) + C$.

Основные неопределенные интегралы

$$1. \int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, (\alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq -1). \quad 2. \int \frac{dx}{x} = \ln |x| + C.$$

$$3. \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, a > 0, a \neq 1. \quad 4. \int e^x dx = e^x + C.$$

$$5. \int \cos x dx = \sin x + C. \quad 6. \int \sin x dx = -\cos x + C.$$

$$7. \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C. \quad 8. \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C.$$

$$9. \int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C. \quad 10. \int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C.$$

$$11. \int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C. \quad 12. \int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C.$$

$$13. \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C, a > 0.$$

$$14. \int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C, \quad a \neq 0.$$

$$15. \int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C, \quad a \neq 0.$$

$$16. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a}} = \ln |x + \sqrt{x^2 + a}| + C, \quad a \neq 0.$$

$$17. \int \frac{dx}{\sin x} = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C.$$

$$18. \int \frac{dx}{\cos x} = \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + C.$$

ПРИМЕР 9.1. Вычислить интеграл

$$\int \frac{x^2 + \sqrt{x} \cdot \sin x + 1}{\sqrt{x}} dx.$$

$$\begin{aligned} \blacktriangleright \int \frac{5x^2 + 3\sqrt{x} \cdot \sin x - 2}{\sqrt{x}} dx &= \int \left(\frac{5x^2}{\sqrt{x}} + \frac{3\sqrt{x} \cdot \sin x}{\sqrt{x}} - \frac{2}{\sqrt{x}} \right) dx = \\ &= (\text{св-во 3}) = \int 5x^{3/2} dx + \int 3 \sin x dx - \int 2x^{-1/2} dx = \\ &= (\text{св-во 4}) = 5 \int x^{3/2} dx + 3 \int \sin x dx - 2 \int x^{-1/2} dx = \\ &= 2x^{5/2} - 3 \cos x - 4x^{1/2} + C = 2x^2 \sqrt{x} - 3 \cos x - 2\sqrt{x} + C. \quad \blacktriangleleft \end{aligned}$$

ПРИМЕР 9.2. Вычислить интеграл $\int (3x+10)^{10} dx$.

$$\blacktriangleright \text{Так как } \int x^{10} dx = \frac{x^{11}}{11} + C, \text{ то}$$

$$\int (3x+10)^{10} dx = \frac{(3x+10)^{11}}{33} + C. \quad \blacktriangleleft$$

Доказать, что функция $F(x)$ является первообразной функции $f(x)$.

$$9.1. F(x) = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C, \quad f(x) = \frac{1}{x^2 - a^2}, \quad a \neq 0,$$

$$9.2. F(x) = \ln |x + \sqrt{x^2 + a}| + C, \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + a}}, \quad a \neq 0.$$

$$9.3. F(x) = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C, \quad f(x) = \frac{dx}{\sin x}.$$

$$9.4. F(x) = \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + C, \quad f(x) = \frac{1}{\cos x}.$$

Найти первообразные функций.

$$9.5. f(x) = x^3. \quad 9.6. f(x) = x^{100}.$$

$$9.7. f(x) = \sqrt[3]{x}. \quad 9.8. f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}.$$

$$9.9. f(x) = e^{3x}. \quad 9.10. f(x) = \frac{1}{2^x}.$$

$$9.11. f(x) = \cos 2x. \quad 9.12. f(x) = \sin 0,5x.$$

$$9.13. f(x) = \frac{1}{\sin^2 \frac{x}{3}}. \quad 9.14. f(x) = \frac{1}{\cos^2 3x}.$$

Используя таблицу интегралов и их основные свойства, найти интегралы.

$$9.15. \int \left(4x^3 + 3x^2 + \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} \right) dx.$$

$$9.16. \int \frac{x^2 + x + 1}{\sqrt[3]{x^5}} dx. \quad 9.17. \int (3x - 5)^{10} dx.$$

$$9.18. \int \frac{dx}{\sqrt[5]{(5x+1)^6}}. \quad 9.19. \int \frac{x^3 + 1}{x + 1} dx.$$

$$9.20. \int \frac{x^2 + 1}{x - 1} dx. \quad 9.21. \int \frac{2x + 5}{2x - 1} dx.$$

$$9.22. \int \frac{x + 1}{3x + 1} dx. \quad 9.23. \int \cos \frac{x - 2}{3} dx.$$

$$9.24. \int \sin(3x + 1) dx. \quad 9.25. \int \cos x \cdot \sin 3x dx.$$

$$9.26. \int \cos 2x \cdot \cos 3x dx. \quad 9.27. \int \frac{3dx}{\sqrt{4 - x^2}}.$$

$$9.28. \int \frac{3dx}{\sqrt{5 - 4x^2}}. \quad 9.29. \text{ а) } \int \frac{dx}{\sqrt{16 + x^2}}. \text{ б) } \int \frac{dx}{\sqrt{1 + 16x^2}}.$$

$$9.30. \text{ а) } \int \frac{dx}{x^2 + 25}. \quad \text{ б) } \int \frac{2}{16x^2 + 5} dx.$$

$$9.31. \text{ а) } \int \frac{dx}{\sin 6x}. \quad \text{ б) } \int \frac{dx}{\cos(0,5x)}.$$

$$9.32. \text{ а) } \int \frac{dx}{x^2 - 5}. \quad \text{ б) } \int \frac{dx}{4x^2 - 9}.$$

2. Замена переменной в неопределенном интеграле.

а) *Интегрирование с помощью замены переменной.* Важную роль в интегральном исчислении играет формула замены переменных

$$\int g(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int g(y)dy.$$

В этой формуле предполагается, что $y = \varphi(x)$ есть непрерывно дифференцируемая функция на некотором интервале изменения x , а $g(y)$ — непрерывная функция на соответствующем интервале оси y . Равенство понимается в том смысле, что если $F(y) + C$ есть множество первообразных функции $g(y)$, то $F(\varphi(x)) + C$ есть множество первообразных функции $g(\varphi(x))\varphi'(x)$.

ПРИМЕР 9.3. Вычислить интеграл $\int \operatorname{tg} x dx$.

$$\blacktriangleright \int \operatorname{tg} x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = - \int \frac{(\cos x)'}{\cos x} dx. \text{ Сделав замену } \cos x = y, \text{ получим}$$

$$- \int \frac{(\cos x)'}{\cos x} dx = - \int \frac{dy}{y} = -\ln |y| + C = -\ln |\cos x| + C. \quad \blacktriangleleft$$

Таким образом, интегрирование с помощью замены переменной производится тогда, когда подынтегральную функцию можно представить в виде $f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)$.

ПРИМЕР 9.4. Вычислить интеграл $\int \frac{dx}{\sin x}$.

$$\blacktriangleright \int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{dx}{2 \sin \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2}} = \int \frac{\cos \frac{x}{2} dx}{2 \sin \frac{x}{2} \cdot \cos^2 \frac{x}{2}} =$$

$$\begin{aligned}
 &= \int \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}} dx = \int \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{x}{2}} \left(\operatorname{tg} \frac{x}{2} \right)' dx = \left| y = \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| = \\
 &= - \int \frac{1}{y} dy = \ln |y| + C = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C. \quad \blacktriangleleft
 \end{aligned}$$



Часто бывает удобно, сокращая запись, оформлять интегрирование с помощью замены в виде введения некоторого выражения под знак дифференциала. Вообще говоря, формула интегрирования с помощью замены показывает, что выражение $\varphi'(t)dt$, стоящее под знаком интеграла, имеет тот же смысл, что и ранее, а именно, $\varphi'(t)dt = d(\varphi(t))$. Это преобразование в подынтегральном выражении и называется введением под знак дифференциала. Таким образом, если $\int f(x)dx = F(x) + C$, $\varphi(t)$ — некоторая непрерывно дифференцируемая функция, то $\int f(\varphi(x))d(\varphi(x)) = F(\varphi(t)) + C$.



ПРИМЕР 9.5. Вычислить интеграл $\int x e^{x^2} dx$.

► Вводя под знак дифференциала $x dx = \frac{1}{2} dx^2$, находим

$$\int x e^{x^2} dx = \frac{1}{2} \int e^{x^2} dx^2 = \frac{e^{x^2}}{2} + C. \quad \blacktriangleleft$$



б) *Интегрирование с помощью метода подстановки.* Рассмотрим примеры интегрирования с помощью *метода подстановки*, т.е. перехода от интеграла в левой части равенства $\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$ к интегралу в правой.



ПРИМЕР 9.6. Вычислить интеграл $\int \sqrt{1-x^2} dx$.

► Так как $x \in [-1, 1]$, сделаем подстановку $x = \cos t$, где $t \in [0, \pi]$. Тогда $x' = -\sin t$ и $\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\cos^2 t} = \sin t$ (так как $t \in [0, \pi]$). Получаем

$$\begin{aligned}
 \int \sqrt{1-x^2} dx &= - \int \sin^2 t dt = \int \frac{\cos 2t - 1}{2} dt = \frac{1}{2} \left(\int \cos 2t dt - \int dt \right) = \\
 &= \frac{\sin 2t}{4} - \frac{t}{2} + C = \frac{\sin t \cdot \cos t}{2} - \frac{t}{2} + C = \frac{x\sqrt{1-x^2} - \arccos x}{2} + C. \quad \blacktriangleleft
 \end{aligned}$$

Вычислить интегралы, используя подходящую замену.

$$9.33. \int x(2x^2 - 1)^6 dx. \quad 9.34. \int x^2 \sqrt{3x^3 + 2} dx.$$

$$9.35. \int \frac{x dx}{\sqrt{2x^2 - 1}}. \quad 9.36. \int \frac{(2x + 3) dx}{\sqrt{x^2 + 3x + 2}}.$$

$$9.37. \int x \cos(1 - x^2) dx.$$

$$9.38. \int (3x^2 + 1) \sin(x^3 + x - 5) dx. \quad 9.39. \int \frac{e^{\sqrt{x}} dx}{\sqrt{x}}.$$

$$9.40. \int \frac{\sqrt{x} dx}{1 + x^3}. \quad 9.41. \int \frac{x^3 dx}{\sqrt{1 - x^8}}. \quad 9.42. \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^6 + 3}}.$$

$$9.43. \int \frac{\ln x dx}{x}. \quad 9.44. \int \frac{dx}{x \sqrt{\ln x}}. \quad 9.45. \int \frac{e^x dx}{1 + e^{2x}}.$$

$$9.46. \int \frac{e^{2x} dx}{\sqrt{1 - e^{4x}}}. \quad 9.47. \int \cos^3 x \sin x dx.$$

$$9.48. \int \frac{\cos 3x dx}{\sin 3x}. \quad 9.49. \int \frac{\arcsin 2x dx}{\sqrt{1 - 4x^2}}.$$

$$9.50. \int \frac{dx}{\arccos(x - 1) \sqrt{2x - x^2}} P(x).$$

$$9.51. \int \frac{dx}{x + 2\sqrt{x}}. \quad 9.52. \int \frac{dx}{x(2 + 2\ln x + \ln^2 x)}.$$

3. Интегрирование по частям неопределенного интеграла. Пусть $u(x)$ и $v(x)$ — непрерывно дифференцируемые функции. Тогда верна формула интегрирования по частям

$$\int u(x) \cdot v'(x) dx = u(x) \cdot v(x) - \int u'(x) v(x) dx,$$

или

$$\int u dv = uv - \int v du.$$

а) Если в интеграле $\int f(x) dx$ функция $f(x)$ представляет собой произведение $P(x) \cdot g(ax + b)$, где $P(x)$ — многочлен, а $g(t)$ — функция, равная $\cos t$, $\sin t$ или e^t , то при интегрировании по частям полагаем $P(x) = u(x)$, $g(ax + b) dx = dv$. При этом функция $v(x)$ легко находится. Отметим, что если

$P(x)$ — многочлен степени n , то интегрирование по частям придется проводить n раз.

ПРИМЕР 9.7. Вычислить интеграл

$$\int (x^2 + 3) \sin(2x + 1) dx.$$

► $\int (x^2 + 3) \sin(2x + 1) dx =$

$$= \left| \begin{array}{ll} u = x^2 + 3, & du = 2x dx, \\ dv = \sin(2x + 1) dx, & v = -\frac{1}{2} \cos(2x + 1) \end{array} \right| =$$

$$= -\frac{1}{2} (x^2 + 3) \cos(2x + 1) + \int x \cos(2x + 1) dx =$$

$$= \left| \begin{array}{ll} u = x, & du = dx \\ dv = \cos(2x + 1) dx, & v = \frac{1}{2} \sin(2x + 1) \end{array} \right| =$$

$$= -\frac{1}{2} (x^2 + 3) \cos(2x + 1) + \frac{1}{2} x \sin(2x + 1) - \frac{1}{2} \int \sin(2x + 1) dx =$$

$$= -\frac{1}{2} (x^2 + 3) \cos(2x + 1) + \frac{1}{2} x \sin(2x + 1) + \frac{1}{4} \cos(2x + 1) + C =$$

$$= \frac{1}{4} \left((-2x^2 - 5) \cos(2x + 1) + 2x \sin(2x + 1) \right) + C. \quad \blacktriangleleft$$

ПРИМЕР 9.8. Вычислить интеграл $\int x^5 e^{2x^3} dx$.

► Прежде всего заметим, что $x^2 dx = \frac{1}{3} d(x^3)$. Тогда

$$\int x^5 e^{2x^3} dx = \int x^3 x^2 e^{2x^3} dx = \frac{1}{6} \int x^3 e^{2x^3} d(2x^3) =$$

$$= \left| \begin{array}{ll} u = x^3, & du = 3x^2 dx, \\ dv = e^{2x^3} d(2x^3), & v = e^{2x^3} \end{array} \right| = \frac{1}{6} \left(x^3 e^{2x^3} - \int 3x^2 e^{2x^3} dx \right) =$$

$$= \frac{1}{6} \left(x^3 e^{2x^3} - \frac{1}{2} \int e^{2x^3} d(2x^3) \right) = \frac{x^3 e^{2x^3}}{6} - \frac{e^{2x^3}}{12} + C =$$

$$= \frac{1}{12} (2x^3 - 1) e^{2x^3} + C. \quad \blacktriangleleft$$

б) Если в подынтегральной функции в качестве сомножителя присутствуют функции $\ln(ax + b)$, $\arcsin(ax + b)$,

$\arccos(ax+b)$, $\operatorname{arctg}(ax+b)$, $\operatorname{arcsctg}(ax+b)$ или их степени, то бывает удобно принять их за $u(x)$.

ПРИМЕР 9.9. Вычислить интеграл $\int \frac{\ln^2 x}{x^3} dx$.

$$\begin{aligned} \blacktriangleright \int \frac{\ln^2 x}{x^3} dx &= \left| \begin{array}{l} u = \ln^2 x, \quad du = \frac{2 \ln x}{x} dx, \\ dv = \frac{dx}{x^3}, \quad v = -\frac{1}{2x^2} \end{array} \right| = -\frac{\ln^2 x}{2x^2} + \int \frac{\ln x}{x^3} dx = \\ &= \left| \begin{array}{l} u = \ln x, \quad du = \frac{dx}{x}, \\ dv = \frac{dx}{x^3}, \quad v = -\frac{1}{2x^2} \end{array} \right| = -\frac{\ln^2 x}{2x^2} - \frac{\ln x}{2x^2} + \int \frac{dx}{2x^3} = \\ &= -\frac{\ln^2 x}{2x^2} - \frac{\ln x}{2x^2} - \frac{1}{4x^2} + C. \quad \blacktriangleleft \end{aligned}$$

ПРИМЕР 9.10. Вычислить интеграл $\int \frac{\operatorname{arctg} x}{x^3} dx$.

$$\begin{aligned} \blacktriangleright \int \frac{\operatorname{arctg} x}{x^3} dx &= \left| \begin{array}{l} u = \operatorname{arctg} x, \quad du = \frac{dx}{1+x^2}, \\ dv = \frac{dx}{x^3}, \quad v = -\frac{1}{2x^2} \end{array} \right| = \\ &= -\frac{\operatorname{arctg} x}{2x^2} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^2(1+x^2)} = -\frac{\operatorname{arctg} x}{2x^2} + \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{1+x^2} \right) dx = \\ &= -\frac{\operatorname{arctg} x}{2x^2} + \frac{1}{2} \left(\int \frac{dx}{x^2} - \int \frac{dx}{1+x^2} \right) = -\frac{\operatorname{arctg} x}{2x^2} - \frac{1}{2x} - \frac{1}{2 \operatorname{arctg} x}. \quad \blacktriangleleft \end{aligned}$$

в) С помощью интегрирования по частям при вычислении интегралов может получиться равенство $\int f(x) dx = H(x) + k \int f(x) dx$, где $k \neq 1$. Это равенство означает, что если $F(x)$ — первообразная функции $f(x)$, то для нее найдется другая первообразная $G(x)$ этой же функции $f(x)$, такая, что $F(x) = H(x) + kG(x)$. Так как первообразные $F(x)$ и $G(x)$ отличаются на константу, т.е. $G(x) = F(x) + C$, то получаем $F(x) = H(x) + k(F(x) + C)$ или $F(x) = \frac{H(x)}{1-k} + \frac{kC}{1-k}$. Но тогда

и функция $\frac{H(x)}{1-k}$ также является первообразной функции $f(x)$, т.е. $\int f(x)dx = \frac{H(x)}{1-k} + C$.

ПРИМЕР 9.11. Вычислить интеграл $\int e^x \cos 2x dx$.

$$\begin{aligned} \blacktriangleright \int e^x \cos 2x dx &= \left| \begin{array}{l} u = \cos 2x, \quad du = -2 \sin 2x dx, \\ dv = e^x dx, \quad v = e^x \end{array} \right| = \\ &= e^x \cos 2x + 2 \int e^x \sin 2x dx = \left| \begin{array}{l} u = \sin 2x, \quad du = 2 \cos 2x dx, \\ dv = e^x dx, \quad v = e^x \end{array} \right| = \\ &= e^{ax} \cos 2x + 2e^x \sin 2x - 4 \int e^x \cos 2x dx. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\int e^x \cos 2x dx = \frac{e^x \cos 2x + 2e^{2x} \sin 2x}{5} + C.$$

Применяя формулу интегрирования по частям, вычислить интегралы.

9.53. $\int x \sin x dx$.

9.54. $\int x \cos 2x dx$.

9.55. $\int (3x+2) \cos 0,5x dx$.

9.56. $\int (2x-1) \sin 3x dx$.

9.57. $\int x^2 \cos x dx$. **9.58.** $\int (x^2+1) \sin 2x dx$. **9.59.** $\int x e^x dx$.

9.60. $\int 2^x (2x-1) dx$.

9.61. $\int (x^2+x) e^{2x} dx$.

9.62. $\int (x^2-1) 3^x dx$.

9.63. $\int x \ln x dx$.

9.64. $\int \ln x dx$.

9.65. $\int \ln^2 x dx$.

9.66. $\int x \ln^2 x dx$.

9.67. $\int \arctg x dx$.

9.68. $\int \arcsin x dx$.

9.69. $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

9.70. $\int x \arctg x dx$.

9.71. $\int e^{3x} \sin x dx$.

9.72. $\int e^{2x} \cos 3x dx$. **9.73.** $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}}$. **9.74.** $\int \frac{dx}{(1+x^2)^2}$.

9.2. Интегрирование основных классов элементарных функций

1. Интегрирование рациональных дробей. Интегрирование произвольной рациональной дроби $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{a_mx^m + a_{m-1}x^{m-1} + \dots + a_1x^1 + a_0}{b_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + b_1x^1 + b_0}$ с действительными коэффициентами осуществляется следующим образом.

Если $m \geq n$, т.е. исходная дробь $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ *неправильная*, следует предварительно выделить в этой дроби *целую часть*, т.е. представить ее в виде

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = T_{m-n}(x) + \frac{R_r(x)}{Q_n(x)},$$

где $T_{m-n}(x)$ и $R_r(x)$ — многочлены степеней $m-n$ и r соответственно, причем $r < n$, т.е. дробь $\frac{R_r(x)}{Q_n(x)}$ *правильная*. Вы-

деление целой части из неправильной дроби $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ позволяет свести интегрирование произвольной рациональной дроби к интегрированию многочлена и правильной рациональной дроби.

ПРИМЕР 9.12. Вычислить интеграл $\int \frac{x^5 + x^4 + 1}{x-1} dx$.

► Разделив многочлен $(x^5 + x^4 + 1)$ на многочлен $(x-1)$ уголком, получим $\frac{x^5 + x^4 + 1}{x-1} = x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x + 2 + \frac{3}{x-1}$.

Интегрируя, находим

$$\begin{aligned} \int \frac{x^5 + x^4 + 1}{x-1} dx &= \int \left(x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x + 2 + \frac{3}{x-1} \right) dx = \\ &= \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{2}x^4 + \frac{2}{3}x^3 + x^2 + 2x + 3\ln|x-1| + C. \end{aligned}$$



Для того чтобы проинтегрировать правильную дробь $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$, где $m < n$, следует предварительно представить ее

в виде суммы *простейших дробей*. Для этого необходимо разложить многочлен $Q_n(x)$ на линейные и квадратичные множители. Пусть многочлен $Q_n(x)$ имеет действительные корни $a_1, a_2, \dots, a_l$ кратностей $k_1, k_2, \dots, k_l$ и комплексно сопряженные пары корней $\beta_1 = \alpha_1 + i\beta_1, \bar{\beta}_1 = \alpha_1 - i\beta_1, \beta_2 = \alpha_2 + i\beta_2, \bar{\beta}_2 = \alpha_2 - i\beta_2, \dots, \beta_t = \alpha_t + i\beta_t, \bar{\beta}_t = \alpha_t - i\beta_t$ кратностей $s_1, s_2, \dots, s_t$ соответственно ($k_1 + k_2 + \dots + k_l + 2(p_1 + p_2 + \dots + p_t) = n$). Тогда справедливо разложение

$$Q(x) = (x - a_1)^{k_1} (x - a_2)^{k_2} \dots (x - a_l)^{k_l} \dots (x^2 + p_1x + q_1)^{s_1} \dots (x^2 + p_tx + q_t)^{s_t},$$

где $x^2 + p_jx + q_j = (x - \beta_j)(x - \bar{\beta}_j), j = 1, 2, \dots, t$.

Тогда представление дроби $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ в виде суммы простейших дробей имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = & \frac{A_1^{(1)}}{x - a_1} + \frac{A_2^{(1)}}{(x - a_1)^2} + \dots + \frac{A_{k_1}^{(1)}}{(x - a_1)^{k_1}} + \dots + \frac{A_l^{(l)}}{x - a_l} + \\ & + \dots + \frac{A_{k_l}^{(l)}}{(x - a_l)^{k_l}} + \frac{B_1^{(1)}x + C_1^{(1)}}{x^2 + p_1x + q_1} + \dots + \frac{B_{p_1}^{(1)}x + C_{p_1}^{(1)}}{(x^2 + p_1x + q_1)^{p_1}} + (9.1) \\ & + \dots + \frac{B_1^{(t)}x + C_1^{(t)}}{x^2 + p_tx + q_t} + \dots + \frac{B_{p_t}^{(t)}x + C_{p_t}^{(t)}}{(x^2 + p_tx + q_t)^{p_t}}. \end{aligned}$$

Коэффициенты $A_i^{(j)}, B_i^{(j)}, C_i^{(j)}$ определяются с помощью приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях x у многочлена $P_m(x)$ и многочлена, который получается в числителе правой части равенства (9.1) после приведения ее к общему знаменателю (*метод неопределенных коэффициентов*).

Формула (9.1) показывает, что интегрирование рациональных дробей сводится к интегрированию выражений одного из следующих типов:

$$1. \frac{A}{x-a}, \int \frac{A dx}{x-a} = A \ln |x-a| + C.$$

$$2. \frac{A}{(x-a)^n}, n = 2, 3, \dots, \int \frac{A dx}{(x-a)^n} = -\frac{A}{(n-1)(x-a)^{n-1}} + C.$$

$$3. \frac{Ax+B}{x^2+px+q}, p^2-4q < 0.$$

$$4. \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}, p^2-4q < 0, n = 2, 3, \dots$$



ПРИМЕР 9.13. Вычислить интеграл $\int \frac{2x^2+1}{x^4+2x^3} dx$.

► Представим $\frac{2x^2+1}{x^4+2x^3}$ в виде суммы простейших дробей.

$$\frac{2x^2+1}{x^4+2x^3} = \frac{2x^2+1}{x^3(x+2)} = \frac{A}{x^3} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x} + \frac{D}{x+2}.$$

Приведа правую часть к общему знаменателю и приравняв числители, получаем

$$2x^2+1 = A(x+2) + Bx(x+2) + Cx^2(x+2) + Dx^3.$$

Коэффициент A найдем, подставив $x = 0$, получим $1 = 2A$, $A = \frac{1}{2}$; подставив $x = -2$, получим $9 = -8D$, $D = -\frac{9}{8}$.

Приравняв далее коэффициенты при x^3 в левой и правой части, получим $0 = C + D$, $C = \frac{9}{8}$. Приравняв коэффициенты при x в левой и правой части, получим $0 = A + 2B$, $B = -\frac{1}{4}$. Окончательно получаем

$$\frac{2x^2+1}{x^4+2x^3} = \frac{1}{2x^3} - \frac{1}{4x^2} + \frac{9}{8x} - \frac{9}{8(x+2)},$$

откуда

$$\begin{aligned}\int \frac{2x^2+1}{x^4+2x^3} dx &= \int \left(\frac{1}{2x^3} - \frac{1}{4x^2} + \frac{9}{8x} - \frac{9}{8(x+2)} \right) dx = \\ &= -\frac{1}{4x^2} + \frac{1}{4x} + \frac{9}{8} \ln \left| \frac{x}{x+2} \right| + C. \quad \blacktriangleleft\end{aligned}$$

▷ Метод интегрирования дробей третьего и четвертого типов рассмотрим на примерах. ◁

ПРИМЕР 9.14. Вычислить интеграл $\int \frac{3x+2}{x^2+x+1} dx$.

► Выделим в числителе производную знаменателя и разобьем интеграл на сумму

$$\begin{aligned}\int \frac{3x+2}{x^2+x+1} dx &= \int \frac{\frac{3}{2}(2x+1) + \frac{1}{2}}{x^2+x+1} dx = \\ &= \frac{3}{2} \int \frac{(2x+1)dx}{x^2+x+1} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^2+x+1}.\end{aligned}$$

В первом интеграле внесем $2x+1$ под знак дифференциала, во втором в знаменателе выделим полный квадрат

$$\begin{aligned}&\frac{3}{2} \int \frac{(2x+1)dx}{x^2+x+1} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^2+x+1} = \frac{3}{2} \int \frac{d(x^2+x+1)}{x^2+x+1} + \\ &+ \frac{1}{2} \int \frac{dx}{(x+0,5)^2 + \frac{3}{4}} = \frac{3}{2} \ln |x^2+x+1| + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{x+0,5}{\frac{\sqrt{3}}{2}} + C = \\ &= \frac{3}{2} \ln(x^2+x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C. \quad \blacktriangleleft\end{aligned}$$

ПРИМЕР 9.15. Вычислить интеграл $\int \frac{(x+1) dx}{(x^2+2x+10)^2}$.

► Преобразуем интеграл, выделив в числителе производную знаменателя,

$$\int \frac{(x+2) dx}{(x^2+2x+10)^2} = \int \frac{0,5(2x+2)+1}{(x^2+2x+10)^2} dx =$$

$$\begin{aligned}
&= \int \frac{0,5(x^2 + 2x + 10)'}{(x^2 + 2x + 10)^2} dx + \int \frac{dx}{(x^2 + 2x + 10)^2} = \\
&= -\frac{1}{2(x^2 + 2x + 10)} + \int \frac{dx}{(x^2 + 2x + 10)^2}.
\end{aligned}$$

Для вычисления оставшегося интеграла выделим в знаменателе дроби полный квадрат

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{(x^2 + 2x + 10)^2} &= \int \frac{dx}{((x+1)^2 + 3^2)^2} = \frac{1}{81} \int \frac{dx}{\left(\left(\frac{x+1}{3}\right)^2 + 1\right)^2} = \\
&= \left| z = \frac{x+1}{3}, x = 3z - 1, dx = 3dz \right| = \frac{1}{3^3} \int \frac{dz}{(z^2 + 1)^2}.
\end{aligned}$$

Воспользуемся формулой интегрирования по частям

$$\begin{aligned}
\int \frac{dz}{(z^2 + 1)^2} &= \int \frac{z^2 + 1 - z^2}{(z^2 + 1)^2} dz = \int \frac{dz}{z^2 + 1} - \int \frac{z^2}{(z^2 + 1)^2} dz = \\
&= \left| \begin{array}{l} u = z, \quad du = dz \\ dv = -\frac{z dz}{(z^2 + 1)^2}, \quad v = \frac{1}{2(z^2 + 1)} \end{array} \right| = \operatorname{arctg} z + \frac{z}{2(z^2 + 1)} - \\
&\quad - \int \frac{dz}{2(z^2 + 1)^2} = \operatorname{arctg} z + \frac{z}{2(z^2 + 1)} - \frac{\operatorname{arctg} z}{2} + C = \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{z}{(z^2 + 1)} + \operatorname{arctg} z \right) + C.
\end{aligned}$$

В итоге получаем

$$\begin{aligned}
\int \frac{(x+1) dx}{(x^2 + 2x + 10)^2} &= -\frac{1}{2(x^2 + 2x + 10)} + \frac{x+1}{18(x^2 + 2x + 10)} + \\
&+ \frac{1}{54} \operatorname{arctg} \frac{x+1}{3} + C = \frac{x-8}{18(x^2 + 2x + 10)} + \frac{1}{54} \operatorname{arctg} \frac{x+1}{3} + C. \blacktriangleleft
\end{aligned}$$



В общем случае при $n > 2$ приведенный способ позволяет свести вычисление интеграла $\int \frac{dz}{(z^2 + 1)^n}$ к вычислению интеграла $\int \frac{dz}{(z^2 + 1)^{n-1}}$, т.е. дает рекуррентный способ вычисления интегралов данного типа, приводящий в конечном итоге к интегралу $\int \frac{dz}{z^2 + 1} = \operatorname{arctg} z + C$.



Вычислить интегралы.

$$9.75. \int \frac{dx}{x^2 + 4x - 5}.$$

$$9.76. \int \frac{x \, dx}{x^2 - 5x + 4}.$$

$$9.77. \int \frac{dx}{2x^2 - 4x + 5}.$$

$$9.78. \int \frac{dx}{4x^2 - 4x + 7}.$$

$$9.79. \int \frac{x \, dx}{x^2 - 3x + 3}.$$

$$9.80. \int \frac{(x+1) \, dx}{x^2 - 4x + 8}.$$

$$9.81. \int \frac{x \, dx}{x^4 + 6x^2 + 13}.$$

$$9.82. \int \frac{x^2 \, dx}{x^6 + 3x^3 - 3}.$$

$$9.83. \int \frac{2x^2 - 1}{x^3 - 5x^2 + 6x} \, dx.$$

$$9.84. \int \frac{x^2 + 1}{x^3 - 5x^2 + 5x - 1} \, dx.$$

$$9.85. \int \frac{x^3 + 2}{x^3 - 4x^2} \, dx.$$

$$9.86. \int \frac{x^4 + 3x^3 + 3x^2 - 5}{x^3 + 3x^2 + 3x + 1} \, dx.$$

$$9.87. \int \frac{dx}{x(x^2 + 2)}.$$

$$9.88. \int \frac{x^2 + 3}{(x-1)(x^2 + 1)} \, dx.$$

$$9.89. \int \frac{dx}{x(x^2 + 4)^2}.$$

$$9.90. \int \frac{dx}{(x^2 + 9)^3}.$$

$$9.91. \int \frac{x^5}{(x-1)^2(x^2 + 1)} \, dx.$$

$$9.92. \int \frac{x^6}{(x+1)(x^2 + 1)^2} \, dx.$$

2. Интегрирование тригонометрических и гиперболических функций. При вычислении интегралов вида $\int \sin^n x \cdot \cos^m x \, dx$ различают следующие случаи.

1. Если n — нечетное, $n = 2k + 1$, то $\sin^n x$ представляется в виде $\sin^{2k+1} x = \sin^{2k} x \sin x = \sin^{2k} x (\cos x)' = (1 - \cos^2 x)^k \cdot (\cos x)'$ и с помощью замены $\cos x = y$ (или путем внесения под знак дифференциала) вычисление интеграла сводится к интегрированию многочлена. Аналогичным образом поступают, когда m нечетное, применяя замену $\sin x = y$.

ПРИМЕР 9.16. Вычислить интеграл $\int \sin^3 x \cdot \cos^2 x dx$.

► Так как $\sin^3 x = \sin^2 x \cdot \sin x = -\sin^2 x (\cos x)'$, то

$$\begin{aligned} \int \sin^3 x \cdot \cos^2 x dx &= -\int \sin^2 x \cdot \cos^2 x d(\cos x) = \\ &= -\int (1 - \cos^2 x) \cos^2 x d(\cos x) = \\ &= -\int \cos^2 x d(\cos x) + \int \cos^4 x d(\cos x) = -\frac{\cos^3 x}{3} + \frac{\cos^5 x}{5} + C. \quad \blacktriangleleft \end{aligned}$$

2. Если n и m — четные, $n = 2k$, $m = 2l$, то необходимо воспользоваться формулами понижения степени $\cos^2 x =$

$$= \frac{1 + \cos 2x}{2}, \quad \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} \quad \text{и представить подынтеграль-}$$

$$\text{ное выражение в виде } \sin^{2k} x \cos^{2l} x = \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} \right)^k \left(\frac{1 + \cos 2x}{2} \right)^l,$$

затем раскрыть скобки и получить несколько интегралов исходного вида, но уже с меньшими степенями. Возможно, что формулами понижения степени придется воспользоваться несколько раз.

ПРИМЕР 9.17. Вычислить интеграл

$$\int \sin^4 2x \cos^2 2x dx.$$

$$\begin{aligned} \text{► } \int \sin^4 2x \cos^2 2x dx &= \int \left(\frac{1 - \cos 4x}{2} \right)^2 \frac{1 + \cos 4x}{2} dx = \\ &= \frac{1}{8} \int (1 - \cos 4x)(1 - \cos^2 4x) dx = \frac{1}{8} \int (1 - \cos 4x) \sin^2 4x dx = \\ &= \frac{1}{8} \int \sin^2 4x dx - \frac{1}{8} \int \cos 4x dx = \frac{1}{16} \int (1 - \cos 8x) dx - \end{aligned}$$

$$-\frac{1}{32} \int \sin^2 4x d(\sin 4x) = \frac{x}{16} - \frac{1}{128} \sin 8x - \frac{1}{96} \sin^3 4x + C. \blacktriangleleft$$



3. Если $m + n = -2k$, $k \in \mathbb{N}$, то целесообразно воспользоваться подстановкой $\operatorname{tg} x = t$ или $\operatorname{ctg} x = t$.



ПРИМЕР 9.18. Вычислить интеграл

$$\int \sin^{1/3} x \cdot \cos^{-13/3} x dx.$$

▶ Так как $1/3 - 13/3 = -4$, то с помощью подстановки $\operatorname{tg} x = t$ задача сводится к интегрированию степеней тангенса

$$\begin{aligned} \int \sin^{1/3} x \cos^{-13/3} x dx &= \int \operatorname{tg}^{1/3} x \frac{1}{\cos^2 x} \frac{dx}{\cos^2 x} = \\ &= \int \operatorname{tg}^{1/3} x (1 + \operatorname{tg}^2 x) d(\operatorname{tg} x) = \frac{3 \operatorname{tg}^{4/3} x}{4} + \frac{3 \operatorname{tg}^{10/3} x}{10} + C. \blacktriangleleft \end{aligned}$$

Вычислить интегралы.

9.93. $\int \cos^3 x dx.$ **9.94.** $\int \cos^7 x dx.$ **9.95.** $\int \cos^4 \frac{x}{2} dx.$

9.96. $\int \sin^6 2x dx.$ **9.97.** $\int \sin^2 x \cos^2 x dx.$

9.98. $\int \sin^2 x \cos^4 x dx.$ **9.99.** $\int \frac{\sin^3 x dx}{\sqrt{\cos x}}.$ **9.100.** $\int \frac{\cos^5 dx}{\sqrt{\sin^5 x}}.$

9.101. $\int \frac{dx}{\sqrt{\sin x \cos^3 x}}.$ **9.102.** $\int \frac{\sqrt{\sin^5 x} x dx}{\sqrt{\cos x}}.$



В более общем случае при вычислении интегралов вида $\int \frac{P(\cos x, \sin x)}{Q(\cos x, \sin x)} dx$, где $P(u, v)$ и $Q(u, v)$ — многочлены, т.е.

числитель и знаменатель дроби $\frac{P(\cos x, \sin x)}{Q(\cos x, \sin x)}$ представля-

ют собой сумму слагаемых вида $a_{n,m} \sin^n x \cos^m x$, полезно выделять случаи, когда:

а) $\cos x$ в слагаемых числителя встречается только в четных степенях, а в слагаемых знаменателя только в нечетных или наоборот, то с помощью замены $\sin x = y$ вычисление

интеграла сводится к интегрированию рационального выражения. При этом если $\cos x$ в нечетных степенях встречается в числителе, то $\cos x$ вносится под знак дифференциала и тогда оставшиеся в числителе степени $\cos x$ четные. Они выражаются через $\sin^2 x$. Если в нечетных степенях находится в знаменателе, то необходимо домножить числитель и знаменатель дроби на $\cos x$, сводя результат к рассмотренному случаю.

Аналогичным образом поступают, когда $\sin x$ в слагаемых числителя встречается только в четных степенях, а в слагаемых знаменателя только в нечетных или наоборот.

ПРИМЕР 9.19. Вычислить интеграл $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x} dx$.

$$\begin{aligned} \blacktriangleright \int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x} dx &= \int \frac{\cos^2 x}{\sin^4 x} \cos x dx = \int \frac{\cos^2 x}{\sin^4 x} d(\sin x) = \\ &= \int \frac{1 - \sin^2 x}{\sin^4 x} d(\sin x) = \int \frac{d(\sin x)}{\sin^4 x} - \int \frac{d(\sin x)}{\sin^2 x} = \\ &= -\frac{1}{3\sin^3 x} + \frac{1}{\sin x} + C. \end{aligned}$$

б) $\cos x$ и $\sin x$ встречаются в слагаемых числителя и знаменателя только в четных степенях, то вычисление интеграла сводится к интегрированию рационального выражения с помощью замены $y = \operatorname{tg} x$ или $y = \operatorname{ctg} x$. При этом при за-

мене $y = \operatorname{tg} x$ получаем $\cos^2 x = \frac{1}{1+y^2}$, $\sin^2 x = \frac{y^2}{1+y^2}$,

$dy = (1+y^2)dx$, $dx = \frac{dy}{1+y^2}$, а при замене $y = \operatorname{ctg} x$ получаем

$$\sin^2 x = \frac{1}{1+y^2}, \cos^2 x = \frac{y^2}{1+y^2}, dy = -(1+y^2)dx, dx = -\frac{dy}{1+y^2}.$$

ПРИМЕР 9.20. Вычислить интеграл $\int \operatorname{tg}^4 x dx$.

$$\blacktriangleright \int \operatorname{tg}^4 x dx = \int \frac{\cos^4 x}{\sin^4 x} dx = \int \frac{\cos^4 x}{\sin^2 x} \frac{dx}{\sin^2 x} =$$

$$\begin{aligned}
&= \left| \frac{y = \operatorname{ctg} x, \quad dy = -\frac{dx}{\sin^2 x},}{\frac{\cos^4 x}{\sin^2 x} = \operatorname{tg}^2 x \cos^2 x = \frac{y^4}{1+y^2}} \right| = - \int \frac{y^4 dy}{1+y^2} = \int \frac{(1-y^4-1)dy}{1+y^2} = \\
&= \int (1-y^2)dy - \int \frac{dy}{1+y^2} = y - \frac{y^3}{3} + \operatorname{arcctg} y + C = \\
&= \operatorname{ctg} x - \frac{\operatorname{ctg}^3 x}{3} + x + C.
\end{aligned}$$



В случае когда $\cos x$ или $\sin x$ встречаются в слагаемых числителя и знаменателя только в нечетных степенях, дробь можно сократить на минимальную нечетную степень $\cos x$ (соответственно, $\sin x$) и воспользоваться одним из уже рассмотренных случаев.

в) Если $\cos x$ или $\sin x$ встречаются в слагаемых числителя или знаменателя как в четных, так и нечетных степенях, то вычисление интеграла сводится к интегрированию рационального выражения с помощью *универсальной тригонометрической подстановки* $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$. Отметим, что все рассмотренные случаи также можно свести к интегрированию рационального выражения с помощью этой подстановки.

Воспользовавшись подстановкой $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$, получаем

$$\cos x = 2 \cos^2 \frac{x}{2} - 1 = \frac{2}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} - 1 = \frac{1-t^2}{1+t^2},$$

$$\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = 2 \operatorname{tg} \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2} = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}.$$

$$\text{Далее } dt = \frac{dx}{2 \cos^2 \frac{x}{2}} = \frac{1}{2} \left(1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} \right) dx, \text{ откуда } dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

ПРИМЕР 9.21. Вычислить интеграл $\int \frac{dx}{8 + \sin x}$.

► Сделав подстановку $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$, получим

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{8 + \sin x} &= \int \frac{1}{8 + \frac{2t}{1+t^2}} \cdot \frac{2dt}{1+t^2} = \int \frac{dt}{4t^2 + t + 4} = \frac{1}{4} \int \frac{dt}{t^2 + \frac{t}{4} + 1} = \\ &= \frac{1}{4} \int \frac{dt}{\left(t + \frac{1}{8}\right)^2 + \frac{63}{64}} = \frac{2}{\sqrt{63}} \operatorname{arctg} \frac{8t+1}{\sqrt{63}} + C = \\ &= \frac{2}{\sqrt{63}} \operatorname{arctg} \frac{8 \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1}{\sqrt{63}} + C. \quad \blacktriangleleft \end{aligned}$$

ПРИМЕР 9.22. Выразить интеграл $I_n = \int \frac{dx}{\sin^n x}$ через

интеграл $I_{n-2} = \int \frac{dx}{\sin^{n-2} x}$.

$$\begin{aligned} \blacktriangleright \quad I_n &= \int \frac{dx}{\sin^{2n+1} x} = \int \frac{(\sin^2 x + \cos^2 x)}{\sin^n x} dx = \\ &= \int \frac{dx}{\sin^{n-2} x} + \int \frac{\cos^2 x}{\sin^n x} dx = I_{n-2} + \int \cos x \frac{\cos x}{\sin^n x} dx = \\ &= \left| \begin{array}{l} u = \cos x, \quad du = -\sin x dx, \\ dv = \frac{\cos x dx}{\sin^n x}, \quad v = -\frac{1}{(n-1)\sin^{n-1} x} \end{array} \right| = I_{n-2} - \frac{\cos}{(n-1)\sin^{n-1} x} - \\ &\quad - \int \frac{dx}{(n-1)\sin^{n-1} x} = \frac{n-2}{n-1} I_{n-2} - \frac{\cos}{(n-1)\sin^{n-1} x}. \quad \blacktriangleleft \end{aligned}$$



Применяя полученную рекуррентную формулу, можно выразить интеграл $I_{n-2} = \int \frac{dx}{\sin^{n-2} x}$ через интеграл $I_{n-4} = \int \frac{dx}{\sin^{n-4} x}$ и т.д., пока не получится в итоге либо интеграл

$$I_2 = \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C \quad (\text{при четных } n), \text{ либо интеграл}$$

$$I_1 = \int \frac{dx}{\sin x} = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C.$$

Вычислить интегралы.

$$9.103. \int \frac{\sin^3 x \, dx}{\cos^8 x}. \quad 9.104. \int \frac{dx}{\sin^3 x \cos^5 x}. \quad 9.105. \int \frac{dx}{\sin^6 x}.$$

$$9.106. \int \frac{\sin^2 x \, dx}{\cos^6 x}. \quad 9.107. \int \frac{dx}{\cos^4 x}. \quad 9.108. \int \frac{dx}{\sin^6 x}.$$

$$9.109. \int \frac{dx}{\sin^3 x}. \quad 9.110. \int \frac{dx}{\cos^5 x}. \quad 9.111. \int \frac{dx}{3\cos x + 2}.$$

$$9.112. \int \frac{dx}{2 - \sin x}. \quad 9.113. \int \frac{dx}{3 - 3\sin x + \cos x}.$$

$$9.114. \int \frac{(\sin x + 1) \, dx}{\cos^2 x - \cos x + 5}.$$

При интегрировании выражений вида $\cos ax \sin bx$, $\sin ax \sin bx$, $\cos ax \cos bx$ используются известные формулы преобразования произведения в сумму:

$$\cos ax \sin bx = \frac{1}{2} \left(\sin \left(\frac{a+b}{2} x \right) - \sin \left(\frac{a-b}{2} x \right) \right);$$

$$\sin ax \sin bx = \frac{1}{2} \left(\cos \left(\frac{a-b}{2} x \right) - \cos \left(\frac{a+b}{2} x \right) \right);$$

$$\cos ax \cos bx = \frac{1}{2} \left(\cos \left(\frac{a-b}{2} x \right) + \cos \left(\frac{a+b}{2} x \right) \right).$$

ПРИМЕР 9.23. Вычислить интеграл $\int \cos 3x \sin 5x \, dx$.

$$\blacktriangleright \int \cos 3x \cdot \sin 5x \, dx = \int \frac{1}{2} (-\sin(-2x)) \, dx =$$

$$= \frac{1}{2} \left(\int \sin 8x \, dx + \int \sin 2x \, dx \right) = -\frac{\cos 8x}{16} - \frac{\cos 2x}{4} + C. \quad \blacktriangleleft$$

Вычислить интегралы.

$$9.115. \int \sin 3x \cos 5x \, dx. \quad 9.116. \int \sin 10x \sin 15x \, dx.$$

$$9.117. \int \cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{3} \, dx. \quad 9.118. \int \sin \frac{x}{3} \cos \frac{4x}{3} \, dx.$$

$$9.119. \int \cos x \cos^2 3x \, dx. \quad 9.120. \int \sin x \sin 2x \sin 3x \, dx.$$



Интегрирование гиперболических функций производится аналогично интегрированию тригонометрических функций. При этом используются следующие формулы:

$$\begin{aligned} \operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x &= 1, & \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x &= \frac{\operatorname{sh} 2x}{2}, \\ \operatorname{ch}^2 x &= \frac{\operatorname{ch} 2x + 1}{2}, & \operatorname{sh}^2 x &= \frac{\operatorname{ch} 2x - 1}{2}, \\ 1 - \operatorname{th}^2 x &= \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}, & \operatorname{cth}^2 x - 1 &= \frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}. \end{aligned}$$



Вычислить интегралы.

$$9.121. \int \operatorname{ch}^2 3x \, dx. \quad 9.122. \int \operatorname{sh}^3 2x \, dx.$$

$$9.123. \int \operatorname{sh}^2 x \operatorname{ch}^2 x \, dx. \quad 9.124. \int \operatorname{ch}^4 x \, dx.$$

$$9.125. \int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x \operatorname{ch}^2 x}. \quad 9.126. \int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x - 4 \operatorname{ch}^2 x}.$$

$$9.127. \int \frac{dx}{\operatorname{ch} x - 1}. \quad 9.128. \int \sqrt{\operatorname{ch} x + 1} \, dx.$$

$$9.129. \int \operatorname{cth}^3 x \, dx. \quad 9.130. \int \operatorname{th}^4 x \, dx.$$

3. Интегрирование некоторых иррациональных функций. При вычислении интегралов от рациональных выраже-

ний, зависящих от x и $\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_1}{n_1}}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_2}{n_2}}, \dots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_k}{n_k}}$

($m_i, n_i \in \mathbb{N}$), делается замена $t^n = \frac{ax+b}{cx+d}$, где n — общий знаменатель несократимых дробей $\frac{m_1}{n_1}, \frac{m_2}{n_2}, \dots, \frac{m_k}{n_k}$, приводящая интеграл к рациональному виду.



ПРИМЕР 9.24. Вычислить интеграл $\int \frac{1}{x} \sqrt{\frac{2x+3}{x-1}} dx$.

► Сделав замену $\frac{2x+3}{x-1} = t^2$, получим $x = \frac{t^2+3}{t^2-2}$ и

$$dx = -\frac{10t}{(t^2-2)^2} dt.$$

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x} \sqrt{\frac{2x+3}{x-1}} dx &= -10 \int \frac{(t^2-2)t}{t^2+3} \cdot \frac{t}{(t^2-2)^2} dt = \\ &= - \int \frac{10t^2}{(t^2+3)(t^2-2)} dt = 2 \int \left(\frac{3}{t^2+3} + \frac{2}{t^2-2} \right) dt = \\ &= \frac{6}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{2}} \ln \left| \frac{t-\sqrt{2}}{t+\sqrt{2}} \right| + C = \\ &= 2\sqrt{3} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{2x+3}{3x-3}} + \sqrt{2} \ln \left| \frac{\sqrt{2x+3}-\sqrt{2x-2}}{\sqrt{2x+3}+\sqrt{2x-2}} \right| + C = \\ &= 2\sqrt{3} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{2x+3}{3x-3}} + \sqrt{2} \ln |4x+1+2\sqrt{2}\sqrt{(2x+3)(x-1)}| + C. \blacktriangleleft \end{aligned}$$

Вычислить интегралы.

9.131. $\int \frac{dx}{(5+x)\sqrt{1+x}}.$

9.132 $\int \frac{x dx}{\sqrt[3]{2x-3}}.$

9.133. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}.$

9.134. $\int \frac{(\sqrt[6]{x+2}-1)dx}{(x+2)(1+\sqrt[3]{x+2})}.$

9.135. $\int \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} \cdot \frac{dx}{(x-1)^3}.$

9.136. $\int \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} \cdot \frac{dx}{x}.$

9.137. $\int \frac{dx}{(\sqrt[3]{x}+4)\sqrt{x}}.$

9.138. $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt[4]{x^3}}.$



Вычисление интегралов вида

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right) dx,$$

где R — рациональная функция двух аргументов, производится с помощью тригонометрических подстановок следующим образом. Выделением полного квадрата под знаком радикала и

заменой $u = x + \frac{b}{a}$ исходный интеграл приводится к одному из

следующих трех типов, вычисление каждого из которых производится с помощью соответствующей подстановки:

$$1) \int \tilde{R}\left(u, \sqrt{l^2 - u^2}\right) du, \quad u = l \sin t \quad \text{или} \quad u = l \operatorname{th} t;$$

$$2) \int \tilde{R}\left(u, \sqrt{l^2 + u^2}\right) du, \quad u = l \operatorname{tg} t \quad \text{или} \quad u = l \operatorname{sh} t;$$

$$3) \int \tilde{R}\left(u, \sqrt{u^2 - l^2}\right) du, \quad u = l \operatorname{sect} \quad \text{или} \quad u = l \operatorname{ch} t,$$

где $\tilde{R}$ — рациональная функция двух аргументов.

ПРИМЕР 9.25. Вычислить интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2 + 4)^3}}$.

$$\begin{aligned} \blacktriangleright \int \frac{dx}{\sqrt{(x^2 + 4)^3}} &= \left| \begin{array}{l} x = 2 \operatorname{tg} t, \sqrt{(x^2 + 4)^3} = \frac{8}{\cos^3 t}, \\ dx = \frac{2dt}{\cos^2 t} \end{array} \right| = \\ &= \int \frac{2 \cos^3 t dt}{8 \cos^2 t} = \frac{1}{4} \int \cos t dt = \frac{\sin t}{4} + C. \end{aligned}$$

Сделаем обратную замену переменных, для чего выразим

$$\operatorname{tg} t \text{ через } x: \operatorname{tg} t = \frac{x}{2}. \text{ Тогда } \sin t = \operatorname{tg} t \cos t = \frac{\operatorname{tg} t}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 t}} =$$

$$= \frac{x}{\sqrt{x^2 + 4}}. \text{ Итак, } \int \frac{dx}{\sqrt{(x^2 + 4)^3}} = \frac{x}{4\sqrt{x^2 + 4}} + C. \quad \blacktriangleleft$$



При вычислении интегралов вида $\int \frac{Mx + N}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx$ нет

необходимости производить тригонометрическую подстановку, так как выделение в числителе производной подкоренного

выражения и полного квадрата под знаком радикала приводит к табличному интегралу.

ПРИМЕР 9.26. Вычислить интеграл $\int \frac{2x+3}{\sqrt{3-2x-x^2}} dx$.

► Выделим в числителе производную подкоренного выражения, равную $(3-2x-x^2)' = -2x-2$. Тогда

$$\begin{aligned} \int \frac{2x+3}{\sqrt{3-2x-x^2}} dx &= \int \frac{-(-2x-2)+1}{\sqrt{3-2x-x^2}} dx = \\ &= - \int \frac{d(3-2x-x^2)}{\sqrt{3-2x-x^2}} + \int \frac{dx}{\sqrt{3-2x-x^2}} = \\ &= -2\sqrt{3-2x-x^2} + \int \frac{dx}{\sqrt{3-2x-x^2}}. \end{aligned}$$

В интеграле $\int \frac{dx}{\sqrt{3-2x-x^2}}$ выделим в подкоренном выражении полный квадрат

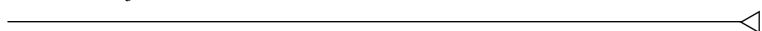
$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{3-2x-x^2}} &= \int \frac{dx}{\sqrt{4-(1+2x+x^2)}} = \int \frac{dx}{\sqrt{4-(x+1)^2}} = \\ &= \int \frac{d(x+1)}{\sqrt{4-(x+1)^2}} = \arcsin \frac{x+1}{2} + C. \end{aligned}$$

Окончательно получаем

$$\int \frac{2x+3}{\sqrt{3-2x-x^2}} dx = -2\sqrt{3-2x-x^2} + \arcsin \frac{x+1}{2} + C. \quad \blacktriangleleft$$



Интегралы вида $\int \frac{dx}{(mx+n)^r \sqrt{ax^2+bx+c}}$ ($r=1, 2$) сводятся к рассмотренным выше с помощью подстановки $mx+n = \frac{1}{t}$.



ПРИМЕР 9.27. Вычислить интеграл $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+2x+4}}$.

► Полагая $x = \frac{1}{t}$, получаем $dx = -\frac{dt}{t^2}$, $\sqrt{x^2+2x+4} = \frac{\sqrt{1+2t+4t^2}}{t}$ и, следовательно,

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+2x+4}} = -\int \frac{dt}{\sqrt{(2t+0,5)^2+0,75}} =$$

$$-\frac{1}{2} \ln \left(2t+0,5 + \sqrt{1+2t+4t^2} \right) + C =$$

$$= -\frac{1}{2} \ln \frac{2+0,5x + \sqrt{x^2+2x+4}}{x} + C. \quad \blacktriangleleft$$

Вычислить интегралы.

9.139. $\int \frac{dx}{(x^2-3)\sqrt{4-x^2}}$. 9.140. $\int \frac{dx}{(x^2+1)(x+\sqrt{x^2+1})}$.

9.141. $\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x} dx$. 9.142. $\int \frac{x^3}{\sqrt{a^2-x^2}} dx$.

9.143. $\int \frac{dx}{\sqrt{8x-x^2}}$. 9.144. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+7}}$.

9.145. $\int \frac{dx}{\sqrt{4-6x-x^2}}$. 9.146. $\int \frac{x+4}{\sqrt{2-x-x^2}} dx$.

9.147. $\int \frac{x-3}{\sqrt{x^2-6x+1}} dx$. 9.148. $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+x+1}} dx$.

9.149. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+8x+1}}$. 9.150. $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{6x-x^2-5}}$.

9.151. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{2x^2-x+1}}$. 9.152. $\int \frac{dx}{(x+2)^2\sqrt{x^2+5}}$.

9.153. $\int \sqrt{1-2x-x^2} dx$. 9.154. $\int \sqrt{(3-2x-x^2)^3} dx$.

$$9.155. \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{(x^2 + 1)^5}}. \quad 9.156. \int \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x^2} dx.$$

$$9.157. \int \sqrt{x^2 - 2x + 10} dx. \quad 9.158. \int \sqrt{4x - x^2} dx.$$

$$9.159. \int \frac{\sqrt{x^2 + 5}}{x^2} dx. \quad 9.160. \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - a^2}} dx.$$

$$9.161. \int \frac{dx}{\sqrt{(x^2 + 9)^3}}. \quad 9.162. \int \sqrt{(x^2 - 1)^3} dx.$$

9.3. Определенный интеграл и методы его вычисления

1. Определенный интеграл как предел интегральной суммы. Пусть функция $f(x)$ определена на отрезке $[a, b]$ и пусть задано разбиение отрезка $[a, b]$ произвольным образом на n частей так, что

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Назовем совокупность точек $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n$ *разбиением отрезка $[a, b]$* и обозначим $T = \{x_k, k = 0, 1, \dots, n\}$, а отрезки $[x_{k-1}, x_k]$, где $k = 1, \dots, n$, назовем *отрезками разбиения T* (рис. 9.1). Пусть $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ — длина k -го отрезка разбиения T . Тогда число $l(T) = \max\{\Delta x_1, \dots, \Delta x_n\}$ назовем *мелкостью разбиения T* (или *диаметром этого разбиения*).

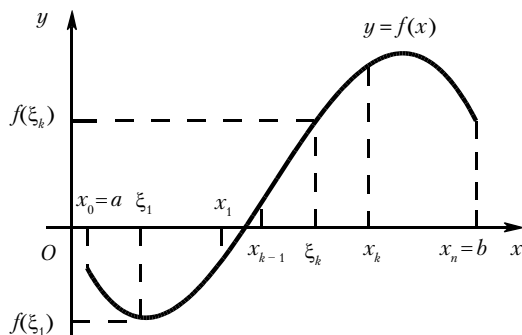


Рис. 9.1

Выберем произвольно точки $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$. Совокупность точек ξ_k ($k = 1, \dots, n$) назовем *выборкой* и обозначим $\{\xi_k\}$ ($k = 1, \dots, n$).

Составим сумму всех произведений $f(\xi_k) \cdot \Delta x_k$ ($k = 1, \dots, n$), которую обозначим $\sigma(T, \{\xi_k\})$ и назовем ее *интегральной суммой* функции $f(x)$ для данного разбиения T и фиксированной выборке $\{\xi_k\}$ ($k = 1, \dots, n$), т. е.

$$\sigma(T, \{\xi_k\}) = \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k.$$

Число J называется *определенным интегралом* функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ и обозначается $\int_a^b f(x) dx$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta \neq \delta(\varepsilon) > 0$, что для любого разбиения T , мелкость которого $l(T) < \delta$, и для любой выборки $\{\xi_k\}$ ($k = 1, \dots, n$) выполняется неравенство

$$\left| \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k - J \right| < \varepsilon.$$

Иногда это определение записывают в виде $\sigma(T, \{\xi_k\}) \rightarrow J$ при $l(T) \rightarrow 0$ или $\lim_{l(T) \rightarrow 0} \sigma(T, \{\xi_k\}) = J$, имея в виду, что этот предел не зависит от способа разбиения и выбора точек ξ_k , ($k = 1, \dots, n$). Функция $f(x)$ при этом называется *интегрируемой* на отрезке $[a, b]$.

Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она интегрируема на нем.



ПРИМЕР 9.28. Вычислить $\int_0^1 x^2 dx$, рассматривая опреде-

ленный интеграл как предел интегральных сумм.

- Разобьем отрезок $[0, 1]$ на n равных частей, тогда $x_k = k/n$ и $\Delta x_k = 1/n$. Положим $c_k = x_k = k/n$, $k = 1, 2, \dots, n$ (т. е. c_k совпадает с правым концом отрезка $[x_{k-1}, x_k]$). Тогда $f(c_k) = \frac{k^2}{n^2}$, $l(T) = \frac{1}{n}$. Составляя интегральную сумму, получим

$$\sigma(T, \{c_k\}) = \sum_{k=1}^n f(c_k) \Delta x_k = \sum_{k=1}^n \frac{k^2}{n^2} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^n k^2.$$

Так как $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, то, подставляя

полученное выражение в сумму, находим $\sigma(T, \{c_k\}) =$
 $= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}$ и

$$\int_0^1 x^2 dx = \lim_{l(T) \rightarrow 0} \sigma(T, \{c_k\}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{6} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(2 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{3}. \quad \blacktriangleleft$$

Вычислить определенные интегралы, рассматривая их как пределы соответствующих интегральных сумм.

9.163. $\int_0^5 (1+x) dx.$

9.164. $\int_0^{\pi/2} \cos x dx.$

9.165. $\int_0^{10} e^x dx.$

9.166. $\int_1^3 \frac{dx}{x^2}.$

2. Вычисление простейших интегралов с помощью формулы Ньютона — Лейбница.

Формула Ньютона — Лейбница. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и $G(x)$ — какая либо из ее первообразных, то

$$\int_a^b f(t) dt = G(b) - G(a) = G(x) \Big|_a^b.$$

ПРИМЕР 9.29. Вычислить интеграл $\int_a^b \cos x dx.$

► Одной из первообразных функции $f(x) = \cos x$ является функция $F(x) = \sin x$. Поэтому $\int_a^b \cos x dx = \sin x \Big|_a^b = \sin b - \sin a.$ ◀

Используя формулу Ньютона — Лейбница, вычислить интегралы.

$$9.167. \int_{-1}^2 x^3 dx. \quad 9.168. \int_1^8 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}. \quad 9.169. \int_1^2 (3x^2 - 2x + 1) dx.$$

$$9.170. \int_0^1 (\sqrt{x} + \sqrt[3]{x^2}) dx. \quad 9.171. \int_1^2 (3x^2 - 2x + 1) dx.$$

$$9.172. \int_{-\pi/4}^0 \frac{dx}{\cos^2 x}. \quad 9.173. \int_1^2 e^x dx. \quad 9.174. \int_0^3 2^x dx.$$

$$9.175. \int_2^5 \frac{dx}{x}. \quad 9.176. \int_1^2 \frac{dx}{2x-1}. \quad 9.177. \int_0^1 \frac{dx}{4x^2 + 4x + 5}.$$

$$9.178. \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}}. \quad 9.179. \int_1^2 \frac{e^{1/x^2}}{x^3} dx.$$

$$9.180. \int_1^e \frac{\cos(\ln x)}{x} dx.$$

С помощью определенных интегралов найти пределы сумм.

$$9.181. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n^2 + 1^2} + \frac{n}{n^2 + 2^2} + \dots + \frac{n}{n^2 + n^2} \right).$$

$$9.182. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{2n} \left(1 + \cos \frac{\pi}{2n} + \cos \frac{2\pi}{2n} + \dots + \cos \frac{(n-1)\pi}{2n} \right).$$

$$9.183. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + \sqrt{1 + \frac{2}{n}} + \dots + \sqrt{1 + \frac{n}{n}} \right).$$

$$9.184. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^a + 2^a + \dots + n^a}{n^{a+1}}.$$

3. Свойства определенного интеграла.

1) Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b]$ и $f(x) \geq 0$, то

$$\int_a^b f(x) dx \geq 0.$$

2) Если функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на отрезке $[a, b]$ и $f(x) \geq g(x)$ для всех точек этого отрезка, то

$$\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx.$$

3) Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b]$, то функция $|f(x)|$ также интегрируема на этом отрезке и выполняется неравенство

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx.$$

4) Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то на этом отрезке существует точка c такая, что

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a).$$

Средним значением функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ называется число $\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$.

5) Интегрирование четных и нечетных функций в симметричных пределах. Если функция $f(x)$ четная, то

$$\int_{-a}^a f(x)dx = 2 \int_0^a f(x)dx. \text{ Если функция } f(x) \text{ нечетная, то}$$

$$\int_{-a}^a f(x)dx = 0.$$

6) Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то интеграл с переменным верхним пределом $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ является первообразной функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$, т.е.

$$F'(x) = \left(\int_a^x f(t)dt \right)' = f(x), \quad x \in [a, b].$$

7) Если функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ дифференцируемы в некоторой точке $x \in (a, b)$ и $f(x)$ непрерывна на отрезке $[\varphi(a), \psi(b)]$, то

$$\left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(t) dt \right)' = f(\psi(x))\psi'(x) - f(\varphi(x))\varphi'(x).$$

Определить знаки интегралов, не вычисляя их.

$$9.185. \int_{-2}^1 \sqrt[3]{x} dx. \quad 9.186. \int_{-1}^1 x^3 e^x dx.$$

Не вычисляя интегралов, выяснить, какой из интегралов больше.

$$9.187. \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} \text{ или } \int_1^2 \frac{dx}{x}. \quad 9.188. \int_1^2 \frac{dx}{x^2} \text{ или } \int_1^2 \frac{dx}{x^3}.$$

Найти среднее значение функции на заданном отрезке.

$$9.189. x^3, \quad 0 \leq x \leq 1. \quad 9.190. \sqrt[3]{x}, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

$$9.191. \cos x, \quad 0 \leq x \leq \pi/2. \quad 9.192. \cos^3 x, \quad 0 \leq x \leq \pi/2.$$

Найти производные функций.

$$9.193. F(x) = \int_0^1 \frac{\sin t}{t} dt. \quad 9.194. F(x) = \int_x^0 \frac{dt}{\sqrt{1+t^3}}.$$

$$9.195. F(x) = \int_{1/x}^{\sqrt{x}} \sin t^2 dt. \quad 9.196. F(x) = \int_{x^2}^{x^3} \frac{dt}{\ln t}.$$

Вычислить интегралы.

$$9.197. \int_{-1}^1 \frac{x^2 \sin x}{1+x^4} dx. \quad 9.198. \int_{-4}^4 \frac{x^3 \cos^2 x}{1+x^2} dx.$$

$$9.199. \int_0^{2\pi} \sin^{11} x dx. \quad 9.200. \int_0^{\pi/2} \cos 2x dx.$$

4. Замена переменной в определенном интеграле. Пусть заданы функции $f(x)$, непрерывная на отрезке $[a, b]$, и $x = \varphi(t)$, непрерывно дифференцируемая на $[c, d]$, где $\varphi(c) = a$, $\varphi(d) = b$. Кроме того, при любом $t \in [c, d]$ $x = \varphi(t)$ принадлежит некоторому отрезку $[A, B]$, на котором $f(x)$ непрерывна (т.е. $[a, b] \subset [A, B]$). Тогда справедливо равенство

$$\int_a^b f(x) dx = \int_c^d f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt.$$

ПРИМЕР 9.30. Вычислить интеграл $\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx$.

- Так как функция $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ непрерывна на $\mathbb{R}$, а функция $\varphi(t) = \cos t$ непрерывно дифференцируема на $\mathbb{R}$, то можно применить теорему о замене переменной

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx &= \left| \begin{array}{l} x = \cos t, \quad t \in [0, \pi], \quad dx = -\sin t dt, \\ x(0) = 1, \quad x(\pi) = -1, \quad \sqrt{1-x^2} = \sin t \end{array} \right| = \\ &= -\int_{\pi}^0 \sin^2 t dt = \int_{\pi}^0 \frac{\cos t - 1}{2} dt = \left(\sin t - \frac{t}{2} \right) \Big|_{\pi}^0 = \\ &= (\sin 0 - 0) - \left(\sin \pi - \frac{\pi}{2} \right) = \frac{\pi}{2}. \quad \blacktriangleleft \end{aligned}$$

Вычислить интегралы с помощью указанных подстановок.

9.201. $\int_1^6 \frac{dx}{1 + \sqrt{3x-2}}, \quad 3x-2 = t^2.$

9.202. $\int_{\ln 3}^{\ln 8} \frac{dx}{\sqrt{e^x + 1}}, \quad e^x + 1 = t^2.$

9.203. $\int_0^{\operatorname{sh} 1} \sqrt{x^2 + 1} dx, \quad \operatorname{sh} x = t.$

9.204. $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{3 + 2\cos x}, \quad \operatorname{tg} \frac{x}{2} = t.$

9.205. $\int_0^{\pi/4} \frac{dx}{1 + 2\sin^2 x}, \quad \operatorname{tg} x = t.$

9.206. $\int_{-1}^1 \sqrt{3-2x-x^2} dx, \quad x+1 = 2\sin t.$

Вычислить интегралы с помощью замены переменной.

$$9.207. \int_{2\sqrt{3}}^2 \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}. \quad 9.208. \int_{-2}^0 \frac{dx}{\sqrt{x+3} + \sqrt{(x+3)^3}}.$$

$$9.209. \int_2^{4/\sqrt{3}} \frac{\sqrt{x^2-4}}{x} dx. \quad 9.210. \int_{\sqrt{3}/3}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)^3}}.$$

$$9.211. \int_{1/4}^1 \frac{dx}{x\sqrt{1+4x^2}}. \quad 9.212. \int_0^3 x^2 \sqrt{9-x^2} dx.$$

5. Интегрирование по частям определенного интеграла.

Пусть функции $u(x)$ и $v(x)$ имеют непрерывные производные на отрезке $[a, b]$. Тогда справедливо равенство (*формула интегрирования по частям определенного интеграла*)

$$\int_a^b u(x)v'(x) dx = u(x)v(x) \Big|_a^b - \int_a^b u'(x)v(x) dx,$$

или

$$\int_a^b u(x)d(v(x)) = u(x)v(x) \Big|_a^b - \int_a^b v(x)d(u(x)).$$

ПРИМЕР 9.31. Вычислить интеграл $\int_0^1 xe^{3x} dx$.

► Так как функции $u(x) = x$ и $v(x) = \frac{e^{3x}}{2}$ непрерывно дифференцируемы на $\mathbb{R}$, применим формулу интегрирования по частям

$$\begin{aligned} \int_0^1 xe^{3x} dx &= \left| \begin{array}{l} u = x, \quad du = dx \\ dv = de^{3x} dx, v = \frac{e^{3x}}{3} \end{array} \right| = \frac{xe^{3x}}{3} \Big|_1^2 - \frac{1}{3} \int_1^2 e^{3x} dx = \\ &= \frac{2e^6}{3} - \frac{e}{3} - \frac{e^{3x}}{9} \Big|_1^2 = \frac{2e^6}{3} - \frac{e}{3} - \left(\frac{e^6}{9} - \frac{e}{9} \right) = \frac{5e^6}{9} - \frac{2e}{9}. \quad \blacktriangleleft \end{aligned}$$

Вычислить интегралы методом интегрирования по частям.

$$9.213. \int_0^1 x^2 e^x dx.$$

$$9.214. \int_0^{\pi/4} x^2 \cos 2x dx.$$

$$9.215. \int_1^e x \ln x dx.$$

$$9.216. \int_1^e \ln^2 x dx.$$

$$9.217. \int_0^1 \frac{\arcsin x}{\sqrt{1+x}} dx.$$

$$9.218. \int_0^1 x \operatorname{arctg} x dx.$$

$$9.219. \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{x dx}{\cos^2 x}.$$

$$9.220. \int_2^{2\sqrt{3}} \frac{\sqrt{x^2 + 4} dx}{x^2}.$$

$$9.221. \int_0^{\pi/2} e^x \cos x dx.$$

$$9.222. \int_0^{\pi/4} e^{3x} \sin 4x dx.$$

9.4. Несобственные интегралы

1. Несобственные интегралы с бесконечными пределами. Пусть функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b]$ при любом $b > a$. Интеграл $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ называется сходящимся, если существует конечный предел $\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx$. При этом полагают $\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx$. В противном случае интеграл называется расходящимся.

Аналогично, пусть функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[b, a]$ при любом $b < a$. Интеграл $\int_{-\infty}^a f(x) dx$ называется сходящимся, если существует конечный предел $\lim_{b \rightarrow -\infty} \int_b^a f(x) dx$. При этом

полагают $\int_{-\infty}^a f(x) dx = \lim_{b \rightarrow -\infty} \int_b^a f(x) dx$. В противном случае интеграл называется расходящимся.

Если функция $F(x)$ является первообразной функции $f(x)$ на промежутке $[a, +\infty)$, то $\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x)dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} F(b) - F(a)$ и вместо последнего выражения часто используется запись $F(x)|_a^{+\infty}$. Аналогично, если функция $F(x)$ является первообразной функции $f(x)$ на промежутке $(-\infty, a]$, то $\int_{-\infty}^a f(x)dx = \lim_{b \rightarrow -\infty} \int_b^a f(x)dx = F(a) - \lim_{b \rightarrow -\infty} F(b)$ и используется запись $\int_{-\infty}^a f(x)dx = F(x)|_{-\infty}^a$.

Интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ называется сходящимся, если сходятся оба интеграла $\int_{-\infty}^a f(x)dx$ и $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ (где a — произвольное действительное число). При этом $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^a f(x)dx + \int_a^{+\infty} f(x)dx$ и сумма не зависит от выбора числа a . В противном случае интеграл называется расходящимся.

ПРИМЕР 9.32. Вычислить интеграл $\int_3^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + x - 2}$, установив его сходимость.

► Вычислим неопределенный интеграл

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^2 + x - 2} &= \int \frac{dx}{(x-1)(x+2)} = \frac{1}{3} \int \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+2} \right) dx = \\ &= \frac{1}{3} \ln \left| \frac{x-1}{x+2} \right| + C. \end{aligned}$$

Так как одна из первообразных подынтегральной функции равна $F(x) = \frac{1}{3} \ln \left| \frac{x-1}{x+2} \right|$ и $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left| \frac{x-1}{x+2} \right| = 0$,

$$\text{то } \int_3^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + x - 2} = F(+\infty) - F(3) = \frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left| \frac{x-1}{x+2} \right| = \frac{\ln 2,5}{3}. \quad \blacktriangleleft$$

ПРИМЕР 9.33. Выяснить, при каких значениях $\alpha > 0$

сходится интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$.

► Вычислим неопределенный интеграл

$$\int \frac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases} -\frac{1}{(\alpha-1)x^{\alpha-1}} & \text{при } \alpha \neq 1, \\ \ln |x| & \text{при } \alpha = 1. \end{cases}$$

При $\alpha > 1$ получаем $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{(\alpha-1)x^{\alpha-1}} \right) = 0$ и $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{1}{\alpha-1}$, интеграл сходится.

При $0 < \alpha < 1$ получаем $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{(\alpha-1)x^{\alpha-1}} \right) = +\infty$ и интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ расходится. При $\alpha = 1$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln |x| = +\infty$ и ин-

теграл расходится. Итак, интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $0 < \alpha \leq 1$. ◀

► Признаки сходимости и расходимости приведем только для интегралов вида $\int_a^{+\infty} f(x)dx$.

1) Если $F(x)$ — первообразная функции $f(x)$ на промежутке $[a, +\infty)$ и существует конечный предел $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) =$

$= F(+\infty)$, то интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится и равен

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = F(+\infty) - F(a);$$

если же конечного предела $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$ не существует, то интеграл расходится.

2) Пусть при $x \in [c, +\infty)$ ($a \leq c$) выполняется неравенство $0 \leq f(x) \leq g(x)$. Если интеграл $\int_a^b g(x)dx$ сходится, то сходится и $\int_a^b f(x)dx$, причем $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$. Если $\int_a^b f(x)dx$

расходится, то расходится и $\int_a^b g(x)dx$ (*признаки сравнения*).

3) Пусть при $x \in [c, +\infty)$ ($c \geq a$) выполняются неравенства $f(x) > 0$, $g(x) > 0$. Если $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = C \neq 0$, то интегралы $\int_a^b f(x)dx$ и $\int_a^b g(x)dx$ сходятся или расходятся одновременно (*предельный признак сравнения*).

4) Если сходится интеграл $\int_a^b |f(x)|dx$, то сходится и $\int_a^b f(x)dx$ (последний интеграл при этом называется *абсолютно сходящимся*). При применении этого признака функции заменяются на эквивалентные им и часто производится

сравнение с интегралом $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$, который сходится при $\alpha > 1$, расходится при $0 < \alpha \leq 1$ (см. пример 9.33).



ПРИМЕР 9.34. Исследовать на сходимость интегралы:

$$\text{а) } \int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2} dx; \text{ б) } \int_1^{+\infty} \frac{2\sqrt{x^5} + 3x^2 - 4}{3x^3 - 100x - 5} dx.$$

► а) Так как согласно правилу Лопиталя $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} =$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1/x}{1/(2\sqrt{x})} = 0, \text{ то найдется такое число } a > 1, \text{ что}$$

при $x > a$ выполняется неравенство $\frac{\ln x}{\sqrt{x}} < 1$ или

$$\ln x < \sqrt{x}. \text{ Вместо сходимости интеграла } \int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2} dx \text{ ис-}$$

следуем сходимость интеграла $\int_{\alpha}^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2} dx$ и воспользуемся

признаком 2) сходимости интеграла. При $x > a$ выполняется неравенство $0 < \frac{\ln x}{x^2} < \frac{1}{\sqrt{x^3}}$. Так как интеграл

$$\int_a^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^3}} \text{ сходится } (\alpha = 1,5 > 1), \text{ то сходится интеграл}$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2} dx, \text{ а следовательно, и исходный.}$$

б) При $x \rightarrow +\infty$ имеем $2\sqrt{x^5} + 3x^2 - 4 \sim 2\sqrt{x^5}$ и $3x^3 - 100x - 5 \sim 3x^3$. Тогда $\frac{2\sqrt{x^5} + 3x^2 - 4}{3x^3 - 100x - 5} \sim \frac{2\sqrt{x^5}}{3x^3} = \frac{2}{3\sqrt{x}}$.

Действительно, если взять $f(x) = \frac{2\sqrt{x^5} + 3x^2 - 4}{3x^3 - 100x - 5}$,

$g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, то $\lim_{x \rightarrow b-0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{2}{3} \neq 0$. Таким образом, вместо

сходимости интеграла $\int_1^{+\infty} \frac{2\sqrt{x^5} + 3x^2 - 4}{3x^3 - 100x - 5} dx$ можно исследовать сходимость интеграла $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{0.5}}$. Этот интеграл рас-

ходится, так как $\alpha = 0,5 < 1$, следовательно, исходный интеграл также расходится. ◀

Вычислить интегралы или установить их расходимость.

$$9.223. \int_e^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^3 x}. \quad 9.224. \int_e^{+\infty} \frac{dx}{x \sqrt{\ln x}}. \quad 9.225. \int_0^{+\infty} \frac{x dx}{x^2 + 4}.$$

$$9.226. \int_0^{+\infty} x e^{-x^2} dx. \quad 9.227. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 6x + 11}.$$

$$9.228. \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 6x - 7}. \quad 9.229. \int_1^{+\infty} \frac{1 + 2x}{x^3 + x^2} dx.$$

$$9.230. \int_x^{+\infty} \frac{x}{x^3 + 8} dx. \quad 9.231. \int_0^{+\infty} x e^{-x} dx. \quad 9.232. \int_0^{+\infty} x^2 e^{-x} dx.$$

$$9.233. \int_0^{+\infty} x \cos x dx. \quad 9.234. \int_0^{+\infty} e^{-2x} \cos x dx.$$

Исследовать на сходимость интегралы:

$$9.235. \int_1^{+\infty} \frac{dx}{3 + 2x^2 + x^4}. \quad 9.236. \int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x(x+1)(x+2)}}.$$

$$9.237. \int_1^{+\infty} \frac{3x^2 + \sqrt{(x+1)^3}}{2x^3 + \sqrt[3]{x^5} + 1} dx. \quad 9.238. \int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x^3} + \sqrt{x^2}}{x^3 + 3x + 1} dx.$$

$$9.239. \int_1^{+\infty} \frac{3 + \sin x}{\sqrt[3]{x}} dx.$$

$$9.240. \int_1^{+\infty} \frac{\sin 1/x}{2 + x\sqrt{x}} dx.$$

$$9.241. \int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x + \cos^2 x}}$$

$$9.242. \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x \ln \ln x}.$$

2. Интегралы от неограниченных функций. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на промежутке $[a, b)$, $b' < b$, и неограничена в левой окрестности точки b . Тогда она интегрируема на каждом отрезке $[a, b']$, где $b' < b$. Говорят, что интеграл $\int_a^b f(x) dx$

имеет единственную особенность в точке b . При этом интеграл $\int_a^b f(x) dx$ называется сходящимся, если существует конечный

предел $\lim_{b' \rightarrow b} \int_a^{b'} f(x) dx$ и $\int_a^b f(x) dx = \lim_{b' \rightarrow b} \int_a^{b'} f(x) dx$. В противном

случае интеграл называется расходящимся. Если функция $F(x)$ является первообразной функции $f(x)$ на промежутке $[a, b)$, то

вместо выражения $\lim_{b' \rightarrow b} \int_a^{b'} f(x) dx$ допускается запись $F(x) \Big|_a^b$.

Аналогичным образом определяется несобственный интеграл с особенностью в левом конце промежутка.

Если точка $c \in (a, b)$ — единственная точка разрыва второго рода функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ и $f(x)$ не ограничена в окрестности точки c , то интеграл $\int_a^b f(x) dx$ называется сходящимся, если сходятся оба интеграла $\int_a^c f(x) dx$ и $\int_c^b f(x) dx$.

При этом $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$.

Признаки сходимости и расходимости несобственных интегралов от неограниченных функций аналогичны признакам из параграфа 9.4 для интегралов с особенностью на бесконечности.

На практике в качестве интегралов, с которыми производится сравнение, обычно используются интегралы вида

$$\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha}, \quad \int_a^b \frac{dx}{(x-b)^\alpha} \quad (\alpha > 0),$$

которые сходятся при $\alpha < 1$ и расходятся при $\alpha \geq 1$.

Аналогично, если $f(x)$ непрерывна на любом промежутке $[a', b']$, где $a < a' < b' < b$, и не ограничена в правой окрестности точки a и левой окрестности точки b , то интеграл $\int_a^b f(x)dx$ называется сходящимся, если сходятся оба инте-

грала $\int_a^c f(x)dx$ и $\int_c^b f(x)dx$, где $c \in [a', b']$. При этом

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$



ПРИМЕР 9.35. Вычислить интеграл $\int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2-3}}$, установив его сходимость.

► Интеграл $\int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2-3}}$ имеет особенности в точках

$x=1$ и $x=3$, поэтому рассмотрим два интеграла

$$\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2-3}} \quad \text{и} \quad \int_2^3 \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2-3}}.$$

$$\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2-3}} = \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{1-(x-2)^2}} = \arcsin(x-2) \Big|_1^2 =$$

$$= \arcsin 0 - \arcsin(-1) = \frac{\pi}{2}.$$

Следовательно, интеграл $\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2-3}}$ сходится.

$$\int_2^3 \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2-3}} = \arcsin(x-2) \Big|_2^3 = \arcsin 3 - \arcsin 0 = \frac{\pi}{2}.$$

Следовательно, интеграл $\int_2^3 \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2-3}}$ также сходится.

Таким образом, интеграл $\int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2-3}}$ сходится и равен

$$\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2-3}} + \int_2^3 \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2-3}} = \pi. \quad \blacktriangleleft$$

ПРИМЕР 9.36. Исследовать сходимость интегралов:

а) $\int_0^1 x^3 e^{1/x} dx$; б) $\int_0^1 \frac{2x^4 + 3\sqrt{x}}{1 - \cos \sqrt{x}} dx$.

► а) Так как $\lim_{x \rightarrow +0} x^3 e^{1/x} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{e^y}{y^3} = +\infty$, то интеграл

$\int_0^1 x^3 e^{1/x} dx$ имеет особенность в точке $x = 0$. Более того,

$$\lim_{x \rightarrow +0} \frac{e^{1/x}}{\frac{1}{x^4}} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{e^y}{y^4} = +\infty, \text{ т.е. найдется такое } a, \ 0 < a < 1,$$

что при всех $x \in (0, a]$ выполняется неравенство $e^{1/x} > \frac{1}{x^4}$. Таким образом, при $x \in (0, a]$ имеем

$$x^3 e^{1/x} > \frac{1}{x} > 0. \text{ Так как интеграл } \int_0^a \frac{dx}{x} = \ln x \Big|_0^a = +\infty \text{ рас-}$$

ходится, то расходится и интеграл $\int_0^a x^3 e^{1/x} dx$, а следова-

тельно, и исходный интеграл расходится.

б) Так как при $x \rightarrow 0$ имеем $2x^4 + 3\sqrt{x} \sim 3\sqrt{x}$,
 $1 - \cos\sqrt{x} \sim \frac{x}{2}$, то $\frac{2x^4 + 3\sqrt{x}}{1 - \cos\sqrt{x}} \sim \frac{6\sqrt{x}}{x} = \frac{6}{\sqrt{x}}$, т.е. вместо

сходимости интеграла $\int_0^1 \frac{2x^4 + 3\sqrt{x}}{1 - \cos\sqrt{x}} dx$ можно исследовать

сходимость интеграла $\int_0^1 \frac{dx}{x^{0,5}}$. Этот интеграл сходится,

так как $\alpha = 0,5 < 1$, следовательно, исходный интеграл также сходится. ◀

Вычислить интегралы или установить их расходимость.

$$9.243. \int_0^1 \frac{dx}{x^2 + x^4}.$$

$$9.244. \int_0^2 \frac{xdx}{\sqrt[5]{(x^2 - 1)^4}}.$$

$$9.245. \int_2^4 \frac{dx}{\sqrt{6x - x^2 - 8}}.$$

$$9.246. \int_{1/3}^{2/3} \frac{dx}{x\sqrt{9x^2 - 1}}.$$

$$9.247. \int_1^e \frac{dx}{x \ln^3 x}.$$

$$9.248. \int_1^{e^2} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}.$$

Исследовать сходимость интегралов.

$$9.249. \int_0^1 \frac{\cos(1/x)}{\sqrt[3]{x}} dx. \quad 9.250. \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1 - x^4}} dx \quad 9.251. \int_0^1 \frac{dx}{\operatorname{tg} x - x}$$

$$9.252. \int_0^1 \frac{\ln(1 + \sqrt[3]{x^2})}{e^x - 1} dx \quad 9.253. \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x} - 1} \quad 9.254. \int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx$$

9.5. Геометрические приложения определенного интеграла

1. Площадь плоской фигуры. Если интегрируемая на отрезке $[a, b]$ функция $f(x)$ неотрицательна на нем, то криволинейная трапеция, ограниченная прямыми $x = a$, $x = b$, $y = 0$ и графиком функции $y = f(x)$ (рис. 9.2), имеет площадь, равную $S = \int_a^b f(x) dx$.

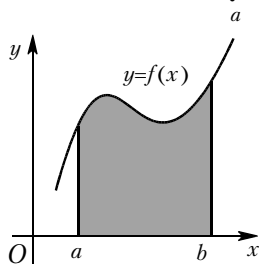


Рис. 9.2

Если фигура ограничена непрерывными кривыми $y = f(x)$, $y = g(x)$ и прямыми $x = a$, $x = b$, причем $f(x) \geq g(x)$ при $x \in [a, b]$, то площадь этой фигуры равна

$$S = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx.$$

ПРИМЕР 9.37. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 + 2x - 1$ и $y = 7 - 4x - x^2$.

► Найдем абсциссы точек пересечения парабол $y = x^2 + 2x - 1$ и $y = 7 - 4x - x^2$ (рис. 9.3). Приравняв, получаем $x^2 + 3x - 4 = 0$, так что $x_1 = 1$, $x_2 = -4$. Таким образом, площадь фигуры равна

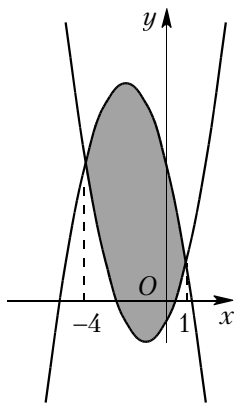


Рис. 9.3

$$S = \int_{-4}^1 ((x^2 + 2x - 1) - (7 - 4x - x^2)) dx = \int_{-4}^1 (2x^2 + 6x - 8) dx = \left(\frac{2x^3}{3} + 3x^2 - 8x \right) \Big|_{-4}^1 =$$

$$= \left(\frac{2}{3} + 3 - 8 \right) - \left(\frac{128}{3} + 48 + 32 \right) = -\frac{125}{3}. \quad \blacktriangleleft$$

9.255. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой $y = \ln x$ и прямыми $x = e$, $x = e^2$, $y = 0$.

9.256. Найти площадь фигуры, ограниченной эллипсом $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

9.257. Найти площадь фигуры, ограниченной параболой $y^2 = 4x$ и $x^2 = 4y$.

9.258. Найти площадь фигуры, ограниченной параболой $y = x^2 + 2x$ и прямой $y = x + 2$.

9.259. Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми $y = e^x - 1$ и $y = e^{2x} - 3$.

9.260. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой $y = \arcsin x$ и прямыми $x = 0$, $y = \pi/2$.

9.261. Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми $y = \ln(x+2)$, $y = 2\ln x$ и прямой $y = 0$.

9.262. Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми $(x-1)(y+2) = 2$ и $x+y = 2$.



Если фигура на плоскости ограничена двумя лучами, выходящим из начала координат $\varphi = \alpha$ и $\varphi = \beta$, и кривой, заданной в полярных координатах непрерывной функцией $r = r(\varphi) \geq 0$, то эта фигура имеет площадь, равную

$$S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi) d\varphi.$$



ПРИМЕР 9.38. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривой $r = \cos \varphi$.

► Кривая $r = \cos \varphi$ является замкнутой, так как $r(-\pi/2) = r(\pi/2) = 0$ и $r(\varphi) = \cos \varphi \geq 0$ при $\varphi \in [-\pi/2, \pi/2]$. Площадь фигуры равна

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi d\varphi = \frac{1}{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1 + \cos 2\varphi}{2} d\varphi = \\ &= \frac{1}{4} \left(\varphi + \frac{\sin 2\varphi}{2} \right) \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}. \quad \blacktriangleleft \end{aligned}$$

9.263. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой $r = a(1 + \sin \varphi)$.

9.264. Найти площадь одного лепестка кривой $r = a \sin 2\varphi$.

9.265. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой $r = a \sin 5\varphi$.

9.266. Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми $r^2 = 2 \cos 2\varphi$, $r = 1$ (вне круга).



Если плоская фигура ограничена прямыми $x = a$, $x = b$ ($a < b$), $y = 0$ и графиком функции, заданной параметрическими уравнениями $y = y(t)$, $x = x(t)$, $a = x(t_1)$, $b = x(t_2)$, где функция $y(t)$ неотрицательна на отрезке $[t_1, t_2]$, то площадь фигуры вычисляется по формуле

$$S = \int_{t_1}^{t_2} y(t)x'(t) dt.$$



ПРИМЕР 9.39. Вычислить площадь фигуры, ограниченной осью Ox и кривой $x = \cos^3 t$, $y = \sin^3 t$ ($y \geq 0$).

► Найдем точки пересечения кривой и оси Ox $\sin^3 t = 0$, $t = 0$ или $t = \pi$. Так как при $t = 0$ имеем $x = 1$, а при $t = \pi$ имеем $x = -1$, т.е. $x(\pi) < x(0)$, то площадь фигуры равна

$$\begin{aligned} S &= \int_{\pi}^0 y(t)x'(t) dt = \int_{\pi}^0 \sin^3 t (\cos^3 t)' dt = -3 \int_{\pi}^0 \sin^4 t \cdot \cos^2 t dt = \\ &= -\frac{3}{4} \int_{\pi}^0 \sin^2 2t \cdot \frac{1 - \cos 2t}{2} dt = -\frac{3}{8} \int_{\pi}^0 \sin^2 2t dt + \frac{3}{8} \int_{\pi}^0 \cos 2t dt = \\ &= -\frac{3}{16} \int_{\pi}^0 (1 - \cos 4t) dt + \frac{3}{16} \sin 2t dt \Big|_{\pi}^0 = -\frac{3}{16} t \Big|_{\pi}^0 + \frac{3}{64} \sin 4t \Big|_{\pi}^0 = \frac{3\pi}{16}. \blacktriangleleft \end{aligned}$$



Если плоская фигура ограничена замкнутой кривой, заданной параметрическими уравнениями $y = y(t)$, $x = x(t)$, $x(t_1) = x(t_2)$, $y(t_1) = y(t_2)$, то площадь фигуры также вычис-

ляется по формуле $S = \int_{t_1}^{t_2} y(t)x'(t) dt$, при этом изменение

параметра t от t_1 к t_2 соответствует обходу контура по часовой стрелке.

ПРИМЕР 9.40. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривой $x = \cos t$, $y = t \sin t$, $t \in [0, 2\pi]$.

- Так как $x(0) = x(2\pi) = 1$, $y(0) = y(2\pi) = 0$, и изменение параметра t от 2π до 0 соответствует обходу контура по часовой стрелке, то площадь равна

$$\begin{aligned} S &= \int_{2\pi}^0 y(t)x'(t)dt = -\int_{2\pi}^0 t \sin^2 t dt = \\ &= \int_0^{2\pi} t \sin^2 t dt = \int_0^{2\pi} \frac{t(1 - \cos 2t)}{2} dt = \\ &= \frac{t^2}{4} \Big|_0^{2\pi} - \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} t \cos 2t dt = \left| \begin{array}{ll} u = t, & du = dt, \\ dv = \cos 2t dt, & v = \frac{\sin 2t}{2} \end{array} \right| = \\ &= \pi^2 - \left(\frac{t \sin 2t}{4} \Big|_0^{2\pi} - \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \sin 2t dt \right) = \\ &= \pi^2 - \frac{t \sin 2t}{4} \Big|_0^{2\pi} - \frac{\cos 2t}{8} \Big|_0^{2\pi} = \pi^2. \end{aligned}$$

9.267. Найти площадь фигуры, ограниченной астроидой $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$.

9.268. Найти площадь фигуры, ограниченной одной аркой циклоиды $x = 2(t - \sin t)$, $y = 2(1 - \cos t)$ и осью Ox .

9.269. Найти площадь фигуры, ограниченной одной аркой циклоиды $x = 2(t - \sin t)$, $y = 2(1 - \cos t)$ и осью Ox .

9.270. Найти площадь фигуры, ограниченной петлей кривой $x = a(t^2 + 1)$, $y = b(t^3 - 3t)$.

2. Длина дуги кривой. Если дуга кривой задана уравнением $y = y(x)$, $a \leq x \leq b$, где $y(x)$ — непрерывно дифференцируемая на отрезке $[a, b]$ функция, то ее длина вычисляется по формуле

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx.$$

ПРИМЕР 9.41. Найти длину дуги параболы $y = x^2$ от точки $A(1, 1)$ до точки $B(2, 4)$.

► Так как функция $y = x^2$ является непрерывно дифференцируемой на $\mathbb{R}$, длина дуги равна

$$\begin{aligned}
 l &= \int_1^2 \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx = \int_1^2 \sqrt{1 + 4x^2} dx = \\
 &= \left| \begin{array}{l} u = \sqrt{1 + 4x^2}, \quad du = \frac{4x}{\sqrt{1 + 4x^2}} \\ dv = dx, \quad v = x \end{array} \right| = \\
 &= x\sqrt{1 + 4x^2} \Big|_1^2 - \int_1^2 \frac{4x^2}{\sqrt{1 + 4x^2}} dx = 2\sqrt{17} - \sqrt{5} - \int_1^2 \frac{1 + 4x^2 - 1}{\sqrt{1 + 4x^2}} dx = \\
 &= 2\sqrt{17} - \sqrt{5} - \int_1^2 \sqrt{1 + 4x^2} dx + \frac{1}{2} \int_1^2 \frac{d(2x)}{\sqrt{1 + (2x)^2}} = \\
 &= 2\sqrt{17} - \sqrt{5} - \int_1^2 \sqrt{1 + 4x^2} dx + \frac{1}{2} \ln \left| x + \sqrt{1 + (2x)^2} \right| \Big|_1^2 = \\
 &= 2\sqrt{17} - \sqrt{5} - \int_1^2 \sqrt{1 + 4x^2} dx + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{2 + \sqrt{17}}{1 + \sqrt{5}} \right| = \\
 &= 2\sqrt{17} - \sqrt{5} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{2 + \sqrt{17}}{1 + \sqrt{5}} \right| - l.
 \end{aligned}$$

Из равенства $l = 2\sqrt{17} - \sqrt{5} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{2 + \sqrt{17}}{1 + \sqrt{5}} \right| - l$ получаем

$$l = \sqrt{17} - \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{4} \ln \left| \frac{2 + \sqrt{17}}{1 + \sqrt{5}} \right|. \quad \blacktriangleleft$$

9.271. Найти длину дуги кривой $y = \frac{1}{2} \operatorname{ch} 2x$ от $x = 0$ до $x = 3$.

9.272. Найти длину дуги кривой $y = \frac{2}{\pi} \ln \sin \frac{\pi x}{2}$ от $x = \frac{1}{2}$ до $x = \frac{3}{2}$.

9.273. Найти длину дуги кривой полукубической параболы $y^2 = \frac{5}{p}(x-p)^3$, отсекаемой прямой $x = 2p$ ($p > 0$).

9.274. Найти длину замкнутой кривой $8a^2 y^2 = x^2(a^2 - x^2)$.



Если дуга кривой задана параметрическими уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t_1 \leq t \leq t_2$, где функции $y(t)$ и $x(t)$ — непрерывно дифференцируемые на отрезке $[t_1, t_2]$, и $y'(t)$ и $x'(t)$ не обращаются одновременно в нуль, то длина дуги вычисляется по формуле

$$l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt.$$



ПРИМЕР 9.42. Найти длину замкнутой кривой, заданной параметрическими уравнениями $y = \sin^3 t$, $x = \cos^3 t$.

► Так как функции $y = \sin^3 t$ и $x = \cos^3 t$ являются периодическими с периодом 2π то $t \in [0, 2\pi]$. Длина кривой

равна $l = \int_0^{2\pi} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$. Найдем производные

$$x'(t) = -3\cos^2 t \sin t, \quad y'(t) = 3\sin^2 t \cos t$$

и подынтегральную функцию

$$\begin{aligned} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} &= 3\sqrt{\cos^4 t \sin^2 t + \cos^2 t \sin^4 t} = \\ &= 3|\cos t \sin t| = \frac{3}{2}|\sin 2t|. \end{aligned}$$

Получаем

$$l = \frac{3}{2} \int_0^{2\pi} |\sin 2t| dt = 6 \int_0^{\pi/2} \sin 2t dt = -3 \cos 2t \Big|_0^{\pi/2} = 6. \quad \blacktriangleleft$$

9.275. Найти длину дуги кривой $x = a(3\cos t - \cos 3t)$, $y = a(3\sin t - \sin 3t)$ от $t = 0$ до $t = \pi/2$ ($a > 0$).

9.276. Найти длину дуги кривой $x = e^t \cos t$, $y = e^t \sin t$ от $t = 0$ до $t = 1$.

9.277. Найти длину петли кривой $x = t^2$, $y = \frac{t - 3t^3}{4}$.

9.278. Найти длину дуги кривой $x = \frac{t^6}{6}$, $y = 2 - \frac{t^4}{4}$ между точками ее пересечения с осями координат.



Если дуга кривой задана в полярных координатах уравнением $r = r(\varphi)$, $\varphi \in [\alpha, \beta]$, где функция $r(\varphi)$ непрерывно дифференцируема на отрезке $\varphi \in [\alpha, \beta]$, то длина дуги вычисляется по формуле

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(r(\varphi))^2 + (r'(\varphi))^2} d\varphi.$$



ПРИМЕР 9.43. Вычислить длину замкнутой кривой, задаваемой уравнением $r = a(1 + \cos \varphi)$ ($a > 0$).

► Производная функции $r = r(\varphi)$ равна $r'(\varphi) = -a \sin \varphi$. Находим подынтегральную функцию:

$$\begin{aligned} \sqrt{(r(\varphi))^2 + (r'(\varphi))^2} &= a\sqrt{(1 + \cos \varphi)^2 + \sin^2 \varphi} = \\ &= a\sqrt{1 + 2\cos \varphi + \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi} = a\sqrt{2(1 + \cos \varphi)} = \\ &= a\sqrt{4\cos^2 \frac{\varphi}{2}} = 2a \left| \cos \frac{\varphi}{2} \right|. \end{aligned}$$

Тогда длина кривой равна

$$\begin{aligned} l &= \int_0^{2\pi} \sqrt{(r(\varphi))^2 + (r'(\varphi))^2} d\varphi = 2a \int_0^{2\pi} \left| \cos \frac{\varphi}{2} \right| d\varphi = \\ &= 4a \int_0^{\pi} \cos \frac{\varphi}{2} d\varphi = 8a \sin \frac{\varphi}{2} \Big|_0^{\pi} = 8a. \end{aligned}$$



9.279. Найти длину дуги логарифмической спирали $r = e^{a\varphi}$, находящейся внутри окружности $r = 1$ ($a > 0$).

9.280. Найти длину дуги кардиоиды $r = 2(1 - \cos \varphi)$, $r = e^{a\varphi}$, находящейся внутри окружности $r = 1$.

9.281. Найти длину всей кривой $r = a \cos^3 \frac{\varphi}{3}$ ($a > 0$).

9.282. Найти длину дуги спирали Архимеда $r = 5\varphi$, находящейся внутри окружности $r = 10\pi$.

3. Площадь поверхности вращения. Площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси Ox дуги кривой, заданной функцией $y = f(x)$, где $a \leq x \leq b$, вычисляется по формуле

$$Q_x = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

ПРИМЕР 9.44. Найти площадь поверхности, образованной вращением астроида $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ вокруг оси Ox .

► Выразим y : $y = (a^{2/3} - x^{2/3})^{3/2}$. Найдем производную

$$y' = \frac{3}{2} (a^{2/3} - x^{2/3})^{1/2} \left(-\frac{2}{3} x^{-1/3} \right) = -\frac{(a^{2/3} - x^{2/3})^{1/2}}{x^{1/3}}.$$

Подынтегральное выражение $f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2}$ равно

$$(a^{2/3} - x^{2/3})^{3/2} \sqrt{1 + \frac{a^{2/3} - x^{2/3}}{x^{2/3}}} = a^{1/3} (a^{2/3} - x^{2/3})^{3/2} x^{-1/3}.$$

Площадь поверхности равна

$$\begin{aligned} Q_x &= 2 \cdot 2\pi a^{1/3} \int_0^a (a^{2/3} - x^{2/3})^{3/2} x^{-1/3} dx = \\ &= -4\pi a^{1/3} \frac{3}{2} \int_0^a (a^{2/3} - x^{2/3})^{3/2} d(a^{2/3} - x^{2/3}) = \\ &= -4\pi a^{1/3} \frac{3}{2} \frac{(a^{2/3} - x^{2/3})^{5/2}}{5/2} \bigg|_0^a = \frac{12}{5} \pi a^2. \end{aligned}$$

9.283. Найти площадь поверхности, образованной вращением дуги цепной линии $y = \frac{1}{2} \operatorname{ch} 2x$, $0 \leq x \leq 3$, вокруг оси Ox .

9.284. Найти площадь поверхности, образованной вращением дуги кубической параболы $y = \frac{1}{3}x^3$, $-1 \leq x \leq 1$, вокруг оси Ox .

9.285. Найти площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси Ox дуги кривой $y = \frac{1}{6}\sqrt{x}(x-12)$, $0 \leq x \leq 12$.

9.286. Найти площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси Ox дуги полукубической параболы $9ay^2 = 4x^3$, отсекаемой прямой $x = a$.



Если дуга кривой задана параметрическими уравнениями $y = y(t)$, $x = x(t)$, $t_1 \leq t \leq t_2$, то площадь поверхности, образованная вращением этой дуги вокруг оси Ox , вычисляется по формуле

$$Q_x = 2\pi \int_a^b y(t) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt.$$



ПРИМЕР 9.45. Найти площадь поверхности, образованной вращением одной арки циклоиды $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ вокруг оси Ox .

► Найдем производные

$$x'(t) = a(1 - \cos t), \quad y'(t) = a \sin t.$$

Тогда имеем

$$\begin{aligned} & \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} = \\ &= \sqrt{a^2(1 - \cos t)^2 + a^2 \sin^2 t} = a\sqrt{2(1 - \cos t)} = 2a \sin \frac{t}{2}. \end{aligned}$$

Площадь поверхности равна

$$\begin{aligned} Q_x &= 2\pi \int_0^{2\pi} a(1 - \cos t) \cdot 2a \sin \frac{t}{2} dt = 8\pi a^2 \int_0^{2\pi} \sin^3 \frac{t}{2} dt = \\ &= 8\pi a^2 \int_0^{2\pi} \left(1 - \cos^2 \frac{t}{2}\right) \sin \frac{t}{2} dt = -16\pi a^2 \int_0^{2\pi} \left(1 - \cos^2 \frac{t}{2}\right) d\left(\cos \frac{t}{2}\right) = \\ &= -16\pi a^2 \left(\cos \frac{t}{2} - \frac{\cos^3 t/2}{3}\right) \Bigg|_0^{2\pi} = \frac{64}{3} \pi a^2. \end{aligned}$$



9.287. Найти площадь поверхности эллипсоида, образованной вращением эллипса $4x^2 + y^2 = 4$ вокруг оси Ox .

9.288. Найти площадь поверхности, образованной вращением дуги кривой $x = a(t \sin t + \cos t)$, $y = a(\sin t - t \cos t)$, $0 \leq t \leq \pi$, вокруг оси Ox .

4. Объем тела. Пусть некоторое тело заключено между плоскостями $x = a$ и $x = b$ ($a < b$). Если площадь $S(x)$ сечения тела плоскостью, перпендикулярной оси Ox , является непрерывной на отрезке $[a, b]$ функцией, то его объем вычисляется по формуле

$$V = \int_a^b S(x) dx.$$

Объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox или Oy криволинейной трапеции, ограниченной прямыми $x = a$, $x = b$, $y = 0$ и графиком неотрицательной непрерывной на отрезке $[a, b]$ функции $y = f(x)$, вычисляется соответственно по формулам

$$V_x = \int_a^b f^2(x) dx$$

и

$$V_y = 2\pi \int_a^b x |f(x)| dx \quad (a \geq 0).$$

ПРИМЕР 9.46. Фигура, ограниченная кривыми

$$y = \sqrt{2px}, \quad y = \frac{2}{\sqrt{p}}(x - p)^{3/2} \text{ и осью } Oy, \text{ вращается вокруг}$$

оси Ox . Найти объем тела вращения.

► Найдем точки пересечения кривых:

$$\sqrt{2px} = \frac{2}{\sqrt{p}}(x - p)^{3/2} \text{ или } 2p^2x = (x - p)^{3/2};$$

очевидно, уравнению удовлетворяет значение $x = 2p$. Искомый объем есть разность двух объемов: объема V_1 тела, полученного вращением трапеции, ограниченной дугой параболы $y = \sqrt{2px}$, $0 \leq x \leq 2p$, и объема V_2 тела,

полученного вращением трапеции, ограниченной кривой

$$y = \frac{2}{\sqrt{p}}(x-p)^{3/2}, \quad p \leq x \leq 2p. \text{ Найдем эти объемы:}$$

$$V_1 = \pi \int_0^{2p} 2px \, dx = \pi px^2 \Big|_0^{2p} = 4p^3\pi \text{ и}$$

$$V_2 = \pi \int_p^{2p} \frac{4}{p}(x-p)^3 \, dx = \frac{\pi}{p}(x-p)^3 \Big|_p^{2p} = p^3\pi.$$

Искомый объем равен $V = V_1 - V_2 = p^3\pi$. ◀

9.289. Фигура, ограниченная кривой $2y = x^2$ и прямой $2x + 2y - 3 = 0$, вращается вокруг оси Ox . Найти объем тела вращения.

9.290. Фигура, ограниченная кривыми $y = e^{-2x} - 1$, $y = e^{-x} + 1$ и прямой $x = 0$, вращается вокруг оси Ox . Найти объем тела вращения.

9.291. Фигура, ограниченная кривой $y = x + \sin^2 x$ и прямыми $y = x$, $x = 0$ и $x = \pi$, вращается вокруг оси Oy . Найти объем тела вращения.

9.292. Фигура, ограниченная кривой $y = \frac{x^2}{2} + x + 2$ и прямой $y = 2$, вращается вокруг оси Oy . Найти объем тела вращения.

9.6. Приложения определенного интеграла к решению некоторых задач механики и физики

Если дуга кривой задана уравнением $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$, и имеет плотность $\rho = \rho(x)$, то ее масса равна

$$m = \int_a^b \rho(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} \, dx.$$

Всюду в задачах, где плотность не указана, предполагается, что кривая однородна.

Статические моменты этой дуги M_x и M_y относительно координатных осей Ox и Oy соответственно равны

$$M_x = \int_a^b \rho(x) f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx,$$

$$M_y = \int_a^b \rho(x) x \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

Моменты инерции I_x и I_y относительно тех же осей Ox и Oy вычисляются по формулам

$$I_x = \int_a^b \rho(x) f^2(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx,$$

$$I_y = \int_a^b \rho(x) x^2 \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx,$$

а координаты центра масс $\bar{x}$ и $\bar{y}$ — по формулам

$$\bar{x} = \frac{M_y}{m} = \frac{1}{l} \int_a^b \rho(x) f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx,$$

$$\bar{y} = \frac{M_x}{m} = \frac{1}{l} \int_a^b \rho(x) x^2 \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$



- ПРИМЕР 9.47.** Найти координаты центра масс дуги цепной линии $y = \operatorname{ch} x$, $0 \leq x \leq 1$.
 ► Найдем массу дуги. Имеем

$$y' = \operatorname{sh} x, \quad \sqrt{1 + (y')^2} = \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 x} = \operatorname{ch} x.$$

Следовательно,

$$m = \int_0^1 \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x \Big|_0^1 = \operatorname{sh} 1.$$

Найдем статические моменты относительно координатных осей Ox и Oy

$$\begin{aligned} M_x &= \int_0^1 \operatorname{ch}^2 x dx = \frac{1}{2} \int_0^1 (1 + \operatorname{ch} 2x) dx = \\ &= \frac{1}{2} \left(x + \frac{1}{2} \operatorname{sh} 2x \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{4} (2 + \operatorname{sh} 2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 M_y &= \int_0^1 x \operatorname{ch} x \, dx = \int_0^1 x \, d(\operatorname{sh} x) = x \operatorname{sh} x \Big|_0^1 - \int_0^1 \operatorname{sh} x \, dx = \\
 &= \operatorname{sh} 1 - \operatorname{ch} 1 \Big|_0^1 = \operatorname{sh} 1 - \operatorname{ch} 1 + 1.
 \end{aligned}$$

Координаты центра масс равны

$$\bar{x} = \frac{M_y}{m} = \frac{\operatorname{sh} 1 - \operatorname{ch} 1 + 1}{\operatorname{sh} 1} = 1 - \operatorname{cth} 1 + \frac{1}{\operatorname{sh} 1},$$

$$\bar{y} = \frac{M_x}{m} = \frac{2 + \operatorname{sh} 2}{4 \operatorname{sh} 1} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\operatorname{sh} 1} + \operatorname{ch} 1 \right). \quad \blacktriangleleft$$

9.293. Найти массу дуги параболы $y = x^2$, $0 \leq x \leq 1$, если $\rho(x) = x$.

9.294. Найти массу окружности $x^2 + y^2 = 1$, если $\rho(x) = x^2$.

9.295. Найти статический момент и момент инерции относительно оси Ox синусоиды $y = \sin x$, $0 \leq x \leq \pi$.

9.296. Найти статический момент и момент инерции относительно оси Ox дуги кривой $y = e^x$, $0 \leq x \leq 1$.

9.297. Найти статические моменты и момент инерции относительно оси Ox одной арки циклоиды $x = a(t - \sin t)$, $x = a(1 - \cos t)$.

9.298. Найти статический момент и момент инерции полуокружности радиуса r относительно ее диаметра.



При прямолинейном движении путь, пройденным телом со скоростью $v(t)$ за отрезок времени $[t_1, t_2]$, вычисляется по формуле

$$S = \int_{t_1}^{t_2} v(t) \, dt.$$



ПРИМЕР 9.48. Скорость прямолинейного движения тела выражается формулой $v(t) = 2t + 3t^2$ (м/с). Найти путь, пройденный телом за 5 с от начала движения.

► Путь равен интегралу

$$S = \int_0^5 (2t + 3t^2) \, dt = (t^2 + t^3) \Big|_0^5 = 150 \text{ (м)}. \quad \blacktriangleleft$$

9.299. Скорость тела, брошенного вертикально вверх с начальной скоростью v_0 , без учета сопротивления воздуха равна $v = v_0 - gt$, где t — время, g — ускорение свободного падения.

На какую максимальную высоту поднимется тело?

9.300. Два тела движутся по одной и той же прямой: одно со скоростью $v_1 = 3t^2 - 4t$ (м/с), второе со скоростью $v_2 = 4(t + 3)$ (м/с). В начальный момент времени они находились в одной точке. В какой момент времени и на каком расстоянии от начала движения они снова окажутся в одной точке?



Работа переменной силы $f(x)$, действующей вдоль оси Ox на отрезке $[a, b]$, выражается интегралом

$$S = \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt.$$



ПРИМЕР 9.49. Какую работу необходимо затратить для того, чтобы тело массы m поднять с поверхности Земли, радиус которой R , на высоту h ?

► Согласно закону всемирного тяготения сила F , действующая на тело массы m , равна

$$F = k \frac{mM}{r^2},$$

где M — масса Земли, r — расстояние от центра Земли, k — гравитационная постоянная. Так как на поверхности Земли, т.е. при $r = R$, имеем $F = mg$, то $mg = k \frac{mM}{R^2}$. От-

сюда находим $km = gR^2$, поэтому $F = mg \frac{R^2}{r^2}$.

Следовательно, искомая работа равна

$$A = \int_R^{R+h} F dr = \int_R^{R+h} mgR^2 \frac{dr}{r^2} = -mgR^2 \frac{1}{r} \Big|_R^{R+h} = mgR \frac{h}{R+h}. \quad \blacktriangleleft$$

9.301. Вычислить работу, которую надо затратить, чтобы насыпать кучу песка конической формы с радиусом основания R и высотой h . Плотность песка равна γ .

9.302. Вычислить работу, которую надо затратить при постройке пирамиды с квадратным основанием, если высота пирамиды H , сторона основания a , а плотность материала γ .

9.303. Электрический заряд e_0 , расположенный в начале координат, отталкивает заряд e из точки $(a, 0)$ в точку $(b, 0)$. Определить работу силы отталкивания. Чему равна работа при удалении заряда e в бесконечность?

9.304. Определить работу, произведенную при адиабатическом сжатии воздуха, имеющего начальный объем $V_0 = 8 \text{ м}^3$ и давление $p_0 = 10\,000 \text{ Н/м}^2$, до объема $V_1 = 2 \text{ м}^3$.

Глава 10

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

10.1. Основные понятия

1. Понятие функции нескольких переменных. Всякий упорядоченный набор из n действительных чисел $x_1, x_2, \dots, x_n$ называется точкой n -мерного арифметического пространства $\mathbb{R}^n$ и обозначается $M(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Числа $x_1, x_2, \dots, x_n$ называются координатами точки M . Расстояние между точками $M(x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $P(y_1, y_2, \dots, y_n)$ определяется формулой

$$\rho(M, P) = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + \dots + (y_n - x_n)^2}.$$

Пусть $D \subset \mathbb{R}^n$ — произвольное множество точек n -мерного арифметического пространства. Если каждой точке $M(x_1, x_2, \dots, x_n) \in D$ поставлено в соответствие некоторое число $f(M) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, то говорят, что на множестве D задана *числовая функция* $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ от n переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$. Множество D называется *областью определения функции*, а множество $E = \{y \in \mathbb{R} \mid y = f(M), M \in D\}$ — *областью значений функции* $u = f(M)$.

Функция двух переменных $u = f(x, y)$ может рассматриваться как функция точек плоскости в трехмерном геометрическом пространстве с фиксированной системой координат *Охуz*. Графиком этой функции называется множество точек $M(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ таких, что $z = f(x, y)$, представляющее, вообще говоря, некоторую поверхность в $\mathbb{R}^3$.



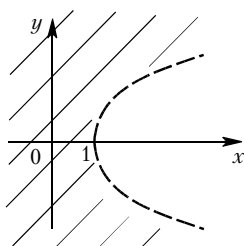


Рис. 10.1

ПРИМЕР 10.1. Найти область определения функции $u = \ln(y^2 - x + 1)$.

► Логарифм определен только для положительного аргумента, следовательно, $y^2 - x + 1 > 0$ или $x < y^2 + 1$. Область определения функции находится слева от параболы $x = y^2 + 1$ (рис. 10.1). Парабола изображена пунктирной линией, так как не входит в область определения. ◀

Найти области определения функций двух переменных (R — константа).

$$10.1. z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}.$$

$$10.2. z = \sqrt{x^2 + y^2 - R^2}.$$

$$10.3. z = \frac{1}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}.$$

$$10.4. z = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 - R^2}}.$$

$$10.5. z = \frac{2z + 3y - 1}{x - y}.$$

$$10.6. z = \sqrt{1 - (x^2 + y^2)^2}.$$

$$10.7. z = \ln(-x - y).$$

$$10.8. z = \sqrt{\frac{x^2 + y^2 - x}{2x - x^2 - y^2}}.$$

Найти области определения функций трех переменных.

$$10.9. u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - 1}.$$

$$10.10. u = \sqrt{x^2 + y^2 - z}.$$

$$10.11. u = \arcsin \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}.$$

$$10.12. u = \ln(1 - x^2 - y^2 + z^2).$$

Найти области определения функций n переменных.

$$10.13. u = \sqrt{1 - x_1^2} + \sqrt{1 - x_2^2} + \dots + \sqrt{1 - x_n^2}.$$

$$10.14. u = \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2 - \dots - x_n^2}.$$

$$10.15. \text{Дана функция } f(x, y) = \frac{2x - 3y}{3x - 2y}. \text{ Найти } f(2, 1),$$

$$f(1, 2), f(-2, 1), f(-2, -1).$$

$$10.16. \text{Дана функция } f(x, y) = \frac{2xy}{x^2 + y^2}. \text{ Найти } f(-3, 4),$$

$$f(3, 4), f\left(1, \frac{y}{x}\right).$$

10.17. Даны функции $f(x, y) = x^2 + y^2$, $\varphi(x, y) = x^2 - y^2$.
Найти $f(\varphi(x, y), y^2)$.

10.18. Даны функции $f(x, y) = x^2 - y^2$, $\varphi(x) = \cos x$,
 $\psi(x) = \sin x$. Найти $f(\varphi(x), \psi(x))$.

2. Предел и непрерывность функций. Число A называется *пределом* функции $f(M)$ при стремлении точки $M(x_1, x_2, \dots, x_n)$ к точке $M_0(a_1, a_2, \dots, a_n)$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что из условия $\rho(M, M_0) < \delta$ следует $|f(M) - A| < \varepsilon$.

При этом пишут $A = \lim_{M \rightarrow M_0} f(M) = \lim_{\substack{x_1 \rightarrow a_1 \\ x_2 \rightarrow a_2 \\ \dots \\ x_n \rightarrow a_n}} f(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

ПРИМЕР 10.2. Вычислить предел $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 2}} (1 + xy)^{\frac{2}{x^2 + xy}}$.

► Представим функцию в виде $f(x) = \left((1 + xy)^{1/xy} \right)^{\frac{2y}{x+y}}$. Так

как $z = xy \rightarrow 0$ при $x \rightarrow 0$, $y \rightarrow 2$, то $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 2}} (1 + xy)^{1/xy} =$

$= \lim_{z \rightarrow 0} (1 + z)^{\frac{1}{z}} = e$. Так как предел показателя равен

$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 2}} \frac{2y}{x+y} = 2$, то получаем

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 2}} (1 + xy)^{\frac{2}{x^2 + xy}} = e^2.$$

Найти пределы.

10.19. $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 + y^2}{3 - \sqrt{x^2 + y^2} + 9}$.

10.20. $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^3 + xy^2}{\sin(x^2 + y^2)}$.

$$10.21. \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} (1 + x^2 + y^2)^{1/(x^2 + y^2)}. \quad 10.22. \lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} \frac{\sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}.$$



Пусть $\mathbf{e} = \{\cos \alpha, \sin \alpha\}$ — произвольный единичный вектор. Точки вида $(x_0 + t \cos \alpha, y_0 + t \sin \alpha)$ ($t > 0$) образуют луч, выходящий из точки (x_0, y_0) в направлении вектора $\mathbf{e}$. Предел $\lim_{t \rightarrow 0} f(x_0 + t \cos \alpha, y_0 + t \sin \alpha)$ называется *пределом функции по направлению $\mathbf{e}$* .

Для того чтобы функция имела предел в точке (x_0, y_0) , необходимо (но не достаточно), чтобы совпадали пределы по всем направлениям.



ПРИМЕР 10.3. Показать, что предел $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{xy}{x^2 + y^2}$ не существует.

► Пусть точка $M(x, y)$ стремится к точке $O(0, 0)$ по прямой $y = kx$, проходящей через точку O . Тогда

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0 \\ y = kx}} \frac{xy}{x^2 + y^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{kx^2}{x^2 + k^2 x^2} = \frac{k}{1 + k^2}.$$

Таким образом, пределы по различным направлениям, соответствующим разным значениям k , не равны между собой. Значит, предел функции в точке $O(0, 0)$ не существует. ◀

10.23. Показать, что предел $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x - y}{x + y}$ не существует.

10.24. Показать, что предел $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ не существует.

10.25. Показать, что функция $f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$ имеет

равные пределы по направлениям при $(x, y) \rightarrow (0, 0)$, но не имеет предела в точке $O(0, 0)$.

10.26. Выяснить, имеет ли функция $f(x, y) = \frac{x^2 + y^4}{x^4 + y^2}$

предел при $x \rightarrow \infty, y \rightarrow \infty$.



Функция $u = f(M)$ называется *непрерывной в точке M_0* , если она определена в этой точке и $\lim_{M \rightarrow M_0} f(M) = f(M_0)$.

Свойства непрерывных функций многих переменных аналогичны свойствам непрерывных функций одной переменной. *Точками разрыва* функции называются точки области определения функции, в которых она не является непрерывной, а также точки *границы* области определения. Точки разрыва функции могут образовывать *линии разрыва*.



ПРИМЕР 10.4. Найти точки разрыва функции

$$u = \frac{x - y}{x^3 - y^3}.$$

- Функция не определена в точках, где знаменатель обращается в ноль, т.е. на прямой $y = x$. В остальных точках плоскости функция определена и представляет собой частное двух непрерывных функций, причем знаменатель отличен от 0. Поэтому во всех точках, не принадлежащих прямой $y = x$ функция является непрерывной. В любой окрестности произвольной точки прямой найдутся точки области определения функции. Следовательно, множеством точек разрыва функции является прямая $y = x$. ◀

Найти точки разрыва функций двух переменных.

10.27. $z = \frac{1}{(x-1)^2 + (y+1)^2}$. **10.28.** $z = \frac{1}{\sin^2 \pi x + \sin^2 \pi y}$.

10.29. $z = \frac{1}{\sin x + \sin y}$. **10.30.** $z = \frac{x^2 + y^2}{(x+y)(y^2 - x)}$.

10.31. $z = \frac{1}{(x^2 + y^2 - 1)(x^2 - y^2 - 1)}$. **10.32.** $z = \frac{1}{\ln xy}$.

Найти точки разрыва функций трех переменных.

10.33. $u = \frac{1}{xyz}$. **10.34.** $u = \frac{1}{x^2 + y^2 - z^2}$.

$$10.35. u = \frac{1}{x^2 + y^2 - z^2 - 1}. \quad 10.36. u = \frac{1}{\ln(x^2 + y^2 - z^2)}.$$

3. Частные производные. Пусть $M(x_1, x_2, \dots, x_n)$ — произвольная фиксированная точка области определения D функции $u = f(x_1, \dots, x_n)$. Рассмотрим *частное приращение* функции в точке M , соответствующее приращению Δ_{x_k} аргумента x_k

$$\Delta_{x_k} u = f(x_1, \dots, x_{k-1}, x_k + \Delta x_k, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_n).$$

Частной производной 1-го порядка функции

$$u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

по аргументу x_k в точке M называется

$$\lim_{\Delta x_k \rightarrow 0} \frac{\Delta_{x_k} u}{\Delta x_k} = \lim_{\Delta x_k \rightarrow 0} \frac{f(x_1, \dots, x_{k-1}, x_k + \Delta x_k, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_n)}{\Delta x_k}$$

Частная производная обозначается любым из символов:

$$\frac{\partial u}{\partial x_k}, f'_{x_k}(x_1, x_2, \dots, x_n), \left. \frac{\partial u}{\partial x_k} \right|_M.$$

Частные производные вычисляются по обычным правилам дифференцирования. При этом все переменные, кроме x_k , рассматриваются как постоянные.

ПРИМЕР 10.5. Найти частные производные функции

$$u = x^y \quad (x > 0).$$

- При вычислении частной производной по аргументу x рассматриваем функцию как функцию одной переменной x , а переменная y считается фиксированной. При фиксированном y функция — степенная, поэтому $\frac{\partial u}{\partial x} = yx^{y-1}$.

При вычислении производной по y функцию рассматриваем как функцию одной переменной y , а переменная x считается константой, тогда функция — показательная и

$$\text{ее частная производная по } y \text{ равна } \frac{\partial u}{\partial y} = x^y \ln x. \quad \blacktriangleleft$$



Частными производными 2-го порядка функции $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ называются частные производные от

ее первых производных. Производные второго порядка обозначаются

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial u}{\partial x_k} \right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} = f''_{x_k x_k}(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

$$\frac{\partial}{\partial x_l} \left(\frac{\partial u}{\partial x_k} \right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_l} = f''_{x_k x_l}(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Аналогичным образом определяются и обозначаются частные производные порядка выше второго.

Результат многократного дифференцирования функции по различным переменным не зависит от очередности дифференцирования при условии, что возникающие при этом частные производные непрерывны.

ПРИМЕР 10.6. Найти частные производные второго порядка функции $u = x^y$.

► Частные производные первого порядка равны (см. пример 10.5)

$$\frac{\partial u}{\partial x} = yx^{y-1}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = x^y \ln x.$$

Дифференцируем вторично

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} (yx^{y-1}) = y(y-1)x^{y-2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} (yx^{y-1}) = x^{y-1} + yx^{y-1} \ln x = x^{y-1}(1 + y \ln x),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} (x^y \ln x) = yx^{y-1} \ln x + x^y \frac{1}{x} = x^{y-1}(1 + y \ln x),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} (x^y \ln x) = x^y (\ln x)^2.$$

Следовательно, $\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$.

Найти частные производные 1-го и 2-го порядков для функций.

10.37. $z = x^5 + y^5 - 5x^3y^3$. **10.38.** $z = xy + \frac{y}{x}$.

$$10.39. z = \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

$$10.40. z = xe^{-xy}.$$

$$10.41. z = \frac{\cos y^2}{x}.$$

$$10.42. z = y^x.$$

$$10.43. z = \ln(x^2 + y^2).$$

$$10.44. z = \arcsin \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

$$10.45. u = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

$$10.46. u = \left(\frac{y}{x}\right)^z.$$

10.47. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix},$$

если $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$.

10.48. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \end{vmatrix},$$

если $x = r \cos \theta \cos \varphi$, $y = r \cos \theta \sin \varphi$, $z = r \sin \theta$.

10.49. Показать, что $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial t} = 0$, если $u = \frac{x-y}{z-t} + \frac{t-x}{y-z}$.

10.50. Показать, что функция $u = a \sin \lambda x \cos a \lambda t$ удовлетворяет уравнению колебания струны

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

10.51. Показать, что функция $u = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4a^2t}}$ удовлетворяет уравнению теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

10.52. Показать, что функция

$$u = \frac{1}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}}$$

удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$$

4. Дифференциал функции и его применение. Пусть $M(x_1, x_2, \dots, x_n)$ — произвольная фиксированная точка области определения функции $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Полным приращением функции в точке M , соответствующим приращению аргументов $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n$, называется разность

$$\Delta u = f(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, \dots, x_n + \Delta x_n) - f(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Функция $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ называется дифференцируемой в точке $M(x_1, x_2, \dots, x_n)$, если всюду в некоторой окрестности этой точки приращение функции представимо в виде

$$\Delta u = A_1 \Delta x_1 + A_2 \Delta x_2 + \dots + A_n \Delta x_n + o(\rho),$$

где $\rho = \sqrt{\Delta x_1^2 + \Delta x_2^2 + \dots + \Delta x_n^2}$ и $A_1, A_1, \dots, A_n$ — числа, не зависящие от приращений аргументов $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n$.

Дифференциалом 1-го порядка du функции $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ в точке $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ называется главная часть полного приращения этой функции в рассматриваемой точке, линейная относительно $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n$, т.е.

$$du = A_1 \Delta x_1 + A_2 \Delta x_2 + \dots + A_n \Delta x_n.$$

Дифференциалы независимых переменных равны их приращениям

$$dx_1 = \Delta x_1, \quad dx_2 = \Delta x_2, \quad \dots, \quad dx_n = \Delta x_n.$$

Если функция $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ дифференцируема в точке $M(x_1, x_2, \dots, x_n)$, то у нее существуют частные производные в этой точке и выполняется равенство

$$du = \frac{\partial u}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial u}{\partial x_n} dx_n.$$

Если u и v — дифференцируемые функции нескольких переменных, то выполняются обычные правила дифференцирования

$$d(u + v) = du + dv,$$

$$d(uv) = vdu + u dv,$$

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - u dv}{v^2} \quad (v \neq 0).$$

ПРИМЕР 10.7. Найти дифференциал функции $u = x^2 y^3$ в точках $M(x, y)$ и $M_0(2, 1)$.

► Вычислим частные производные

$$u'_x = 2xy^3; \quad u'_y = 3x^2 y^2.$$

Следовательно,

$$du|_M = 2xy^3 dx + 3x^2 y^2 dy.$$

Значения частных производных в точке $M_0(2, 1)$ равны:

$$u'_x(M_0) = 4, \quad u'_y(M_0) = 12. \quad \text{Следовательно, } du|_{M_0} = 4dx + 12dy.$$

Найти дифференциалы функций.

$$10.53. \quad z = \ln\left(y + \sqrt{x^2 + y^2}\right). \quad 10.54. \quad z = \operatorname{tg} \frac{y^2}{x}.$$

$$10.55. \quad z = \ln \cos \frac{x}{y}. \quad 10.56. \quad u = (xy)^z.$$

Дифференциалом 2-го порядка $d^2 u$ функции $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ называется дифференциал от ее дифферен-

циала 1-го порядка, рассматриваемого как функция переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$ при фиксированных значениях $dx_1, dx_2, \dots, dx_n$

$$d^2u = d(du).$$

Дифференциал 2-го порядка независимой переменной равен 0. Аналогично определяется дифференциал 3-го порядка

$$d^3u = d(d^2u).$$

Вообще,

$$d^m u = d(d^{m-1}u).$$

Дифференциал m -го порядка функции $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, где $x_1, x_2, \dots, x_n$ — независимые переменные, выражается символической формулой

$$d^m u = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n} dx_n \right)^m u,$$

которая формально раскрывается по биномиальной формуле.

В случае функции $u = f(x, y)$ двух независимых переменных x и y для дифференциалов 2-го и 3-го порядков справедливы формулы

$$d^2u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dy^2,$$

$$d^3u = \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} dx^3 + 3 \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} dx^2 dy + 3 \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} dx dy^2 + \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} dy^3.$$

ПРИМЕР 10.8. Найти дифференциал 2-го порядка функции $u = x^2 y^3$.

► Дифференциал первого порядка равен (см. пример 10.6)

$$du = 2xy^3 dx + 3x^2 y^2 dy.$$

Находим второй дифференциал по правилам дифференцирования, учитывая, что $d^2x = d^2y = 0$:

$$d^2u = d(2xy^3 dx + 3x^2 y^2 dy) =$$

$$\begin{aligned}
 &= 2y^3 dx dx + 2x d(y^3) dx + 3y^2 d(x^2) dy + 3x^2 d(y^2) dy = \\
 &= 2y^3 dx^2 + 12xy^2 dx dy + 6x^2 y dy^2. \quad \blacktriangleleft
 \end{aligned}$$

Найти дифференциалы 1-го и 2-го порядков функций.

10.57. $z = x^3 + 3x^2 y - y^3$. **10.58.** $z = \frac{x}{y} - \frac{y}{x}$.

10.59. $z = (x + y)e^{xy}$. **10.60.** $z = x \ln \frac{y}{x}$.

10.61. $u = xy + yz + zx$. **10.62.** $u = e^{xyz}$.

10.63. Найти $d^3 z$, если $z = e^y \sin x$.

10.64. Найти $d^3 u$, если $u = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$.

10.65. Найти $d^6 u$, если $u = \ln(x + y + z)$.

10.66. Найти $d^6 u$, если $u = e^{ax+by+cz}$.



При достаточно малом $\rho = \sqrt{\Delta x_1^2 + \Delta x_2^2 + \dots + \Delta x_n^2}$ для дифференцируемой функции $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ имеют место приближенные равенства

$$\begin{aligned}
 \Delta u &\approx du, \\
 f(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, \dots, x_n + \Delta x_n) &= \\
 &= f(x_1, x_2, \dots, x_n) + df(x_1, x_2, \dots, x_n).
 \end{aligned}$$



ПРИМЕР 10.9. Вычислить приближенно

$$\sqrt{(4,05)^2 + (3,07)^2}.$$

► Рассмотрим искомое число как значение функции $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ при $x = x_0 + \Delta x$, $y = y_0 + \Delta y$, где $x_0 = 4$, $y_0 = 3$, $\Delta x = 0,05$, $\Delta y = 0,07$. Тогда

$$\begin{aligned}
 \sqrt{(4,05)^2 + (3,07)^2} &= f(4,05, 3,07) = \\
 &= f(4, 3) + \Delta f(4, 3) = 5 + \Delta f(4, 3).
 \end{aligned}$$

Приращение функции приблизительно равно дифференциалу

$$\Delta f(x, y) \approx df(x, y) = \frac{xdx + ydy}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Значение дифференциала в точке $(4, 3)$ при приращении аргументов $\Delta x = 0,05$, $\Delta y = 0,07$ равно

$$df(4, 3) = \frac{4 \cdot 0,05 + 3 \cdot 0,07}{5} = 0,082.$$

Следовательно,

$$\sqrt{(4,05)^2 + (3,07)^2} \approx f(4, 3) + df(4, 3) = 5,082. \quad \blacktriangleleft$$

Вычислить приближенно.

10.67. $(2,01)^{3,03}$.

10.68. $\sqrt{(1,02)^3 + (1,97)^3}$.

10.69. Цилиндрический стакан имеет внутренние размеры: радиус основания $R = 2,5$ м, высоту $H = 2$ м и толщину стенок $l = 1$ дм. Найти приближенное значение объема материала, затраченного на изготовление стакана.

10.70. Прямоугольный параллелепипед имеет измерения: $a = 2$ м, $b = 3$ м, $c = 6$ м. Найти приближенное изменение диагонали параллелепипеда, если a увеличить на 2 см, b — на 1 см, а c уменьшить на 3 см.

10.2. Дифференцирование сложных и неявных функций

1. Сложные функции одной и нескольких независимых переменных. Пусть $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ — дифференцируемая функция переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$, которые сами являются дифференцируемыми функциями независимой переменной t :

$$x_1 = \varphi_1(t), \quad x_2 = \varphi_2(t), \quad \dots, \quad x_n = \varphi_n(t).$$

Тогда производная сложной функции

$$u(t) = f(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t))$$

вычисляется по формуле

$$u'(t) = \frac{du}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \frac{dx_2}{dt} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \frac{dx_n}{dt}.$$

ПРИМЕР 10.10. Найти $\frac{du}{dt}$, если $u = xyz$, где $x = t^2 + 1$, $y = \ln t$, $z = \operatorname{tg} t$.

► Производная сложной функции равна

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{dz}{dt}.$$

Так как

$$\frac{\partial u}{\partial x} = yz, \quad \frac{dx}{dt} = 2t,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = xz, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{1}{t},$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = xy, \quad \frac{dz}{dt} = \frac{1}{\cos^2 t},$$

то получаем

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= yz \cdot 2t + xz \frac{1}{t} + xy \frac{1}{\cos^2 t} = \\ &= 2t \ln t \operatorname{tg} t + \frac{(t^2 + 1) \operatorname{tg} t}{t} + \frac{(t^2 + 1) \ln t}{\cos^2 t}. \end{aligned}$$

10.71. Найти $\frac{dz}{dt}$, если $z = e^{2x-3y}$, где $x = \operatorname{tg} t$, $y = t^2 - 1$.

10.72. Найти $\frac{dz}{dt}$, если $z = x^y$, где $x = \ln t$, $y = \sin t$.

10.73. Найти $\frac{dz}{dt}$, если $z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$, где $x = e^{2t} + 1$, $y = e^{2t} - 1$.

10.74. Найти $\frac{du}{dt}$, если $u = \frac{yz}{x}$, где $x = e^t$, $y = \ln t$, $z = t^2 + 1$.

10.75. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{dz}{dx}$, если $z = \ln(e^x + e^y)$, где $y = \frac{x^3}{3} + x$.

10.76. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{dz}{dx}$, если $z = \operatorname{arctg} \frac{x+1}{y}$, где $y = e^{(x+1)^2}$.



Пусть $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ — дифференцируемая функция переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$, которые сами являются дифференцируемыми функциями независимых переменных $t_1, t_2, \dots, t_m$:

$$x_1 = \Phi_1(t_1, t_2, \dots, t_m), \quad x_2 = \Phi_2(t_1, t_2, \dots, t_m), \dots$$

$$x_n = \Phi_n(t_1, t_2, \dots, t_m).$$

Тогда частные производные сложной функции

$$u(t_1, t_2, \dots, t_m) = f(\varphi_1(t_1, t_2, \dots, t_m), \varphi_2(t_1, t_2, \dots, t_m), \dots, \varphi_n(t_1, t_2, \dots, t_m))$$

вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t_1} &= \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dt_1} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \frac{dx_2}{dt_1} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \frac{dx_n}{dt_1}, \\ \frac{\partial u}{\partial t_2} &= \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dt_2} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \frac{dx_2}{dt_2} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \frac{dx_n}{dt_2}, \\ &\dots\dots\dots \\ \frac{\partial u}{\partial t_m} &= \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dt_m} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \frac{dx_2}{dt_m} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \frac{dx_n}{dt_m}. \end{aligned}$$

При этом выражение для первого дифференциала сохраняет свой вид (*свойство инвариантности формы первого дифференциала*)

$$du = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n.$$

ПРИМЕР 10.11. Найти dz , если $z = u^2 v$, $u = \frac{x^2 - y^2}{2}$,

$$v = xy.$$

► Имеем $dz = z'_u du + z'_v dv = 2uv du + u^2 dv$, где $du = xdx - ydy$, $dv = ydx + xdy$. Следовательно, $dz = 2uv(xdx - ydy) + u^2_v d(ydx + xdy) = (2uvx + u^2 y)dx + (u^2 x - 2uvy)dy$. ◀

10.77. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, если $z = u^2 \ln v$, где $u = \frac{y}{x}$, $v = x^2 + y^2$.

10.78. Найти dz , если $z = u^2 v - v^2 u$, где $u = x \sin y$, $v = y \cos x$.

10.79. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, если $z = f(u, v)$, где $u = \frac{2y}{x+y}$,

$$v = x^2 - 3y.$$

10.80. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, если $z = f(u, v)$, где $u = \ln(x^2 - y^2)$,

$$v = xy^2.$$

10.81. Найти d^2u , если $u = f(t)$, где $t = x^2 + y^2 + z^2$.

10.82. Найти d^2z , если $z = f(u, v)$, где $u = x \sin y, v = y \cos x$.

2. Неявные функции нескольких независимых переменных. Пусть уравнение $F(x_1, x_2, \dots, x_n, u) = 0$ где F — дифференцируемая функция переменных $x_1, x_2, \dots, x_n, u$, определяет u как функцию независимых переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$. Частные производные этой *неявной функции* $u = u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ в точке $M^0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ вычисляются по формулам

$$u'_{x_k}(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0, u^0) = \frac{F'_{x_k}(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0, u^0)}{F'_u(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0, u^0)} \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

при условии, что $F'_u(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0, u^0) \neq 0$, где $u^0 = f(M^0)$ и $F(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0, u^0) = 0$.

ПРИМЕР 10.12. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, если

$$x^3 + 2y^3 + z^3 - 3xyz - 2y + 3 = 0.$$

► Обозначим левую часть данного уравнения через $F(x, y, z)$ и найдем частные производные этой функции

$$F'_x(x, y, z) = 3x^2 - 3yz,$$

$$F'_y(x, y, z) = 6x^2 - 3xz - 2,$$

$$F'_z(x, y, z) = 3z^2 - 3yx.$$

Частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ равны

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)} = -\frac{3x^2 - 3yz}{3z^2 - 3yx} = \frac{x^2 - yz}{yx - z^2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)} = -\frac{6y^2 - 3xz - 2}{3z^2 - 3yx} = \frac{6y^2 - 3xz - 2}{3(yx - z^2)}.$$

10.83. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ в точке $M^0(1, -2, 2)$, если

$$z^3 - 4xy + y^2 - 4 = 0.$$

10.84. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, если $z \ln(x+z) - \frac{xy}{z} = 0$.

10.85. Найти dz , если $yz = \operatorname{arctg} xz$.

10.86. Найти dz , если $xz - e^{yz} + x^3 + y^3 = 0$.

10.87. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, если $x^2 - y^2 + z^2 - 4x + 2z - 5 = 0$.

10.88. Найти $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, если $x + y + z = e^z$.

3. Системы неявных и параметрически заданных функций. Ограничимся рассмотрением функций двух независимых переменных. Пусть система двух уравнений

$$F(x, y, u, v) = 0,$$

$$G(x, y, u, v) = 0$$

имеет решение $x = x_0$, $y = y_0$, $u = u_0$, $v = v_0$, причем функции F и G имеют в окрестности точки $P_0(x_0, y_0, u_0, v_0)$ непрерывные частные производные первого порядка и якобиан

$$\frac{D(F, G)}{D(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial u} & \frac{\partial F}{\partial v} \\ \frac{\partial G}{\partial u} & \frac{\partial G}{\partial v} \end{vmatrix}$$

отличен от 0 в точке P_0 . Тогда в некоторой окрестности точки P_0 данная система уравнений определяет единственную пару непрерывных функций $u(x, y)$, $v(x, y)$, имеющих непрерывные частные производные и удовлетворяющих условиям

$$u(x_0, y_0) = u_0, \quad v(x_0, y_0) = v_0.$$

Дифференциалы этих функций du и dv (а значит, и частные производные) можно найти из системы уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy + \frac{\partial F}{\partial u} du + \frac{\partial F}{\partial v} dv &= 0, \\ \frac{\partial G}{\partial x} dx + \frac{\partial G}{\partial y} dy + \frac{\partial G}{\partial u} du + \frac{\partial G}{\partial v} dv &= 0, \end{aligned}$$

которая получена дифференцированием исходной системы.



ПРИМЕР 10.13. Функции u и v независимых переменных x и y заданы неявно системой уравнений $u + v = x$, $u - yv = 0$. Найти du , dv , d^2u , d^2v .

► Якобиан системы $\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial u} & \frac{\partial F}{\partial v} \\ \frac{\partial G}{\partial u} & \frac{\partial G}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -y \end{vmatrix} = -y - 1$ отличен от 0

при $y \neq -1$. Дифференцированием исходных уравнений находим два уравнения, связывающие дифференциалы всех четырех переменных,

$$du + dv = dx, \quad du - ydv - vdy = 0.$$

Решая эту систему относительно du и dv при $y \neq -1$, получим

$$du = \frac{ydx + vdy}{1 + y}, \quad dv = \frac{dx - vdy}{1 + y}.$$

Для нахождения d^2u и d^2v продифференцируем уравнения еще раз:

$$d^2u + d^2v = 0, \quad d^2u - dydv - yd^2v - vdvdy = 0.$$

Решая эту систему относительно d^2u и d^2v при $y \neq -1$, получим

$$d^2u = \frac{2dvdy}{1 + y} = \frac{2(dx dy - v dy^2)}{(1 + y)^2},$$

$$d^2v = -d^2u = -\frac{2(dx dy - v dy^2)}{(1 + y)^2}. \quad \blacktriangleleft$$

10.89. Функции y и z независимой переменной x заданы системой уравнений

$$7x^2 + y^2 - 3z^2 = -1, \quad 4x^2 + 2y^2 - 3z^2 = 0.$$

Найти $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^2z}{dx^2}$ при $x = 1$, $y = -2$, $z = 2$.

10.90. Функции y и z независимой переменной x заданы системой уравнений

$$x^2 + y^2 - z^2 = 0, \quad x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1.$$

Найти dy , dz , d^2y , d^2z .

10.91. Функции u и v независимых переменных x и y заданы системой уравнений

$$xu + yv = 1, \quad x + y + u + v = 0.$$

Найти du , dv , d^2u , d^2v .

10.92. Функции u и v независимых переменных x , y и z заданы системой уравнений

$$uv = 3x - 2y + z, \quad v^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

Показать, что $x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} + z \frac{\partial u}{\partial z} = 0$.



Пусть функция z независимых переменных x и y задана параметрически уравнениями $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$ и

$$\frac{D(x, y)}{D(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0$$

в окрестности точки $P(u_0, v_0)$. Тогда дифференциал dz этой функции (а значит, и ее частные производные) можно найти из системы уравнений

$$\begin{aligned} dx &= \frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv, \\ dy &= \frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv = 0, \\ dz &= \frac{\partial z}{\partial u} du + \frac{\partial z}{\partial v} dv = 0, \end{aligned}$$

которая получена дифференцированием исходных параметрических уравнений.



ПРИМЕР 10.14. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, если

$$x = u \cos v, \quad y = u \sin v, \quad z = v^2.$$

► Имейм

$$\frac{D(x, y)}{D(u, v)} = \begin{vmatrix} \cos v & -u \sin v \\ \sin v & u \cos v \end{vmatrix} = u \neq 0 \text{ при } u \neq 0.$$

Дифференцированием находим три уравнения, связывающие дифференциалы всех пяти переменных,

$$x = \cos v du - u \sin v dv, \quad dy = \sin v du + u \cos v dv, \quad dz = 2v dv.$$

Из первых двух уравнений найдем $dv = \frac{\cos v dy - \sin v dx}{u}$;

подставив его в dz , получим $dv = \frac{2v(\cos v dy - \sin v dx)}{u}$.

Так как, с другой стороны, $dv = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$, то

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{2v \sin v}{u}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2v \cos v}{u}. \quad \blacktriangleleft$$

10.93. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, если $x = u + v$, $y = u - v$, $z = u^2 + v^2$.

10.94. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, если $x = \cos u \operatorname{ch} v$, $y = \sin u \operatorname{ch} v$,

$z = \operatorname{sh} v$.

10.95. Найти dz , если $x = e^u \cos v$, $y = e^u \sin v$, $z = uv$.

10.96. Найти dz , если $x = u + v$, $y = u^2 + v^2$, $z = u^3 + v^3$.

10.3. Приложения частных производных

1. Формула Тейлора. Если функция $f(P)$ дифференцируема $m+1$ раз в окрестности $U(P_0)$ точки $P_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$, то для всякой точки $P(x_1, x_2, \dots, x_n) \in U(P_0)$ справедлива формула Тейлора

$$f(P) = f(P_0) + \frac{df(P_0, \Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n)}{1!} + \\ + \frac{d^2 f(P_0, \Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n)}{2!} + \dots + \frac{d^m f(P_0, \Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n)}{m!} +$$

$$+ \frac{d^{m+1} f(\tilde{P}, \Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n)}{(m+1)!}, \quad (10.1)$$

где $\Delta x_1 = x_1 - x_1^0$, $\Delta x_2 = x_2 - x_2^0$, ..., $\Delta x_n = x_n - x_n^0$, а $\tilde{P}$ – некоторая точка указанной окрестности.

В случае, например, функции $f(x, y)$ двух переменных x и y формула (10.1) записывается

$$\begin{aligned} f(x, y) = & f(x_0, y_0) + \frac{1}{1!} \left(f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0) \right) + \\ & + \frac{1}{2!} \left(f''_{xx}(x_0, y_0)(x - x_0)^2 + 2f''_{xy}(x - x_0)(y - y_0) + f''_{yy}(x_0, y_0)(y - y_0)^2 \right) + \\ & + \dots + \frac{1}{m!} \left((x - x_0) \frac{\partial}{\partial x} + (y - y_0) \frac{\partial}{\partial y} \right)^m f(x_0, y_0) + \\ & + \frac{1}{(m+1)!} \left((x - x_0) \frac{\partial}{\partial x} + (y - y_0) \frac{\partial}{\partial y} \right)^{m+1} \times \\ & \times f(x_0 + \theta_1(x - x_0), y_0 + \theta_2(y - y_0)), \quad (10.2) \\ & 0 < \theta_1, \theta_2 < 1. \end{aligned}$$

Последнее слагаемое (*остаточный член*) в формуле (10.2) можно также записать в виде $o(\rho^m)$, где $\rho = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$ (*форма Пеано*).

В частном случае при $x_0 = y_0 = 0$ формула (10.2) называется *формулой Маклорена*.

ПРИМЕР 10.15. Функцию $f(x, y) = e^{\frac{x}{y}}$ разложить по формуле Тейлора в окрестности точки $M_0(0, 1)$ до членов второго порядка включительно.

► Найдем частные производные до второго порядка:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^{\frac{x}{y}} \frac{1}{y}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = e^{\frac{x}{y}} \left(-\frac{x}{y^2} \right),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = e^{\frac{x}{y}} \frac{1}{y^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = e^{\frac{x}{y}} \left(-\frac{x}{y^3} \right) + e^{\frac{x}{y}} \left(-\frac{1}{y^2} \right),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = e^{\frac{x}{y}} \frac{x^2}{y^4} + e^{\frac{x}{y}} \frac{2x}{y^3}.$$

В точке $M_0(0, 1)$ имеем

$$f(M_0) = 1, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(M_0) = 1, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(M_0) = 0,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(M_0) = 1, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(M_0) = -1, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(M_0) = 0.$$

Разложение функции в окрестности точки $M_0(0, 1)$, следовательно, имеет вид

$$e^{\frac{x}{y}} = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 - x(y-1) + o(x^2 + (y-1)^2). \quad \blacktriangleleft$$

10.97. Функцию $f(x, y) = x^3 - 2y^3 + 3xy$ разложить по формуле Тейлора в окрестности точки $M_0(2, 1)$.

10.98. Функцию $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2(xy + xz + yz)$ разложить по формуле Тейлора в окрестности точки $M_0(1, -1, 2)$.

10.99. Разложить по формуле Маклорена до членов 3-го порядка включительно функцию $f(x, y) = e^y \cos x$.

10.100. Разложить по формуле Маклорена до членов 4-го порядка включительно функцию $f(x, y) = \sin x \operatorname{ch} y$.

10.101. Разложить по формуле Тейлора в окрестности точки $M_0(1, 1)$ до членов 3-го порядка включительно функцию $f(x, y) = y/x$.

10.102. Разложить по формуле Тейлора в окрестности точки $M_0(1, 1, 0)$ до членов 3-го порядка включительно функцию $f(x, y, z) = \ln(xy + z^2)$.

2. Экстремум функции. Функция $f(P)$ имеет *максимум* (*минимум*) в точке $P_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$, если существует такая окрестность точки P_0 , что для всех точек $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ которой выполняется неравенство $f(P_0) \geq f(P)$ ($f(P_0) \leq f(P)$). Максимум или минимум функции называется ее *экстремумом*.

Если дифференцируемая функция $f(P)$ достигает экстремума в точке P_0 , то в этой точке все частные производные равны 0 (*необходимое условие экстремума*)

$$f'_{x_k}(P_0) = 0 \text{ для всех } k = 1, 2, \dots, n, \quad (10.3)$$

или $df(P_0, \Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n) = 0$ при всех значениях приращений $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n$.

Точки, в которых выполняется условие (10.3), называются *стационарными* точками функции $f(P)$. Если P_0 — точка экстремума функции $f(P)$, то P_0 — стационарная точка либо в этой точке функция не дифференцируема.

В случае функции двух переменных *достаточное условие* экстремума формулируется следующим образом. Пусть $P_0(x_0, y_0)$ — стационарная точка функции $f(x, y)$, причем эта функция дважды дифференцируема в некоторой окрестности точки P_0 и все ее вторые частные производные непрерывны в точке P_0 . Введем обозначения

$$A = f''_{xx}(x_0, y_0), \quad B = f''_{xy}(x_0, y_0), \quad C = f''_{yy}(x_0, y_0)$$

и

$$D = AC - B^2.$$

Тогда:

1) если $D > 0$, то функция $f(P)$ имеет в точке $P_0(x_0, y_0)$ экстремум, а именно максимум при $A < 0$ ($C < 0$) и минимум при $A > 0$ ($C > 0$);

2) если $D < 0$, то точка $P_0(x_0, y_0)$ не является точкой экстремума;

3) если $D = 0$, то требуется дополнительное исследование.



ПРИМЕР 10.16. Исследовать на экстремум функцию $u = 3x^2y - x^3 - y^4$.

► Вычислим частные производные первого порядка

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 6xy - 3x^2, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 3x^2 - 4y^3$$

и приравняем их к нулю

$$\begin{cases} 6xy - 3x^2 = 0; \\ 3x^2 - 4y^3 = 0. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим две стационарные точки $P_1(0, 0)$ и $P_2(6, 3)$.

Проверим выполнение достаточного условия. Для этого вычислим частные производные второго порядка

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 6y - 6x; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 6x; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -12y^2.$$

Найдем значения вторых производных в найденных ранее точках возможного экстремума.

В точке $P_1(0, 0)$ имеем: $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$. Поэтому $D = AC - B^2 = 0$. Точка $P_1(0, 0)$ требует дополнительного исследования. Значение функции в этой точке равно нулю, $u(0, 0) = 0$. При $x < 0$, $y = 0$ имеем $u(x, y) = -x^3 > 0$, а при $x = 0$, $y \neq 0$ имеем $u(x, y) = -y^4 < 0$. Следовательно, в любой окрестности точки $P_1(0, 0)$ функция принимает значения как большие $u(0, 0)$, так и меньшие $u(0, 0)$. Значит, в точке $P_1(0, 0)$ функция не имеет локального экстремума.

В точке $P_2(6, 3)$ имеем: $A = -18$, $B = 36$, $C = -108$, $D = AC - B^2 = 648 > 0$, следовательно, функция достигает экстремума. Так как $A = -18 < 0$, то в точке $P_2(6, 3)$ функция имеет локальный максимум. ◀

Найти экстремумы функций двух переменных.

10.103. $z = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y$.

10.104. $z = xy^2(1 - x - y)$ ($x > 0$, $y > 0$).

10.105. $z = 3x^2 - x^3 + 3y^2 + 4y$.

10.106. $z = xy + \frac{50}{x} + \frac{20}{y}$ ($x > 0$, $y > 0$).

10.107. $z = x^2 + y^2 - 2 \ln x - 18 \ln y$.

10.108. $z = (2x^2 + y^2)e^{-(2x^2 + y^2)}$.

3. Условный экстремум. Функция $f(P) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ имеет *условный максимум (минимум)* в точке $P_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ при условиях

$$\varphi_k(P) = \varphi_k(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, m; m < n), \quad (10.4)$$

если существует такая окрестность точки P_0 , для всех точек $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ которой, удовлетворяющих *уравнениям связи* (10.4), выполняется неравенство $f(P_0) \geq f(P)$ ($f(P_0) \leq f(P)$).

Задача нахождения условного экстремума сводится к исследованию на обычный экстремум *функции Лагранжа*

$$\begin{aligned} L(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) = \\ = f(x_1, x_2, \dots, x_n) + \sum_{k=1}^m \lambda_k \varphi_k(x_1, x_2, \dots, x_n), \end{aligned}$$

где числа λ_k ($k = 1, 2, \dots, m$) называются *множителями Лагранжа*.

Необходимые условия условного экстремума выражаются системой $n + m$ уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial L(P)}{\partial x_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n), \\ \varphi_k(P) = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, m), \end{aligned} \quad (10.5)$$

из которой могут быть найдены неизвестные $x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0, \lambda_1^0, \lambda_2^0, \dots, \lambda_m^0$, где $x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0$ — координаты точки, в которой возможен условный экстремум.

Достаточные условия условного экстремума связаны с изучением знака 2-го дифференциала функции Лагранжа

$$d^2 L(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0, \lambda_1^0, \lambda_2^0, \dots, \lambda_m^0, dx_1, dx_2, \dots, dx_n)$$

для каждой системы значений $x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0, \lambda_1^0, \lambda_2^0, \dots, \lambda_m^0$, полученных из (10.4) при условии, что $dx_1, dx_2, \dots, dx_n$ удовлетворяют уравнениям

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_j} \bigg|_{(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)} \cdot dx_j = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, m) \quad (10.6)$$

где $dx_1, dx_2, \dots, dx_n$, не равных нулю одновременно.

А именно функция $f(P)$ имеет условный максимум в точке $P_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$, если для всевозможных значений $dx_1, dx_2, \dots, dx_n$, удовлетворяющих условиям (10.5) и не равных нулю одновременно, выполняется неравенство

$$d^2 L(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0, \lambda_1^0, \lambda_2^0, \dots, \lambda_m^0, dx_1, dx_2, \dots, dx_n) < 0,$$

и условный минимум, если при этих условиях

$$d^2 L(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0, \lambda_1^0, \lambda_2^0, \dots, \lambda_m^0, dx_1, dx_2, \dots, dx_n) > 0.$$



ПРИМЕР 10.17. Найти условный экстремум функции $z = x + 2y$ при $x^2 + y^2 = 5$.

► Составим функцию Лагранжа

$$L(x, y, \lambda) = x + 2y + \lambda(x^2 + y^2)$$

и найдем ее частные производные по x и y

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 1 + 2\lambda x, \quad \frac{\partial L}{\partial y} = 2 + 2\lambda y.$$

Система уравнений (10.5) примет вид

$$\begin{cases} 1 + 2\lambda x = 0, \\ 2 + 2\lambda y = 0, \\ x^2 + y^2 = 5. \end{cases}$$

Система имеет два решения: $x_1 = -1$, $y_1 = -2$, $\lambda_1 = \frac{1}{2}$ и

$$x_2 = 1, \quad y_2 = 2, \quad \lambda_2 = -\frac{1}{2}.$$

Проверим выполнение достаточного условия в точках

$$P_1(-1, -2) \text{ и } P_2(1, 2). \text{ Так как } \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} = 2\lambda, \quad \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} = 0,$$

то $d^2L = 2\lambda(d^2x + d^2y)$.

В точке $P_1(-1, -2)$ имеем $\lambda_1 = \frac{1}{2}$ и $d^2L > 0$, поэтому в ней функция имеет условный минимум. В точке $P_2(1, 2)$ имеем $\lambda_1 = -\frac{1}{2}$ и $d^2L < 0$, поэтому в ней функция имеет условный максимум. ◀

Найти условные экстремумы функций.

10.109. $z = x^2 + y^2 - xy + x + y - 4$ при $x + y + 3 = 0$.

10.110. $z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ при $x + y = 2$.

10.111. $z = \frac{x - y - 4}{\sqrt{2}}$ при $x^2 + y^2 = 1$.

10.112. $z = 2x + y$ при $x^2 + y^2 = 1$.

$$10.113. u = 2x + y - 2z \text{ при } x^2 + y^2 + z^2 = 36.$$

$$10.114. u = x^2 + y^2 + z^2 \text{ при } \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1.$$

4. Наибольшее и наименьшее значения функции. Если функция $f(P)$ дифференцируема в замкнутой ограниченной области, то она достигает своего наибольшего (наименьшего) значения или в стационарной точке, или в граничной точке области. Для того чтобы найти наибольшее (наименьшее) значение функции в замкнутой ограниченной области, необходимо сравнить ее значения в стационарных точках и в точках условного экстремума на границе области. В случае если границы области являются отрезками, условный экстремум находится без применения функции Лагранжа.

ПРИМЕР 10.18. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2 - x + 2y^2 - y$ в замкнутой области G , ограниченной прямыми $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 1$.

► Данная область — треугольник.

1) Найдем стационарные точки, приравняв к нулю частные производные,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x - 1; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 4y - 1.$$

Точка с координатами $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ находится внутри области G . Значение функции в этой точке $z\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right) = -\frac{3}{8}$.

2) Исследуем функцию на границах треугольника G , состоящего из трех отрезков. На каждом из них функцию $z(x, y)$ рассмотрим как функцию одной переменной и найдем критические точки.

а) При $x = 0$ положим $f(x) = z(x, 0) = x^2 - x$, $0 \leq x \leq 1$. Производная $f'(x) = 2x - 1$ обращается в ноль при $x = \frac{1}{2}$,

$$f\left(\frac{1}{2}, 0\right) = z\left(\frac{1}{2}, 0\right) = -\frac{1}{4}.$$

$$f\left(\frac{1}{2}, 0\right) = z\left(\frac{1}{2}, 0\right) = -\frac{1}{4}.$$

б) При $y = 0$ положим $h(y) = z(0, y) = 2y^2 - y$, $0 \leq y \leq 1$.

Производная $h'(y) = 4y - 1$ обращается в ноль при $y = \frac{1}{4}$,

значение функции в этой точке $h\left(\frac{1}{4}\right) = z\left(0, \frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{8}$.

в) При $x + y = 1$ положим $g(x) = z(x, 1 - x) = 3x^2 - 4x + 1$.

Критическая точка $x = \frac{2}{3}$, $g\left(\frac{2}{3}\right) = z\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right) = -\frac{2}{3}$.

3) Найдем значения функции в угловых точках замкнутой области G : $z(0, 0) = 0$, $z(0, 1) = 1$, $z(1, 0) = 0$. Из всех найденных значений выберем наибольшее и наименьшее:

$$\max_G z(x, y) = z(0, 1) = 1; \quad \min_G z(x, y) = z\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right) = -\frac{2}{3}. \quad \blacktriangleleft$$

10.115. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $z = x - 2y + 5$ в области $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x + y \leq 1$.

10.116. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $z = x^2 + y^2 - xy - x - y$ в области $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x + y \leq 3$.

10.117. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $z = xy$ в области $x^2 + y^2 \leq 1$.

10.118. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $z = xy^2$ в области $x^2 + y^2 \leq 1$.

10.119. Из всех прямоугольных параллелепипедов, сумма ребер которых равна $12a$, найти параллелепипед с наибольшим объемом.

10.120. Найти прямоугольный параллелепипед с длиной диагонали d , имеющий наибольший объем.

10.121. В полушаре радиуса R вписать прямоугольный параллелепипед наибольшего объема.

10.122. В прямой круговой конус с радиусом основания R и высотой H вписать прямоугольный параллелепипед наибольшего объема.

5. Геометрические приложения частных производных.

Касательной плоскостью к поверхности в ее точке M_0 (точка касания) называется плоскость, содержащая в себе все касательные к кривым, проведенным на поверхности через эту точку. *Нормалью* к поверхности называется прямая, перпендикулярная касательной плоскости и проходящая через точку касания.

Если уравнение поверхности имеет вид $F(x, y, z) = 0$, то уравнение касательной в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ записывается следующим образом:

$$F'_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F'_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + F'_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0,$$

а уравнения нормали

$$\frac{x - x_0}{F'_x(x_0, y_0, z_0)} = \frac{y - y_0}{F'_y(x_0, y_0, z_0)} = \frac{z - z_0}{F'_z(x_0, y_0, z_0)}.$$

В случае задания поверхности в явной форме $z = f(x, y)$ уравнение касательной в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ имеет вид

$$z - z_0 = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0),$$

а уравнения нормали

$$\frac{x - x_0}{f'_x(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{f'_y(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}.$$

ПРИМЕР 10.19. Найти уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности $x^2 + 2y^2 - 3z^2 + xy + yz - 2xz + 16 = 0$ в точке $M(1, 2, 3)$.

► Обозначив через $F(x, y, z)$ функцию, стоящую в левой части уравнения, найдем ее частные производные и их значения в точке M

$$\begin{aligned} F'_x(x, y, z) &= 2x + y - 2z, & F'_x(1, 2, 3) &= -2; \\ F'_y(x, y, z) &= 4y + x + z, & F'_y(1, 2, 3) &= 12; \\ F'_z(x, y, z) &= -6z + y - 2x, & F'_z(1, 2, 3) &= -18. \end{aligned}$$

Получаем уравнение касательной плоскости

$$-2(x - 1) + 12(y - 2) - 18(z - 3) = 0,$$

или

$$x - 6y + 8z - 16 = 0,$$

и уравнения нормали

$$\frac{x - 1}{-2} = \frac{y - 2}{12} = \frac{z - 3}{-18}, \text{ или } \frac{x - 1}{1} = \frac{y - 2}{-6} = \frac{z - 3}{9}.$$

Найти уравнения касательных плоскостей и нормалей к поверхностям в указанных точках.

10.123. $z = \sin x \cos y$ в точке $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{1}{2}\right)$.

10.124. $z = e^{x \cos y}$ в точке $\left(1, \pi, \frac{1}{e}\right)$.

10.125. $x(y+z)(xy-z)+z=0$ в точке $(2, 1, 3)$.

10.126. $2^{x/z} + 2^{y/z} = 8$ в точке $(2, 2, 1)$.

Показать, что следующие поверхности попарно ортогональны:

10.127. $x^2 + y^2 + z^2 = 2ax$ и $x^2 + y^2 + z^2 = 2by$.

10.128. $xyz = a^3$ и $2z^2 = x^2 + y^2 + f(x^2 - y^2)$.

Глава 11

КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

11.1. Двойной интеграл

1. Свойства двойного интеграла и его вычисление в декартовых прямоугольных координатах. Пусть функция $f(x, y) = f(P)$ определена и непрерывна в замкнутой ограниченной области G плоскости Oxy , $\sigma = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n\}$ – некоторое разбиение области G на элементарные подобласти. Обозначим их площади через $\Delta\sigma_k$, диаметры – через d_k , максимальный диаметр (*мелкость разбиения*) через $\lambda(\sigma) = \max_{1 \leq k \leq n} d_k$. Зафиксируем точки $P_k \in \sigma_k$, $k = 1, 2, \dots, n$.

Выражение

$$S_n = \sum_{k=1}^n f(P_k) \Delta\sigma_k$$

называется *интегральной суммой* функции f по области G , соответствующей разбиению σ и выбору точек P_k . Если для любой последовательности интегральных сумм S_n , мелкость разбиения которых стремится к 0 при $n \rightarrow \infty$, существует предел интегральных сумм S_n и этот предел не зависит ни от способа разбиения области G , ни от выбора точек $P_k \in \sigma_k$, то он называется *двойным интегралом* функции $f(x, y)$ по области G и обозначается $\iint_G f(x, y) dx dy$. Таким образом,

$$\iint_G f(x, y) dx dy = \lim_{\lambda(\sigma) \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(P_k) \Delta\sigma_k.$$

Вычисление двойного интеграла сводится к вычислению *повторных интегралов* следующим образом. Пусть функция $f(x, y)$ непрерывна в области G , ограниченной кривыми

$y = \varphi_1(x)$, $y = \varphi_2(x)$, $x = a$, $x = b$ (рис. 11.1). Причем функции $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ непрерывны на $[a, b]$ и $\varphi_1(x) \leq \varphi_2(x)$. Тогда справедливо равенство

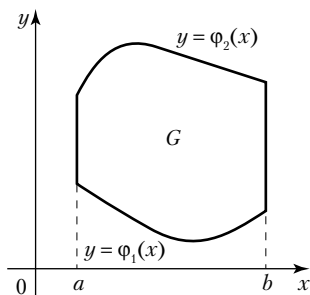


Рис. 11.1

$$\begin{aligned} \iint_G f(x, y) dx dy &= \\ &= \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right) dx = \\ &= \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy. \end{aligned}$$

При этом сначала вычисляется внутренний интеграл по переменной y (x — параметр), а полученный результат интегрируется по x .

ПРИМЕР 11.1. Вычислить повторный интеграл

$$\int_0^1 dx \int_x^{x\sqrt{3}} \frac{x dy}{x^2 + y^2}.$$

► Вычислим внутренний интеграл по переменной y , считая x параметром,

$$\begin{aligned} \int_x^{x\sqrt{3}} \frac{x dy}{x^2 + y^2} &= x \int_x^{x\sqrt{3}} \frac{dy}{x^2 + y^2} = \left(\arctg \frac{y}{x} \right) \Big|_x^{x\sqrt{3}} = \\ &= \arctg \sqrt{3} - \arctg 1 = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12}. \end{aligned}$$

Вычислим внешний интеграл $\int_0^1 \frac{\pi}{12} dx = \frac{\pi}{12}$. ◀

Вычислить повторные интегралы.

11.1. $\int_0^1 dx \int_0^2 (x^2 + y) dy.$

11.2. $\int_0^3 dy \int_2^5 \frac{dx}{(x + 2y)^2}.$

$$11.3. \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_{a\cos\varphi}^{a(1+\cos\varphi)} r dr.$$

$$11.4. \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int_0^{2\cos\varphi} r^3 dr.$$

Для данных повторных интегралов написать уравнения кривых, ограничивающих области интегрирования, и построить эти области.

$$11.5. \int_1^2 dx \int_x^{x+3} f(x, y) dy.$$

$$11.6. \int_{-1}^1 dx \int_{\frac{x^2}{2}}^{1-x^2} f(x, y) dy.$$

$$11.7. \int_0^2 dy \int_{2-y}^{\sqrt{4-y^2}} f(x, y) dx.$$

$$11.8. \int_0^1 dx \int_{\sqrt{x}}^{\sqrt{2-x^2}} f(x, y) dy.$$



Если одна из кривых, ограничивающая область G , задается разными аналитическими выражениями, например

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} \varphi_1^{(1)}(x) & \text{при } a \leq x \leq c, \\ \varphi_1^{(2)}(x) & \text{при } c < x \leq b, \end{cases}$$

то двойной интеграл записывается в виде суммы двух интегралов

$$\iint_G f(x, y) dx dy = \int_a^c dx \int_{\varphi_1^{(1)}(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy + \int_c^b dx \int_{\varphi_1^{(2)}(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy.$$

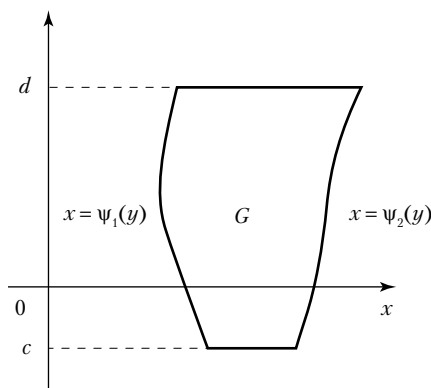


Рис. 11.2

Если область G ограничена кривыми $x = \psi_1(y)$, $x = \psi_2(y)$, $y = c$, $y = d$ (рис. 11.2), а функции $\psi_1(y)$ и $\psi_2(y)$ непрерывны на $[c, d]$ и $\psi_1(y) \leq \psi_2(y)$, то справедливо равенство

$$\begin{aligned} \iint_G f(x, y) dx dy &= \\ &= \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx. \end{aligned}$$



ПРИМЕР 11.2. Расставить пределы интегрирования двумя способами и вычислить интеграл $\iint_G \frac{x^2}{y^2} dx dy$, если область интегрирования G ограничена линиями $y = x$, $y = \frac{1}{x}$, $x = 2$.

- Абсцисса точки пересечения кривых $y = x$ и $y = \frac{1}{x}$ равна $a = 1$ (рис. 11.3) На отрезке $[1, 2]$ выполняется неравенство $\frac{1}{x} < x$, следовательно, двойной интеграл к повторному

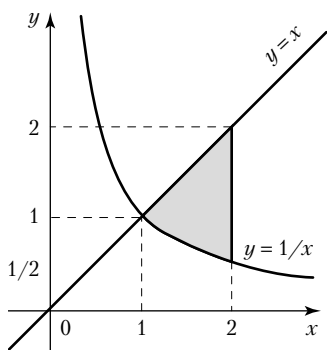


Рис. 11.3

сводится следующим образом:

$$\iint_G \frac{x^2}{y^2} dx dy = \int_1^2 dx \int_{1/x}^x \frac{x^2}{y^2} dy.$$

Далее вычисляем повторный интеграл:

$$\begin{aligned} \int_1^2 dx \int_{1/x}^x \frac{x^2}{y^2} dy &= \\ &= \int_1^2 x^2 dx \int_{1/x}^x \frac{dy}{y^2} = \end{aligned}$$

$$= \int_1^2 x^2 \left(-\frac{1}{y} \right) \Big|_{1/x}^x dx = \int_1^2 x^2 \left(x - \frac{1}{y} \right) dx = \left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_1^2 = 2\frac{1}{4}.$$

Для того чтобы внутреннее интегрирование производить по переменной x , следует положить $c = 0,5$, $d = 2$,

$$\psi_1(y) = \begin{cases} \frac{1}{y} & \text{при } 0,5 \leq y \leq 1, \\ y & \text{при } 1 < y \leq 2, \end{cases} \quad \psi_2(y) = 2.$$

Тогда

$$\iint_G \frac{x^2}{y^2} dx dy = \int_{0,5}^1 dy \int_{1/y}^2 \frac{x^2}{y^2} dx + \int_1^2 dy \int_y^2 \frac{x^2}{y^2} dx.$$

Последовательно вычисляя каждый из повторных интегралов, получаем

$$\int_{0,5}^1 dy \int_{1/y}^2 \frac{x^2}{y^2} dx + \int_1^2 dy \int_y^2 \frac{x^2}{y^2} dx = 2\frac{1}{4}. \quad \blacktriangleleft$$

Для указанных ниже областей G записать двойные интегралы

$$\iint_G f(x, y) dx dy$$

в виде повторных, взятых в различных порядках.

11.9. G — прямоугольник с вершинами $A(1, 2)$, $B(5, 2)$, $C(5, 4)$, $D(1, 4)$.

11.10. G — параллелограмм, ограниченный прямыми $y = x$, $y = x - 3$, $y = 2$, $y = 4$.

11.11. G — область, ограниченная кривыми $x^2 + y^2 = 2a^2$, $x^2 = ay$ ($a > 0$, $y > 0$).

11.12. G — область, ограниченная кривыми $y^2 = ax$, $x^2 + y^2 = ax$, $y = 0$ ($a > 0$, $y > 0$).

11.13. G — область, ограниченная кривыми $x = 1 - y^2$, $x = y^2 - 1$.

11.14. G — область, ограниченная кривыми $x^2 + y^2 = 16$, $x^2 + y^2 = 4x$, $y = 0$ ($x > 0$, $y > 0$).

Вычислить двойные интегралы.

11.15. $\iint_G (x^2 + y^2) dx dy$, где область G ограничена прямыми $y = x$, $x + y = 2a$, $x = 0$.

11.16. $\iint_G \sqrt{xy - y^2} dx dy$, где область G — трапеция с вершинами $A(1, 1)$, $B(5, 1)$, $C(10, 2)$, $D(2, 2)$.

11.17. $\iint_G xy dx dy$, где область G ограничена кривыми $x + y = 2$, $x^2 + y^2 = 2y$ ($x > 0$).

11.18. $\iint_G (x + 2y) dx dy$, где область G ограничена кривыми $y = x^2$, $y = \sqrt{x}$.

11.19. $\iint_G (4-y) dx dy$, где область G ограничена кривыми $x^2 = 4y$, $y = 1$, $x = 0$ ($x > 0$).

11.20. $\iint_G \frac{x dx dy}{x^2 + y^2}$, где область G ограничена кривыми $y = x \operatorname{tg} x$, $y = x$, $x = \pi/8$ ($x > \pi/8$).

2. Замена переменных в двойном интеграле. Пусть функции

$$x = \varphi(u, v) \text{ и } y = \psi(u, v) \quad (11.1)$$

осуществляют взаимно однозначное непрерывно дифференцируемое отображение области D плоскости $O'uv$ на область G плоскости Oxy . Тогда существует обратное непрерывно дифференцируемое отображение $u = \eta(x, y)$ и $v = \chi(x, y)$ области D на область G и в области D отличен от нуля якобиан преобразования

$$I(u, v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial u} & \frac{\partial \varphi}{\partial v} \\ \frac{\partial \psi}{\partial u} & \frac{\partial \psi}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0, \quad (u, v) \in D.$$

Если в двойном интеграле $\iint_G f(x, y) dx dy$ произвести замену переменных по формулам (11.1), то областью интегрирования полученного интеграла будет уже область D , которая при подходящем выборе функций $\varphi(u, v)$ и $\psi(u, v)$ может оказаться значительно проще области G , и имеет место формула

$$\iint_G f(x, y) dx dy = \iint_D f(\varphi(u, v), \psi(u, v)) |I(u, v)| du dv. \quad (11.2)$$

ПРИМЕР 11.3. Вычислить двойной интеграл $\iint_G \sqrt{xy} dx dy$,

где область G ограничена кривыми $y^2 = ax$, $y^2 = bx$, $xy = p$, $xy = q$ ($0 < a < b$, $0 < p < q$).

- Перейдем к новым переменным по формулам $u = y^2/x$, $v = yx$. Тогда $x = u^{-1/3}v^{2/3}$, $y = u^{1/3}v^{1/3}$ и $\sqrt{xy} = \sqrt{v}$. Найдем частные производные

$$\begin{aligned}\frac{\partial x}{\partial u} &= -\frac{1}{3}u^{-4/3}v^{2/3}, & \frac{\partial x}{\partial v} &= \frac{2}{3}u^{-1/3}v^{-1/3}, \\ \frac{\partial y}{\partial u} &= \frac{1}{3}u^{-2/3}v^{1/3}, & \frac{\partial y}{\partial v} &= \frac{1}{3}u^{1/3}v^{-2/3}.\end{aligned}$$

Якобиан преобразования равен

$$I(u, v) = \begin{vmatrix} -\frac{1}{3}u^{-4/3}v^{2/3} & \frac{2}{3}u^{-1/3}v^{-1/3} \\ \frac{1}{3}u^{-2/3}v^{1/3} & \frac{1}{3}u^{1/3}v^{-2/3} \end{vmatrix} = -\frac{1}{3u}.$$

Поэтому $|I(u, v)| = \frac{1}{3u}$ при $u > 0$.

Уравнения линий, ограничивающих область D , имеют вид $u = a$, $u = b$, $v = p$, $v = q$. Область D — прямоугольник (рис. 11.4). Применяя формулу (11.2), получаем

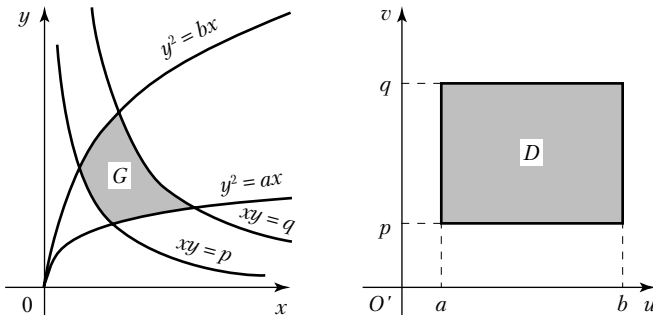


Рис. 11.4

$$\begin{aligned}\iint_G \sqrt{xy} \, dx \, dy &= \iint_D \frac{\sqrt{v} \, du \, dv}{3u} = \frac{1}{3} \int_a^b \frac{du}{u} \int_p^q \sqrt{v} \, dv = \\ &= \frac{1}{3} \ln u \Big|_a^b \cdot \frac{2}{3} v^{3/2} \Big|_p^q = \frac{2}{9} (q^{3/2} - p^{3/2}) \ln \frac{b}{a}.\end{aligned}$$

Перейти к новым переменным u и v и расставить пределы интегрирования в интегралах.

11.21. $\iint_G f(x, y) dx dy$, где область G ограничена кривыми $x^2 = ay$, $x^2 = by$, $y^2 = px$, $y^2 = qx$ ($0 < a < b$, $0 < p < q$). Положить $u = x^2/y$, $v = y^2/x$.

11.22. $\iint_G f(x, y) dx dy$, где область G ограничена кривыми $y = 1 - x$, $y = 3 - x$, $x = 0$, $x = 3$. Положить $u = x + y$, $v = x - y$.

11.23. $\iint_G f(x, y) dx dy$, где область G ограничена кривыми $xy = p$, $xy = q$, $y = ax$, $y = bx$ ($0 < a < b$, $0 < p < q$). Положить $u = xy$, $v = y/x$.

11.24. $\iint_G f(x, y) dx dy$, где область G ограничена кривыми $y = ax^3$, $y = bx^3$, $y^2 = px$, $y^2 = qx$ ($0 < a < b$, $0 < p < q$). Положить $u = y/x^3$, $v = y^2/x$.

Наиболее употребительной из замен переменных является переход к полярным координатам

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi,$$

для которых якобиан равен

$$I(r, \varphi) = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{vmatrix} = r,$$

и формула (11.2) принимает вид

$$\iint_G f(x, y) dx dy = \iint_D f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr d\varphi. \quad (11.3)$$

ПРИМЕР 11.4. Перейдя к полярным координатам, вычислить интеграл

$$\iint_G (x^2 + y^2) dx dy,$$

где область G ограничена окружностью $x^2 + y^2 = 2ax$.

► Положим $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$ и применим формулу (11.3). Так как $x^2 + y^2 = r^2$, то

$$\iint_G (x^2 + y^2) dx dy = \iint_D r^3 dr d\varphi.$$

Уравнение окружности $x^2 + y^2 = 2ax$ преобразуется к виду $r^2 = 2ar \cos \varphi$. Поэтому область D ограничена синусоидой $r = 2a \cos \varphi$ и прямой $r = 0$, $-\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2$.

Следовательно,

$$\begin{aligned} \iint_D r^3 dr d\varphi &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int_0^{2a \cos \varphi} r^3 dr = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left. \frac{r^4}{4} \right|_0^{2a \cos \varphi} d\varphi = \\ &= 4a^4 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^4 \varphi d\varphi = \frac{3}{2} \pi a^4. \end{aligned}$$

Перейти к полярным координатам и расставить пределы интегрирования по новым переменным в интегралах.

$$11.25. \int_0^a dx \int_{a\sqrt{3}/2 - \sqrt{3a^2/4 - x^2}}^{\sqrt{ax - x^2}} f(\sqrt{x^2 + y^2}) dy.$$

$$11.26. \int_0^a dx \int_{\sqrt{ax}}^{a + \sqrt{a^2 - x^2}} f(x, y) dy.$$

$$11.27. \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x, y) dx.$$

$$11.28. \iint_G f(x^2 + y^2) dx dy, \text{ где } G \text{ ограничена линиями } x^2 + y^2 = \sqrt{6}x, (x^2 + y^2)^2 = 9(x^2 + y^2), y = 0 \ (y > 0, x < \sqrt{6}).$$

Перейдя к полярным координатам, вычислить интегралы.

$$11.29. \int_0^a dx \int_0^{\sqrt{a^2 - x^2}} e^{x^2 + y^2} dy.$$

$$11.30. \int_0^a dy \int_{\sqrt{ay - y^2}}^{\sqrt{a^2 - y^2}} \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} dx.$$

11.31. $\iint_G \sqrt{x^2 + y^2 - 9} dx dy$, где G — кольцо между двумя окружностями $x^2 + y^2 = 9$ и $x^2 + y^2 = 25$.

11.32. $\iint_G (x^2 + y) dx dy$, где G ограничена кривыми $x^2 + y^2 = ax$, $x^2 + y^2 = 2ax$, $y = 0$ ($y > 0$).

3. Приложения двойных интегралов. *Геометрические приложения.* Площадь S плоской области G выражается в декартовых прямоугольных координатах формулой

$$S = \iint_G dx dy.$$

Если гладкая поверхность G имеет уравнение $z = f(x, y)$, то *площадь* части этой *поверхности*, проектирующейся в область G плоскости Oxy , равна

$$Q = \iint_G \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy.$$

Объем V цилиндра, ограниченного сверху непрерывной поверхностью $z = f(x, y)$, снизу плоскостью $z = 0$ и с боков прямой цилиндрической поверхностью, вырезающей на плоскости Oxy область G , выражается интегралом

$$V = \iint_G f(x, y) dx dy.$$

11.33. Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми $y^2 = 4ax + 4a^2$ и $x + y = 2a$ ($a > 0$).

11.34. Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми $xy = 4$ и $x + y = 5$.

11.35. Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми $x^2 + y^2 = 2ax$, $x^2 + y^2 = 2bx$, $y = x$, $y = 0$, ($0 < a < b$).

11.36. Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2)$ и $x^2 + y^2 = 2ax$.

11.37. Найти площадь части плоскости $x + y + z = a$, вырезаемой цилиндром $y^2 = ax$ и плоскостью $x = a$.

11.38. Найти площадь части поверхности цилиндра $x^2 + z^2 = a^2$, вырезаемой цилиндром $y^2 = a(a - x)$.

11.39. Найти площадь части поверхности конуса $x^2 + z^2 = y^2$, вырезаемой цилиндром $y^2 = 2px$.

11.40. Найти площадь части сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 2a^2$, заключенной внутри конуса $y^2 + z^2 = x^2$.

Найти объемы тел, ограниченных поверхностями.

11.41. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1.$

11.42. $z^2 - x^2 = a^2, \quad z^2 - y^2 = a^2, \quad z = a\sqrt{2} \quad (a > 0).$

11.43. $x^2 + y^2 = 2z^2, \quad x^2 + y^2 = 2z^2 - a^2.$

11.44. $x^2 + y^2 + z^2 = 1, \quad x^2 + y^2 = z^2$ (внутри конуса).



Механические приложения. Если пластина занимает область G плоскости Oxy и имеет переменную поверхностную плотность $\gamma = \gamma(x, y)$, то ее масса выражается интегралом

$$m = \iint_G \gamma(x, y) dx dy,$$

а статические моменты M_x и M_y относительно осей Ox и Oy — соответственно интегралами

$$M_x = \iint_G y \gamma(x, y) dx dy, \quad M_y = \iint_G x \gamma(x, y) dx dy.$$

Координаты центра масс $\bar{x}$ и $\bar{y}$ пластины

$$\bar{x} = \frac{M_y}{m} = \frac{\iint_G x \gamma(x, y) dx dy}{\iint_G \gamma(x, y) dx dy}, \quad \bar{y} = \frac{M_x}{m} = \frac{\iint_G y \gamma(x, y) dx dy}{\iint_G \gamma(x, y) dx dy}.$$

Моменты инерции пластины I_x и I_y относительно осей Ox и Oy соответственно равны

$$I_x = \iint_G y^2 \gamma(x, y) dx dy, \quad I_y = \iint_G x^2 \gamma(x, y) dx dy,$$

а момент инерции относительно начала координат (полярный момент) равен

$$I_O = \iint_G (x^2 + y^2) \gamma(x, y) dx dy = I_x + I_y.$$

Если пластина однородна и плотность ее не указана, условимся считать $\gamma(x, y) \equiv 1$.

11.45. Найти массу круглой пластины радиуса R , если ее плотность в точке пропорциональна расстоянию от точки до центра и равна δ на краю пластины.

11.46. Найти массу круглой пластины, имеющей форму прямоугольного треугольника с катетами $OB = a$ и $OA = b$, если ее плотность в точке равна расстоянию от точки до катета OA .

11.47. Найти статические моменты относительно осей Ox и Oy однородной фигуры, ограниченной синусоидой $y = \sin x$ и прямой, проходящей через начало координат и точку синусоиды $A(\pi/2, 1)$ ($x > 0$).

11.48. Найти статические моменты относительно осей Ox и Oy однородной фигуры, ограниченной кардиоидой $r = a(1 + \cos \varphi)$, $0 \leq \varphi \leq 0$, и полярной осью.

11.49. Найти координаты центра масс однородной фигуры, ограниченной кривыми $y^2 = ax$, $y = x$.

11.50. Найти координаты центра масс однородной фигуры, ограниченной кривыми $xy = a^2$, $y^2 = 8ax$, $x = 2a$ ($a > 0$).

11.51. Найти моменты инерции однородного треугольника, ограниченного прямыми $x + y = 1$, $x + 2y = 2$, $y = 0$, относительно осей Ox и Ox .

11.52. Найти моменты инерции однородной фигуры, ограниченной эллипсом $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, относительно осей Ox , Oy и относительно начала координат.

11.2. Тройной интеграл

1. Тройной интеграл и его вычисление в декартовых прямоугольных координатах. Пусть функция $f(x, y, z) = f(P)$ определена и непрерывна в замкнутой ограниченной пространственной области G , а $\sigma = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n\}$ — некоторое разбиение области G на элементарные подобласти. Обозначим их объемы через $\Delta\sigma_k$, а диаметры — через d_k , максимальный диаметр (мелкость разбиения) через $\lambda(\sigma) = \max_{1 \leq k \leq n} d_k$.

Зафиксируем точки $P_k \in \sigma_k$, $k = 1, 2, \dots, n$. Выражение

$$S_n = \sum_{k=1}^n f(P_k) \Delta \sigma_k$$

называется *интегральной суммой* функции f по области G , соответствующей разбиению σ и выбору точек P_k . Если для любой последовательности интегральных сумм S_n , мелкость разбиения которых стремится к 0 при $n \rightarrow \infty$, существует предел интегральных сумм S_n и этот предел не зависит ни от способа разбиения области G , ни от выбора точек $P_k \in \sigma_k$, то он называется *тройным интегралом* функции $f(x, y, z)$ по области G и обозначается $\iiint_G f(x, y, z) dx dy dz$. Таким образом,

$$\iiint_G f(x, y, z) dx dy dz = \lim_{\lambda(\sigma) \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(P_k) \Delta \sigma_k.$$

Вычисление тройного интеграла сводится к вычислению одного однократного и одного двойного интеграла следующим образом. Пусть функция $f(x, y, z)$ непрерывна в области G , ограниченной снизу поверхностью $z = \varphi_1(x, y)$, а сверху — поверхностью $z = \varphi_2(x, y)$ ($\varphi_1(x, y) \leq \varphi_2(x, y)$) и с боков — прямым цилиндром, вырезающим из плоскости Oxy область D . Тогда тройной интеграл вычисляется по формуле

$$\iiint_G f(x, y, z) dx dy dz = \iint_D dx dy \int_{\varphi_1(x, y)}^{\varphi_2(x, y)} f(x, y, z) dz.$$

Записывая двойной интеграл по плоской области D через один из повторных, получаем

$$\begin{aligned} \iiint_G f(x, y, z) dx dy dz &= \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{\varphi_1(x, y)}^{\varphi_2(x, y)} f(x, y, z) dz = \\ &= \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} dx \int_{\varphi_1(x, y)}^{\varphi_2(x, y)} f(x, y, z) dz. \end{aligned}$$

ПРИМЕР 11.5. Вычислить тройной интеграл $\iiint_G z dx dy dz$,

если область G ограничена плоскостями $x + y + z = 1$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

- Проекцией области G на плоскость Oxy является треугольник D , ограниченный прямыми $x + y = 1$, $x = 0$, $y = 0$ (рис. 11.5). Сверху область G ограничена плоскостью $z = 1 - x - y$, снизу — плоскостью $z = 0$. Тогда получаем

$$I = \iiint_G z \, dx \, dy \, dz = \iint_D dx \, dy \int_0^{1-x-y} z \, dz.$$

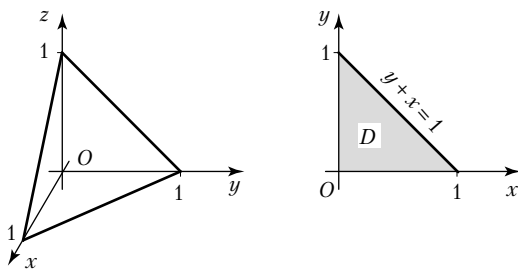


Рис. 11.5

Переходя от двойного интеграла по области D к повторному, получаем

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} z \, dz = \frac{1}{2} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (1-x-y)^2 dy = \\ &= -\frac{1}{6} \int_0^1 (1-x-y)^3 \Big|_0^{1-x} dx = \\ &= \frac{1}{6} \int_0^1 (1-x)^3 dx = -\frac{1}{24} (1-x)^4 \Big|_0^1 = \frac{1}{24}. \end{aligned}$$

Для указанных ниже областей G записать тройной интеграл $\iiint_G f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz$ в виде повторных.

11.53. G — тетраэдр, ограниченный плоскостями $2x + 3y + 4z = 12$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

11.54. G — внутренность эллипсоида $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

11.55. G — область, ограниченная поверхностями $y^2 + 2z^2 = 4x$, $x = 2$.

11.56. G — область, ограниченная поверхностями $x^2 + y^2 = z^2$, $z = 1$.

Вычислить интегралы.

$$11.57. \int_0^1 dx \int_0^x dy \int_0^{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} z dz. \quad 11.58. \int_0^3 dx \int_0^{2x} dy \int_0^{\sqrt{xy}} z dz.$$

$$11.59. \iiint_G (x+y+z) dx dy dz, \text{ где } G \text{ — тетраэдр, ограничен-}$$

ный плоскостями $x+y+z=a$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

$$11.60. \iiint_G xyz dx dy dz, \text{ где } G \text{ — область, ограниченная по-}$$

верхностями $y=x^2$, $z=a-x$, $z=2(a-x)$, $x=a$, $y=0$.

$$11.61. \iiint_G (x^2+y^2) dx dy dz, \text{ где } G \text{ — область, ограниченная}$$

поверхностями $z=y^2-x^2$, $y=1$, $z=0$.

$$11.62. \iiint_G y dx dy dz, \text{ где } G \text{ — область, ограниченная по-}$$

верхностями $y^2=ax$, $x=y^2$, $z=xy$, $z=0$.

2. Замена переменных в тройном интеграле. Если в тройном интеграле $\iiint_G f(x, y, z) dx dy dz$ производится замена перемен-

ных по формулам $x=x(u, v, w)$, $y=y(u, v, w)$, $z=z(u, v, w)$, причем функции $x(u, v, w)$, $y(u, v, w)$, $z(u, v, w)$ осуществляют взаимно однозначное непрерывно дифференцируемое отображение области G_1 пространства $O'uvw$ на область G пространства $Oxyz$ и в области G_1 отличен от нуля якобиан преобразования

$$I = I(u, v, w) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} \neq 0, \quad (u, v, w) \in G_1,$$

то справедлива формула

$$\begin{aligned} & \iiint_G f(x, y, z) dx dy dz = \\ & = \iiint_{G_1} f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) |I| du dv dw. \end{aligned} \quad (11.4)$$

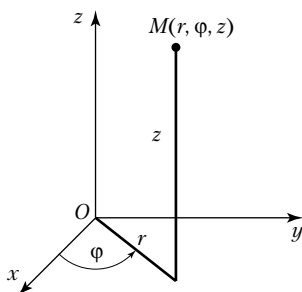


Рис. 11.6

Наиболее часто применяются переход к *цилиндрическим* либо *сферическим* координатам. При цилиндрической замене преобразования координат имеют вид $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, $z = z$ (рис. 11.6). Якобиан преобразования равен $I = r$.

ПРИМЕР 11.6. Перейдя к цилиндрическим координатам, вычислить интеграл

$$\iiint_G z \sqrt{x^2 + y^2} \, dx \, dy \, dz,$$

где область G задана неравенствами $0 \leq x \leq 2$, $0 \leq y \leq \sqrt{2x - x^2}$, $0 \leq z \leq a$ (рис. 11.7).

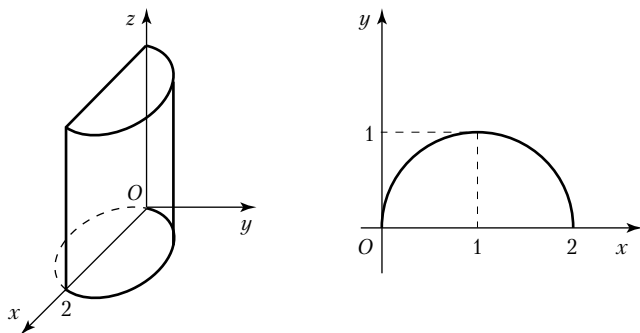


Рис. 11.7

- Положим $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, $z = z$ и применим формулу (11.4), учитывая, что $I = r$. Так как $x^2 + y^2 = r^2$, то

$$\iiint_G z \sqrt{x^2 + y^2} \, dx \, dy \, dz = \iiint_{G_1} z r^2 \, dr \, d\varphi \, dz.$$

Так как уравнение $y = \sqrt{2x - x^2}$ преобразуется к виду $r = 2r \cos \varphi$, $0 \leq \varphi \leq \pi/2$, то получаем

$$\begin{aligned} \iiint_{G_1} z r^2 dr d\varphi dz &= \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{2\cos\varphi} r^2 dr \int_0^a z dz = \frac{a^2}{2} \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{2\cos\varphi} r^2 dr = \\ &= \frac{4a^2}{3} \int_0^{\pi/2} \cos^3 \varphi d\varphi = \frac{8}{9} a^2. \end{aligned}$$

Перейдя к цилиндрическим координатам, вычислить интегралы.

11.63. $\iiint_G |y| dx dy dz$, где область G ограничена поверхностями $x^2 + y^2 = a^2$, $z = 0$, $z = h$.

11.64. $\iiint_G z dx dy dz$, где область G ограничена поверхностями $x^2 + y^2 = z^2$, $z = a$.

11.65. $\int_0^{\sqrt{3}} dx \int_0^{\sqrt{3-x^2}} dy \int_{(x^2+y^2)/3}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} dz.$

11.66. $\int_0^{a/\sqrt{2}} dy \int_y^{\sqrt{a^2-y^2}} dx \int_0^{(x^2+y^2)/a} \sqrt{x^2+y^2} dz.$

11.67. $\int_{-a}^a dx \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} dy \int_{h(x^2+y^2)/a}^h \sqrt{x^2+y^2} dz.$

11.68. $\int_{-2}^2 dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} dy \int_{(x^2+y^2)/2}^2 (x^2+y^2) dz.$

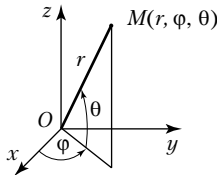


Рис. 11.8

При сферической замене преобразования координат имеют вид $x = r \cos \varphi \cos \theta$, $y = r \sin \varphi \cos \theta$, $z = r \sin \theta$ (рис. 11.8). Якобиан равен $I = r^2 \cos \theta$.

ПРИМЕР 11.7. Перейдя к сферическим координатам, вычислить интеграл $\iiint_G (x^2 + y^2) dx dy dz$,

где область G есть полушар, заданный неравенствами $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $z \geq 0$ (рис. 11.9).

- Полушар радиуса R задается следующими пределами изменения сферических координат: $0 \leq r \leq R$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $0 \leq \theta \leq \pi/2$. По формуле (11.4)

имеем

$$\begin{aligned} & \iiint_G (x^2 + y^2) dx dy dz = \\ &= \iiint_{G_1} r^2 \cos \theta r^2 \cos \theta dr d\varphi d\theta = \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} \cos^3 \theta d\theta \int_0^R r^4 dr = \\ &= \frac{4}{15} \pi R^5. \end{aligned}$$

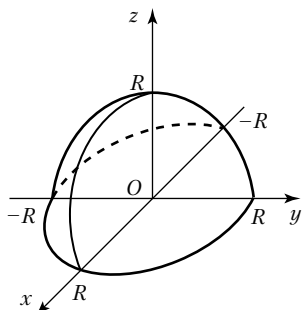


Рис. 11.9

Вычислить интегралы, перейдя к сферическим координатам.

- 11.69. $\iiint_G xyz^2 dx dy dz$, где область G ограничена частью сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ и координатными плоскостями ($x > 0$, $y > 0$, $z > 0$).

- 11.70. $\iiint_G \frac{dx dy dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$, где область G — сферический слой

между поверхностями $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2$.

$$11.71. \int_0^{R/\sqrt{2}} dx \int_0^{\sqrt{R^2/2-x^2}} dy \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} dz.$$

$$11.72. \int_0^a dx \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} dy \int_0^{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} z dz.$$

3. Приложения тройных интегралов. Объем V пространственной области G равен

$$V = \iiint_G dx dy dz.$$

Масса m тела с переменной плотностью $\gamma = \gamma(x, y, z)$, занимающего пространственную область G , равна

$$m = \iiint_G \gamma(x, y, z) dx dy dz.$$

Статические моменты относительно координатных плоскостей

$$M_{yz} = \iiint_G x\gamma(x, y, z) dx dy dz,$$

$$M_{xz} = \iiint_G y\gamma(x, y, z) dx dy dz,$$

$$M_{xy} = \iiint_G z\gamma(x, y, z) dx dy dz.$$

Координаты центра масс тела $\bar{x} = \frac{M_{yz}}{m}$, $\bar{y} = \frac{M_{xz}}{m}$,
 $\bar{z} = \frac{M_{xy}}{m}$.

Моменты инерции тела относительно координатных осей

$$I_x = \iiint_G (y^2 + z^2) \gamma(x, y, z) dx dy dz,$$

$$I_y = \iiint_G (x^2 + z^2) \gamma(x, y, z) dx dy dz,$$

$$I_z = \iiint_G (x^2 + y^2) \gamma(x, y, z) dx dy dz,$$

а момент инерции относительно начала координат (*полярный момент*) равен

$$I_O = \iiint_G (x^2 + y^2 + z^2) \gamma(x, y, z) dx dy dz.$$

Если тело однородно и плотность его не указана, условимся считать $\gamma(x, y, z) \equiv 1$.



11.73. Найти объем тела, ограниченного поверхностями $z = x^2 + y^2$, $z = 2(x^2 + y^2)$, $y = x$, $y^2 = x$.

11.74. Найти объем тела, ограниченного замкнутой поверхностью $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = 2axyz$ ($a > 0$).

11.75. Найти объем тела, ограниченного замкнутой поверхностью $\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right)^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$.

11.76. Найти объем тела, ограниченного сферой $x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2$ и параболоидом $x^2 + y^2 = 3az$ (внутри параболоида).

11.77. Найти массу тела, ограниченного поверхностями $x^2 + y^2 - z^2 = a^2$, $z = 0$, $z = a$ ($a > 0$).

11.78. Найти массу и среднюю плотность кругового конуса с радиусом основания R и высотой H , если плотность в каждой точке пропорциональна квадрату расстояния от точки до плоскости, проходящей через вершину конуса параллельно основанию, а в центре основания равна γ_0 .

11.79. Найти координаты центра масс однородного тела, ограниченного поверхностями $z = \frac{h}{a^2}(y^2 - x^2)$, $z = 0$, $y = 0$,

$y = h$ ($a > 0$, $h > 0$).

11.80. Найти координаты центра масс однородного тела, ограниченного поверхностями $y = \frac{b}{a^2}x^2$, $z = \frac{h}{b}(b - y)$, $z = 0$

($a > 0$, $b > 0$, $h > 0$).

11.81. Найти координаты центра масс однородного тела, ограниченного поверхностями $z = \frac{H}{R^2}(x^2 + y^2)$, $z = H$ ($R > 0$, $H > 0$).

11.82. Найти момент инерции однородного сегмента параболоида вращения плотности γ с радиусом основания R и высотой H относительно его оси вращения.

11.83. Найти моменты инерции однородного шара радиуса R относительно его диаметра, если плотность в каждой точке пропорциональна расстоянию от точки до центра шара, а на поверхности шара равна γ_0 .

11.84. Найти момент инерции однородного кругового конуса плотности γ с радиусом основания R и высотой H относительно его оси.

11.3. Несобственные кратные интегралы

1. Интеграл по бесконечной области. Если функция $f(x, y)$ непрерывна в бесконечной области, то по определению

$$\iint_G f(x, y) dx dy = \lim_{D \rightarrow G} \iint_D f(x, y) dx dy, \quad (11.5)$$

где D — конечная область, целиком лежащая в области G , а выражение $D \rightarrow G$ означает, что область D расширяется произвольным образом так, чтобы в нее вошла и осталась в ней любая точка области G (*исчерпывающее разбиение*). Если существует конечный предел (11.5), не зависящий от выбора подобласти D и способа расширения $D \rightarrow G$, то *несобственный интеграл* $\iint_G f(x, y) dx dy$ называется *сходящимся*, в про-

тивном случае — *расходящимся*.

Аналогично определяется тройной интеграл по бесконечной пространственной области.

Если $f(x, y) \geq 0$, то для сходимости несобственного интеграла необходимо и достаточно, чтобы предел (11.5) существовал хотя бы для одного исчерпывающего расширения области G .

ПРИМЕР 11.8. Вычислить несобственный интеграл

$$\iint_G \frac{dx dy}{x^4 + y^2}, \text{ где } G \text{ — область, определяемая неравенствами}$$

$$x \geq 1, y \geq x^2.$$

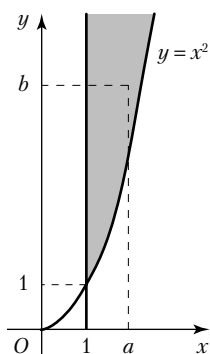


Рис. 11.10

► Подобласть D зададим неравенствами $1 \leq x \leq a$, $x^2 \leq y \leq b$, $a \rightarrow +\infty$, $b \rightarrow +\infty$ (рис. 11.10). Тогда

$$\begin{aligned} \iint_G \frac{dx dy}{x^4 + y^2} &= \lim_{D \rightarrow G} \iint_D \frac{dx dy}{x^4 + y^2} = \\ &= \lim_{\substack{a \rightarrow +\infty \\ b \rightarrow +\infty}} \int_1^a dx \int_{x^2}^b \frac{dy}{x^4 + y^2} = \\ &= \lim_{\substack{a \rightarrow +\infty \\ b \rightarrow +\infty}} \int_1^a \left(\frac{1}{x^2} \operatorname{arctg} \frac{y}{x^2} \Big|_{x^2}^b \right) dx = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_1^a \frac{1}{x^2} \left(\lim_{b \rightarrow +\infty} \left(\operatorname{arctg} \frac{b}{x^2} - \frac{\pi}{4} \right) \right) dx = \\ &= \frac{\pi}{4} \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_1^a \frac{1}{x^2} dx = \frac{\pi}{4} \lim_{a \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{x} \Big|_1^a \right) = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Вычислить несобственные интегралы.

11.85. $\iint_G \frac{dx dy}{x^5 y^3}$, где G — область, определяемая неравенствами $x \geq 1$, $xy \geq 1$.

11.86. $\iint_G \frac{dx dy}{(x^2 + y^2)^3}$, где G — область, определяемая неравенством $x^2 + y^2 \geq 1$.

11.87. $\iiint_G \frac{dx dy dz}{(x^2 + y^2 + z^2)^3}$, где G — пространственная область, определяемая неравенством $x^2 + y^2 + z^2 \geq 1$.

11.88. $\int_0^{+\infty} dx \int_0^{+\infty} dy \int_0^{+\infty} e^{-(x+y+z)} dz$.

Исследовать сходимость несобственных интегралов.

11.89. $\iint_G \sin(x^2 + y^2) dx dy$, где G — область, определяемая неравенствами $x \geq 0$, $y \geq 0$.

11.90. $\iint_G \frac{dx dy}{(x^2 + y^2)^\alpha}$, где G — область, определяемая неравенством $x^2 + y^2 \geq 1$.

2. Интеграл от разрывной функции. Пусть функция $f(x, y)$ непрерывна в замкнутой ограниченной области G всюду, за исключением точки (x_0, y_0) (или линии L). Если существует конечный предел

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \iint_{G_\epsilon} f(x, y) dx dy,$$

где G_ϵ — область, получаемая из G удалением произвольной окрестности точки P_0 с диаметром, меньшим ϵ (соответственно, произвольной окрестности линии L с шириной, меньшей ϵ), то этот предел называется *несобственным интегралом функции* $f(x, y)$ по области G и обозначается $\iint_G f(x, y) dx dy$, т.е.

$$\iint_G f(x, y) dx dy = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \iint_{G_\varepsilon} f(x, y) dx dy.$$

Интеграл $\iint_G f(x, y) dx dy$ при этом называется *сходящимся*, в противном случае, т.е. если предел не существует или он равен бесконечности, — *расходящимся*.

Аналогично определяется тройной интеграл от разрывной функции.



ПРИМЕР 11.9. Исследовать сходимость несобственного

интеграла $\iint_G \frac{dx dy}{(x^2 + y^2)^\alpha}$, $\alpha > 0$, где G — круг $x^2 + y^2 \leq 1$.

- Начало координат является точкой разрыва функции $1/(x^2 + y^2)^\alpha$. Удалим из G круг с центром в начале координат радиуса ε . Тогда G_ε есть кольцо между окружностями радиусов 1 и ε . Перейдя к полярным координатам, получим при $\alpha \neq 1$

$$\iint_{G_\varepsilon} \frac{dx dy}{(x^2 + y^2)^\alpha} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_\varepsilon^1 \frac{r dr}{r^{2\alpha}} = 2\pi \frac{r^{2(1-\alpha)}}{2(1-\alpha)} \Big|_0^1 = \pi \frac{1 - \varepsilon^{2(1-\alpha)}}{1 - \alpha}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \iint_{G_\varepsilon} \frac{dx dy}{(x^2 + y^2)^\alpha} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \iint_{G_\varepsilon} \frac{dx dy}{(x^2 + y^2)^\alpha} = \\ \pi \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1 - \varepsilon^{2(1-\alpha)}}{1 - \alpha} &= \begin{cases} \frac{\pi}{1 - \alpha} & \text{при } \alpha < 1, \\ +\infty & \text{при } \alpha > 1. \end{cases} \end{aligned}$$

При $\alpha = 1$ имеем

$$\begin{aligned} \iint_G \frac{dx dy}{x^2 + y^2} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \iint_{G_\varepsilon} \frac{dx dy}{x^2 + y^2} = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_\varepsilon^1 \frac{r dr}{r^2} = 2\pi \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \ln r \Big|_0^1 = +\infty. \end{aligned}$$

Итак, при $\alpha < 1$ интеграл сходится и равен $\pi/(1-\alpha)$, а при $\alpha \geq 1$ расходится. $\blacktriangleleft$

Вычислить несобственные интегралы.

$$11.91. \iint_G \frac{dx dy}{\sqrt{xy}}, \text{ где } G \text{ — квадрат } 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1.$$

$$11.92. \iint_G \frac{dx dy}{\sqrt[3]{1-x^2-y^2}}, \text{ где } G \text{ — круг } x^2 + y^2 \leq 1.$$

Исследовать сходимость несобственных интегралов.

$$11.93. \iint_G \frac{dx dy}{(x-y)^\alpha}, \text{ где } G \text{ — треугольник } 0 \leq x \leq 1,$$

$$0 \leq y \leq x.$$

$$11.94. \iiint_G \frac{dx dy dz}{(x^2 + y^2 + z^2)^\alpha}, \text{ где } G \text{ — шар } x^2 + y^2 + z^2 \leq 1.$$

11.4. Вычисление интегралов, зависящих от параметра

1. Собственные интегралы, зависящие от параметра.

Если функция $f(x, y)$ определена и непрерывна в прямоугольнике $a \leq x \leq b$, $A \leq y \leq B$, то интеграл

$$F(y) = \int_a^b f(x, y) dx \quad (11.6)$$

называется *интегралом, зависящим от параметра*, и является непрерывной на отрезке $[A, B]$ функцией.

Интеграл более общего вида

$$F(y) = \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x, y) dx \quad (11.7)$$

также называется интегралом, зависящим от параметра, и является непрерывной функцией аргумента y на отрезке $[A, B]$, если функция $f(x, y)$ определена и непрерывна в прямоугольнике $a \leq x \leq b$, $A \leq y \leq B$, $\varphi(y)$ и $\psi(y)$ непрерывны при $y \in [A, B]$ и их значения содержатся в отрезке $[a, b]$. $\blacktriangleleft$

ПРИМЕР 11.10. Вычислить $\lim_{y \rightarrow 0} \int_{-1-y}^{1+y} \frac{dx}{1+x^2+y^2}$.

- Рассмотрим следующий интеграл, зависящий от параметра y

$$F(y) = \int_{-1-y}^{1+y} \frac{dx}{1+x^2+y^2}.$$

Так как подынтегральная функция, а также пределы интегрирования непрерывны при любых значениях своих аргументов, то $F(y)$ — непрерывная функция, поэтому

$$\begin{aligned} \lim_{y \rightarrow 0} \int_{-1-y}^{1+y} \frac{dx}{1+x^2+y^2} &= \lim_{y \rightarrow 0} F(y) = \\ &= F(0) = \int_{-1}^1 \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x \Big|_{-1}^1 = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Вычислить пределы.

11.95. $\lim_{y \rightarrow 0} \int_1^2 x^3 \cos xy \, dx.$ **11.96.** $\lim_{y \rightarrow 0} \int_0^1 \sqrt[3]{x^4 + y^2} \, dx.$



Если $f(x, y)$ и $f'_y(x, y)$ непрерывны в прямоугольнике $a \leq x \leq b$, $A \leq y \leq B$, то для интеграла (11.6) справедлива формула дифференцирования под знаком интеграла

$$F'(y) = \frac{d}{dy} \int_a^b f(x, y) dx = \int_a^b f'_y(x, y) dx.$$

Если в (11.7) при тех же условиях на f и f'_y пределы интегрирования $\varphi(y)$ и $\psi(y)$ дифференцируемы при $y \in (A, B)$, то справедлива формула

$$\begin{aligned} F'(y) &= \frac{d}{dy} \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x, y) dx = \\ &= f(\psi(y), y) \psi'(y) - f(\varphi(y), y) \varphi'(y) + \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f'_y(x, y) dx. \end{aligned} \quad (11.8)$$

ПРИМЕР 11.11. Вычислить $F'(y)$, если

$$F(y) = \int_{\sin y}^{\cos y} e^{y\sqrt{1-x^2}} dx.$$

- Так как подынтегральная функция $e^{y\sqrt{1-x^2}}$ непрерывна в области определения вместе со своей частной производной по y , а пределы интегрирования также являются дифференцируемыми функциями, то можно воспользоваться формулой (11.8)

$$\begin{aligned} F'(y) &= -e^{y\sqrt{1-\cos^2 y}} \sin y - e^{y\sqrt{1-\sin^2 y}} \cos y + \int_{\sin y}^{\cos y} \sqrt{1-x^2} e^{y\sqrt{1-x^2}} dx = \\ &= -e^{y|\sin y|} \sin y - e^{y|\cos y|} \cos y + \int_{\sin y}^{\cos y} \sqrt{1-x^2} e^{y\sqrt{1-x^2}} dx. \quad \blacktriangleleft \end{aligned}$$

Продифференцировать функции.

$$11.97. F(y) = \int_0^y \frac{\ln(1+xy)}{x} dx. \quad 11.98. F(y) = \int_{y-1}^{y+1} \frac{\sin xy}{x} dx.$$

$$11.99. F(y) = \int_y^{y^2} e^{-yx^2} dx. \quad 11.100. F(y) = \int_0^y (x-y) \sin xy dx.$$



Если $f(x, y)$ непрерывна в прямоугольнике $a \leq x \leq b$, $A \leq y \leq B$, то для интеграла (11.6) справедлива формула интегрирования под знаком интеграла

$$\int_A^B F(y) dy = \int_A^B dy \int_a^b f(x, y) dx = \int_a^b dx \int_A^B f(x, y) dy. \quad (11.9)$$



ПРИМЕР 11.12. Вычислить интеграл $\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx$ ($b > a > 0$).

- Заметим, что

$$\frac{x^b - x^a}{\ln x} = \int_a^b x^y dy.$$

Тогда искомый интеграл принимает вид

$$\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx = \int_0^1 dx \int_a^b x^y dy.$$

Так как подынтегральная функция x^y непрерывна в области определения, то можно воспользоваться формулой (11.9)

$$\int_0^1 dx \int_a^b x^y dy = \int_a^b dy \int_0^1 x^y dx = \int_a^b \frac{dy}{y+1} = \ln \frac{b+1}{a+1}. \quad \blacktriangleleft$$

Применяя интегрирование под знаком интеграла, вычислить интегралы.

$$11.101. \int_0^1 \sin\left(\ln \frac{1}{x}\right) \frac{x}{\ln x} (x^2 - 1) dx.$$

$$11.102. \int_0^1 \cos\left(\ln \frac{1}{x}\right) \frac{x}{\ln x} (x - 1) dx.$$

2. Несобственные интегралы, зависящие от параметра.

Несобственный интеграл, зависящий от параметра y , т.е.

$$F(y) = \int_a^{+\infty} f(x, y) dx, \quad (11.10)$$

где функция $f(x, y)$ непрерывна в области $x \in [a, +\infty)$, $y_1 \leq y \leq y_2$, называется *равномерно сходящимся* на отрезке $[y_1, y_2]$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $B = B(\varepsilon)$, что при всяком $b > B(\varepsilon)$ выполняется неравенство

$$\left| \int_b^{+\infty} f(x, y) dx \right| < \varepsilon$$

при любом $y \in [y_1, y_2]$.

Если интеграл (11.10) сходится равномерно на отрезке $[y_1, y_2]$, то он представляет собой непрерывную функцию аргумента y на этом промежутке.

Аналогично определяется равномерная сходимость несобственного интеграла от неограниченной функции, зависящего от параметра.

При исследовании равномерной сходимости интегралов, зависящих от параметра, часто используется *мажорантный признак Вейерштрасса*: для равномерной сходимости интеграла (11.10) достаточно, чтобы существовала функция $F(x)$, не зависящая от параметра y , такая, что

$$\text{а) } |f(x, y)| \leq F(x) \text{ при } x \in [a, +\infty), \quad \text{б) } \int_a^{+\infty} F(x) dx \text{ сходится.}$$

Функция $F(x)$ называется *мажорантой* для $f(x, y)$.

ПРИМЕР 11.13. Доказать равномерную сходимость интеграла

$$\int_0^{+\infty} e^{-xy} \cos x \, dx, \quad y \in [y_0, +\infty), \quad y_0 > 0.$$

► Покажем, что функцию $F(x) = e^{-xy_0}$ можно взять в качестве мажоранты. Действительно, если $y > y_0$, то $|e^{-xy} \cos x| \leq e^{-xy} \leq e^{-xy_0}$. Кроме того,

$$\int_0^{+\infty} e^{-xy_0} \, dx = -\frac{1}{y_0} e^{-xy_0} \Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{y_0}.$$

Следовательно, на основании мажорантного признака Вейерштрасса указанный интеграл равномерно сходится. ◀

Исследовать на равномерную сходимость в указанных промежутках интегралы.

$$\text{11.103. } \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha + 1}, \quad \alpha \in [1, +\infty).$$

$$\text{11.104. } \int_1^{+\infty} \frac{\ln^\alpha x}{x^2} dx, \quad \alpha \in [0, 1].$$

$$\text{11.105. } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos \alpha x}{1+x^2} dx, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

$$\text{11.106. } \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x-\alpha)^2 + 1}, \quad \alpha \in [0, +\infty).$$



Если для несобственного интеграла с бесконечным пределом, зависящего от параметра, выполняются следующие условия:

а) функция $f(x, y)$ непрерывна вместе со своей частной производной $f'_y(x, y)$ в области $x \in [a, +\infty)$, $y_1 \leq y \leq y_2$,

б) интеграл $\int_a^{+\infty} f(x, y) dx$ сходится при любом $y \in [y_1, y_2]$,

в) интеграл $\int_a^{+\infty} f'_y(x, y) dx$ сходится равномерно на отрезке $[y_1, y_2]$, то справедлива формула дифференцирования по параметру

$$\frac{d}{dy} \int_a^{+\infty} f(x, y) dx = \int_a^{+\infty} f'_y(x, y) dx. \quad (11.11)$$



ПРИМЕР 11.14. Вычислить интеграл

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x} \cos mx \, dx \quad (\alpha \geq \alpha_0 > 0, \beta \geq \beta_0 > 0, m \in \mathbb{Z}).$$

► Обозначим $F(\alpha, \beta) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x} \cos mx \, dx$. Заметим, что

интеграл $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x}}{x} \cos mx \, dx$ равномерно сходится при

$\alpha \geq \alpha_0$ и равен $\frac{\alpha}{\alpha^2 + m^2}$. Исходный интеграл сходится

при любых $\alpha \geq \alpha_0$ и $\beta \geq \beta_0$, а подынтегральная функция непрерывна вместе со своей частной производной по α , равной $-e^{-\alpha x} \cos mx$. Следовательно, условия а), б), в) выполнены и можно воспользоваться формулой (11.11)

$$\frac{\partial F(\alpha, \beta)}{\partial \alpha} = - \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x}}{x} \cos mx \, dx = - \frac{\alpha}{\alpha^2 + m^2}.$$

Отсюда

$$F(\alpha, \beta) = -\frac{1}{2} \ln(\alpha^2 + m^2) + C(\beta).$$

Для нахождения $C(\beta)$ полагаем в последнем равенстве $\alpha = \beta$. Имеем $0 = -\frac{1}{2} \ln(\beta^2 + m^2) + C(\beta)$, откуда

$$C(\beta) = \frac{1}{2} \ln(\beta^2 + m^2)$$

и

$$F(\alpha, \beta) = -\frac{1}{2} \ln(\alpha^2 + m^2) + \frac{1}{2} \ln(\beta^2 + m^2) = \frac{1}{2} \ln \frac{\beta^2 + m^2}{\alpha^2 + m^2}. \quad \blacktriangleleft$$

Применяя дифференцирование по параметру, вычислить интегралы.

$$11.107. \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x^2} - e^{-\beta x^2}}{x} dx \quad (\alpha > 0, \beta > 0).$$

$$11.108. \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x} \sin mx dx \quad (\alpha \geq \alpha_0 > 0, \beta \geq \beta_0 > 0,$$

$m \in \mathbb{Z}$).

$$11.109. \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \frac{\sin \beta x}{x} dx \quad (\alpha \geq \alpha_0 > 0).$$

$$11.110. \int_0^{+\infty} \frac{1 - e^{-\alpha x}}{x e^x} dx \quad (\alpha > -1).$$

Глава 12

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

12.1. Дифференциальные уравнения 1-го порядка

1. Основные понятия. Функциональное уравнение вида

$$F(x, y, y') = 0 \quad (12.1)$$

или

$$y' = f(x, y), \quad (12.2)$$

связывающее независимую переменную x , искомую функцию $y(x)$ и ее производную $y'(x)$, называется *обыкновенным дифференциальным уравнением 1-го порядка*. Часто встречается и такая форма записи дифференциального уравнения первого порядка

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0, \quad (12.3)$$

где $M(x, y)$ и $N(x, y)$ — заданные функции переменных x и y .

Решением (частным решением) уравнения (12.1), (12.2) или (12.3) на интервале (a, b) называется любая дифференцируемая функция $y = \varphi(x)$, удовлетворяющая этому уравнению, т.е. обращающая его в тождество относительно $x \in (a, b)$. Уравнение $\Phi(x, y) = 0$, определяющее это решение как неявную функцию, называется *интегралом (частным решением)* дифференциального уравнения. На плоскости с фиксированной декартовой прямоугольной системой координат уравнение $\Phi(x, y) = 0$ определяет некоторую кривую, которая называется *интегральной кривой* дифференциального уравнения.

Функция $y = \varphi(x, C)$ называется *общим решением* уравнения (12.1), (12.2) или (12.3), если при любом допустимом значении параметра C она является частным решением этого

уравнения и, кроме того, любое его частное решение может быть представлено в виде $y = \varphi(x, C_0)$ при некотором значении C_0 параметра C . Уравнение $\Phi(x, y, C) = 0$, определяющее общее решение как неявную функцию, называется *общим интегралом* дифференциального уравнения.

ПРИМЕР 12.1. Проверить подстановкой, что функция $y(x) = e^x - x - 1$ является решением дифференциального уравнения $y' = x + y$.

- Имеем $y = e^x - x - 1$, $y' = e^x - 1$ при всех $x \in \mathbb{R}$. Подставив в левую и правую части данного дифференциального уравнения полученные выражения, получим $e^x - 1 = x + (e^x - x - 1)$, т.е. тождество $y' \equiv x + y$, справедливое при всех $x \in \mathbb{R}$.

► *Задачей Коши* для дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$ называется задача об отыскании частного решения этого уравнения, удовлетворяющего заданному начальному условию $y(x_0) = y_0$.

ПРИМЕР 12.2. Показать, что функция

$$y = \frac{1}{2} \sin x - \frac{1}{2} \cos x + Ce^{-x}, \quad C \in \mathbb{R},$$

является решением дифференциального уравнения $y' + y = \sin x$. Найти частное решение, удовлетворяющее условию $y(0) = 1$. (Найти интегральную кривую, проходящую через точку $M = (0, 1)$.)

- Найдя $y' = \frac{1}{2} \cos x + \frac{1}{2} \sin x - Ce^{-x}$ и подставив выражения для y и y' в данное уравнение, при любом значении C получим тождество $\frac{1}{2} \cos x + \frac{1}{2} \sin x - Ce^{-x} + \frac{1}{2} \sin x - \frac{1}{2} \cos x + Ce^{-x} \equiv \sin x$. Это означает, что функция $y = \frac{1}{2} \sin x - \frac{1}{2} \cos x + Ce^{-x}$, $C \in \mathbb{R}$, является решением данного дифференциального уравнения. Положив $x = 0, y = 1$, из уравнения $y(0) = 1$ найдем значение параметра $C = 3/2$

и, таким образом, получим частное решение $y = \frac{1}{2} \sin x - \frac{1}{2} \cos x + \frac{3}{2} e^{-x}$. Это означает, что частное решение определяет интегральную кривую, проходящую через точку $M = (0, 1)$. ◀

ПРИМЕР 12.3. Показать, что $(x^2 - 1)(y^2 - 1) = C$ для любого фиксированного $C \in \mathbb{R}$ является интегралом дифференциального уравнения $x(y^2 - 1) + y(x^2 - 1)y' = 0$.

► Обозначим $\Phi(x, y, C) = (x^2 - 1)(y^2 - 1) - C = 0$. Дифференцируя по x левую и правую части равенства $(x^2 - 1)(y^2 - 1) - C = 0$ и учитывая, что C — постоянная, получим $((x^2 - 1)(y^2 - 1))' - C' = 0$ или $(x^2 - 1)'(y^2 - 1) + (x^2 - 1)(y^2 - 1)' = 0$. Отсюда следует $2x(y^2 - 1) + 2y(x^2 - 1)y' = 0$ или $x(y^2 - 1) + y(x^2 - 1)y' = 0$. ◀

Показать, что при любом действительном значении параметра C заданные выражения определяют решения соответствующих дифференциальных уравнений.

$$12.1. y = x\sqrt{1 - x^2}, \quad yy' = x - 2x^3.$$

$$12.2. y = \frac{\sin x}{x}, \quad xy' + y = \cos x.$$

$$12.3. y = 2 + C\sqrt{1 - x^2}, \quad (1 - x^2)y' + xy = 2x.$$

$$12.4. e^{-y} - Cx = 1, \quad y' = \frac{e^y - 1}{x}.$$

$$12.5. y = x \left(\int_0^x \frac{\sin t}{t} dt + C \right), \quad xy' = y + x \sin x.$$

$$12.6. y = x \left(\int_0^x \frac{e^t}{t} dt + C \right), \quad xy' - y = xe^x.$$

$$12.7. y^3 = \frac{1}{x} + \frac{C}{x^2}, \quad \frac{2xy^3 - 1}{x} + 3xy^2 y' = 0.$$

ПРИМЕР 12.4. Функции $y = \varphi(x)$, задана параметрически: $x = te^t$, $y = e^{-t}$, где $t \in (-1, +\infty)$. Показать, что эта функция является решением дифференциального уравнения $(1 + xy)y' + y^2 = 0$.

► Так как $\frac{dy(t)}{dx(t)} = \frac{dy(t)}{dt} \cdot \frac{dt}{dx(t)} = -e^{-t} \cdot \frac{1}{e^t + te^t} = \frac{-e^{-2t}}{1+t}$, то при каждом значении параметра $t > -1$ получаем $(1+xy)y' + y^2 = (1+te^t \cdot e^{-t}) \frac{-e^{-2t}}{1+t} + e^{-2t} = 0$, т.е. функция $y = \varphi(x)$ является решением данного уравнения. ◀

Показать, что функции $y = \varphi(x)$, заданные параметрически, являются решениями данных дифференциальных уравнений.

$$12.8. \begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t, \end{cases} \quad x + yy' = 0.$$

$$12.9. \begin{cases} x = e^{\arctg t}, \\ y = e^{-\arctg t}, \end{cases} \quad xy' - y = 0.$$

$$12.10. \begin{cases} x = t^2 + e^t, \\ y = \frac{2}{3}t^3 + (t-1)e^t, \end{cases} \quad y'^2 + e^y = x.$$

В заданном семействе выделить уравнение кривой, удовлетворяющей приведенному начальному условию.

$$12.11. y(\ln |x^2 - 1| + C) = 1, \quad y(0) = 1.$$

$$12.12. y(1 - Cx) = 1, \quad y(1) = 0,5.$$

$$12.13. y = 2 + C \cos x, \quad y(0) = -1.$$

$$12.14. x = y \cdot e^{Cy+1}, \quad y(-1) = -1.$$

$$12.15. x = y \ln Cy, \quad y(0) = 2.$$

► Пусть задано уравнение $\Phi(x, y, C) = 0$, определяющее на плоскости некоторое семейство кривых, зависящих от значений параметра C . Если составить систему двух уравнений $\begin{cases} \Phi(x, y, C) = 0, \\ \Phi'_x(x, y, C) = 0, \end{cases}$ то, исключив из этой системы параметр C , получим, вообще говоря, дифференциальное уравнение заданного семейства кривых. ◀

ПРИМЕР 12.5. Найти дифференциальное уравнение для семейства кривых, заданного уравнением $x^2 + y^2 = Cx$.

- Обозначим $\Phi(x, y, C) = x^2 + y^2 - Cx$, тогда $\Phi'_x(x, y, C) = 2x + 2yy' - C$. Составляем систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - Cx = 0, \\ 2x + 2yy' - C = 0. \end{cases}$$

Исключая параметр C , получим $x^2 + y^2 - (2x + 2yy')x = 0$ или $y^2 - x^2 - 2xyy' = 0$. Это и есть искомое дифференциальное уравнение. ◀

Вывести дифференциальные уравнения семейств кривых.

12.16. Парабол $y = x^2 + 2Cx$. **12.17.** Гипербол $y = C/x$.

12.18. Цепных линий $y = C \operatorname{ch} x$.

12.19. Гипербол $x^2 - y^2 = 2Cx$.

12.20. Парабол $y = C(x - C)^2$. **12.21.** $y = Cx - C - C^2$.

12.22. $y = \sin(x + C)$.

12.23. Вывести дифференциальное уравнение семейства кривых, обладающих в каждой точке тем свойством, что отрезок касательной, заключенный между осями координат, делится в точке касания пополам.



Если функция $f(x, y)$ уравнения (12.2) в некоторой области D непрерывна и имеет в этой области ограниченную частную производную $f'_y(x, y)$, то для любой точки $x_0, y_0 \in D$ существует единственное решение задачи Коши для уравнения (12.2) в некотором интервале $(x_0 - h, x_0 + h)$. Точки области D , в которых нарушается единственность решения задачи Коши, называются *особыми точками* дифференциального уравнения.

Решение (интегральная кривая) уравнения в области D , в каждой точке которого нарушается единственность решения задачи Коши, называется *особым решением (особой интегральной кривой)* этого уравнения. Особое решение не может быть получено из общего ни при каких значениях C (включая и $C = \pm\infty$).

Огибающая семейства интегральных кривых, определяемых общим решением $y = \varphi(x, C)$ или общим интегралом $\Phi(x, y, C) = 0$, является особой интегральной кривой. Оно находится путем исключения, если это возможно, параметра C из системы двух уравнения

$$\begin{cases} y = \varphi(x, C), \\ 0 = \varphi'_C(x, C) \end{cases} \text{ или } \begin{cases} \Phi(x, y, C) = 0, \\ \Phi'_C(x, y, C) = 0. \end{cases}$$

Найденную таким путем функцию следует подставить в данное дифференциальное уравнение и убедиться, что она является решением.

ПРИМЕР 12.6. Найти особые решения уравнения $y' = \sqrt{1 - y^2}$, зная его общее решение

$$y = \sin(x + C), \quad |x + C| \leq \frac{\pi}{2}.$$

► Составим систему уравнений

$$\begin{cases} y = \sin(x + C), \\ 0 = \cos(x + C), \end{cases} \quad |x + C| \leq \frac{\pi}{2}.$$

Исключая C , найдем две функции $y = \pm 1$, которые, очевидно, являются решениями данного уравнения и не получаются из общего решения ни при каких значениях C . Следовательно, $y = \pm 1$ — особые решения. ◀

Найти особые решения дифференциальных уравнений, зная их общие решения.

$$12.24. \quad y' = 4x\sqrt{y-1}; \quad y = (x^2 + C)^2 + 1.$$

$$12.25. \quad xy'^2 + 2xy' - y = 0; \quad (y - C)^2 = 4Cx.$$

$$12.26. \quad y = y'^2 - xy' + \frac{x^2}{2}; \quad y = \frac{x^2}{2} + Cx + C^2.$$

$$12.27. \quad y'^3 = 4y(xy' - 2y), \quad y = C(x - C)^2.$$

2. Аналитический метод решения уравнений 1-го порядка. Аналитический метод решения уравнения 1-го порядка (12.1), (12.2) и (12.3) предусматривает приведение его к виду уравнения с разделенными переменными:

$$g(y)dy = f(x)dx. \quad (12.4)$$

Уравнение (12.3) можно рассматривать как тождество, так как его левая часть зависит только от y , а правая — только от x . Следовательно, интегрируя обе части (12.4), получаем

$$\int g(y)dy = \int f(x)dx + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

ПРИМЕР 12.7. Найти общее решение уравнения $ydy + dx = xdx + dy$.

► Приведя уравнение к виду $(y-1)dy = (x-1)dx$ и проинтегрировав обе его части, находим

$$\int (y-1)dy = \int (x-1)dx + C, \text{ где } C \in \mathbb{R},$$

или
$$\frac{y^2}{2} - y = \frac{x^2}{2} - x + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Отсюда получаем $(y-1)^2 - (x-1)^2 = C_1$, где $C_1 = 2C$, так же как и C , есть произвольная постоянная. Следовательно, общий интеграл исходного уравнения имеет вид

$$(y^2 - 1) - (x^2 - 1) = C, \quad C \in \mathbb{R}. \quad \blacktriangleleft$$

В задачах 12.28–12.33 найти общие решения дифференциальных уравнений.

12.28. $(y^2 + 1)dy + dx = (2x - x^2)dx + 2ydy$.

12.29. $\frac{dy}{1+y^2} + \frac{dx}{1+x^2} = 0$.

12.30. $ydy - \frac{e^x}{1+e^x}dx = 0$. **12.31.** $\frac{ydy}{\sqrt{1+y^2}} = \frac{xdx}{\sqrt{1+4x^2}}$.

12.32. $2(ydy - xdx) = \frac{1}{y^2}dy - \frac{1}{x^2}dx$.

12.33. $\frac{dy}{y \ln y} - \frac{dx}{\sin x} = 0$.

В задачах 12.34–12.37 найти частные решения дифференциальных уравнений, удовлетворяющие заданным начальным условиям.

12.34. $\frac{dy}{y} = \frac{dx}{\cos x}$; $y(0) = 1$.

12.35. $e^{1-2x+x^2}(1+x)dx + \operatorname{ctg} y dy = 0$; $y(1) = \frac{\pi}{2}$.

12.36. $y^2 dy - \frac{e^x dx}{1+e^{2x}} = 0$; $y(0) = 0$.

12.37. $dx - \frac{\ln y}{y} dy = 0$; $y(2) = 1$.

Ниже в подп. 3–8 параграфа 12.1 приведены простейшие типы дифференциальных уравнений 1-го порядка, каждый из которых может быть представлен в виде (12.4) уравнения с разделенными переменными и, следовательно, проинтегрирован или сведен к нему.

3. Уравнения с разделяющимися переменными. Пусть в уравнении (12.2) функция $f(x, y)$ может быть разложена на множители, каждый из которых зависит только от одной переменной, т.е.

$$\frac{dy}{dx} \equiv f_1(x)f_2(y),$$

или в уравнении (12.3) коэффициенты при dx и dy могут быть представлены в виде $M(x, y) = M_1(x)M_2(y)$, $N(x, y) = N_1(x)N_2(y)$, т.е.

$$M_1(x)M_2(y)dx + N_1(x)N_2(y)dy = 0.$$

Тогда первое уравнение делением обеих его частей на $f_2(y)$, а второе — делением на $N_1(x)M_2(y)$ соответственно приводят к виду (12.3) уравнения с разделенными переменными

$$\frac{1}{f_2(y)}dy = f_1(x)dx, \quad \frac{N_2(y)}{M_2(y)}dy = -\frac{M_1(x)}{N_1(x)}dx$$

и называются уравнениями с *разделяющимися переменными*. Интегрируя левые части этих уравнений по y , а правые по x , приходим в каждом из них к общему интегралу исходного дифференциального уравнения.

Приведение исходного дифференциального уравнения 1-го порядка к виду (12.3) с разделенными переменными не всегда осуществимо эквивалентными преобразованиями. Поэтому необходимо следить за возможной потерей конкретных решений.

Если в уравнении с разделяющимися переменными $y' = f_1(x)f_2(y)$ функция $f_2(y)$ имеет действительный корень y_0 , т.е. $f_2(y_0) = 0$, то функция $y(x) = y_0$ является решением уравнения (в чем легко убедиться непосредственной подстановкой). При делении обеих частей уравнения на $f_2(y)$ решение $y(x) = y_0$ может быть потеряно.

Аналогично, при интегрировании уравнения $M_1(x)M_2(y)dx + N_1(x)N_2(y)dy = 0$ могут быть потеряны интегральные кривые $x = x_0$ и $y(x) = y_0$, где x_0 — действи-

тельный корень уравнения $N_1(x) = 0$, а y_0 — действительный корень уравнения $M_2(y) = 0$.

Поэтому, получив указанным выше методом разделения переменных общий интеграл уравнения, необходимо проверить, входят ли в его состав (при подходящих числовых значениях параметра C) упомянутые решения. Если входят, то потери решений нет. Если не входят, то в окончательном ответе кроме общего интеграла следует указать и эти решения.

ПРИМЕР 12.8. Найти общее решение уравнения $y' = y$.

- Данное уравнение $\frac{dy}{dx} = y$ при условии, что $y \neq 0$, преобразуем к виду $\frac{dy}{y} = dx$. Интегрируя левую и правую части полученного уравнения, имеем $\ln |y| = x + C$. Отсюда следует, что

$$|y| = e^{x+C} = e^C e^x, \text{ где } C \in \mathbb{R},$$

$$\text{или } |y| = C_1 e^x, \text{ где } C_1 = e^C, C_1 > 0.$$

Освобождаясь от модуля, получим $y = \pm C_1 e^x$ или $y = C_2 e^x$, где $C_2 = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Проверкой убеждаемся, что $y = 0$ также является решением. Следовательно, решением уравнения являются функции $y = C_2 e^x$, где $C_2 = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, и $y = 0$. Заметим, что решение $y = 0$ получается из формулы общего решения, если снять ограничение $C_2 \neq 0$. Значит, решением данного уравнения будут все функции вида $y = Ce^x$, где $C \in \mathbb{R}$. ◀

ПРИМЕР 12.9. Найти общее решение уравнения

$$x(y^2 - 1)dx + y(x^2 - 1)dy = 0.$$

- Разделив данное уравнение на $(x^2 - 1)(y^2 - 1) \neq 0$, получим $\frac{x dx}{x^2 - 1} + \frac{y dy}{y^2 - 1} = 0$ или $\frac{y dy}{y^2 - 1} = -\frac{x dx}{x^2 - 1}$. Интегрируем:

$$\int \frac{y dy}{y^2 - 1} = \int \left(-\frac{x}{x^2 - 1} \right) dx + C, \text{ где } C \in \mathbb{R},$$

$$\text{или } \frac{1}{2} \ln |y^2 - 1| = -\frac{1}{2} \ln |x^2 - 1| + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Отсюда получаем

$$y^2 - 1 = \pm \frac{e^{2C}}{x^2 - 1}, \quad C \in \mathbb{R}, \text{ или } (x^2 - 1)(y^2 - 1) = C_1, \quad C_1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Дополнительные решения $x = \pm 1$, $y = \pm 1$, определяемые из условия $(x^2 - 1)(y^2 - 1) = 0$, получаются из общего интеграла при $C_1 = 0$. Следовательно, общий интеграл данного уравнения имеет вид $(x^2 - 1)(y^2 - 1) = C$, $C \in \mathbb{R}$. ◀

Найти общие решения дифференциальных уравнений.

$$12.38. \quad y' = \frac{x}{y}.$$

$$12.39. \quad yy' + x = 0.$$

$$12.40. \quad y' = e^{x+y}.$$

$$12.41. \quad y' = e^{x+y} + e^{x-y}.$$

$$12.42. \quad y' = \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y. \quad 12.43. \quad xy dx + \sqrt{1 - x^2} dy = 0.$$

$$12.44. \quad \frac{\operatorname{tg} y}{\cos^2 x} dx + \frac{\operatorname{tg} x}{\cos^2 y} dy = 0.$$

$$12.45. \quad (1 + x)y dx + (1 - y)x dy = 0.$$

$$12.46. \quad (\sqrt{xy} - \sqrt{x}) dx + (\sqrt{xy} + \sqrt{y}) dy = 0.$$

$$12.47. \quad y' + \sin(x + y) = \sin(x - y).$$

$$12.48. \quad y' = \sqrt{\frac{a^2 - y^2}{a^2 - x^2}}. \quad 12.49. \quad x^2(1 - y)y' + y^2 + xy^2 = 0.$$

ПРИМЕР 12.10. Найти общее решение уравнения

$$y' = \sqrt[3]{(4x - y + 1)^2}.$$

- Данное уравнение приводится к уравнению с разделяющимися уравнениями, если положить $4x - y + 1 = z$. Дифференцируя обе части этого равенства, получаем $4 - y' = z'$. Тогда уравнение относительно z имеет вид $4 - z' = z^{2/3}$, или $z' = 4 - z^{2/3}$. Два решения этого уравнения получаются из равенства $z^{2/3} = 4$, т.е. $z = -2$ и $z = 2$.

Находим остальные решения

$$\int \frac{1}{4 - z^{2/3}} dz = \int dx + C, \text{ где } C \in \mathbb{R},$$

$$\text{или } -3z + 3 \ln \left| \frac{z+2}{z-2} \right| = x + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Отсюда, выполняя обратную замену, получаем общий интеграл

$$3 \ln \left| \frac{\sqrt[3]{4x-y+1}+2}{\sqrt[3]{4x-y+1}-2} \right| = 3\sqrt[3]{4x-y+1} + x + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Из равенств $z = -2$ и $z = 2$ получаем $4x - y + 9 = 0$ и $4x - y - 7 = 0$. 

Выполнив соответствующую замену, решить уравнения.

12.50. $y' = \cos(x+y)$. **12.51.** $y' = (4x+y+1)^2$.

12.52. $y' + 2y = 3x + 5$.

12.53. $(1+x^2y^2)y + (xy-1)^2xy' = 0$ (подстановка $xy = t$).

Найти частные решения, удовлетворяющих указанным условиям.

12.54. $y' \cos x = \frac{y}{\ln y}$; $y(0) = 1$.

12.55. $(1+x^2)dy + ydx = 0$; $y(1) = 1$.

12.56. $x\sqrt{1+y^2} + y\sqrt{1+x^2} \frac{dy}{dx} = 0$; $y(0) = 1$.

12.57. $\frac{yy'}{x} + e^y = 0$; $y(1) = 0$. **12.58.** $e^{1+x^2} \operatorname{tg} y dx - \frac{e^{2x}}{x-1} dy = 0$.

12.59. $(1+e^{2x})y^2 dy = e^x dx$; $y(0) = 0$.

12.60. $y' + \cos(x+2y) = \cos(x-2y)$; $y(0) = \frac{\pi}{4}$.

12.61. $\frac{yx}{y'} = \ln y$; $y(2) = 1$.

12.62. Найти кривую, проходящую через точку $(0, -2)$ и обладающую тем свойством, что тангенс угла наклона касательной в каждой точке кривой равняется ординате этой точки, увеличенной на 3 единицы.

12.63. Найти все кривые, обладающие в каждой точке тем свойством, что отрезок касательной, заключенный между осями координат, делится в точке касания пополам (см. задачу 12.23).

12.64. Доказать, что кривая, угловой коэффициент касательной которой в любой точке пропорционален абсциссе точки касания, есть парабола.



Последовательные приближения, определяемые формулами

$$y_0(x) = y_0, \quad y_k(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y_{k-1}(t)) dt, \quad k = 1, 2, \dots,$$

равномерно сходятся к решению дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$ в некоторой окрестности $(x_0 - h, x_0 + h)$ точки x_0 , если функция $f(x, y)$ удовлетворяет условиям, сформулированным в 12.1.



ПРИМЕР 12.11. Найти решение уравнения $y' = y$, удовлетворяющее начальному условию $y(0) = 1$, методом последовательного приближения.

► Данное уравнение можно решить достаточно просто другими методами. Решим его методом последовательных приближений, чтобы продемонстрировать этот метод и убедиться в том, что он дает правильное решение. Последовательные приближения к истинному решению имеют вид:

$$y_0(x) = 1, \quad y_1(x) = 1 + \int_0^x 1 dt = 1 + x, \quad y_2(x) = 1 + \int_0^x (1 + t) dt = 1 + x + \frac{x^2}{2} \text{ и т.д.}$$

Нетрудно видеть, что для любого n по-

лучаем $y_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$. Ясно, что на любом

конечном отрезке $[a, b]$ числовой прямой $y_n(x)$ равномерно сходятся к e^x

Следовательно, $y(x) = e^x$ — искомая функция. ◀

Построить последовательные приближения $y_0(x)$, $y_1(x)$, $y_2(x)$ к решению уравнения с данным начальным условием.

12.65. $y' = x - y^2$; $y(0) = 0$.

12.66. $y' = y + e^{y-1}$; $y(0)=1$. **12.67.** $y' = 1 + x \sin y$; $y(\pi) = 2\pi$.

4. Однородные уравнения. Дифференциальное уравнение 1-го порядка называется *однородным*, если его можно привести к виду

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right) \quad (12.5)$$

или

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0, \quad (12.6)$$

где $M(x, y)$ и $N(x, y)$ — однородные функции одного порядка, т.е. существует такое $k \in \mathbb{Z}$, что $M(tx, ty) = t^k M(x, y)$ и $N(tx, ty) = t^k N(x, y)$ тождественно относительно x, y и $t \neq 0$.

С помощью подстановки $\frac{y}{x} = u(x)$ однородные уравнения (12.5) и (12.6) преобразуются в уравнения с разделяющимися переменными.



ПРИМЕР 12.12. Решить уравнение

$$(y - x)dx + (y + x)dy = 0.$$

► Данное уравнение — уравнение вида (12.6), где функции $M(x, y) = y - x$ и $N(x, y) = y + x$ — однородные функции одного порядка. Поделив слагаемые уравнения на $y + x \neq 0$ (предварительно проверив, что функция $y = -x$ не является решением), приведем уравнение к виду $\frac{dy}{dx} = \frac{x - y}{x + y}$. Делаем замену $y = ux$, тогда $y' = \frac{du}{dx}x + u$.

Подставляя y и y' в уравнение, получим $x \frac{du}{dx} + u = \frac{x - ux}{x + ux}$ или $x \frac{du}{dx} = \frac{1 - u}{1 + u} - u$. Разделяем переменные $\frac{dx}{x} = \frac{(1 + u)du}{1 - 2u - u^2}$ и, интегрируя при $1 - 2u - u^2 \neq 0$, имеем $\ln |Cx| = -\frac{1}{2} \ln |1 - 2u - u^2|$, где $C \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Следовательно,

$$Cx = \frac{1}{\sqrt{|1 - 2u - u^2|}}, \quad C \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Это решение можно преобразовать к виду $x^2 |1 - 2u - u^2| = C_0$, $C_0 \in (0, +\infty)$, или с учетом потерянных решений, которые получаются из уравнения $1 - 2u - u^2 = 0$, запишем общий интеграл $x^2(1 - 2u - u^2) = C_1$, $C_1 \in \mathbb{R}$. Выполнив обратную замену, имеем $x^2 - 2xy - y^2 = C$, $C \in \mathbb{R}$. ◀



Дифференциальные уравнения вида

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{ax + by + c}{a_1x + b_1y + c_1}\right) \quad (12.7)$$

в случае $\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \neq 0$ приводятся к однородным (или непосредственно к уравнениям с разделяющимися переменными) уравнениям с помощью замены переменных $x = u + m$, $y = v + n$, где m и n находятся из системы уравнений

$$\begin{cases} am + bn + c = 0, \\ a_1m + b_1n + c_1 = 0. \end{cases}$$

Так как $dx = du$, $dy = dv$, то уравнение (12.7) преобразуется к виду (12.5) относительно функции $v(u)$:

$$\begin{aligned} \frac{dv}{du} &= f\left(\frac{au + bv + \overbrace{am + bn + c}^{=0}}{a_1u + b_1v + \underbrace{a_1m + b_1n + c_1}_{=0}}\right) = f\left(\frac{au + bv}{a_1u + b_1v}\right) = \\ &= f\left(\frac{a + b\frac{v}{u}}{a_1 + b_1\frac{v}{u}}\right) = \varphi\left(\frac{v}{u}\right). \end{aligned}$$

Если определитель $\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = 0$, то элементы его строк пропорциональны: $a_1 = ka$, $b_1 = kb$. Тогда, применяя подстановку $ax + by = z$, получаем: $a_1x + b_1y = kz$. Таким

образом, приходим к уравнению с разделяющимися переменными:

$$\frac{dz}{dx} = bf\left(\frac{z+c}{kz+c_1}\right) + a.$$



Найти общие решения дифференциальных уравнений.

12.68. $y' = \frac{y}{x} + \frac{x}{y}$.

12.69. $y' = \frac{y}{x} + \cos \frac{y}{x}$.

12.70. $y' = \frac{x+y}{x-y}$.

12.71. $y' = \frac{y^2 + xy - x^2}{y^2}$.

12.72. $y' = \frac{2xy}{x^2 + y^2}$.

12.73. $y' = \frac{y(1 + \ln y - \ln x)}{x}$.

12.74. $xy' - y = \frac{x}{\arctg(y/x)}$.

12.75. $xy' \ln \frac{y}{x} = x + y \ln \frac{y}{x}$.

12.76. $xyy' = y^2 + 2x^2$.

12.77. $(x+y)dx + xdy = 0$.

12.78. $xdy - ydx = \sqrt{x^2 + y^2} dx$.

12.79. $(x^2 + y^2)dx - 2xydy = 0$.

12.80. $x(ydx + xdy) \cos \frac{y}{x} = y(xdy - ydx) \sin \frac{y}{x}$.

12.81. $\left(x - y \cos \frac{y}{x}\right) dx + x \cos \frac{y}{x} dy = 0$.

12.82. $(2\sqrt{yx} - y)dx + xdy = 0$.

12.83. $xy' \sin \frac{y}{x} + x = y \sin \frac{y}{x}$.

12.84. $3y \sin \frac{3x}{y} dx + \left(y - 3x \sin \frac{3x}{y}\right) dy = 0$.

12.85. $(8y + 10x)dx + (5y + 7x)dy = 0$.

12.86. $(2x - y + 1)dx + (2y - x - 1)dy = 0$.

12.87. $(x + y + 1)dx + (2x + 2y - 1)dy = 0$.

12.88. $x - y - 1 + (y - x + 2)y' = 0$.

Найти частные решения, удовлетворяющие указанным условиям.

12.89. $(y^2 - 3x^2)dy + 2xydx = 0$; $y(1) = -2$.

$$12.90. \quad xy' - y = x \operatorname{tg} \frac{y}{x}; \quad y(1) = \frac{\pi}{2}.$$

$$12.91. \quad y' = 4 + \frac{y}{x} + \left(\frac{y}{x}\right)^2; \quad y(1) = 2.$$

$$12.92. \quad xy' = x \cdot e^{y/x} + y; \quad y(1) = 0.$$

$$12.93. \quad (x^4 + 6x^2y^2 + y^4)dx + 4xy(x^2 + y^2)dy = 0; \quad y(1) = 0.$$

5. Линейные уравнения. Дифференциальное уравнение $y' = f(x, y)$, разрешенное относительно производной, называется *линейным*, если его правая часть линейна относительно y :

$$y' = P(x)y + Q(x), \quad (12.8)$$

где $P(x)$ и $Q(x)$ — заданные функции. Если $Q(x) \equiv 0$, то уравнение (12.8) принимает вид $y' = P(x)y$, называется *линейным однородным* и является уравнением с разделяющимися переменными, и общее его решение имеет вид

$$y = Ce^{\int P(x)dx}, \quad (12.9)$$

где C — произвольная постоянная, а $\int P(x)dx$ — одна из первообразных функции $P(x)$.

Интегрирование линейного неоднородного уравнения (12.8) можно проводить одним из следующих методов.

а) *Метод вариации постоянной.* В этом случае общее решение уравнения (12.8) ищется в виде

$$y = C(x)e^{\int P(x)dx}, \quad (12.10)$$

который получается из (12.9) заменой постоянной C функцией $C(x)$. Дифференцируя выражение (12.10) и подставляя в уравнение (12.8), получим для неизвестной функции $C(x)$ уравнение с разделяющимися переменными

$$C'(x) = Q(x)e^{-\int P(x)dx}.$$

Его общее решение

$$C(x) = \int Q(x)e^{-\int P(x)dx} dx + C,$$

где C — произвольная постоянная, а $\int Q(x)e^{-\int P(x)dx} dx$ — одна из первообразных функции $Q(x)e^{-\int P(x)dx}$. Подставляя

найденное выражение для $C(x)$ в формулу (12.10), получаем общее решение линейного уравнения (12.6)

$$y = e^{\int P(x)dx} \left(\int Q(x)e^{-\int P(x)dx} + C \right). \quad (12.11)$$

а) *Метод подстановки.* В этом случае решение уравнения (12.8) ищется в виде произведения $y(x) = u(x)v(x)$, в котором функции $u(x)$ и $v(x)$ подбираются так, чтобы их произведение удовлетворило данному уравнению. Подставляя $y = uv$ в уравнение (12.8), получаем:

$$u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx} = P(x)uv + Q(x)$$

или

$$u \frac{dv}{dx} + v \left[\frac{du}{dx} - P(x)u \right] = Q(x). \quad (12.12)$$

Функцию $u(x)$ выбираем так, чтобы выражение в скобках в последнем уравнении обнулялось. Для этого интегрируем уравнение с разделяющимися переменными $\frac{du}{dx} - P(x)u = 0$ и выбираем какое-либо частное его решение $u = u_1(x)$. Подставляя функцию $u_1(x)$ в уравнение (12.12), получаем уравнение относительно функции $v(x)$: $u_1(x) \frac{dv}{dx} = Q(x)$. Находим общее решение этого уравнения $v = v(x, C)$. Тогда общее решение уравнения (12.6) будет иметь вид

$$y(x) = u_1(x)v(x, C).$$



ПРИМЕР 12.13. Решить уравнение

$$y' \cos x - y \sin x = \cos^2 x.$$

- 1-й способ (метод вариации постоянной). Перепишем уравнение в виде $\frac{dy}{dx} - y \operatorname{tg} x = \cos x$. Это уравнение является линейным неоднородным. Находим общее решение соответствующего ему однородного уравнения $\frac{dy}{dx} -$

$-y \operatorname{tg} x = 0$. Для этого приводим его к виду $\frac{dy}{y} = \operatorname{tg} x dx$ и

интегрируем. В итоге получаем $y = \frac{C}{\cos x}$, $C \in \mathbb{R}$.

Теперь ищем общее решение исходного уравнения в виде

$$y = \frac{C(x)}{\cos x}.$$

Находим производную

$$y' = \frac{C'(x)\cos x + C(x)\sin x}{\cos^2 x}$$

и, подставляя в уравнение

$$\frac{dC}{dx} \cdot \frac{1}{\cos x} + C \frac{\sin x}{\cos^2 x} - \frac{C}{\cos x} \cdot \operatorname{tg} x = \cos x,$$

получаем $\frac{dC}{dx} = \cos^2 x$.

Отсюда $C = \int \cos^2 x dx + C_1 = \frac{1}{2}x + \frac{\sin 2x}{4} + C_1$, $C_1 \in \mathbb{R}$, и, следовательно, искомое решение имеет вид

$$y = \frac{1}{\cos x} \left(\frac{1}{2}x + \frac{\sin 2x}{4} + C \right), \quad C \in \mathbb{R}.$$

2-й способ (метод подстановки). Будем искать решение

уравнения $\frac{dy}{dx} - y \operatorname{tg} x = \cos x$ (в этом случае $P(x) = \operatorname{tg} x$, $Q(x) = \cos x$) в виде $y(x) = u(x)v(x)$. После подстановки

$$y = uv \text{ в уравнение получаем: } u \frac{dv}{dx} + v \left[\frac{du}{dx} - \operatorname{tg} x u \right] = \cos x.$$

Из уравнения $\frac{du}{dx} - \operatorname{tg} x u = 0$ находим его частное решение, например, взяв в его общем решении значение $C = 1$,

т.е. $u = u_1(x) = \frac{1}{\cos x}$. Тогда из уравнения $\frac{1}{\cos x} \cdot \frac{dv}{dx} = \cos x$

получаем $v(x) = C + \int \cos^2 x dx = C + \frac{1}{2}x + \frac{\sin 2x}{4}$, $C \in \mathbb{R}$.

Соответственно, подставляя в формулу $y(x) = u_1(x)v(x)$, находим искомое общее решение

$$y = \frac{1}{\cos x} \left(\frac{1}{2}x + \frac{\sin 2x}{4} + C \right), \quad C \in \mathbb{R}. \quad \blacktriangleleft$$

Найти общие решения дифференциальных уравнений.

$$12.94. \quad y' \cos x + y \sin x = 1. \quad 12.95. \quad y' + \frac{2}{x}y = x^2.$$

$$12.96. \quad y'x - x^2 - y = 0. \quad 12.97. \quad y' - \frac{2y}{x+1} = (x+1)^3.$$

$$12.98. \quad y' + y \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x.$$

$$12.99. \quad (x - y^2)dx + 2xydy = 0.$$

$$12.100. \quad xy' - x^2 - y = 0. \quad 12.101. \quad y' + \frac{1-2x}{x^2}y = 1.$$

$$12.102. \quad y' = 2xy - x^3 + x. \quad 12.103. \quad y' = \frac{ay}{x} + \frac{x+1}{x}.$$

$$12.104. \quad (x - x^3)y' + (2x^2 - 1)y = ax^3.$$

$$12.105. \quad y' + \frac{n}{x}y = \frac{a}{x^n}.$$

$$12.106. \quad y' - \frac{n}{x}y = e^x x^n.$$

$$12.107. \quad (x - 2xy - y^2)dy + y^2dx = 0.$$

$$12.108. \quad y' - y \cdot \operatorname{tg} x = \frac{2x}{\cos x}. \quad 12.109. \quad e^{x^2}(y' + 2xy) = 2x.$$



Некоторые уравнения становятся линейными, если поменять местами искомую функцию и независимую переменную. Например, уравнение $y = (2x + y^3)y'$, в котором y является функцией от x — нелинейное. Запишем его в дифференциалах: $ydx - (2x + y^3)dy = 0$. Так как в это уравнение x и dx входят линейно, то уравнение будет линейным, если x считать искомой функцией, а y — независимым переменным. Это уравнение может быть записано в виде

$$\frac{dx}{dy} = \frac{2}{y}x + y^2$$

и решается аналогично (12.8).



Найти общие решения дифференциальных уравнений.

$$12.110. (x + y^2)dy = ydx. \quad 12.111. (2e^y - x)y' = 1.$$

$$12.112. y' = \frac{y}{3x - y^2}. \quad 12.113. (1 + 2xy)y' = y(y - 1).$$



Дифференциальное уравнение 1-го порядка вида

$$y' = P(x)y + Q(x)y^m, \quad (12.13)$$

где $m \neq 0$, $m \neq 1$ (при $m = 0$ уравнение (12.13) — линейное, а при $m = 1$ — уравнение с разделяющимися переменными) называется *уравнением Бернулли*. Его можно проинтегрировать с помощью подстановки $y(x) = u(x)v(x)$ или свести к линейному подстановкой $z = y^{1-m}$. Следует учесть, что при $m > 1$ может быть потеряно решение $y = 0$.



ПРИМЕР 12.14. Решить уравнение $y' = \frac{y}{2x} - \frac{1}{2y}$.

► Это уравнение Бернулли с $m = -1$. Полагаем $z = y^2$ и получаем линейное уравнение $z' = \frac{z}{x} - 1$. Решая соответ-

ствующее однородное уравнение $z' = \frac{z}{x}$, находим $z = Cx$.

Отсюда методом вариации постоянной, т.е. полагая $z = C(x)x$, получаем общее решение линейного уравнения в виде $z = x \ln \frac{C}{x}$, $C \in \mathbb{R}$, или, окончательно,

$$y^2 = x \ln \frac{C}{x}, C \in \mathbb{R}. \quad \blacktriangleleft$$

Найти общие решения дифференциальных уравнений.

$$12.114. y' - \frac{y}{x} = x^2 y^2. \quad 12.115. y' + y = xy^3.$$

$$12.116. 3y \cos^2 x dx + \sin x dy = y^2 \sin^2 x dx.$$

$$12.117. y' + \frac{y}{x+1} + y^2 = 0. \quad 12.118. xy' - 4y = x^2 \sqrt{y}.$$

$$12.119. y' + xy = x^3 y^3. \quad 12.120. y' - y \operatorname{ctg} x = \frac{y^3}{\sin x}.$$

$$12.121. \quad xy' + y = 2y^2 \ln x.$$

$$12.122. \quad (x^2 - 1)y' + xy = y^2. \quad 12.123. \quad x^3 y' - x^2 y - y^2 = 0.$$

$$12.124. \quad x^2(x - 1)y' - x(x - 2)y = y^2.$$

$$12.125. \quad (x - y^2)dx + 2xydy = 0.$$

$$12.126. \quad y' - \frac{xy}{2(x^2 - 1)} - \frac{x}{2y} = 0.$$

12.127. Найти кривые, у которых отрезок, отсекаемый касательной на оси Oy , равен квадрату ординаты точки касания.

6. Уравнение в полных дифференциалах. Дифференциальное уравнение 1-го порядка вида

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0. \quad (12.14)$$

называется *уравнением в полных дифференциалах*, если левая часть этого уравнения представляет полный дифференциал некоторой функции $U(x, y)$, т.е.

$$M(x, y) = \frac{4U(x, y)}{4x}, \quad N(x, y) = \frac{4U(x, y)}{4y}. \quad (12.15)$$

Для того чтобы уравнение (12.14) было уравнением в полных дифференциалах, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\frac{4M(x, y)}{4y} = \frac{4N(x, y)}{4x}.$$

Если уравнение (12.14) было уравнением в полных дифференциалах, то оно может быть записано в виде $dU(x, y) = 0$. Общий интеграл этого уравнения $U(x, y) = C$.

Функция $U = U(x, y)$ может быть найдена следующим образом. Интегрируя равенство $\frac{4U}{4x} = M(x, y)$ по x при фиксированном y и замечая, что произвольная постоянная в этом случае может зависеть от y , имеем

$$U(x, y) = \int M(x, y)dx + \varphi(y), \quad (12.16)$$

затем из равенства

$$\frac{\partial}{\partial y} \int M(x, y)dx + \varphi'(y) = N(x, y)$$

находим функцию $\varphi(y)$, подставив которую в уравнение (12.16), получим $U(x, y)$.

Очевидно, что искомая функция $U(x, y)$ определена с точностью до произвольной аддитивной постоянной. Для записи общего интеграла исходного уравнения достаточно выбрать одну из функций получаемого семейства.

Другой способ отыскания функции $U(x, y)$ состоит в вычислении криволинейного интеграла 2-го рода

$$\begin{aligned} \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} M(x, y)dx + N(x, y)dy &= \int_{x_0}^x M(x, y_0)dx + \int_{y_0}^y N(x, y)dy = \\ &= \int_{y_0}^y N(x_0, y)dy + \int_{x_0}^x M(x, y)dx, \end{aligned}$$

где точки (x_0, y_0) и (x, y) и путь интегрирования лежат в области непрерывности функций $M(x, y)$ и $N(x, y)$ и их частных производных, причем (x_0, y_0) — некоторая фиксированная точка. $\triangleleft$

ПРИМЕР 12.15. Решить уравнение $(y^3 - x)dy - ydx = 0$, предварительно убедившись, что это есть уравнение в полных дифференциалах.

► Проверяем условие (12.15):

$$\frac{\partial N(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(y^3 - x) = -1, \quad \frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(-y) = -1.$$

Условие (12.15) выполнено, следовательно, заданное уравнение есть уравнение в полных дифференциалах. Найдем функцию $U(x, y)$.

1-й способ. Интегрируем по x при постоянном y равенство

$$\frac{\partial U}{\partial x} = M(x, y) = -y, \text{ получим}$$

$$U(x, y) = \int (-y)dx + \varphi(y) = -xy + \varphi(y).$$

Подставляя полученное значение в равенство $\frac{\partial U}{\partial y} =$

$$= N(x, y) = y^3 - x, \text{ имеем } -x + \varphi'(y) = y^3 - x, \text{ откуда}$$

$$\varphi(y) = \int y^3 dy = \frac{y^4}{4} + C_1.$$

Положив, например, $C_1 = 0$, находим $U(x, y) = \frac{y^4}{4} - xy$.

Следовательно, общий интеграл заданного уравнения имеет вид $\frac{y^4}{4} - xy = C$, $C \in \mathbb{R}$.

2-й способ. $U(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} (-y)dx + (y^3 - x)dy$. Положим,

например, $x_0 = 0$, $y_0 = 0$. Тогда $M(x, y_0) = 0$ и

$$U(x, y) = \int_0^y (y^3 - x)dy = \frac{y^4}{4} - xy. \quad \blacktriangleleft$$

Решить дифференциальные уравнения, предварительно убедившись, что это есть уравнения в полных дифференциалах.

12.128. $(2x - y)dx + (2y - x)dy = 0$.

12.129. $(y - 3x^2)dx = (4y - x)dy$.

12.130. $2(3xy^2 + 2x^3)dx + 3(2x^2y + y^2)dy = 0$.

12.131. $\frac{xdx + (2x + y)dy}{(x + y)^2} = 0$.

12.132. $\left(\frac{1}{x^2} + \frac{3y^2}{x^4} \right) dx = \frac{2ydy}{x^3}$.

12.133. $xdx + ydy = \frac{ydx - xdy}{x^2 + y^2}$.

12.134. $\frac{2x}{y^3}dx + \frac{y^2 - 3x^2}{y^4}dy = 0$. **12.135.** $xy' \cos y + \sin y = 0$.

12.136. $(x \cos y + \cos x)y' - y \sin x + \sin y = 0$.

12.137. $\left(\frac{1}{y} \sin \frac{x}{y} - \frac{y}{x^2} \cos \frac{y}{x} + 1 \right) dx +$
 $+ \left(\frac{1}{x} \cos \frac{y}{x} - \frac{x}{y^2} \sin \frac{x}{y} + \frac{1}{y^2} \right) dy = 0$.

12.138. $(x \cdot e^y + e^x)y' = -e^y - ye^x$.

12.139. $(2x - ye^{-x})dx + e^{-x}dy = 0$.

$$12.140. \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 - y^2}} + y \right) dx + \left(x + \frac{1}{y^2} - \frac{y}{\sqrt{x^2 - y^2}} \right) dy = 0.$$

$$12.141. \frac{xdx + ydy}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}} + \frac{ydx - xdy}{x^2 - y^2} = 0.$$



Для решения некоторых уравнений можно применять метод выделения полных дифференциалов, используя известные формулы

$$d(xy) = ydx + xdy, \quad d(y^2) = 2ydy,$$

$$d\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{ydx - xdy}{y^2}, \quad d(\ln y) = \frac{dy}{y},$$

и т.д.



ПРИМЕР 12.16. Решить уравнение

$$ydx - (4x^2y + x)dy = 0.$$

► Преобразуем уравнение к виду $ydx - xdy = 4x^2ydy$. Заметим, что $ydx - xdy = -x^2d\left(\frac{y}{x}\right)$. Тогда делим уравнение на $-x^2$, получим

$$\frac{xdy - ydx}{x^2} = -4ydy, \text{ или } d\left(\frac{y}{x}\right) = d(-2y^2),$$

являющееся уравнением в полных дифференциалах. Интегрируя непосредственно, получаем общий интеграл уравнения $\frac{y}{x} + 2y^2 = C$.

Кроме того, при делении на x^2 было потеряно решение $x = 0$. ◀

Решить дифференциальные уравнения, выделяя в них полные дифференциалы.

$$12.142. \frac{xdx + ydy}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{xdy - ydx}{x^2} = 0.$$

$$12.143. (2x^2y^2 + y)dx + (x^3y - x)dy = 0.$$

$$12.144. (2x^2y^3 - 1)ydx + (4x^2y^3 - 1)x dy = 0.$$

$$12.145. (y^2 + x^2 - a)x dx + (y^2 + x^2 + a)y dy = 0.$$

$$12.146. (2x^3y^2 - y)dx + (2x^2y^3 - x)dy = 0.$$

$$12.147. \left(\sin y - y \sin x + \frac{1}{x} \right) dx + \left(x \cos y + \cos x - \frac{1}{y} \right) dy = 0.$$

$$12.148. 2x \cos^2 y dx + (2y - x^2 \sin 2y) dy = 0.$$

$$12.149. \left(2x + e^{x/y} \right) dx + \left(1 - \frac{x}{y} \right) e^{x/y} dy = 0.$$

7. Уравнения, не разрешенные относительно производной. Дифференциальные уравнения вида $F(x, y, y') = 0$ можно решать следующими методами.

а) Разрешить уравнение относительно y' , т.е. из уравнения $F(x, y, y') = 0$ выразить y' через x и y . Получится одно или несколько уравнений вида $y' = f(x, y)$. Каждое из них далее нужно решить.

б) В некоторых случаях применим *метод введения параметра*. Пусть дифференциальное уравнение $F(x, y, y') = 0$ можно разрешить относительно y , т.е. записать в виде $y = f(x, y')$. Введя параметр

$$p = \frac{dy}{dx} = y', \quad (12.17)$$

получим

$$y = f(x, p). \quad (12.18)$$

Взяв полный дифференциал от обеих частей равенства (12.18) и заменив dy на $p dx$ (в силу (12.17)), получим уравнение вида

$$M(x, p)dx + N(x, p)dp = 0.$$

Если решение этого уравнения найдено в виде $x = \varphi(p)$, то, воспользовавшись равенством (12.18), получим решение исходного уравнения в параметрической записи: $x = \varphi(p)$, $y = f(\varphi(p), p)$.

Уравнения вида $x = f(y, y')$ решаются тем же методом.

ПРИМЕР 12.17. Решить уравнение $y'^2 + x = 2y$.

- Разрешив уравнение относительно y' , получим $y = \frac{x + y'^2}{2}$. Вводим параметр $p = y'$

$$y = \frac{x}{2} + \frac{p^2}{2}, \quad (12.19)$$

берем полный дифференциал от обеих частей равенства и заменяем dy на pdx , а в силу (12.17) имеем $dy = \frac{1}{2}dx + pdp$, $pdx = \frac{1}{2}dx + pdp$. Решаем полученное уравнение. Переносим члены с dx влево, с dp вправо $dx\left(p - \frac{1}{2}\right) = pdp$.

Если $p \neq \frac{1}{2}$, то сокращаем в уравнении на $p - \frac{1}{2}$:

$$dx = \frac{2p}{2p-1}dp, \quad x = p + \frac{1}{2}\ln|2p-1| + C.$$

Подставляя это выражение в (12.19), получаем решение в параметрической форме

$$x = p + \frac{1}{2}\ln|2p-1| + C, \quad y = \frac{p^2}{2} + \frac{p}{2} + \frac{1}{4}\ln|2p-1| + \frac{C}{2}.$$

Если $p = 1/2$, то, подставляя это значение в (12.19), получаем еще решение $8y = 4x + 1$. ◀

Решить дифференциальные уравнения.

$$12.150. \quad y = y'^2 + 4y'^3. \quad 12.151. \quad y = y'\sqrt{1+y'^2}.$$

$$12.152. \quad y = (y' - 1)e^{y'}. \quad 12.153. \quad y = \frac{y'^2}{2} + 2xy' + x^2.$$

$$12.154. \quad x = \frac{y}{y'} + \frac{1}{y'^2}. \quad 12.155. \quad x = y'^3 - y' + 2.$$

$$12.156. \quad x = y' \cos y'. \quad 12.157. \quad 2xy' - y = y' \ln(yy').$$

$$12.158. \quad x = 2y' - \ln y'. \quad 12.159. \quad y' = e^{xy'/y}.$$



Частным случаем уравнений вида (12.17) являются так называемое *уравнение Лагранжа*:

$$y = x f(y') + \varphi(y'). \quad (12.20)$$

Действительно, заменой $p = y'$ уравнение (12.20) приводится к виду $y = x f(p) + \varphi(p)$.

Уравнение Лагранжа имеет особые решения $y = x f(p_0) + \varphi(p_0)$, где p_0 — любой из корней уравнения $f(p) = p$.

ПРИМЕР 12.18. Решить уравнение Лагранжа $y = xy'^2 + y'$.

► Полагая $y' = p$, найдем $y = xp^2 + p$. Дифференцируя это равенство по x , получим

$$p = p^2 + 2xp \frac{dp}{dx} + \frac{dp}{dx}, \text{ или } \frac{dx}{dp} = x \frac{2p}{p - p^2} + \frac{1}{p - p^2}.$$

Это линейное уравнение имеет общее решение $x = \frac{1}{(1-p)^2}(C + \ln |p| - p)$, подставляя которое в формулу для y , получаем общее решение исходного уравнения в параметрической форме

$$x = \frac{1}{(1-p)^2}(C + \ln |p| - p),$$

$$y = \frac{p^2}{(1-p)^2}(C + \ln |p| - p) + p.$$

Кроме того, уравнение имеет особые решения $y = 0$ и $y = x + 1$, соответствующие корням $p_1 = 0$ и $p_2 = 1$ уравнения $p^2 = p$. ◀

Решить дифференциальные уравнения.

12.160. $y = x \frac{1+y'^2}{2y'}.$

12.161. $y = 2xy' + \frac{1}{y'^2}.$

12.162. $y = xy'^2 + y'^3.$

12.163. $y = \frac{1}{2}(xy' + y' \ln y').$

12.164. $y = xy' - \frac{1}{y'}.$

12.165. $y = xy' + y' + \sqrt{y'}.$

12.166. $y = xy' - e^{y'}.$

12.167. $y = xy' + \cos y'.$

8. Смешанные задачи на дифференциальные уравнения 1-го порядка.

Определить типы дифференциальных уравнений и указать в общем виде методы их решения.

$$12.168. \sin x^3 = e^{\frac{y'-x^2}{y}}. \quad 12.169. \sqrt{x^2 - y^2} = \frac{2x^2}{y - 3x + xy'}.$$

$$12.170. 1 + x + (1 + x^2)(e^x - e^{2y}y') = 0.$$

$$12.171. 2y'(1 - x^2) - xy - 2xy^2 + 2x^3y^2 = 0.$$

$$12.172. ydx + (2x - y^2)dy = 0.$$

$$12.173. \left(\frac{x}{y} - x + y^2\right)dx + \left(2xy + y - \frac{x^2}{2y^2}\right)dy = 0.$$

$$12.174. ydx + \left(x - 2\sqrt{xy}\right)dy = 0.$$

$$12.175. (x^2 + y^2 + 1)dy + xydx = 0.$$

$$12.176. y' = \sin(y - x). \quad 12.177. x = \arccos \frac{y' - a^x}{y}.$$

$$12.178. \sqrt{y} = \frac{y' - ye^{x^2 \sin x}}{x^2 + 2x - 1}.$$

Решить дифференциальные уравнения.

$$12.179. xy + y^2 = (2x^2 + xy)y'.$$

$$12.180. \left(y + \frac{2}{x^2}\right)dx + \left(x - \frac{3}{y^2}\right)dy = 0.$$

$$12.181. (x + y^2)y' = 1.$$

$$12.182. (2xy - 5y^3)dx + (x^2 - 15xy + 6y)dy = 0.$$

$$12.183. y' + x^2y = x^2. \quad 12.184. y' = \frac{1}{2x - y^2}.$$

$$12.185. y^2dx + x^2dy = xydy.$$

$$12.186. \frac{dy}{dx} + \frac{4xy}{x^2 + 1} = \frac{1}{(x^2 + 1)^3}.$$

$$12.187. (y^2 + x^2)dx - xydy = 0. \quad 12.188. \frac{dy}{dx} + \frac{3y}{x} = e^{x^2}.$$

$$12.189. y' + 2xy = xe^{-x^2}.$$

$$12.190. (x^2 \cos y + 2y \sin x)y' + 2x \sin y + y^2 \cos x = 0.$$

$$12.191. ydy + (x - 2y)dx = 0. \quad 12.192. y' - 4y = \sin 3x.$$

$$12.193. (x^2 + 2xy)dx + xydy = 0.$$

$$12.194. yy' + xy^2 - 4x = 0.$$

$$12.195. y' - \operatorname{tg} \frac{y-2x}{x+1} = \frac{y+2}{x+1}.$$

$$12.196. \frac{x}{x^2 + y^2} dy = \left(\frac{y}{x^2 + y^2} - 1 \right) dx.$$

$$12.197. xyy' - y^2 + ax^3 \cos x = 0.$$

$$12.198. ydx + (2\sqrt{xy} - x)dy = 0.$$

$$12.199. dy - \sin(y - x - 1)dx = 0.$$

$$12.200. e^y dx + (xe^y - 2y)dy = 0.$$

$$12.201. \frac{xy-3}{y} y^3 + y - \frac{1}{x} = 0.$$

9. Геометрические задачи, приводящие к появлению дифференциальных уравнений 1-го порядка. В задачах геометрии, в которых требуется найти уравнение кривой по заданному свойству ее касательной, нормали и площади

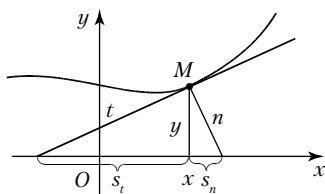


Рис. 12.1

криволинейной трапеции, используется геометрическое истолкование производной (угловой коэффициент касательной) и интеграла с переменным пределом (площадь криволинейной трапеции с подвижной ограничивающей ординатой), а также следующие формулы для определения длин отрезков касательной t , нормали n , подкасательной s_t и поднормали s_n (рис. 12.1):

$$t = \left| \frac{y}{y'} \sqrt{1 + y'^2} \right|, \quad n = \left| y \sqrt{1 + y'^2} \right|, \quad s_t = \left| \frac{y}{y'} \right|, \quad s_n = |yy'|.$$

ПРИМЕР 12.19. Найти уравнение кривой, проходящей через начало координат, если в каждой ее точке $M = (x, y)$ подкасательная s_t в k раз меньше поднормали s_n .

- Пусть $y = f(x)$ — уравнение искомой кривой. Используя выражения подкасательной s_t и поднормали s_n , сразу получаем дифференциальное уравнение

$$|yy'| = k \left| \frac{y}{y'} \right|, \text{ или } y'^2 = k.$$

Интегрируя это уравнение и учитывая начальное условие $y(0) = 0$, получаем искомые уравнения

$$y = \pm \sqrt{k} \cdot x$$

(две прямые). ◀

ПРИМЕР 12.20. Найти уравнение кривой, проходящей через точку с координатами $(1, 1)$, если для любого отрезка $[1, x]$ площадь криволинейной трапеции, ограниченной соответствующей дугой этой кривой, на 2 больше удвоенного произведения координат точки $M = (x, y)$ кривой ($x > 0, y > 0$).

- Согласно условию задачи имеем

$$\int_1^x y(t) dt + 2 = 2xy(x).$$

Дифференцируя это равенство по x , получаем дифференциальное уравнение

$$y = 2(y + xy'), \text{ или } y' = -\frac{y}{2x}.$$

Интегрируя это уравнение и учитывая начальное условие $y(1) = 1$, находим уравнение искомой кривой $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$. ◀

12.202. Найти уравнение кривой, проходящей через точку с координатами $(\sqrt{2}, 0)$, если сумма длин ее касательной и подкасательной равна произведению координат точки касания.

12.203. Найти уравнение кривой, проходящей через точку с координатами $(1, 2)$, если ее подкасательная вдвое больше абсциссы точки касания.

12.204. Найти уравнение кривой, проходящей через точку с координатами $(0, 5; -1)$, если длина отрезка полуоси абсцисс, отсекаемого ее касательной, равна квадрату абсциссы точки касания.

12.205. Найти уравнения кривых, у которых длина отрезка нормали постоянна и равна a .

12.206. Найти уравнения кривых, у которых поднормаль имеет постоянную длину a .

12.207. Найти уравнение кривой, проходящей через точку с координатами $(0, 2)$, если площадь криволинейной трапеции, ограниченной дугой этой кривой, в два раза больше длины соответствующей дуги.

12.208. Найти уравнение кривой, проходящей через точку с координатами $(1; 0,5)$, если для любого отрезка $[1, x]$ площадь криволинейной трапеции, ограниченной соответствующей дугой этой кривой, на 2 больше отношения абсциссы x концевой точки к ординате.

12.209. Найти уравнение кривой, проходящей через точку с координатами $(0, 3)$, если подкасательная в любой точке равна сумме абсциссы точки касания и расстояния от начала координат до точки касания (ограничиться рассмотрением случая $y/y' > 0$).

12.210. Найти уравнение кривой, проходящей через точку с координатами $(1, 0)$, если длина отрезка оси абсцисс, отсекаемого ее нормалью, на 2 больше абсциссы точки касания.

12.211. Найти уравнение кривой, проходящей через начало координат, если для любого отрезка $[a, x]$ площадь криволинейной трапеции, ограниченной соответствующей дугой этой кривой, равна кубу ординаты концевой точки дуги.

12.212. Найти уравнение кривой, проходящей через точку с полярными координатами $r = 2, \varphi = 0$, если угол α между ее касательной и радиус-вектором точки касания есть постоянная величина: $\operatorname{tg} \alpha = a$.

12.213. Найти уравнение кривой, проходящей через точку с координатами $(1, 1)$, если длина отрезка оси абсцисс, отсекаемого любой ее касательной, равна длине этой касательной.

12.214. Найти уравнение кривой, проходящей через точку с координатами $(3, 1)$, если длина отрезка, отсекаемого любой ее касательной на оси ординат, равна поднормали.

12.215. Найти уравнение кривой, проходящей через начало координат, если середина отрезка ее нормали от любой точки кривой до оси Ox лежит на параболе $2y^2 = x$.

12.216. Найти уравнение кривой, проходящей через точку с координатами $(1, 0)$, если площадь трапеции, образованной касательной, осями координат и ординатой точки касания, постоянна и равна 1,5.

12.217. Найти уравнение кривой, проходящей через точку с координатами $(0, 1)$, если площадь треугольника, образуемого осью абсцисс, касательной и радиус-вектором точки касания, постоянна и равна 1.

12.218. Найти уравнение кривой, проходящей через точку с координатами $(1, 2)$, если произведение абсциссы точки касания на абсциссу точки пересечения нормали с осью Ox равна удвоенному квадрату расстояния от начала координат до точки касания.

12.219. Найти уравнение кривой, проходящей через точку с полярными координатами $r = \pi$, $\varphi = \pi/2$, если площадь сектора, ограниченного этой кривой, полярной осью и переменным полярным радиусом, в шесть раз меньше куба полярного радиуса.



Ортогональными траекториями для однопараметрического семейства S_1 линий $y = \Phi(x, a)$ называется другое семейство S_2 линий, которые пересекают линии первого семейства под прямым углом.



ПРИМЕР 12.21. Найти ортогональные траектории семейства кубических парабол $y = ax^3$.

► Найдем дифференциальное уравнение данного семейства, исключая a из системы уравнений

$$\begin{cases} y = ax^3, \\ y' = 3ax^2. \end{cases}$$

Получим $y' = \frac{3y}{x}$. Дифференциальное уравнение семей-

ства ортогональных траекторий есть $y' = -\frac{x}{3y}$.
Его общий интеграл

$$x^2 + 3y^2 = C^2$$

является уравнением семейства ортогональных траекторий (эллипсов). ◀

Найти ортогональные траектории семейств кривых (a — параметр).

12.220. $ay^2 = x^3$. **12.221.** $y = ax^2$.

12.222. $x^2 - 2y^2 = a^2$. **12.223.** $y = ae^{2x}$.



При составлении дифференциальных уравнений 1-го порядка в физических задачах часто применяется *метод дифференциалов*, по которому приближенные соотношения между малыми приращениями величин заменяются соотношениями между их дифференциалами. Такая замена не отражается на результатах, так как дело сводится к отбрасыванию бесконечно малых высших порядков. Другим методом составления дифференциальных уравнений является использование физического смысла производной как скорости протекания процесса.



ПРИМЕР 12.22. В резервуаре первоначально содержится A кг вещества, растворенного в B л воды. Затем каждую минуту в резервуар поступает M л воды и вытекает N л раствора ($M \geq N$), причем однородность раствора достигается путем перемешивания. Найти массу вещества в резервуаре через T мин после начала процесса.

- Обозначим через $x(t)$ массу вещества в резервуаре в момент времени t и через $x + \Delta x$ — в момент времени $t + \Delta t$ (время измеряется в минутах, момент времени $t = 0$ соответствует началу процесса). Заметим, что $\Delta x < 0$ при $\Delta t > 0$ (т.е. раствор «обедняется»). Пусть $V(t)$ — объем смеси в момент времени t : $V(t) = B + Mt - Nt$.

Концентрация вещества в t равняется, очевидно $\frac{x}{V}$. За бес-

конечно малый отрезок времени $[t, t + \Delta t]$ масса вещества изменяется на бесконечно малую величину Δx , для которой справедливо приближенное равенство

$$\Delta x \approx -\frac{x}{V} N \Delta t = -\frac{Nx}{B + (M - N)t} \Delta t.$$

Заменяя приращения Δx и Δt дифференциалами dx и dt , получаем дифференциальное уравнение

$$dx = -\frac{Nx}{B + (M - N)t} dt.$$

Интегрируя это уравнение с разделяющимися переменными и считая $M > N$, найдем общее решение

$$x(t) = \frac{C}{(B + (M - N)t)^{N/(M-N)}}.$$

Используя начальное условие $x = A$ при $t = 0$, найдем частное решение

$$x(t) = A \cdot \left(\frac{B}{B + (M - N)t} \right)^{N/(M-N)}.$$

Полагая $t = T$, получим ответ

$$x(t) = A \cdot \left(\frac{B}{B + (M - N)T} \right)^{N/(M-N)}.$$

Случай $M = N$ требует отдельного рассмотрения. ◀

12.224. Дно резервуара, вместимость которого 300 л, покрыто солью. Допуская, что скорость растворения соли пропорциональна разности между концентрацией в данный момент и концентрацией насыщенного раствора (1 кг соли на 3 л воды) и что данное количество чистой воды растворяет $1/3$ кг соли в одну минуту, найти, сколько соли будет содержать раствор по истечении 1 ч.

12.225. Некоторое количество нерастворимого вещества содержит в своих порах 10 кг соли. Подвергая его действию 90 л воды, нашли, что в течение 1 ч растворилась половина содержащейся в нем соли. Сколько соли растворилось бы в течение того же времени, если бы количество воды было удвоено? Скорость растворения пропорциональна количеству нерастворенной соли и разности между концентрацией раствора в данный момент и концентрацией насыщенного раствора (1 кг на 3 л).

12.226. Скорость распада радия пропорциональна наличному его количеству. В течении года из каждого грамма радия распадается 0,44 мг. Через сколько лет распадется половина имеющегося количества радия?

12.227. Материальная точка массой в 0,001 кг движется прямолинейно под действием силы, прямо пропорциональной времени, отсчитываемому от момента $t = 0$, и обратно пропорциональной скорости движения точки. В момент $t = 10$ с скорость равнялась 0,5 м/с, а сила — $4 \cdot 10^{-5}$ Н динам. Какова будет скорость спустя минуту после начала движения?

12.228. Пуля входит в доску толщиной $h = 10$ см со скоростью $v_0 = 200$ м/с, а вылетает из доски, пробив ее,

со скоростью $v_1 = 80$ м/с. Считая, что сила сопротивления доски движению пули пропорциональна квадрату скорости движения, найти время движения пули через доску.

12.229. Корабль замедляет свое движение под действием силы сопротивления воды, которое пропорционально скорости корабля. Начальная скорость корабля 10 м/с, скорость его через 5 с станет 8 м/с. Когда скорость уменьшится до 1 м/с?

12.230. По закону Ньютона, скорость охлаждения какого-либо тела в воздухе пропорциональна разности между температурой T тела и температурой воздуха T_0 . Если температура воздуха равна 20°C и тело в течение 20 мин охлаждается от 100 до 60°C , то через какое время его температура понизится до 30°C ?

12.231. Скорость истечения воды из сосуда через малое отверстие определяется формулой $v = 0,6\sqrt{2gh}$, где h — высота уровня воды над отверстием, g — ускорение свободного падения (принять $g = 10$ м/с²). За какое время вытечет вся вода из цилиндрического бака диаметром $2R = 1$ м и высотой $H = 1,5$ м через отверстие в дне диаметром $2r = 0,05$ м?

12.232. Некоторое количество вещества, содержащее 3 кг влаги, было помещено в комнате вместимостью 100 м³, воздух которой первоначально имел влажность 25%. Насыщенный воздух при той же температуре содержит 0,12 кг влаги на 1 м³. Определить, сколько влаги осталось в веществе по истечении вторых суток, если известно, что в течение первых суток оно потеряло половину своей влаги.

12.233. Некоторое количество нерастворимого вещества, содержащее в своих порах 2 кг соли, подвергается действию 30 л воды. Через 5 мин 1 кг соли растворяется. Определить, через какое время растворится 99% первоначального количества соли.

12.234. Кирпичная стена имеет 30 см толщины. Найти зависимость температуры от расстояния точки от наружного края стены, если температура равна 20°C на внутренней и 0°C на внешней поверхности стены. Найти также количество тепла, которое стена (на 1 м²) отдает наружу в течение суток.

12.235. Сила тока i в электрической цепи с сопротивлением R , индуктивностью L и напряжением u удовлетворяет уравнению $L \frac{di}{dt} + Ri = u$. Найти силу тока i в момент времени t , если $u = E \sin \omega t$ и $i = 0$ при $t = 0$ (L, R, E, ω — постоянные).

единственное решение этого уравнения, удовлетворяющее начальным условиям (12.23).

ПРИМЕР 12.23. Показать, что функция $y = C_1 e^{C_2 x}$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$, является решением дифференциального уравнения $yy'' = y'^2$.

► Находим производные функции

$$y' = C_1 C_2 e^{C_2 x}, \quad y'' = C_1 C_2^2 e^{C_2 x}.$$

Подставив выражения y, y' и y'' в данное уравнение, получаем тождество

$$C_1 e^{C_2 x} \cdot C_1 C_2^2 e^{C_2 x} \equiv (C_1 C_2 e^{C_2 x})^2.$$

Следовательно, функция $y = C_1 e^{C_2 x}$ есть решение данного уравнения. ◀

ПРИМЕР 12.24. Определить, при каких начальных условиях существует единственное решение уравнения

$$y'' = \frac{y\sqrt{y'}}{x}.$$

► Функция $f(x, y, y') = \frac{y\sqrt{y'}}{x}$ и ее частная производная

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\sqrt{y'}}{x} \text{ непрерывны при } x \neq 0, \quad y' \geq 0; \text{ частная производная}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y'} = \frac{y}{2x\sqrt{y'}} \text{ непрерывна при } x \neq 0, \quad y' > 0.$$

Следовательно, данное уравнение имеет единственное решение при $x_0 \neq 0, \quad y'(x_0) > 0$. ◀

Определить, при каких начальных условиях существуют единственные решения уравнений.

$$12.236. \quad y'' = x + \sqrt{x^2 - y}. \quad 12.237. \quad y'' = y' \ln y'.$$

$$12.238. \quad y'' = \operatorname{tg} y + \sqrt[3]{x}. \quad 12.239. \quad y'' - yy''' = \sqrt[5]{y' - x}.$$

Показать, что данные выражения при любых действительных значениях входящих в них параметров определяют решения соответствующих дифференциальных уравнений.

$$12.240. \quad y = x \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt + \cos x + C_1 x + C_2; \quad xy'' = \sin x.$$

$$12.241. \quad y = x^2 \ln x + C_1 x^2 + C_2 x + C_3; \quad xy''' = 2.$$

$$12.242. \quad e^y \sin^2(C_1 x + C_2) = 2C_1^2; \quad y'' = e^y.$$

$$12.243. \quad C_1 y = \sin(C_1 x + C_2); \quad yy'' + 1 = y'^2.$$

Показать, что данные функции являются частными решениями соответствующих дифференциальных уравнений.

$$12.244. \quad y = \frac{x^2 + 1}{2}; \quad y'^2 + 1 = 2yy''.$$

$$12.245. \quad y = e^x; \quad y^2 + y'^2 = 2yy''.$$

12.246. Функция $y = y(x)$ неявно задана уравнением $x = y + y^2; y'y''' - 3y'^2 = 0$.

12.247. Функция $y = y(x)$ задана параметрически

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} \ln t + \frac{3}{4t^2}, \\ y = \frac{1}{4} t + \frac{3}{4t^3} \quad (t > 0) \end{cases}; \quad y''^2 - 2y'y''^2 + 3 = 0.$$

2. Дифференциальные уравнения, допускающие понижение порядка. Ниже приводятся некоторые виды дифференциальных уравнений n -го порядка, допускающих понижение порядка.

а) Уравнения вида $y^{(n)} = f(x)$. Общее решение получается путем n -кратного интегрирования

$$y = \int \left(\int \left(\dots \int \left(\int f(x) dx \right) dx \dots \right) dx \right) dx + P_{n-1}(x), \quad \text{где}$$

$$P_{n-1}(x) = C_1 x^{n-1} + C_2 x^{n-2} + \dots + C_{n-1} x + C_n,$$

или по формуле

$$y = \frac{1}{(n-1)!} \int_{x_0}^x f(t)(x-t)^{n-1} dt + P_{n-1}(x).$$



ПРИМЕР 12.25. Найти общее решение уравнения $y''' = x^2 + \cos x$ и его частное решение, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 1$, $y'(0) = -1$, $y''(0) = 0$.

► Интегрируя первый раз, получаем $y'' = \frac{x^3}{3} + \sin x + C_1$;

второй раз — $y' = \frac{x^4}{12} - \cos x + C_1x + C_2$; третий раз —

$$y = \frac{x^5}{60} - \sin x + C_1x^2 + C_2x + C_3, \quad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}. \text{ Это и есть}$$

общее решение. Подставив теперь в полученное решение и в выражение для производных значения $x = 0$, $y = 1$, $y' = -1$,

$$y'' = 0, \text{ получим систему уравнений } \begin{cases} C_3 = 1, \\ -1 + C_2 = -1, \\ C_1 = 0, \end{cases} \text{ из кото-}$$

рой следует, что $C_1 = 0$, $C_2 = 0$, $C_3 = 1$. Тогда искомое

$$\text{частное решение имеет вид } y = \frac{x^5}{60} - \sin x + 1. \quad \blacktriangleleft$$



б) Уравнения вида $F(x, y^{(k)}, \dots, y^{(n)}) = 0$, т.е. уравнение не содержит искомой функции и ее производных до порядка $k-1$ включительно. С помощью замены $y^{(k)}(x) = z(x)$ порядок этого уравнения понижается на k единиц: $F(x, z, \dots, z^{(n-k)}) = 0$. Предположим, что для полученного уравнения мы можем найти общее решение $z = \varphi(x, C_1, \dots, C_{n-k})$. Тогда искомая функция получается путем k -кратного интегрирования функции $\varphi(x, C_1, \dots, C_{n-k})$.



ПРИМЕР 12.26. Найти общее решение уравнения $xy^{(5)} - y^{(4)} = 0$.

► Уравнение не содержит y и ее производных до третьего порядка включительно. Положим $z(x) = y^{(4)}$, тогда

$$y^{(5)} = \frac{dz}{dx} \text{ и уравнение принимает вид } xz' - z = 0. \text{ После}$$

деления на z (в этом случае теряется решение $z = 0$) по-

лучаем $\frac{dz}{z} = \frac{dx}{x}$. Отсюда $\ln |z| = \ln |x| + \ln |C_0|$, где

$C_0 \neq 0$, или с учетом решения $z = 0$ получаем общее решение $z = C_0 x$, $C_0 \in \mathbb{R}$. Проинтегрировав четыре раза функцию $z = C_0 x$, находим общее решение исходного уравнения $y = C_0 x^5 + C_1 x^4 + C_2 x^3 + C_3 x^2 + C_4 x + C_5$, где $C_0, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 \in \mathbb{R}$. ◀



в) Уравнения вида $F(y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$, т.е. уравнение не содержит независимой переменной x . В этом случае подстановкой $y' = p(y)$, $y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dp(y)}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p \frac{dp}{dy}$,

$$y''' = \frac{dy''}{dx} = p \left(\frac{dp}{dy} \right)^2 + p^2 \frac{d^2 p}{dy^2} \text{ и т.д. порядок уравнения по-}$$

нижается на единицу. ◀

ПРИМЕР 12.27. Найти общий интеграл уравнения $y' y''' - 3y''^2 = 0$.

► Положим $y' = p(y)$, $y'' = p \frac{dp}{dy}$, $y''' = p \left(\frac{dp}{dy} \right)^2 + p^2 \frac{d^2 p}{dy^2}$.

Тогда уравнение примет вид

$$p \left(p \left(\frac{dp}{dy} \right)^2 + p^2 \frac{d^2 p}{dy^2} \right) - 3 \left(p \frac{dp}{dy} \right)^2 = 0.$$

Приведа подобные члены и сократив на p^2 (при этом мы теряем решение $p = 0$, т.е. $y = C$, $C \in \mathbb{R}$), получим

$$p \frac{d^2 p}{dy^2} - 2 \left(\frac{dp}{dy} \right)^2 = 0.$$

Положив здесь $\frac{dp}{dy} = z$, $\frac{d^2 p}{dy^2} = z \frac{dz}{dp}$, придем к уравнению

$$pz \frac{dz}{dp} - 2z^2 = 0.$$

Сократив на z (при этом возможна потеря решения $z = \frac{dp}{dy} = 0$, т.е. $p = C_1$ и $y = C_1 x + C_2$, где $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$, в состав

которого входит прежнее потерянное решение), получим $\frac{dz}{z} = 2\frac{dp}{p}$. Отсюда $\ln|z| = \ln p^2 + \ln|C_1|$ или $z = \frac{dp}{dy} = C_1 p^2$.

Интегрируя последнее уравнение, находим

$$-\frac{1}{p} = C_1 y + C_2, \text{ или } -\frac{dx}{dy} = C_1 y + C_2, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Окончательно получим общий интеграл $x = \tilde{C}_1 y^2 + \tilde{C}_2 y + C_3$, где $x = \tilde{C}_1 y^2 + \tilde{C}_2 y + C_3$, $\tilde{C}_1 = -\frac{C_1}{2}$, $\tilde{C}_2 = -C_2$, $C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$. т.е. семейство парабол. Заметим, что последняя запись содержит в себе и решения $y = C_1 x + C_2$ (только при $C_1 \neq 0$). ◀



г) Уравнения вида $\frac{d}{dx} G(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) = 0$, т.е. такие уравнения, в которых левая часть может быть представлена как полная производная по x от некоторой функции $G(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$. Интегрируя по x , получим новое уравнение, порядок которого на единицу ниже исходного уравнения.



ПРИМЕР 12.28. Решить уравнение $y'y''' = 2y''^2$.

► Переписываем уравнение в виде $\frac{y'''}{y''} = 2\frac{y''}{y'}$. Замечаем, что

$\frac{y'''}{y''} = (\ln y'')'$, а $2\frac{y''}{y'} = (2\ln y')'$. Тогда полученное уравнение можно записать как равенство полных производных: $(\ln y'')' = (2\ln y')'$. Отсюда $\ln y'' = 2\ln y' + \ln C_1$, $C_1 > 0$. Потенцируем последнее равенство $y'' = C_1 y'^2$. Порядок уравнения понижен.

Аналогично предыдущему, переписывая последнее уравнение в виде $\frac{y''}{y'} = C_1 y'$, получаем $(\ln y')' = (C_1 y)'$.

Отсюда $\ln y' = C_1 y + C_2$, или после потенцирования

$y' = e^{C_1 y} e^{C_2}$. Обозначив $e^{C_2} = C_3$, где $C_3 > 0$ — любое действительное число, находим $y' = C_3 e^{C_1 y}$, или $\frac{dy}{e^{C_1 y}} = C_3 dx$.

Интегрируя последнее уравнение, получаем $-\frac{1}{C_1} e^{-C_1 y} = C_3 x + C_4$, или $e^{-C_1 y} = (-C_1)(C_3 x + C_4)$, или $e^{C_5 y} = (C_6 x + C_7)$,

где $-C_1 = C_5$, $-C_1 C_3 = C_6$, $-C_1 C_4 = C_7$, $C_5 < 0$, $C_6 < 0$, C_7 — любое действительное число. Логарифмируя полученное выражение, находим $C_5 y = \ln |C_6 x + C_7|$.

В ходе решения в результате деления на y'' и y' возможны потери решений. При $y'' = 0$ получаем $y' = C_8$. Отсюда $y = C_8 x + C_9$, $C_8, C_9 \in \mathbb{R}$. Заметим, что уравнение $y' = 0$ — частный случай уравнения $y' = C_8$ при $C_8 = 0$, и его решение $y = C$, которое входит в семейство решений $y = C_8 x + C_9$. ◀



д) Уравнение вида $F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$, где функция F является однородной относительно функции y и ее производных, т.е.

$$F(x, ty, ty', \dots, ty^{(n)}) = t^k F(x, y, y', \dots, y^{(n)}), \quad t \neq 0.$$

Подстановка $y'(x) = y(x)z(x)$ позволяет понизить порядок уравнения на единицу. ▶

ПРИМЕР 12.29. Решить уравнение $yy'' - (y')^2 = 6xy^2$.

▶ Проверим, что данное дифференциальное уравнение однородно. Перепишем его в виде $yy'' - (y')^2 - 6xy^2 = 0$.

Имеем $F(x, y, y', y'') = yy'' - (y')^2 - 6xy^2$. Тогда

$$\begin{aligned} F(x, ty, ty', ty'') &= ty \cdot ty'' - (ty')^2 - 6x(ty)^2 = \\ &= t^2(yy'' - (y')^2 - 6xy^2) = t^2 F(x, y, y', y''), \end{aligned}$$

т.е. F — однородная функция порядка $k = 2$.

Положим $y' = yz$. Тогда $y'' = y'z + yz' = y(z^2 + z')$ и уравнение принимает вид

$$y^2(z^2 + z') - (yz)^2 - 6xy^2 = 0.$$

Сокращая на y^2 (при этом возможна потеря решения $y = 0$) и приводя подобные члены, получаем $z' - 6x = 0$.

Отсюда $z = 3x^2 + C_1$, $C_1 \in \mathbb{R}$.

Возвращаясь к прежним переменным, получаем уравне-

ние $y' = y(3x^2 + C_1)$, или $\frac{dy}{y} = 3x^2 + C_1$, откуда $\ln |y| =$

$$= x^3 + C_1x + \ln |C_2|, \quad C_2 \neq 0, \quad \text{или} \quad y = C_2 e^{x^3 + C_1x}, \quad C_2 \neq 0.$$

При $C_2 = 0$ эта формула дает потерянное решение $y = 0$.

Следовательно, общее решение исходного уравнения

можно записать в виде $y = Ce^{x^3 + C_1x}$, $C, C_1 \in \mathbb{R}$. ◀



В некоторых случаях найти решение в виде явной или неявной функции затруднительно, однако удастся получить решение в параметрической форме.



ПРИМЕР 12.30. Найти общие решения уравнения $y''(1 + 2\ln y') = 1$.

► Положим $y' = p$, $y'' = \frac{dp}{dx}$. Уравнение примет вид

$$\frac{dp}{dx}(1 + 2\ln p) = 1, \quad \text{или} \quad dx = (1 + 2\ln p)dp, \quad \text{откуда} \quad x = -p +$$

$+ 2p \ln p + C_1$, $C_1 \in \mathbb{R}$. Так как $dy = p dx$, то находим

$$dy = p(1 + 2\ln p)dp, \quad \text{откуда} \quad y = p^2 \ln p + C_2, \quad C_2 \in \mathbb{R}.$$

Общее решение получаем в параметрическом виде

$$x = p(-1 + 2\ln p) + C_1, \quad y = p^2 \ln p + C_2, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}. \quad \blacktriangleleft$$

Найти общие решения дифференциальных уравнений, используя методы понижения порядка.

$$12.248. \quad y'' = \frac{1}{1 + x^2}.$$

$$12.249. \quad y''' = x + \cos x.$$

$$12.250. \quad y''' = \frac{2 \cos x}{\sin^3 x}.$$

$$12.251. \quad y^{IV} = \frac{1}{x}.$$

12.252. $x^2 y'' = y'^2$.

12.253. $xy''' = 2$.

12.254. $y''' = 2(y'' - 1)\operatorname{ctg} x$.

12.255. $y'' = a^2 y$.

12.256. $(1 + e^x)y'' + y' = 0$.

12.257. $x^2 y''' = y''^2$.

12.258. $y'' + y' \cdot \operatorname{tg} x = \sin 2x$.

12.259. $xy'' = y' \ln \frac{y'}{x}$.

12.260. $x^4 y''' + 2x^3 y'' = 1$.

12.261. $yy'' = y'^2$.

12.262. $x^2 yy'' = (y - xy')^2$.

12.263. $xyy'' + xy'^2 - yy' = 0$.

12.264. $y^{\text{IV}} - y''' = 0$.

12.265. $2yy'' = y'^2 + 1$.

12.266. $yy'' - y'^2 + y'^3 = 0$.

12.267. $a^2 y^{\text{IV}} = y''$.

12.268. $ay'' = -(1 + y'^2)^{3/2}$.

12.269. $y'' = \frac{1}{2y'}$.

12.270. $\frac{y''^2 - y'y'''}{y'^2} = \frac{1}{x^2}$.

Найти все частные решения уравнений, удовлетворяющие заданным начальным условиям.

12.271. $xy'' - y' = x^2 e^x$; $y(0) = -1$.

12.272. $y'''(x-1) - y'' = 0$; $y(2) = 2$, $y'(2) = y''(2) = 1$.

12.273. $y'^2 + 1 = 2yy''$; $y(1) = y'(1) = 1$.

12.274. $y'' + y'^2 = y'^3$; $y(0) = y'(0) = 1$.

12.275. $y^3 y''' = -1$; $y(1) = 1$, $y'(1) = 0$.

12.276. $y'' = e^{2y}$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

3. Линейные однородные уравнения. Уравнение вида

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0 \quad (12.25)$$

называется *линейным однородным* дифференциальным уравнением порядка n . Если известно какое-либо частное решение $y_1(x)$ уравнения (12.25), то подстановка $y(x) = y_1(x)z(x)$ приводит это уравнение к линейному уравнению относительно $z(x)$, не содержащему явно эту функцию. Поэтому полагая $z'(x) = u(x)$, получим линейное однородное уравнение порядка $n - 1$ относительно функции $u(x)$.



ПРИМЕР 12.31. Найти общее решение уравнения $(x^2 + 1)y'' - 2xy' + 2y = 0$, убедившись в том, что функция $y_1(x) = x$ есть одно из его частных решений.

- Так как $y_1'(x) = 1$, а $y_1''(x) = 0$, то, подставив $y_1(x)$, $y_1'(x)$ и $y_1''(x)$ в данное уравнение, убеждаемся в том, что функция $y_1(x) = x$ действительно является его частным решением. Положим $y = y_1 z = xz$, найдем $y' = xz' + z$, $y'' = xz'' + 2z'$ и, подставив выражения y , y' и y'' в уравнение, получим

$$(x^2 + 1)(xz'' + 2z') - 2x(xz' + z) + 2xz = 0,$$

$$\text{или } x(x^2 + 1)z'' + 2z' = 0.$$

Теперь, полагая $z' = u$, $z'' = u'$, приходим к уравнению 1-го порядка относительно u :

$$x(x^2 + 1)u' + 2u = 0.$$

Это уравнение с разделяющимися переменными. Его общее решение имеет вид $u = C_1 \frac{x^2 + 1}{x^2}$, откуда, учитывая $u = z'$, получаем уравнение 1-го порядка относительно z

$$dz = C_1 \left(1 + \frac{1}{x^2} \right) dx.$$

Интегрируя последнее уравнение, находим $z = C_1 \left(x - \frac{1}{x} \right) + C_2$, а так как $y = zx$, то окончательно получаем общее решение исходного уравнения

$$y = C_1(x^2 - 1) + C_2x, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$



Изложенный выше метод обобщается на случай, когда известно k частных линейно независимых решений уравнения (12.25). В этом случае путем надлежащих подстановок порядок уравнения может быть понижен на k единиц.



12.277. Доказать теорему: если $y_1(x)$ есть частное решение линейного однородного уравнения $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$,

то функция $y_2(x) = y_1(x) \int \frac{e^{-\int p(x)dx}}{y_1^2(x)} dx$ тоже является решением этого уравнения, а функция

$$y = y_1(x) \left(C_1 + C_2 \int \frac{e^{-\int p(x)dx}}{y_1^2(x)} dx \right)$$

есть его общее решение.

В задачах 12.278–12.281 найти общие решения уравнений, если функция $y_1(x)$ есть их частное решение.

12.278. $y'' - 6y' + 5y = 0$; $y_1 = e^x$.

12.279. $y'' - 2y' - 3y = 0$; $y_1 = e^{-x}$.

12.280. $xy'' + 2y' + xy = 0$; $y_1 = \frac{\sin x}{x}$.

12.281. $(1 - x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0$; $y_1 = x$.

12.282. Найти общее решение уравнения $x^3 y''' + 5x^2 y'' + 2xy' - 2y = 0$, если известны два частных решения $y_1 = x$ и $y_2 = 1/x$.



Определителем Вронского (или *вронскианом*) системы функций $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ называется определитель

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \dots & y_n'(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}.$$

Если система функций $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ линейно зависима на интервале (a, b) , то ее вронскиан равен нулю всюду на этом интервале. Если же хотя бы в одной точке $x_0 \in (a, b)$ значение $W(x_0) \neq 0$, то система функций $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ линейно независима на (a, b) .

Всякая система из n линейно независимых решений $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ уравнения (12.25) называется *фундаментальной системой решений* этого уравнения. Вронскиан

фундаментальной системы решений отличен от нуля на всем интервале, где эти решения определены (см. задачу 12.298). Если известна фундаментальная система решений уравнения (12.25), то общее решение этого уравнения имеет вид

$$y(x) = C_1 y_1(x) + \dots + C_n y_n(x), \quad (12.26)$$

где $C_1, \dots, C_n$ — произвольные постоянные.

ПРИМЕР 12.32. Дана система функций $x, \cos x, \sin x$. Найти вронскиан этой системы $W(x)$ и убедиться в том, что на некотором интервале система линейно независима. Составить линейное однородное дифференциальное уравнение, для которого эта система функций является фундаментальной системой решений, и записать общее решение уравнения.

► Составим вронскиан

$$W(x) = \begin{vmatrix} x & \cos x & \sin x \\ 1 & -\sin x & \cos x \\ 0 & -\cos x & -\sin x \end{vmatrix} = x.$$

Так как $W(x) = x$, то, система функций линейно независима на всей оси Ox , за исключением точки $x = 0$ и, следовательно, образует фундаментальную систему решений некоторого линейного однородного дифференциального уравнения 3-го порядка в области $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, общим решением которого является функция $y = C_1 x + C_2 \cos x + C_3 \sin x$. Для составления дифференциального уравнения найдем производные y', y'', y''' и исключим произвольные постоянные из выражений для y, y', y'', y''' . Имеем

$$\begin{cases} y = C_1 x + C_2 \cos x + C_3 \sin x, \\ y' = C_1 - C_2 \sin x + C_3 \cos x, \\ y'' = -C_2 \cos x - C_3 \sin x, \\ y''' = +C_2 \sin x - C_3 \cos x. \end{cases}$$

Заметим, что, умножив первое и третье равенство на (-1) , а второе и четвертое на x и сложив все четыре равенства, получим

$$xy''' - y'' + xy' - y = 0.$$

Полученное уравнение и является искомым линейным однородным дифференциальным уравнением. 

Исследовать на линейную зависимость системы функций.

12.283. $x, \ln x$.

12.284. $\sin 2x, \sin x, \cos x$.

12.285. e^{-x}, xe^{-x} .

12.286. e^x, xe^x, x^2e^x .

12.287. $\cos 2x, \sin x, 1$.

12.288. $x, 0, e^x$.

12.289. $\operatorname{ch} x, \operatorname{sh} x$.

Зная фундаментальную систему решений линейного однородного дифференциального уравнения, составить это уравнение.

12.290. $1, e^{-x}$.

12.291. $e^{2x} \sin x, e^{2x} \cos x$.

12.292. x^3, x^4 . **12.293.** $1, x, e^x$. **2.294.** $\cos x, \sin x, 1$.

12.295. $e^{2x}, \sin x, \cos x$. **12.296.** e^{3x}, e^{5x} .

12.297. Доказать, что если функции $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ — решения линейного однородного дифференциального уравнения порядка n с непрерывными в некотором интервале (a, b) коэффициентами и вронскиан $W(x)$ этой системы равен нулю при $x_0 \in (a, b)$, то $W(x) \equiv 0$ при $a < x < b$.

12.298. Дана система функций $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$, причем на некотором интервале вронскиан $W(x)$ этой системы отличен от нуля. Составить линейное однородное дифференциальное уравнение, для которого эта система является фундаментальной системой решений.

12.299. Зная, что функции $y_1(x) = \cos x$ и $y_2(x) = \sin x$ образуют фундаментальную систему решений линейного однородного дифференциального уравнения, найти его частное решение, удовлетворяющее начальным условиям $y(\pi) = 1, y'(\pi) = -1$.

12.300. Зная фундаментальную систему решений $e^x, \sin x, \cos x$ линейного однородного дифференциального уравнения, найти его частное решение, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 3, y'(0) = 4, y''(0) = -1$.

12.301. Зная фундаментальную систему решений e^x , e^{2x} , e^{3x} линейного однородного дифференциального уравнения, найти его частное решение, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 6$, $y'(0) = 14$, $y''(0) = 36$.

4. Линейные неоднородные уравнения. Уравнение вида

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x), \quad (12.27)$$

в котором $f(x) \neq 0$, называется *линейным неоднородным* дифференциальным уравнением n -го порядка. Общее решение уравнения (12.27) определяется формулой

$$y(x) = y_0(x) + \tilde{y}(x), \quad (12.28)$$

где $y_0(x)$ — общее решение соответствующего однородного уравнения (12.25), а $\tilde{y}(x)$ — некоторое частное решение неоднородного уравнения (12.27).

ПРИМЕР 12.33. Найти общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения $xy''' - y'' + xy' - y = 2x^3$, если известно, что функция x^3 есть его частное решение.

- Согласно формуле (12.28) общее решение линейного неоднородного уравнения составляется как сумма общего решения $y_0(x)$ соответствующего однородного уравнения и частного решения $\tilde{y}(x)$ неоднородного уравнения. В данном примере (см. пример 12.32) $y_0(x) = C_1x + C_2 \cos x + C_3 \sin x$, а $\tilde{y}(x) = x^3$. Следовательно, искомое общее решение

$$y = C_1x + C_2 \cos x + C_3 \sin x + x^3.$$

Если известно общее решение $y_0(x) = C_1y_1(x) + \dots + C_ny_n(x)$ соответствующего уравнению (12.27) однородного уравнения (12.25), то для определения частного решения $\tilde{y}(x)$ уравнения (12.27) методом Лагранжа применяют вариации произвольных постоянных.

Для этого будем искать частное решение неоднородного уравнения (12.27) в виде

$$\tilde{y}(x) = C_1(E)y_1(x) + \dots + C_n(E)y_n(x),$$

Следовательно, общее решение данного неоднородного уравнения имеет вид

$$y(x) = y_0(x) + \tilde{y}(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \ln |\cos x| \cdot \cos x + x \sin x.$$



Если правая часть линейного неоднородного уравнения (12.27) есть сумма нескольких функций $f(x) = f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_r(x)$ и $\tilde{y}_i(x)$ ($i = 1, 2, \dots, r$) — некоторые частные решения уравнений $y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f_i(x)$ ($i = 1, 2, \dots, r$) соответственно, то сумма

$$\tilde{y}(x) = \tilde{y}_1(x) + \tilde{y}_2(x) + \dots + \tilde{y}_r(x)$$

есть некоторое частное решение уравнения (12.27) (*принцип суперпозиции решений*).



ПРИМЕР 12.35. Проверив, что функция $C_1 = -\frac{1}{4}e^x$ является частным решением уравнения $y'' - 2y' - 3y = e^x$, а функция $C_2 = -\frac{1}{3}e^{2x}$ — частным решением уравнения $y'' - 2y' - 3y = e^{2x}$, найти общее решение уравнения $y'' - 2y' - 3y = e^x + e^{2x}$.

- Согласно принципу суперпозиции частным решением последнего уравнения является функция $C = -\frac{1}{4}e^x - \frac{1}{3}e^{2x}$. Общее решение соответствующего линейного однородного уравнения есть функция $y_0 = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-x}$ (см. задачу 12.279). По формуле (12.28) общее решение данного уравнения имеет вид $y_0 = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-x} - \frac{1}{4}e^x - \frac{1}{3}e^{2x}$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.



12.302. Проверив, что функции $y_1(x) = e^x$ и $y_2(x) = x$ образуют фундаментальную систему решений уравнения

$y'' - \frac{x}{x-1}y' + \frac{1}{x-1}y = 0$, найти общее решение уравнения $(x-1)y'' - xy' + y = (x-1)^2$.

12.303. Проверив, что функции $y_1(x) = \cos x$ и $y_2(x) = x \cos x$ образуют фундаментальную систему решений уравнения $y'' + 2\operatorname{tg} x \cdot y' + (2\operatorname{tg}^2 x + 1)y = 0$, найти общее решение уравнения $\cos x \cdot y'' + 2y' + (2\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x)y = \cos^2 x$.

12.304. Проверив, что функция $C_1(x) = 5x + 6$ является частным решением уравнения $y'' - 6y' + 5y = 25x$, а функция $C_2(x) = -e^{2x}$ — частным решением уравнения $y'' - 6y' + 5y = 3e^{2x}$, найти общее решение уравнения $y'' - 6y' + 5y = 25x + 3e^{2x}$ (см. задачу 12.278).

12.305. Проверив, что функция $C_1(x) = e^x/2$ является частным решением уравнения $y''' + y' = e^x$, а функция $C_2(x) = -\sin 2x$ — частным решением уравнения $y''' + y' = 6\cos 2x$, найти общее решение уравнения $y''' + y' = e^x + 6\cos 2x$ (см. задачу 12.294).

Решить уравнения методом вариации произвольных постоянных.

$$12.306. \quad y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x}. \quad 12.307. \quad y'' + 3y' + 2y = \frac{1}{e^x + 1}.$$

$$12.308. \quad y'' + 4y = 2\operatorname{tg} x. \quad 12.309. \quad y'' + y = \frac{1}{\sin x}.$$

12.3. Линейные уравнения с постоянными коэффициентами

1. Линейные однородные уравнения с постоянными коэффициентами. Общий вид линейного однородного дифференциального уравнения n -го порядка с постоянными коэффициентами

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = 0, \quad (12.30)$$

где a_i ($i = 0, 1, \dots, n$) — действительные постоянные.

Уравнение

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0, \quad (12.31)$$

полученное заменой $y^{(k)}$ ($k = 0, 1, \dots, n$) искомой функции степенями λ^k , называется *характеристическим уравнением* для уравнения (12.30). Каждому действительному корню уравнения (12.31) кратности r соответствует r линейно независимых решений уравнения (12.30)

$$e^{\lambda x}, \quad x e^{\lambda x}, \quad \dots, \quad x^{r-1} e^{\lambda x},$$

а каждой паре комплексных корней $\lambda = \alpha \pm i\beta$ кратности s соответствует s пар линейно независимых решений уравнения (12.30):

$$\begin{aligned} e^{\alpha x} \cos \beta x, \quad x e^{\alpha x} \cos \beta x, \quad \dots, \quad x^{s-1} e^{\alpha x} \cos \beta x, \\ e^{\alpha x} \sin \beta x, \quad x e^{\alpha x} \sin \beta x, \quad \dots, \quad x^{s-1} e^{\alpha x} \sin \beta x. \end{aligned}$$

Таким образом, если характеристическое уравнение имеет k действительных корней $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ кратностей $r_1, \dots, r_k$ и l пар комплексно сопряженных корней $\alpha_1 + i\beta_1, \alpha_1 - i\beta_1, \dots, \alpha_e + i\beta_e, \alpha_e - i\beta_e$ кратностей $s_1, \dots, s_l$ ($r_1 + \dots + r_k + 2s_1 + \dots + 2s_l = n$), то общее решение уравнения (12.30) запишется в виде

$$\begin{aligned} y(x) = P_1(x) e^{\lambda_1 x} + \dots + P_k(x) e^{\lambda_k x} + (Q_1(x) \cos \beta_1 x + \\ + R_1(x) \sin \beta_1 x) e^{\alpha_1 x} + \dots + (Q_l(x) \cos \beta_l x + \\ + R_l(x) \sin \beta_l x) e^{\alpha_l x}, \end{aligned} \quad (12.32)$$

где $P_m(x) = C_1 x^{r_m-1} + \dots + C_{r_m-1} x + C_{r_m}$ — произвольный многочлен степени $r_m - 1$, $m = 1, \dots, k$, в котором коэффициенты $C_1, \dots, C_{r_m}$ — произвольные константы, а $Q_p(x)$ и $R_p(x)$ — произвольные многочлены степени $s_p - 1$, $p = 1, \dots, l$.

ПРИМЕР 12.36. Найти общее решение уравнения $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0$.

- Характеристическое уравнение $\lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6 = 0$, или $(\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 3) = 0$, имеет корни: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 3$.

Фундаментальная система решений данного дифференциального уравнения состоит из функций $y_1 = e^x$, $y_2 = e^{2x}$, $y_3 = e^{3x}$. Следовательно, общее решение уравнения имеет вид $y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + C_3 e^{3x}$, $C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$. ◀

ПРИМЕР 12.37. Найти общее решение уравнения $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$.

- Характеристическое уравнение $\lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1 = 0$, или $(\lambda - 1)^3 = 0$, имеет один корень $\lambda = 1$ кратности 3. Фундаментальная система решений данного дифференциального уравнения состоит из функций $y_1 = e^x$, $y_2 = x e^x$, $y_3 = x^2 e^x$. Следовательно, общее решение уравнения имеет вид

$$C = C_1 e^x + C_2 x e^x + C_3 x^2 e^x, \quad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}. \quad \blacktriangleleft$$

ПРИМЕР 12.38. Найти общее решение уравнения $y'' - 2y' + 2y = 0$.

- Характеристическое уравнение $\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$ имеет корни $\lambda_1 = 1 + i$, $\lambda_2 = 1 - i$. Фундаментальная система решений состоит из функций $y_1 = e^x \cos x$ и $y_2 = e^x \sin x$. Следовательно, общее решение уравнения имеет вид $C = e^x (C_1 \cos x + C_2 \sin x)$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$. ◀

ПРИМЕР 12.39. Составить однородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами, для которого данное множество функций является фундаментальной системой решений:

- а) e^{2x} , e^{-5x} ; б) e^{2x} , $x e^{2x}$, $x^2 e^{2x}$; в) $e^{-2x} \cos x$, $e^{-2x} \sin x$.
- а) Корни характеристического уравнения равны: $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -5$. Следовательно, характеристическое уравнение имеет вид $(\lambda - 2)(\lambda + 5) = 0$, или $\lambda^2 + 3\lambda - 10 = 0$. Значит, дифференциальное уравнение выглядит так: $y'' + 3y' - 10y = 0$.
- б) Здесь $\lambda = 2$ — корень порядка 3, поэтому характеристическое уравнение имеет вид $(\lambda - 2)^3 = 0$, или $\lambda^3 - 6\lambda^2 + 12\lambda - 8 = 0$. Следовательно, дифференциальное уравнение имеет вид

$$y''' - 6y'' + 12y' - 8y = 0.$$

в) Здесь $\lambda_{1,2} = -2 \pm i$, поэтому характеристическое уравнение имеет вид $(\lambda - (-2 + i))(\lambda - (-2 - i)) = 0$, т.е. $\lambda^2 + 4\lambda + 5 = 0$. Заменяя степени λ на производные, получим дифференциальное уравнение: $y'' + 4y' + 5y = 0$. ◀

ПРИМЕР 12.40. Найти частное решение уравнения $y'' - 2y' + y = 0$, удовлетворяющее заданным начальным условиям $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$.

- ▶ Составим характеристическое уравнение: $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$. Его корни: $\lambda_{1,2} = 1$. Общее решение уравнения: $y_{\text{общ}} = C_1 e^x + C_2 x e^x$. Подставим в эту формулу $x = 0$: $1 = C_1 + 0$. Найдем производную: $y' = C_1 e^x + C_2 e^x + C_2 x e^x$. Так как $y'(0) = 2$, то мы получаем $2 = C_1 + C_2$. Следовательно, $C_1 = C_2 = 1$. Отсюда $y = e^x + x e^x$. ◀

ПРИМЕР 12.41. Найти частное решение уравнения $y'' + 4y = 0$, удовлетворяющее заданным начальным условиям $y(0) = 0$, $y'(0) = -1$.

- ▶ Характеристическое уравнение $\lambda^2 + 4 = 0$ имеет корни $\lambda = \pm 2i$. Общее решение уравнения имеет вид $y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$. Так как $y(0) = 0$, то $C_1 = 0$. Значит, $y = C_2 \sin 2x$. Дифференцируем: $y' = 2C_2 \cos 2x$. Подставим начальное условие $-1 = y'(0) = 2C_2$. Таким образом, $C_2 = -\frac{1}{2}$. Значит, $y = -\frac{1}{2} \sin 2x$. ◀

Найти общие решения дифференциальных уравнений.

12.310. $y'' + 2y' - 8y = 0$. **12.311.** $y'' - 8y' + 15y = 0$.

12.312. $y'' - 8y' + 16y = 0$.

12.313. $8y''' + 12y'' + 6y' + y = 0$.

12.314. $y'' - 6y' = 13y = 0$. **12.315.** $4y'' + y = 0$.

12.316. $y'' + 2y' + 10y = 0$. **12.317.** $y''' - 3y' + 2y = 0$.

12.318. $y''' - y'' - 5y' - 3y = 0$. **12.319.** $y''' + 27y = 0$.

12.320. $y^{\text{IV}} - 4y = 0$.

12.321. $y^{\text{IV}} + 4y = 0$.

12.322. $y''' + y' - 10y = 0$.

12.323. $y''' + 7y'' + 17y' + 15y = 0$.

12.324. $y^{\text{IV}} + 2y'' + y = 0$.

12.325. $y^{\text{V}} - 6y^{\text{IV}} + 9y''' = 0$.

12.326. $y^{\text{V}} + 8y''' + 16y' = 0$.

12.327. $y^{\text{VI}} + 2y^{\text{V}} + y^{\text{IV}} = 0$.

По данным корням характеристических уравнений линейных однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами составить дифференциальные уравнения и написать их общие решения.

12.328. $\lambda_1 = -2, \lambda_2 = 5$. 12.329. $\lambda_1 = -2, \lambda_2 = \lambda_3 = 5$.

12.330. $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -1$. 12.331. $\lambda_{1,2} = -2 + 3i$.

12.332. $\lambda_1 = 3, \lambda_{2,3} = \pm 3i$. 12.333. $\lambda_{1,2} = \pm i, \lambda_{2,3} = 2 \pm 2i$.

Составить однородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами, для которых данные множества функций являются фундаментальными системами решений.

12.334. e^{2x}, e^{-x} .

12.335. e^{-3x}, e^{2x}, xe^{2x} .

12.336. $e^x, e^{-x} \cos 3x, e^{-x} \sin 3x$.

12.337. $e^{-2x}, xe^{-2x}, x^2e^{-2x}$.

Найти решения уравнений, удовлетворяющие заданным начальным условиям.

12.338. $y'' - 2y' + y = 0; y(2) = 1, y'(2) = -2$.

12.339. $y''' - y' = 0; y(0) = 3, y'(0) = -1, y''(0) = 1$.

Найти решения уравнений, ограниченные при $x \rightarrow +\infty$.

12.340. $y'' + y' - 6y = 0$. 12.341. $y'' - 4y' + 3y = 0$.

2. Линейные неоднородные уравнения с постоянными коэффициентами. Рассмотрим линейное неоднородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами, т.е. уравнение вида

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x), \quad (12.33)$$

где a_i ($i = 1, 2, \dots, n$) — действительные постоянные числа, а $f(x) \neq 0$.

Согласно формуле (12.28) общее решение уравнения (12.33) записывается в виде $y(x) = y_0(x) + \tilde{y}(x)$, где $y_0(x)$ —

общее решение соответствующего однородного уравнения, а $\tilde{y}(x)$ — любое частное решение неоднородного уравнения (12.33).

Общее решение $y_0(x)$ задается формулой (12.32). Для отыскания $\tilde{y}(x)$ в общем случае можно воспользоваться методом Лагранжа вариации произвольных постоянных (см. п. 4).

ПРИМЕР 12.42. Найти общее решение уравнения $y''' + y' = \operatorname{tg} x$.

► Общее решение соответствующего однородного уравнения $y''' + y' = 0$ имеет вид $y_0 = C_1 + C_2 \cos x + C_3 \sin x$, так как функции $y_1 = 1$, $y_2 = \cos x$ и $y_3 = \sin x$ образуют его фундаментальную систему решений. Система (12.29) в этом случае принимает вид

$$\begin{cases} C'_1 + C'_2 \cos x + C'_3 \sin x = 0, \\ -C'_2 \sin x + C'_3 \cos x = 0, \\ -C'_2 \cos x - C'_3 \sin x = \operatorname{tg} x. \end{cases}$$

Сложив обе части первого и третьего уравнений, найдем $C'_1 = \operatorname{tg} x$. Умножив обе части второго уравнения на $\sin x$, третьего на $\cos x$ и сложив, получим $C'_2 = -\sin x$. Тогда из

второго уравнения следует $C'_3 = -\frac{\sin^2 x}{\cos x}$. Интегрирование дает

$$C_1 = -\ln |\cos x| + \tilde{C}_1, \quad C_2 = \cos x + \tilde{C}_2,$$

$$C_3 = \sin x - \ln \operatorname{tg} \left| \frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right| + \tilde{C}_3.$$

Следовательно, искомое общее решение неоднородного уравнения имеет вид

$$y = C_1 + C_2 \cos x + C_3 \sin x - \ln |\cos x| - \ln \operatorname{tg} \left| \frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right|,$$

$$C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}.$$

Используя метод Лагранжа вариации произвольных постоянных, решить уравнения, считая $f(x)$ известной интегрируемой функцией:

$$12.342. \quad y'' + y = f(x).$$

$$12.343. \quad y'' - y' - 2y = f(x).$$



В частных случаях, когда функция $f(x)$ в уравнении имеет вид $f_1(x) = (d_0x^m + \dots + d_m)e^{\lambda x}$ или

$$f_2(x) = \left((b_0x^{m_1} + \dots + b_{m_1})\cos\beta x + (c_0x^{m_2} + \dots + c_{m_2})\sin\beta x \right) e^{\alpha x},$$

частное решение $\tilde{y}(x)$ можно найти методом неопределенных коэффициентов. Именно, если λ или $\alpha + i\beta$ не совпадают ни с одним из действительных или соответственно комплексных корней характеристического уравнения (12.31), то $\tilde{y}(x)$ ищется в виде

$$\tilde{y}(x) = (D_0x^m + D_1x^{m-1} + \dots + D_m)e^{\lambda x} \quad (12.34)$$

для $f(x) = f_1(x)$ или в виде

$$\begin{aligned} \tilde{y}(x) = & \left((B_0x^{m_3} + \dots + B_{m_3})\cos\beta x + \right. \\ & \left. + (C_0x^{m_3} + \dots + C_{m_3})\sin\beta x \right) e^{\alpha x}, \end{aligned} \quad (12.35)$$

для $f(x) = f_2(x)$. Здесь D_i , B_i , C_i — неопределенные коэффициенты, $m_3 = \max\{m_1, m_2\}$.

Если же λ или $\alpha + i\beta$ совпадают с некоторым корнем уравнения (12.31) кратности r (случай *резонанса*), то выражения в правой части (12.34) или (12.35) следует домножить на x^r , т.е. искать решение соответственно в виде

$$\tilde{y}(x) = x^r (D_0x^m + D_1x^{m-1} + \dots + D_m)e^{\lambda x} \quad (12.36)$$

для $f(x) = f_1(x)$ или в виде

$$\begin{aligned} \tilde{y}(x) = & x^r \left((B_0x^{m_3} + \dots + B_{m_3})\cos\beta x + \right. \\ & \left. + (C_0x^{m_3} + \dots + C_{m_3})\sin\beta x \right) e^{\alpha x} \end{aligned} \quad (12.37)$$

для $f(x) = f_2(x)$.



ПРИМЕР 12.43. Найти общее решение уравнения $y'' - 3y' + 2y = 2x + 1$.

► Сначала решим однородное уравнение. Его характеристическое уравнение: $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$. Корни: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$.

Поэтому $y_0(x) = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$. Имеем: $f(x) = (2x+1) \cdot e^{\mu x}$, поэтому $P(x) = 2x+1$, $\mu = 0$. Далее, $m = 1$ (степень многочлена P), $r = 0$ (так как $\mu = 0$ не является корнем характеристического уравнения). Поэтому частное решение неоднородного уравнения следует искать в виде $\tilde{y}(x) = (Ax+B) \cdot e^{0x}$, т.е. $y = Ax+B$. Продифференцируем эту функцию: $y' = A$, $y'' = 0$. Подставим в исходное уравнение: $0 - 3A + 2(Ax+B) = 2x+1$. Приравняв коэффициенты при x и свободные члены в левой и правой частях равенства, получим $-3A + 2B = 1$, $2A = 2$. Отсюда $A = 1$, $B = 2$. Таким образом, частное решение неоднородного уравнения равно $\tilde{y}(x) = x+2$. Прибавив к этому решению все решения однородного уравнения, получим ответ

$$y(x) = x+2 + C_1 e^x + C_2 e^{2x}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}. \quad \blacktriangleleft$$

ПРИМЕР 12.44. Найти общее решение уравнения $y'' + y = 1 + \sin x + x e^{2x}$.

- Найдем общее решение однородного уравнения. Характеристическое уравнение: $\lambda^2 + 1 = 0$. Его корни: $\lambda = \pm i$. Значит, $y_0(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$. Будем искать частные решения уравнений:

$$(\alpha) \quad y'' + y = 1, \quad (\beta) \quad y'' + y = \sin x, \quad (\gamma) \quad y'' + y = x e^{2x}.$$

Пусть сначала $y'' + y = 1$. Тогда $m = 0$, $\mu = 0$, $r = 0$. Значит, $\tilde{y}_1(x) = A$. Подставим в уравнение (α) : $0 + A = 1$. Следовательно, $\tilde{y}_1(x) = 1$.

Пусть теперь $y'' + y = \sin x$. Тогда $m = 0$, $\mu = \pm i$, поэтому $r = 1$. Отсюда следует вид частного решения уравнения: $\tilde{y}_2(x) = x(A \cos x + B \sin x)$. Имеем

$$\begin{aligned} y' &= A \cos x + B \sin x + x(-A \sin x + B \cos x), \\ y'' &= -A \sin x + B \cos x - A \sin x + B \cos x - \\ &\quad - Ax \cos x - Bx \sin x. \end{aligned}$$

Подставим в уравнение (β) : $-2A \sin x + 2B \cos x - Ax \cos x - Bx \sin x + Ax \cos x + Bx \sin x = \sin x$. Отсюда: $A = -0,5$,

$B = 0$. Таким образом, $\tilde{y}_2(x) = -\frac{x}{2} \sin x$.

Наконец, рассмотрим уравнение (γ): $y'' + y = xe^{2x}$. Здесь $m = 1$, $\mu = 2$, $r = 0$, поэтому $\tilde{y}_3 = (Ax + B)e^{2x}$. Имеем:

$$\begin{aligned}y' &= Ae^{2x} + 2(Ax + B)e^{2x}, \\y'' &= 2Ae^{2x} + 2Ae^{2x} + 4(Ax + B)e^{2x}.\end{aligned}$$

Подставим в уравнение (γ): $4Ae^{2x} + 4(Ax + B)e^{2x} + (Ax + B)e^{2x} = xe^{2x}$. Отсюда получаем систему
$$\begin{cases} 4A + 5B = 0, \\ 5A = 1. \end{cases}$$

Решение системы $A = \frac{1}{5}$, $B = -\frac{4}{25}$, следовательно,

$$\tilde{y}_3(x) = \left(\frac{1}{5}x - \frac{4}{25}\right)e^{2x}.$$

Так как $y(x) = \tilde{y}_1(x) + \tilde{y}_2(x) + \tilde{y}_3(x) + y_0(x)$, то окончательный ответ

$$y(x) = 1 - \frac{x}{2}\sin x + \left(\frac{x}{5} - \frac{4}{25}\right)e^{2x} + C_1 \cos x + C_2 \sin x,$$

$$C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

ПРИМЕР 12.45. Найти общее решение уравнения $y'' - 2y' + y = x^2 + 2\sin x - \cos x$.

- Решаем однородное уравнение $y'' - 2y' + y = 0$. Его характеристическое уравнение $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$ имеет корни $\lambda_{1,2} = 1$. Поэтому $y_0(x) = C_1 e^x + C_2 x e^x$. Неоднородное уравнение разобьем на два: (α) $y'' - 2y' + y = x^2$ и (β) $y'' - 2y' + y = 2\sin x - \cos x$.

Для уравнения (α) имеем: $m = 2$, $\mu = 0$, $r = 0$, поэтому $\tilde{y}_1(x) = Ax^2 + Bx + C$. Продифференцируем: $y' = 2Ax + B$, $y'' = 2A$. Подставим в уравнение (α): $2A - 2(2Ax + B) + (Ax^2 + Bx + C) = x^2$. Приравнявая коэффициенты при

$$1, x, x^2, \text{ получим систему } \begin{cases} 2A - 2B + C = 0, \\ -4A + B = 0, \\ A = 1. \end{cases} \quad \text{Ее решение}$$

$A = 1$, $B = 4$, $C = 6$, следовательно, $\tilde{y}_1(x) = x^2 + 4x + 6$.

Для уравнения (β) $m = 0$, $\mu = \pm i$, $r = 0$. Поэтому $\tilde{y}_2(x) = A \cos x + B \sin x$.

Дифференцируем: $y' = -A \sin x + B \cos x$, $y'' = -A \cos x - B \sin x$.

Подставляем в уравнение (β)

$$(-A \cos x - B \sin x) - 2(-A \sin x + B \cos x) + (A \cos x + B \sin x) = 2 \sin x - \cos x.$$

Упростим $2A \sin x - 2B \cos x = 2 \sin x - \cos x$. Отсюда $A = 1$, $B = \frac{1}{2}$. Следовательно, $\tilde{y}_2(x) = \cos x + \frac{1}{2} \sin x$. Прибавив к сумме $\tilde{y}_1(x) + \tilde{y}_2(x)$ общее решение однородного уравнения, получим ответ

$$y(x) = x^2 + 4x + 6 + \cos x + \frac{1}{2} \sin x + C_1 e^x + C_2 x e^x,$$

$$C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

ПРИМЕР 12.46. Найти общее решение уравнения $y'' + 2y' + y = e^x \sin 2x$.

▶ Решим однородное уравнение $y'' + 2y' + y = 0$. Его характеристическое уравнение $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$ имеет корни $\lambda_{1,2} = -1$. Следовательно, $y_0(x) = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x}$. Здесь

$$P(x) = 1, \text{ поэтому } m = 0. \text{ Так как } e^x \sin 2x = \frac{e^{(1+2i)x} - e^{(1-2i)x}}{2i},$$

то $\mu = 1 \pm 2i$. Так как μ не является корнем характеристического уравнения, то $r = 0$. Таким образом, частное решение неоднородного уравнения следует искать в виде $\tilde{y}(x) = Ae^x \cos 2x + Be^x \sin 2x$. Дифференцируем

$$y' = Ae^x \cos 2x - 2Ae^x \sin 2x + Be^x \sin 2x + 2Be^x \cos 2x,$$

$$y'' = -3Ae^x \cos 2x - 4Ae^x \sin 2x - 3Be^x \sin 2x + 4Be^x \cos 2x.$$

Подставим в исходное уравнение

$$\begin{aligned} & -3Ae^x \cos 2x - 4Ae^x \sin 2x - 3Be^x \sin 2x + 4Be^x \cos 2x + \\ & + 2(Ae^x \cos 2x - 2Ae^x \sin 2x + Be^x \sin 2x + 2Be^x \cos 2x) + \\ & + (Ae^x \cos 2x + Be^x \sin 2x) = e^x \sin 2x. \end{aligned}$$

После упрощения получим $-8A \sin 2x + 8B \cos 2x = e^x \sin 2x$, откуда $A = -\frac{1}{8}$, $B = 0$. Таким образом,

$\tilde{y}(x) = -\frac{1}{8}e^x \cos 2x$. Прибавив к этой функции общее решение однородного уравнения, получим ответ

$$y(x) = -\frac{1}{8}e^x \cos 2x + C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}. \quad \blacktriangleleft$$

ПРИМЕР 12.47. Написать вид частного решения неоднородного уравнения с неопределенными коэффициентами, при этом коэффициенты не находить:

а) $y'' + 2y' - 3y = 3x - 1 + x^2 e^x + \sin 3x$;

б) $y'' + 4y = x \sin 2x$; в) $y''' + 8y = x^2 + e^x \cos 3x$.

► а) Характеристическое уравнение однородного уравнения $\lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0$ имеет корни $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -3$. В правой части уравнения стоят функции $f_1(x) = 3x - 1$, $f_2(x) = x^2 e^x$, $f_3(x) = \sin 3x$.

Для функции $f_1(x)$ имеем $m = 1$, $\mu = 0$, $r = 0$, поэтому $\tilde{y}_1(x) = Ax + B$.

Для функции $f_2(x)$ имеем $m = 2$, $\mu = 1$, $r = 1$, поэтому $\tilde{y}_2(x) = x(Ax^2 + Bx + C)e^x$.

Для функции $f_3(x)$ имеем $m = 0$, $\mu = \pm 3i$, $r = 0$, поэтому $\tilde{y}_3(x) = A \cos 3x + B \sin 3x$.

Таким образом,

$$\tilde{y}(x) = Ax + B + (Cx^3 + Dx^2 + Ex)e^x + F \cos 3x + G \sin 3x.$$

б) Характеристическое уравнение однородного уравнения имеет вид $\lambda^2 + 4 = 0$, откуда $\lambda = \pm 2i$. Имеем $m = 1$, $\mu = \pm 2i$, $r = 1$, следовательно,

$$\tilde{y}(x) = x(Ax + B) \cos 2x + x(A_1 x + B_1) \sin 2x.$$

в) Характеристическое уравнение однородного уравнения $\lambda^3 + 8 = 0$, или $(\lambda + 2)(\lambda^2 - 2\lambda + 4) = 0$. Его корни: $\lambda_1 = -2$, $\lambda_{2,3} = 1 \pm i\sqrt{3}$.

Для уравнения $y''' + 8y = x^2$ имеем $m = 2$, $\mu = 0$, $r = 0$, поэтому $\tilde{y}_1(x) = Ax^2 + Bx + C$.

Для уравнения $y''' + 8y = e^x \cos 3x$ имеем $m = 0$, $\mu = 1 \pm 3i$, $r = 0$, поэтому $\tilde{y}_2(x) = Ae^x \cos 3x + Be^x \sin 3x$. Таким образом, $\tilde{y}(x) = Ax^2 + Bx + C + De^x \cos 3x + Ee^x \sin 3x$. ◀

Найти общие решения уравнений.

$$12.344. y'' - 2y' - 3y = e^{4x}. \quad 12.345. y'' + y = 4xe^x.$$

$$12.346. y'' - y = 2e^x - x^2. \quad 12.347. y'' + y' - 2y = 3xe^x.$$

$$12.348. y'' + 3y' - 4y = e^{-4x} + xe^{-x}.$$

$$12.349. \ddot{x} + 2\dot{x} - 3x = t^2 e^t.$$

$$12.350. \ddot{x} - 9x = e^{3t} \cos t.$$

$$12.351. y''' + 2y'' - 3y' - 10y = 50x^2.$$

$$12.352. y^{IV} - y = \cos 2x.$$

Для уравнений написать вид частных решений с неопределенными коэффициентами, сами коэффициенты не находить.

$$12.353. y'' - 4y' + 3y = e^{3x} \sin x + x^2 - 3x.$$

$$12.354. y'' + 2y' + 26y = xe^{-x} \cos 5x.$$

$$12.355. y'' - 2y' - 8y = xe^{4x} + 1.$$

$$12.356. y'' - 2y' - 8y = e^{-2x} \cos 3x.$$

$$12.357. y'' - 2y' + y = xe^x \cos 5x + (x^2 - 1)e^{-x}.$$

$$12.358. y^{IV} - y = e^x \sin x + x^2 e^{-x}.$$

$$12.359. y''' + 4y'' + y' - 26y = 2x + 1 - xe^{2x} + \\ + (x - 1)e^{-3x} \cos 2x + e^{-3x} \sin 2x.$$

3. Дифференциальные уравнения Эйлера. Уравнение вида

$$x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} xy' + a_n y = f(x), \quad x \neq 0, \quad (12.38)$$

где a_i ($i = 1, 2, \dots, n$) — действительные постоянные числа, есть частный случай линейного дифференциального уравнения с переменными коэффициентами и называется *уравнением Эйлера*. Введем новую независимую переменную t

с помощью подстановки $x = e^t$ (если $x > 0$) или подстановки $x = -e^t$ (если $x < 0$). Пусть для определенности $x > 0$. Тогда $y'_x = y'_t e^{-t}$, $y''_{xx} = (y''_{tt} - y'_t) e^{-2t}$, $y'''_{xxx} = (y'''_{ttt} - 3y''_{tt} + 2y'_t) \cdot e^{-3t}$ и т.д., и после подстановки этих выражений в уравнение (12.38) получается линейное уравнение с постоянными коэффициентами

$$(ax + b)^n y^{(n)} + a_1(ax + b)^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(ax + b)y' + a_n y = f(x),$$

где a, b, a_i ($i = 1, 2, \dots, n$) — постоянные, приводится к линейному дифференциальному уравнению с постоянными коэффициентами подстановкой $ax + b = e^t$ (в области $ax + b > 0$).

Решение однородного уравнения Эйлера

$$x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} x y' + a_n y = 0$$

можно (при $x > 0$) искать в виде $y = x^\lambda$.

Подставляя выражения $y', y'', \dots, y^{(n)}$ в однородное уравнение Эйлера, находим характеристическое уравнение для определения показателя степени λ . При этом если λ — действительный корень характеристического уравнения кратности r , то ему соответствуют r линейно независимых решений

$$x^\lambda, x^\lambda \ln x, x^\lambda (\ln x)^2, \dots, x^\lambda (\ln x)^{r-1},$$

а если $\alpha \pm i\beta$ — пара комплексных корней кратности s , то ей соответствуют s пар линейно независимых решений

$$x^\alpha \cos(\beta \ln x), x^\alpha \ln x \cos(\beta \ln x), \dots, x^\alpha (\ln x)^{s-1} \cos(\beta \ln x), \\ x^\alpha \sin(\beta \ln x), x^\alpha \ln x \sin(\beta \ln x), \dots, x^\alpha (\ln x)^{s-1} \sin(\beta \ln x).$$

ПРИМЕР 12.48. Решить уравнение Эйлера

$$x^2 y'' - 4xy' - 6y = 0.$$

► Положим $x = e^t$, считая $x > 0$. Тогда $y'_x = y'_t \cdot e^{-t}$, $y''_{xx} = (y''_{tt} - y'_t) \cdot e^{-2t}$. Подставив в уравнение, получим

$e^{2t}(y''_{tt} - y'_t)e^{-2t} - 4e^t y'_t e^{-t} - 6y = 0$, или после упрощения $y''_{tt} - 5y'_t - 6y = 0$. Характеристическое уравнение $\lambda^2 - 5\lambda - 6 = 0$ имеет корни $\lambda_1 = 6$, $\lambda_2 = -1$. Следовательно, общее решение имеет вид $y_0 = C_1 e^{6t} + C_2 e^{-t}$. Возвращаясь к переменной x , получим: $y(x) = C_1 x^6 + C_2 x^{-1}$. Такой же результат получается при замене $x = -e^t$. ◀



Характеристическое уравнение соответствующего однородного уравнения для полученного из (12.38) линейного уравнения с постоянными коэффициентами относительно y , y'_t , y''_{tt} , y'''_{ttt} и т.д. имеет вид

$$\lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2) \dots (\lambda - n + 1) + \dots + a_{n-2}\lambda(\lambda - 1) + a_n\lambda + a_n = 0.$$

При составлении этого уравнения каждое произведение $x^k y^{(k)}$ в (12.38) заменяют на произведение

$$\lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2) \dots (\lambda - k + 1).$$



ПРИМЕР 12.49. Решить уравнение Эйлера

$$x^3 y''' - x^2 y'' + 2xy' - 2y = x^3.$$

► Сразу пишем характеристическое уравнение и решаем его:

$$\lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2) - \lambda(\lambda - 1) + 2\lambda - 2 = 0,$$

$$\text{или } (\lambda - 1)(\lambda^2 - 3\lambda + 2) = 0.$$

Отсюда $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 2$. При таких λ общее решение однородного уравнения с постоянными коэффициентами имеет вид $y_0 = (C_1 + C_2 t)e^t + C_3 e^{2t}$.

Чтобы решить исходное неоднородное уравнение, сначала раскроем скобки в характеристическом уравнении $\lambda^3 - 4\lambda^2 + 5\lambda - 2 = 0$. По этому характеристическому уравнению составим левую часть дифференциального уравнения, а в правой части после замены $x = e^t$ получается e^{3t}

$$y'''_{ttt} - 4y''_{tt} + 5y'_t - 2y = e^{3t}.$$

$$\begin{cases} y_1' = y_3, \\ y_2' = y_4, \\ y_3' = 2y_1 - 3y_2, \\ y_4' = y_1 - 2y_2, \end{cases}$$

которая и является нормальной системой 4-го порядка. ◀

ПРИМЕР 12.51. Привести к нормальной системе дифференциальное уравнение $y'' - 5y' + 6y = 0$.

- Положим $y_1 = y$, $y_2 = y'$. Тогда $y_2' = y''$ и $y'' = 5y' - 6y = 5y_2 - 6y_1$. Значит, уравнение эквивалентно нормальной системе
- $$\begin{cases} y_1' = y_2, \\ y_2' = -6y_1 + 5y_2. \end{cases} \quad \blacktriangleleft$$

ПРИМЕР 12.52. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} y_1' = 4y_1 - y_2, \\ y_2' = -6y_1 + 3y_2, \end{cases}$$

сведя ее к одному уравнению 2-го порядка.

- Выразим y_2 из первого уравнения: $y_2 = 4y_1 - y_1'$. Подставим это выражение во второе уравнение: $(4y_1 - y_1')' = -6y_1 + 3(4y_1 - y_1')$, откуда получаем для функции y_1 уравнение 2-го порядка: $y_1'' - 7y_1' + 6y_1 = 0$. Его характеристическое уравнение имеет корни $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 6$. Следовательно, $y_1 = C_1 e^x + C_2 e^{6x}$. Теперь находим функцию y_2 .

$$y_2 = 4(C_1 e^x + C_2 e^{6x}) - C_1 e^x - 6C_2 e^{6x} = 3C_1 e^x - 2C_2 e^{6x}.$$

Таким образом, общее решение системы имеет вид

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} e^x + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{6x}, \text{ где } C_1, C_2 \in \mathbb{R}. \quad \blacktriangleleft$$

Задача Коши для системы (12.40) формулируется следующим образом: найти решение $y_1(x), \dots, y_n(x)$ системы (12.40), удовлетворяющее начальным условиям

$$y_1(x_0) = y_1^0, y_2(x_0) = y_2^0, \dots, y_n(x_0) = y_n^0, \quad (12.41)$$

где $y_1^0, y_2^0, \dots, y_n^0$ — заданные числа.

Теорема Коши. Пусть правые части $f_1, f_2, \dots, f_n$ нормальной системы (12.40) определены в $(n+1)$ -мерной области D изменения переменных $x, y_1, y_2, \dots, y_n$. Если в некоторой окрестности Δ точки $M_0 = (x_0, y_1^0, y_2^0, \dots, y_n^0) \in D$ функции $f_k, k = 1, 2, \dots, n$ непрерывны и имеют непрерывные частные производные $\frac{df_k}{dy_j}$ по переменным $y_1, y_2, \dots, y_n$, то существует

отрезок $x_0 - h \leq x \leq x_0 + h$ изменения переменной x , в которой существует и притом единственное решение системы (12.40), удовлетворяющее начальным условиям (12.41).

Общим решением системы (12.40) называется совокупность функций

$$y_k(x, C_1, C_2, \dots, C_n), k = 1, 2, \dots, n, \quad (12.42)$$

зависящих от n произвольных постоянных, которые при любых допустимых значениях постоянных $C_1, C_2, \dots, C_n$ обращают уравнения системы (12.40) в тождества, и в области, в которой выполнены условия теоремы Коши, из совокупности функции (12.42) можно получить решение любой задачи Коши.

Путем исключения параметров a и b найти системы дифференциальных уравнений, определяющих семейства линий в пространстве.

$$12.368. \begin{cases} y = ax + b, \\ x^2 + y^2 = z^2 - 2bz. \end{cases} \quad 12.369. \begin{cases} ax + z = b, \\ x^2 + y^2 = b^2. \end{cases}$$

Дифференциальные уравнения или системы заменить нормальными системами дифференциальных уравнений (x — независимая переменная).

$$12.370. y''' - xy' + y'^3 = 0. \quad 12.371. y^{IV} - y^2 = 0.$$

$$12.372. \begin{cases} y'' = y' + z', \\ z'' = z' + u', \\ u'' = u' + y'. \end{cases} \quad 12.373. \begin{cases} z'' + z - 2y = 0, \\ y''' + z - y = x. \end{cases}$$

$$12.374. \begin{cases} y'' - z - u = 0, \\ z' + uz = x^2, \\ u''' = -xy. \end{cases}$$

Проверить, являются ли функции $y(x)$ и $z(x)$ решениями систем.

$$12.375. \begin{cases} y' = -\frac{1}{z}, \\ z' = \frac{1}{y}; \end{cases} \quad y = e^{-x/2}, \quad z = 2e^{x/2}.$$

$$12.376. \begin{cases} y' = 1 - \frac{2y}{x}, \\ z' = y + z + \frac{2y}{x} - 1; \end{cases} \quad y = \frac{x}{3} + \frac{1}{x^2}, \quad z = e^x - \frac{x}{3} - \frac{1}{x^2}.$$

Проверить, что данные функции $\Phi(x)$ являются интегралами данных нормальных систем.

$$12.377. \Phi(x, y, z) = x + y + z; \quad \begin{cases} y' = \frac{z}{y-z}, \\ z' = \frac{y}{z-y}. \end{cases}$$

$$12.378. \Phi(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2; \quad \begin{cases} y' = \frac{3x-4z}{2z-3y}, \\ z' = \frac{4y-2x}{2z-3y}. \end{cases}$$

$$12.379. \Phi(x, y, z) = \frac{1}{y} - \frac{1}{z}; \quad \begin{cases} y' = \frac{y}{z}, \\ z' = \frac{z}{y}. \end{cases}$$

2. Методы интегрирования нормальных систем. Одним из методов решения систем дифференциальных уравнений является *метод исключения неизвестных*, который сводит систему уравнений к одному или нескольким дифференциальным уравнениям с одной неизвестной функцией в каждом. Поясним это на примерах (см. также пример 12.50).

ПРИМЕР 12.53. Найти общее решение системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = 2z - y, \\ \frac{dz}{dx} = 3z - 2y \end{cases}$$

и частное решение, удовлетворяющее начальным условиям $y(1) = 1$, $z(1) = -1$.

► Выражаем z из первого уравнения системы: $z = \frac{1}{2} \left(\frac{dy}{dx} + y \right)$

и подставляем во второе уравнение: $\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{dy}{dx} + y \right) \right) =$

$= 3 \left(\frac{1}{2} \left(\frac{dy}{dx} + y \right) \right) - 2y$. Дифференцируя по x выражения,

стоящие в скобках, получаем $\frac{1}{2} \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{1}{2} \frac{dy}{dx} = \frac{3}{2} \frac{dy}{dx} + \frac{3}{2} y - 2y$,

или $y'' - 2y' + y = 0$ — линейное однородное уравнение 2-го порядка с постоянными коэффициентами. Его характеристическое уравнение $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$ имеет корни $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$. Записываем общее решение: $y(x) = C_1 e^x +$

$+ C_2 x e^x$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$. Тогда $z(x) = \left(C_1 + \frac{C_2}{2} \right) e^x + C_2 x e^x$.

Система функций $y(x) = C_1 e^x + C_2 x e^x$, $z(x) = \left(C_1 + \frac{C_2}{2} \right) e^x +$

$+ C_2 x e^x$ образует общее решение заданной системы дифференциальных уравнений.

Для нахождения частного решения используем начальные условия $y(1) = 1$, $z(1) = -1$. Получаем $1 = C_1 e + C_2 e$, $-1 =$

$= C_1 e + \frac{3}{2} C_2 e$. Отсюда $C_1 = \frac{5}{e}$ и $C_2 = -\frac{4}{e}$. Итак, система

функций $y(x) = (5 - 4x)e^{x-1}$, $z(x) = (3 - 4x)e^{x-1}$ и есть искомое частное решение. ◀

Не всякую систему дифференциальных уравнений можно свести к одному уравнению.

ПРИМЕР 12.54. Найти общее решение системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} y' = xy, \\ z' + y' = x + xy \end{cases}$$

Показать, что данную систему нельзя свести к одному уравнению.

- Действительно, подставив во второе уравнение вместо y' его значение xy , получим два не связанных между собой дифференциальных уравнения, каждое из которых содержит только одну функцию: $y' = xy$, $z' = z$. (Отсюда

$$y = C_1 e^{x^2/2} \text{ и } z = C_2 e^x, \text{ где } C_1, C_2 \in \mathbb{R}.)$$

Другим методом интегрирования систем дифференциальных уравнений является метод выделения интегрируемых комбинаций, т.е. получение из системы (12.40) такого уравнения, которое можно проинтегрировать и получить первый интеграл. Если найдены n независимых первых интегралов системы (12.40), то их совокупность дает общий интеграл.

ПРИМЕР 12.55. Найти общий интеграл системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = \frac{z + e^y}{z + e^x}, \\ \frac{dz}{dx} = \frac{z^2 - e^{x+y}}{z + e^x}. \end{cases}$$

- Умножим обе части второго уравнения системы на e^{-x} и сложим их с соответствующими частями первого уравнения и с тождеством $-e^{-x}z \equiv -e^{-x}z$, получим $(e^{-x}z)' + y' = 0$, откуда $e^{-x}z + y = C_1$. Это первый интеграл системы. Теперь умножим обе части второго уравнения системы на e^{-y} и сложим с равенствами $-e^{-y}zy' = -e^{-y}z \frac{z + e^y}{z + e^x}$ и $x' = 1$, получим $(e^{-y}z)' + x' = 0$, откуда $e^{-y}z + x = C_2$. Это тоже первый интеграл системы. Так как якобиан системы

$$\begin{cases} e^{-x}z + y = C_1, \\ e^{-y}z + x = C_2, \end{cases}$$

отличен от нуля (проверьте!), то оба первых интеграла независимы между собой, поэтому их совокупность явно определяет общее решение заданной системы уравнений.



Для выделения интегрируемых комбинаций из системы (12.40) последнюю удобнее записать в так называемой симметрической форме

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n)} &= \frac{dy_2}{f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n)} = \dots = \\ &= \frac{dy_n}{f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n)} = \frac{dx}{1} \end{aligned} \quad (12.43)$$

и использовать следующие свойства равных дробей: если $\frac{u_1}{v_1} = \frac{u_2}{v_2} = \dots = \frac{u_n}{v_n} = \gamma$, то при любых $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ имеет место соотношение

$$\frac{\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_n u_n}{\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n} = \gamma.$$

Числа $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ подбираются обычно таким образом, чтобы числитель был полным дифференциалом знаменателя или же был равен нулю.

В соотношении (12.43) независимая переменная и искомая функции равноправны.



ПРИМЕР 12.56. Найти общее решение системы уравне-

$$\text{ний} \begin{cases} y' = \frac{mz - lx}{ly - nz}, \\ z' = \frac{nx - my}{ly - nz}. \end{cases}$$

► Запишем систему в симметрической форме

$$\frac{dx}{ly - nz} = \frac{dy}{mz - lx} = \frac{dz}{nx - my} = \gamma$$

и воспользуемся соотношением (12.43). Выбираем $\alpha_1 = m, \alpha_2 = n$ и $\alpha_3 = l$, тогда имеем

$$\frac{d(mx + ny + lz)}{0} = \gamma,$$

т.е. $d(mx + ny + lz) = 0$, откуда

$$mx + ny + lz = C_1. \quad (12.44)$$

Аналогичным образом, выбирая $\alpha_1 = 2x, \alpha_2 = 2y$ и $\alpha_3 = 2z$, приходим к равенству $d(x^2 + y^2 + z^2) = 0$, откуда

$$x^2 + y^2 + z^2 = C_2^2. \quad (12.45)$$

Соотношения (12.44) и (12.45) образуют два первых интеграла системы, неявно определяющих общее решение. 

Найти общие решения систем дифференциальных уравнений.

$$12.380. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{1}{y}, \\ \frac{dy}{dt} = \frac{1}{x}. \end{cases}$$

$$12.381. \frac{dt}{xy} = \frac{dx}{ty} = \frac{dy}{tx}.$$

$$12.382. \begin{cases} \frac{dy}{dx} = \frac{z}{(z-y)^2}, \\ \frac{dz}{dx} = \frac{y}{(z-y)^2}. \end{cases}$$

$$12.383. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{x-y}{z-t}, \\ \frac{dy}{dt} = \frac{x-y}{z-t}, \\ \frac{dz}{dt} = x-y+1. \end{cases}$$

$$12.384. \begin{cases} \frac{dy}{dx} = \frac{2xy}{x^2 - y^2 - z^2}, \\ \frac{dz}{dx} = \frac{2xz}{x^2 - y^2 - z^2}. \end{cases}$$

$$12.385. \frac{dt}{xt} = \frac{dx}{x^2} = \frac{dy}{txy - 2t^2}.$$

$$12.386. \frac{dx}{1 + \sqrt{z-x-y}} = \frac{dy}{1} = \frac{dz}{2}. \quad 12.387. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{y^2}{x}, \\ \frac{dy}{dt} = \frac{x^2}{y}. \end{cases}$$

Найти общие решения систем дифференциальных уравнений, а также частные решения, удовлетворяющее заданным начальным условиям.

$$12.388. \begin{cases} \frac{dy}{dx} = \frac{z-1}{z}, \\ \frac{dz}{dx} = \frac{1}{y-x}; \end{cases} \quad y(0) = -1, z(0) = 1.$$

$$12.389. \begin{cases} \frac{dy}{dx} = \frac{x}{yz}, \\ \frac{dz}{dx} = \frac{x}{y^2}; \end{cases} \quad y(0) = z(0) = 1.$$

3. Физический смысл нормальной системы. Для простоты ограничимся рассмотрением системы из двух дифференциальных уравнений, причем будем считать, что независимая переменная t есть время

$$\begin{cases} \dot{x} = f_1(t, x, y), \\ \dot{y} = f_2(t, x, y). \end{cases} \quad (12.46)$$

Решение $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ этой системы есть некоторая кривая в плоскости Oxy с фиксированной декартовой прямоугольной системой координат. Плоскость Oxy называется *фазовой плоскостью*, а кривая $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ — *фазовой траекторией* системы (12.46). Сама система (12.46) называется *динамической системой*. Динамическая система называется *автономной (стационарной)*, если в правые части уравнений этой системы время t не входит явным образом.

Динамическая система определяет поле скоростей движущейся в плоскости точки в любой момент времени t . Решение динамической системы $x = x(t)$, $y = y(t)$ — это уравнения движения точки: они определяют положение движущейся точки в любой момент времени t . Начальные условия задают положение точки в начальный момент $x(t_0) = x_0$, $y(t_0) = y_0$. Уравнения движения определяют также и траекторию движения, будучи уравнениями этой кривой в параметрической форме.

ПРИМЕР 12.57. Найти фазовую траекторию автономной

$$\text{динамической системы } \begin{cases} \dot{x} = \frac{x^2}{y}, \\ \dot{y} = x, \end{cases} \text{ проходящую через точку}$$

$$M_0 = (2, 3).$$

- Продифференцируем второе уравнение системы по t и подставим выражения $\dot{x} = \frac{x^2}{y}$ и $x = \dot{y}$ в первое уравнение. Получим $\ddot{y} = \frac{\dot{y}^2}{y}$, или $y\ddot{y} - \dot{y}^2 = 0$, т.е. одно уравнение 2-го порядка с одной неизвестной функцией y .

или, в матричной форме,

$$\dot{X}(t) = A(t)X(t), \quad (12.48)$$

где

$$A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \dots & a_{2n}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{pmatrix}, \quad X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}.$$

В области непрерывности коэффициентов $a_{ij}(t)$, $(i, j = 1, 2, \dots, n)$, система (12.47) удовлетворяет условиям теоремы существования и единственности решения задачи Коши.

Фундаментальной системой решений системы (12.47) называется совокупность произвольных n линейно независимых решений $X_k(t) = (x_1^{(k)}(t), x_2^{(k)}(t), \dots, x_n^{(k)}(t))^T$, $(k = 1, 2, \dots, n)$.

Если $X_k(t)$, $(k = 1, 2, \dots, n)$ — фундаментальная система решений системы (12.47), то общее решение имеет вид

$$X(t) = \sum_{k=1}^n C_k X_k(t), \text{ где } C_1, C_2, \dots, C_n \text{ — произвольные постоянные.}$$

Интегрирование системы (12.47) обычно проводится методом исключения.

Решить системы линейных дифференциальных уравнений.

$$12.394. \begin{cases} \frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x} + xz, \\ \frac{dz}{dx} = -\frac{2y}{x^3} + \frac{z}{x}. \end{cases} \quad 12.395. \begin{cases} \frac{dy}{dx} = -y + xz, \\ x^2 \frac{dz}{dx} = -2y + zx. \end{cases}$$

$$12.396. \begin{cases} \dot{x} = -\frac{y}{t}, \\ \dot{y} = -\frac{x}{t}. \end{cases} \quad 12.397. \begin{cases} \dot{x} = -\frac{2}{t}x, \\ \dot{y} = y + \frac{t+2}{t}x. \end{cases}$$



В частном случае систем с постоянными коэффициентами, когда матрица $A(t)$ в правой части (12.48) не зависит от t , для отыскания фундаментальной системы решений системы $X_k(t)$, ($k = 1, 2, \dots, n$) могут быть использованы методы линейной алгебры.

Из характеристического уравнения

$$\det(A - \lambda E) = 0 \quad (12.49)$$

находятся различные корни $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$ и для всякого числа λ (с учетом его кратности) определяются соответствующие ему частные линейно независимые решения $X^{(\lambda)}(t)$. Общее решение системы (12.47) имеет вид

$$X^{(\lambda)}(t) = \sum_{k=1}^n C_k X_k^{(\lambda)}(t).$$

При этом возможны следующие случаи:

а) λ — действительный корень кратности 1. Тогда ему соответствует решение $Cve^{\lambda t}$, где C — произвольная постоянная; v — собственный вектор матрицы A , соответствующий числу λ .



ПРИМЕР 12.58. Найти общее решение системы

$$\begin{cases} \dot{x} = x + 2y, \\ \dot{y} = 4x + 3y. \end{cases}$$

► Характеристическое уравнение (12.49) для этой системы имеет вид $\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 4 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$, или $\lambda^2 - 4\lambda - 5 = 0$. Его корни:

$\lambda_1 = 5, \lambda_2 = -1$. Собственный вектор $v_1 = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$, соответствующий $\lambda_1 = 5$, определяется из условия $Av_1 = \lambda_1 v_1$,

или $\begin{pmatrix} 1-\lambda_1 & 2 \\ 4 & 3-\lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Получаем систему уравне-

ний $\begin{cases} -4a_1 - 2a_2 = 0, \\ -4a_1 - 2a_2 = 0. \end{cases}$ Отсюда $a_2 = 2a_1$. Пусть $a_1 = 1$, тогда

собственный вектор $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ и соответствующее $\lambda_1 = 5$

частное решение имеет вид $X^{(\lambda_1)}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{5t}$. Аналогично

для $\lambda_2 = -1$ находим собственный вектор $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ и со-

ответствующее частное решение $X^{(\lambda_2)}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t}$.

Общее решение исходной системы имеет вид

$$X(t) = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{5t} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}. \quad \blacktriangleleft$$



б) λ — комплексный корень кратности 1. Тогда корнем характеристического уравнения (12.46) является также сопряженное с λ число $\bar{\lambda}$. Вместо комплексных частных решений $X^{(\lambda)}(t)$ и $X^{(\bar{\lambda})}(t)$ следует взять действительные частные решения $X_1^{(\lambda)}(t) = \operatorname{Re} X^{(\lambda)}(t)$ и $X_2^{(\lambda)}(t) = \operatorname{Im} X^{(\lambda)}(t)$.



ПРИМЕР 12.59. Найти общее решение системы

$$\begin{cases} \dot{x} = x + y, \\ \dot{y} = -2x + 3y. \end{cases}$$

► Характеристическое уравнение $\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$, или

$\lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0$, имеет комплексно сопряженные корни $\lambda_{1,2} = 2 \pm i$. Для нахождения собственного вектора

$v = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$, соответствующего корню $\lambda = 2 + i$, получаем

систему $\begin{cases} (-1-i)a_1 + a_2 = 0, \\ -2a_1 + (1-i)a_2 = 0. \end{cases}$ Отсюда $a_2 = (1+i)a_1$, или,

полагая $a_1 = 1$, находим $a_2 = (1+i)$, т.е. $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1+i \end{pmatrix}$ и

Чтобы найти коэффициенты d_{ij} ($i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, k - m$), надо подставить решение (12.50) в систему (12.47). Приравняв коэффициенты подобных членов в левой и правой частях уравнений, получим систему линейных алгебраических уравнений относительно d_{ij} . Надо найти общее решение этой системы. Коэффициенты d_{ij} должны зависеть от k произвольных постоянных, где k — кратность корня λ .

ПРИМЕР 12.60. Найти общее решение системы

$$\begin{cases} \dot{x} = x - y, \\ \dot{y} = x + 3y. \end{cases}$$

► Характеристическое уравнение $\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$, или

$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$, имеет корень $\lambda = 2$ кратности 2. Так как имеется только один собственный вектор, то решение системы ищем в виде

$$\begin{cases} x = (d_{11}C_1 + d_{12}C_2t)e^{2t}, \\ y = (d_{21}C_3 + d_{22}C_4t)e^{2t}. \end{cases}$$

Подставляем эти выражения в исходную систему и сокращаем на e^{2t}

$$\begin{cases} d_{12} + 2(d_{11} + d_{12}t) = (d_{11} + d_{12}t) - (d_{21} + d_{22}t), \\ d_{22} + 2(d_{21} + d_{22}t) = (d_{11} + d_{12}t) + 3(d_{21} + d_{22}t). \end{cases}$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях t , получаем

$$\begin{cases} d_{11} + d_{12} + d_{21} = 0, \\ d_{12} + d_{22} = 0, \\ d_{22} - d_{21} - d_{11} = 0, \\ -d_{22} - d_{12} = 0, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} d_{11} = d_{22} - d_{21}, \\ d_{12} = -d_{22}. \end{cases}$$

Полагая $d_{21} = C_1, d_{22} = C_2$, имеем $d_{11} = -C_1 + C_2, d_{12} = -C_2$.

Тогда
$$\begin{cases} x = (-C_1 + C_2 + C_2t)e^{2t}, \\ y = (C_1 + C_2t)e^{2t}. \end{cases}$$

Итак, общее решение исходной системы имеет вид

$$X(t) = C_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} + C_2 \begin{pmatrix} 1+t \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t}. \quad \blacktriangleleft$$



Описанный метод нахождения решения системы линейных однородных дифференциальных уравнений (12.47) носит название *метод собственных векторов*.



ПРИМЕР 12.61. Найти частное решение системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = x - y + z, \\ \dot{y} = x + y - z, \\ \dot{z} = 2x - y, \end{cases}$$

удовлетворяющее начальному условию $x(0) = 0$, $y(0) = 1$, $z(0) = -2$.

► Характеристическое уравнение $\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & -1 \\ 2 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$ име-

ет корни $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = -1$. Для $\lambda_1 = 1$ из матричного уравнения $(A - \lambda_1 E)v_1 = 0$ находим собственный век-

тор. Из системы уравнений $\begin{cases} -a_2 + a_3 = 0, \\ a_1 - a_3 = 0, \\ 2a_1 - a_2 - a_3 = 0. \end{cases}$ находим

собственный вектор $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Для $\lambda_2 = 2$ и $\lambda_3 = -1$ ана-

логично находим собственные векторы $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ и

$v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -5 \end{pmatrix}$ соответственно.

Таким образом, общее решение системы имеет вид

$$X(t) = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} + C_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -5 \end{pmatrix} e^{-t}. \text{ Подставив в это}$$

равенство $t = 0$ и используя начальное условие, получим

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + C_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -5 \end{pmatrix}, \text{ или } \begin{cases} C_1 + C_2 + C_3 = 0, \\ C_1 - 3C_3 = 1, \\ C_1 + C_2 - 5C_3 = -2. \end{cases}$$

Отсюда $C_1 = 2$, $C_2 = -\frac{7}{3}$, $C_3 = \frac{1}{3}$, и запишем искомое

$$\text{частное решение } X(t) = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t - \frac{7}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -5 \end{pmatrix} e^{-t}. \blacktriangleleft$$

Найти общие решения систем дифференциальных уравнений.

$$12.398. \begin{cases} \dot{x} = x - y, \\ \dot{y} = -4x + y. \end{cases}$$

$$12.399. \begin{cases} \dot{x} = -x + 8y, \\ \dot{y} = x + y. \end{cases}$$

$$12.400. \begin{cases} \dot{x} = -x - 5y, \\ \dot{y} = x + y. \end{cases}$$

$$12.401. \begin{cases} \dot{x} = 3x - y, \\ \dot{y} = 4x - y. \end{cases}$$

$$12.402. \begin{cases} \dot{x} = x - 2y - z, \\ \dot{y} = -x + y + z, \\ \dot{z} = x - z. \end{cases}$$

$$12.403. \begin{cases} \dot{x} = 3x - y + z, \\ \dot{y} = x + y + z, \\ \dot{z} = 4x - y + 4z. \end{cases}$$

$$12.404. \begin{cases} \dot{x} = 3x - 2y - z, \\ \dot{y} = 3x - 4y - 3z, \\ \dot{z} = 2x - 4y. \end{cases}$$

$$12.405. \begin{cases} \dot{x} = 2x - y + 2z, \\ \dot{y} = x + 2z, \\ \dot{z} = -2x + y - z. \end{cases}$$

$$12.406. \begin{cases} \dot{x} = x - y - z, \\ \dot{y} = x + y, \\ \dot{z} = 3x + z. \end{cases}$$

$$12.407. \begin{cases} \dot{x} = 4x - y - z, \\ \dot{y} = x + 2y - z, \\ \dot{z} = x - y + 2z. \end{cases}$$

$$12.408. \begin{cases} \dot{x} = x - y + z, \\ \dot{y} = x + y - z, \\ \dot{z} = -y + 2z. \end{cases}$$

$$12.409. \begin{cases} \dot{x} = -x + y - 2z, \\ \dot{y} = 4x + y, \\ \dot{z} = 2x + y - z. \end{cases}$$

$$\dot{X}_k(t) - A(t)X_k(t) = 0, \quad (k = 1, 2, \dots, n),$$

приходим к системе уравнений относительно $\dot{C}_k(t)$:

$$\sum_{k=1}^n \dot{C}_k(t)X_k(t) = F(t). \quad (12.56)$$

Из этой системы находим $\dot{C}_k(t) = \varphi(t)$ и, интегрируя, получаем функции $C_k(t)$ с точностью до произвольных постоянных. Подставляя их в (12.55), получаем искомое общее решение неоднородной системы (12.51).



ПРИМЕР 12.62. Найти общее решение системы уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = y + \operatorname{tg} t, \\ \dot{y} = -x, \end{cases}$$

используя метод вариации постоянных.

► Характеристическое уравнение соответствующей однородной системы $\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$ имеет корни $\lambda_{1,2} = \pm i$. Собственный вектор, соответствующий $\lambda = i$, равен $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$.

Поэтому $\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} e^{it}$ — комплексное решение системы. Выделим действительную и мнимую части

$$\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} e^{it} = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} (\cos t + i \sin t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}.$$

Значит, общее решение однородной системы имеет вид

$$X(t) = C_1 \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}, \quad \text{где } C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Переходя к решению неоднородной системы, будем далее считать, что $C_1 = C_1(t)$, $C_2 = C_2(t)$. Тогда

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \dot{C}_1 \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} + \dot{C}_2 \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} + C_1 \begin{pmatrix} -\sin t \\ -\cos t \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix}.$$

Подставив в исходную систему, получим $\dot{C}_1 \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} + \dot{C}_2 \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{tg} t \\ 0 \end{pmatrix}$. Решив эту систему линейных алгебраических уравнений относительно $\dot{C}_1, \dot{C}_2$, получим $\dot{C}_1 = \sin t, \dot{C}_2 = \frac{\sin^2 t}{\cos t}$. Интегрируя эти равенства, найдем $C_1(t) = -\cos t + \tilde{C}_1, C_2(t) = \int \frac{\sin^2 t}{\cos t} dt = -\sin t + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+\sin t}{1-\sin t} \right| + \tilde{C}_2$, где $\tilde{C}_1, \tilde{C}_2 \in \mathbb{R}$. Таким образом, общее решение исходной системы имеет вид

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (-\cos t + C_1) \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} + \left(-\sin t + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+\sin t}{1-\sin t} \right| + C_2 \right) \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix},$$

где $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$. ◀

Решить неоднородные системы методом вариации постоянных.

$$\begin{array}{ll} 12.413. \begin{cases} \dot{x} = y + \operatorname{tg}^2 t - 1, \\ \dot{y} = -x + \operatorname{tg} t. \end{cases} & 12.414. \begin{cases} \dot{x} = 3x + 2y + 3e^{2t}, \\ \dot{y} = x + 2y + e^{2t}. \end{cases} \\ 12.415. \begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = x + \frac{1}{t^2} + \ln t. \end{cases} & 12.416. \begin{cases} \dot{x} = 3x - 2y, \\ \dot{y} = 2x - y + 15e^t \sqrt{t}. \end{cases} \end{array}$$



Если коэффициенты $a_{ij}(t)$ системы (12.48) постоянны, т.е. $a_{ij}(t) = a_{ij}$, ($i, j = 1, 2, \dots, n$), а функции $f_i(t)$ имеют вид произведений

$$(P(t) \cos \beta t + Q(t) \sin \beta t) e^{\alpha t}, \quad (12.57)$$

где $P(t)$, $Q(t)$ — многочлены, то частное решение $\tilde{X}(t)$ можно найти методом неопределенных коэффициентов, записав $\tilde{X}(t)$ в виде, аналогичном (12.57), с учетом совпадения или несовпадения чисел $\alpha \pm i\beta$ с корнями характеристического уравнения.

Следует иметь в виду, что если m — наибольшая степень, многочленов $P(t)$ и $Q(t)$ в (12.57) и $\lambda = \alpha + i\beta$ — корень кратности r характеристического уравнения, то частное решение $\tilde{X}(t)$ ищется в виде

$$\tilde{X}(t) = \operatorname{Re} \left(t^{r-1} \begin{pmatrix} \gamma_{10}t^{m+1} + \gamma_{11}t^m + \dots + \gamma_{1,m+1} \\ \gamma_{20}t^{m+1} + \gamma_{21}t^m + \dots + \gamma_{2,m+1} \\ \dots \\ \gamma_{n0}t^{m+1} + \gamma_{n1}t^m + \dots + \gamma_{n,m+1} \end{pmatrix} e^{\lambda t} \right). \quad (12.58)$$

ПРИМЕР 12.63. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = 3x + 2y + 4e^{5t}, \\ \dot{y} = x + 2y. \end{cases}$$

► Характеристическое уравнение соответствующей однородной системы $\begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$, или $\lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0$, имеет корни $\lambda_1 = 1$ и $\lambda_2 = 4$. Находим собственные векторы: $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ для $\lambda = 1$ и $v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ для $\lambda = 4$. Общее решение однородной системы

$$X_0 = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^t + C_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{4t}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Перейдем к решению неоднородной системы в соответствии с формулами (12.54) и (12.58). Имеем $m = 0$, $\lambda = 5$, $r = 0$, поэтому частное решение неоднородной системы ищем в виде $\tilde{X}(t) = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} e^{5t}$. Подставим в неоднородную систему

$$5 \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} e^{5t} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} e^{5t} + \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} e^{5t}.$$

Отсюда получаем систему линейных алгебраических уравнений $5A = 3A + 2B + 4$, $5B = A + 2B$. Ее решение

$A = 3$, $B = 1$, значит, $\tilde{X}(t) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} e^{5t}$. Таким образом, используя (12.54), запишем общее решение системы

$$X(t) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} e^{5t} + C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^t + C_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{4t}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}. \quad \blacktriangleleft$$

ПРИМЕР 12.64. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = y + 2e^t, \\ \dot{y} = x + t^2. \end{cases}$$

► Запишем систему в матричном виде

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2e^t \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ t^2 \end{pmatrix}.$$

Характеристическое уравнение однородной системы имеет вид $\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$, т.е. $\lambda^2 - 1 = 0$. Его корни: $\lambda_1 = 1$,

$\lambda_2 = -1$. Составим систему алгебраических уравнений для нахождения собственных векторов. Для $\lambda = 1$ найдем собственный вектор $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Для $\lambda = -1$ находим

собственный вектор $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, значит,

$$X_0(t) = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Перейдем к решению неоднородной системы. Ее разобьем на две системы.

Для системы $(\alpha) \quad \dot{X} = AX + \begin{pmatrix} 2e^t \\ 0 \end{pmatrix}$ имеем: $m = 0$, $\lambda = 1$,

$r = 1$, поэтому частное решение ищем в виде

$$\tilde{X}_1(t) = \begin{pmatrix} At + B \\ Ct + D \end{pmatrix} e^t.$$

Подставим в систему (α) :

$$\begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix} e^t + \begin{pmatrix} At + B \\ Ct + D \end{pmatrix} e^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} At + B \\ Ct + D \end{pmatrix} e^t + \begin{pmatrix} 2e^t \\ 0 \end{pmatrix},$$

После упрощения приравниваем коэффициенты многочленов при одинаковых степенях t в правой и левой частях равенства: $\begin{cases} At + A + B = Ct + D + 2, \\ Ct + C + D = At + B \end{cases}$, получим

$$\begin{cases} A + B = D + 2, \\ A = C, \\ C + D = B, \\ C = A. \end{cases}$$

Решением этой системы служит, например, следующий набор чисел: $A = B = C = 2$, $D = 0$. Следовательно,

$$\tilde{X}_1(t) = \begin{pmatrix} 2t + 2 \\ 2t \end{pmatrix} e^t.$$

Для системы (β) $\dot{X} = AX + \begin{pmatrix} 0 \\ t^2 \end{pmatrix}$ имеем $m = 2$, $\lambda = 0$, $r = 0$,

поэтому $\tilde{X}_2(t) = \begin{pmatrix} At^2 + Bt + C \\ Dt^2 + Et + F \end{pmatrix}$.

Подставим в систему (β) :

$$\begin{pmatrix} 2At + B \\ 2Dt + E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} At^2 + Bt + C \\ Dt^2 + Et + F \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ t^2 \end{pmatrix},$$

откуда следует, что

$$\begin{cases} 2At + B = Dt^2 + Et + F, \\ 2Dt + E = At^2 + Bt + C + t^2. \end{cases}$$

с начальными условиями в точке t_0 . Решение $X_0(t) = (\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t))^T$ системы (12.59) называется *устойчивым по Ляпунову*, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что для всякого решения $X(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))^T$ той же системы, значения которого в точке t_0 удовлетворяют неравенствам

$$|x_i(t_0) - \varphi_i(t_0)| < \delta(\varepsilon), \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (12.60)$$

для всех $t > t_0$ справедливы неравенства

$$|x_i(t) - \varphi_i(t)| < \varepsilon \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (12.61)$$

Если же при сколь угодно малом $\delta \Rightarrow 0$ хотя бы для одного решения $X(t)$ неравенства (12.61) не выполняются, то решение $X_0(t)$ называется *неустойчивым*.

Если решение $X_0(t)$ устойчиво и, кроме того, при условии (12.60) удовлетворяет соотношению

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} |x_i(t) - \varphi_i(t)| = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

то это решение называется *асимптотически устойчивым*.

ПРИМЕР 12.65. Исходя из определения, выяснить, устойчиво ли решение системы $\begin{cases} \dot{x} = 4y, \\ \dot{y} = -x \end{cases}$ с начальными условиями $x(0) = 0, y(0) = 0$.

► Характеристическое уравнение $\begin{vmatrix} -\lambda & 4 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$, или

$$\lambda^2 + 4 = 0, \text{ имеет корни } \lambda_{1,2} = \pm 2i.$$

Решение системы ищем в виде $x(t) = a_1 \cos 2t + a_2 \sin 2t$,
 $y(t) = b_1 \cos 2t + b_2 \sin 2t$.

Подставляя функции $x(t)$ и $y(t)$ в одно из уравнений системы, например в первое, получаем

$$-2a_1 \sin 2t + 2a_2 \cos 2t = 4b_1 \cos 2t + 4b_2 \sin 2t.$$

Отсюда $4b_1 = 2a_2$, $4b_2 = -2a_1$, или $2b_1 = a_2$, $-2b_2 = a_1$, и

$$x(t) = a_1 \cos 2t + a_2 \sin 2t,$$

$$y(t) = \frac{a_2}{2} \cos 2t - \frac{a_1}{2} \sin 2t.$$

В векторной форме $X(t) = a_1 \begin{pmatrix} \cos 2t \\ -\frac{\sin 2t}{2} \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} \sin 2t \\ \frac{\cos 2t}{2} \end{pmatrix}$.

Подставляем начальные условия, тогда $x(0) = a_1 = 0$,

$y(0) = \frac{a_2}{2} = 0$, и исследуем на устойчивость решение

$X_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Для этого составляем разность $X(t) - X_0$. При

произвольном t она имеет вид

$$X(t) - X_0 = \begin{pmatrix} a_1 \cos 2t + a_2 \sin 2t \\ -\frac{a_1}{2} \sin 2t + \frac{a_2}{2} \cos 2t \end{pmatrix},$$

что при $t = 0$ совпадает с вектором $X(t) - X_0 = \begin{pmatrix} a_1 \\ \frac{a_2}{2} \end{pmatrix}$.

Для того чтобы из неравенств $|a_1| < \delta$, $\left| \frac{a_2}{2} \right| < \delta$ следовала при произвольном t справедливость следующих двух неравенств:

$$\left| a_1 \cos 2t + a_2 \sin 2t \right| < \varepsilon, \quad \left| -\frac{a_1}{2} \sin 2t + \frac{a_2}{2} \cos 2t \right| < \varepsilon,$$

достаточно взять $\delta = \frac{\varepsilon}{4}$. Тогда имеем при любом $t > 0$

$$\begin{aligned} \left| a_1 \cos 2t + a_2 \sin 2t \right| &\leq |a_1| + |a_2| < \varepsilon, \\ \left| -\frac{a_1}{2} \sin 2t + \frac{a_2}{2} \cos 2t \right| &\leq \left| \frac{a_1}{2} \right| + \left| \frac{a_2}{2} \right| < \varepsilon, \end{aligned}$$

т.е. решение $X_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ устойчиво по Ляпунову.

Следует отметить, что это решение не является асимптотически устойчивым, так как $\lim_{t \rightarrow +\infty} \left| a_1 \cos 2t + a_2 \sin 2t \right|$ не существует. ◀



Исследование на устойчивость решения $X_0(t)$ системы (12.59) может быть сведено к исследованию на устойчивость тривиального (нулевого) решения — *точки покоя* некоторой системы, аналогичной системе (12.59).



Исследовать на устойчивость решения систем уравнений.

$$12.422. \begin{cases} \dot{x} = x + y, \\ \dot{y} = x - y, \end{cases} \quad x(0) = y(0) = 0.$$

$$12.423. \begin{cases} \dot{x} = -2x - 3y, \\ \dot{y} = x + y, \end{cases} \quad x(0) = y(0) = 0.$$

$$12.424. \begin{cases} \dot{x} = ax - y, \\ \dot{y} = ay - z, \\ \dot{z} = az - x, \end{cases} \quad x(0) = y(0) = z(0) = 0, \quad a \in \mathbb{R}.$$

12.425. Написать систему дифференциальных уравнений, исследование на устойчивость точки покоя которой равносильно исследованию на устойчивость решения $X_0(t)$ системы (12.59).

2. Простейшие типы точек покоя. Для исследования на устойчивость точки покоя системы двух линейных однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\begin{cases} \dot{x} = a_{11}x + a_{12}y, \\ \dot{y} = a_{21}x + a_{22}y. \end{cases} \quad \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0 \quad (12.62)$$

надо составить характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + \Delta = 0$$

и найти его корни λ_1 и λ_2 . В табл. 12.1 приведена классификация точек покоя системы (12.62) в зависимости от значений корней λ_1, λ_2 характеристического уравнения.



ПРИМЕР 12.66. Определить характер и исследовать на устойчивость точку покоя системы дифференциальных уравнений $\begin{cases} \dot{x} = -x + ay, \\ \dot{y} = x + y \end{cases}$ в зависимости от значений параметра a ($a \neq 2$).

► Характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & a \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \lambda - (a+2) = 0$$

имеет корни $\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{9+4a}$. Исследуя поведение

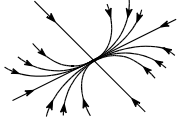
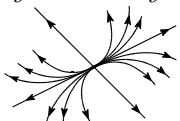
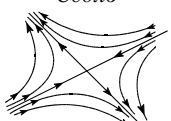
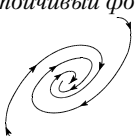
значений корней λ_1, λ_2 в зависимости от значений параметра a и используя табл. 12.1, получаем:

если $a < -9/4$ (корни комплексные $\operatorname{Re} \lambda_{1,2} < 0$) — устойчивый фокус;

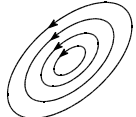
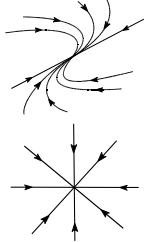
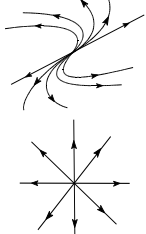
если $-9/4 \leq a < -2$ (корни действительные и отрицательные) — устойчивый узел;

если $a > -2$ (корни действительные и разных знаков) — седло, точка покоя неустойчива.

Таблица 12.1

Корни λ_1, λ_2		Характер точки покоя	Устойчивость точки покоя
Действительные $\lambda_1 \neq \lambda_2$	$\lambda_1 < 0,$ $\lambda_2 < 0$	<i>Устойчивый узел</i> 	Асимптотически устойчива
	$\lambda_1 > 0,$ $\lambda_2 > 0$	<i>Неустойчивый узел</i> 	Неустойчива
	$\lambda_1 > 0,$ $\lambda_2 < 0$	<i>Седло</i> 	Неустойчива
Комплексные $\lambda_1 = \alpha + i\beta,$ $\lambda_2 = \alpha - i\beta$	$\alpha < 0,$ $\beta \neq 0$	<i>Устойчивый фокус</i> 	Асимптотически устойчива

Окончание табл. 12.1

Корни λ_1, λ_2		Характер точки покоя	Устойчивость точки покоя
Комплексные $\lambda_1 = \alpha + i\beta$, $\lambda_2 = \alpha - i\beta$	$\alpha > 0$, $\beta \neq 0$	Неустойчивый фокус 	Неустойчива
	$\alpha = 0$, $\beta \neq 0$	Центр 	Устойчива
Действительные, кратности 2: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$	$\lambda < 0$	Устойчивый узел 	Асимптотически устойчива
	$\lambda > 0$	Неустойчивый узел 	Неустойчива

Определить характер точек покоя систем дифференциальных уравнений.

12.426.
$$\begin{cases} \dot{x} = x + 2y, \\ \dot{y} = -3x + y. \end{cases}$$

12.427.
$$\begin{cases} \dot{x} = -2x + y / 3, \\ \dot{y} = -2x + y / 2. \end{cases}$$

12.428.
$$\begin{cases} \dot{x} = -x + 3y, \\ \dot{y} = -x + 2y. \end{cases}$$

12.429.
$$\begin{cases} \dot{x} = -y, \\ \dot{y} = x - 2y. \end{cases}$$

$$12.430. \begin{cases} \dot{x} = -6x - 5y, \\ \dot{y} = -2x - 5y. \end{cases}$$

Определить, при каких значениях параметра a точки покоя систем дифференциальных уравнений устойчивы.

$$12.431. \begin{cases} \dot{x} = ax - y, \\ \dot{y} = x + 2y. \end{cases}$$

$$12.432. \begin{cases} \dot{x} = -3x + ay, \\ \dot{y} = -ax + y. \end{cases}$$

ПРИМЕР 12.67. Исследовать точку покоя системы уравнений $\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -2x + y \end{cases}$ и дать чертеж расположения траекторий на плоскости Oxy .

► Характеристическое уравнение $\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$, или

$\lambda^2 - \lambda + 2 = 0$, имеет комплексно-сопряженные корни:

$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \pm i \frac{\sqrt{7}}{2}$. Так как $\operatorname{Re} \lambda = \frac{1}{2} > 0$, то точка покоя — неустойчивый фокус.

Строим в точке $(1, 0)$ вектор скорости $\left\{ \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt} \right\} = \{y, -2x + y\}|_{(1,0)} = \{0, -2\}$, что означает, что возраста-

нию t соответствует движение по часовой стрелке. Так как фокус неустойчивый, траектории по часовой стрелке удаляются от начала координат.

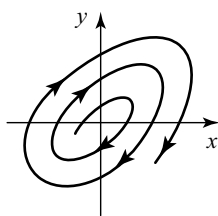


Рис. 12.2

Переходим от системы к уравнению $\frac{dy}{dx} = \frac{-2x + y}{y}$, полагая в нем $y = kx$. По-

лучаем $k = \frac{-2 + k}{k}$, или $k^2 - k + 2 = 0$ при

$k \neq 0$. Отсюда следует, что на прямой $y = 2x$ производная $y' = 0$, т.е. касательная к траектории, параллельна оси Ox . Соответственно $y' = \infty$ на прямой $y = 0$; $y' = 1$, т.е. угловой коэффициент касательной равен единице на прямых $y = -2x$ и $x = 0$. Расположение траекторий на фазовой плоскости изображено на рис. 12.2. ◀

а) $V(0, \dots, 0) = 0$ и сколь угодно близко от начала координат имеются точки $V(x_1, x_2, \dots, x_n) > 0$;

б) $\frac{dV}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq 0$, причем $\frac{dV}{dt} = 0$ лишь

при $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$,

то точка покоя системы (12.63) неустойчива.

ПРИМЕР 12.68. С помощью функции Ляпунова исследовать на устойчивость точку покоя системы

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + y, \\ \dot{y} = -x - 2y^3. \end{cases}$$

► В качестве функции Ляпунова возьмем $V(x, y) = x^2 + y^2$. Тогда

$$\frac{dV}{dt} = -2x(-x + y) + 2y(-x - 2y^3) = -2(x^2 + 2y^4),$$

и функция V вместе с $\frac{dV}{dt}$ удовлетворяет условиям теоремы 2. Значит, точка покоя системы асимптотически устойчива. ◀

ПРИМЕР 12.69. Исследовать на устойчивость точку покоя системы

$$\begin{cases} \dot{x} = x(2 + \cos x), \\ \dot{y} = -y. \end{cases}$$

► Возьмем $V(x, y) = x^2 - y^2$. Тогда

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= 2x^2(2 + \cos x) + 2y^2 = 2(2x^2 + y^2 + x^2 \cos x) = \\ &= 2\left(x^2 + 2x^2 \cos^2 \frac{x}{2} + y^2\right) > 0 \end{aligned}$$

всюду, кроме начала координат. Кроме того, сколь угодно близко от начала координат найдутся точки, в которых $V > 0$ (например, вдоль прямой $y = 0$ $V = x^2 > 0$). Следовательно, выполнены условия теоремы 3, и точка покоя неустойчива. ◀

Общего метода построения функций Ляпунова не существует. В простейших случаях ее следует искать в виде $V = ax^2 + by^2$, $V = ax^4 + by^4$, $V = ax^2 + by^4$, подбирая надлежащим образом постоянные a и b .

ПРИМЕР 12.70. Исследовать на устойчивость точку покоя системы

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + \frac{3}{2}y + 3xy^3, \\ \dot{y} = -x - \frac{1}{3}y - 2x^2y^2. \end{cases}$$

► Функцию Ляпунова будем искать в виде $V = ax^2 + by^2$. Тогда имеем:

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= 2ax \left(-x + \frac{3}{2}y + 3xy^3 \right) + 2by \left(-x - \frac{1}{3}y - 2x^2y^2 \right) = \\ &= - \left(2ax^2 + \frac{2}{3}by^2 \right) + (xy + 2x^2y^3)(3a - 2b). \end{aligned}$$

Полагая $b = \frac{3}{2}a$, получим $\frac{dV}{dt} = -a(2x^2 + y^2) \leq 0$ при всяком $a > 0$. Из теоремы 2 следует, что точка покоя системы асимптотически устойчива. ◀

Исследовать на устойчивость точки покоя систем уравнений.

$$12.435. \begin{cases} \dot{x} = -x - y - x^3 - y^2, \\ \dot{y} = x - y + xy. \end{cases} \quad 12.436. \begin{cases} \dot{x} = y + x^3, \\ \dot{y} = -x + y^3. \end{cases}$$

$$12.437. \begin{cases} \dot{x} = xy^4, \\ \dot{y} = -x^4y. \end{cases} \quad 12.438. \begin{cases} \dot{x} = -y + x^5, \\ \dot{y} = x + y^5. \end{cases}$$

$$12.439. \begin{cases} \dot{x} = y + x^2y^2 - \frac{1}{4}x^5, \\ \dot{y} = -2x - 2x^3y - \frac{1}{2}y^3. \end{cases} \quad 12.440. \begin{cases} \dot{x} = -2x + 4xy^2, \\ \dot{y} = y + 2x^2y. \end{cases}$$

ПРИМЕР 12.71. Исследовать на устойчивость точку покоя системы $\begin{cases} \dot{x} = x + 10 \sin y, \\ \dot{y} = -2x - 5y + xe^x. \end{cases}$

- Разлагаем по формуле Тейлора в окрестности точки $(0, 0)$ функции $\sin y$ и e^x

$$\sin y = y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} + \dots, \quad e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots$$

и выделяя члены 1-го порядка малости, можем переписать исходную систему в виде

$$\begin{cases} \dot{x} = x + 10y - \underbrace{\frac{10}{3!}y^3 + \dots}_{F_1(x, y)}, \\ \dot{y} = -2x - 5y + x + \underbrace{x^2 + \frac{x^3}{2!} + \dots}_{F_2(x, y)} \end{cases}$$

$$\text{или } \begin{cases} \dot{x} = x + 10y + F_1(x, y), \\ \dot{y} = -x - 5y + F_2(x, y), \end{cases}$$

где F_1 и F_2 — члены 2-го порядка малости относительно x и y . Соответствующая система первого приближения для исходной системы запишется следующим образом:

$$\begin{cases} \dot{x} = x + 10y, \\ \dot{y} = -x - 5y. \end{cases} \quad \text{Корни характеристического уравнения этой}$$

системы $\lambda_{1,2} = -2 \pm i$ имеют отрицательные действительные части. Следовательно, точка покоя системы асимптотически устойчива. ◀

Исследовать на устойчивость по первому приближению точки покоя систем дифференциальных уравнений.

$$12.441. \quad \begin{cases} \dot{x} = \frac{1}{4}(e^x - 1) - 9y + x^4, \\ \dot{y} = \frac{1}{5}x - \sin y + y^3. \end{cases}$$

$$12.442. \begin{cases} \dot{x} = 5x + y \cos y - \frac{x^3}{3}, \\ \dot{y} = 3x + 2y + \frac{x^4}{12} - y^3 e^y. \end{cases}$$

$$12.443. \begin{cases} \dot{x} = 7x + 2 \sin y - y^4, \\ \dot{y} = e^x - 3y - 1 + \frac{5}{2} x^2. \end{cases}$$

$$12.444. \begin{cases} \dot{x} = -\frac{3}{2}x + \frac{1}{2} \sin 2y, \\ \dot{y} = -y - 2x + x^3 - y^2. \end{cases}$$

$$12.445. \begin{cases} \dot{x} = \ln(4y + e^{-3x}), \\ \dot{y} = 2y - 1 + \sqrt[3]{1 - 6x}. \end{cases} \quad 12.446. \begin{cases} \dot{x} = e^{x+2y} - \cos 3x, \\ \dot{y} = \sqrt{4 + 8x} - 2e^y. \end{cases}$$

12.447. Показать, что исследование на устойчивость по первому приближению точки покоя системы $\begin{cases} \dot{x} = -4y + x^3, \\ \dot{y} = 3x - y^3 \end{cases}$ невозможно. Провести исследование методом функций Ляпунова.

ОТВЕТЫ И УКАЗАНИЯ

Глава 1

- 1.12. $\frac{25}{99}$. 1.13. $\frac{9}{37}$. 1.14. $-\frac{16}{9}$. 1.15. $5\frac{257}{1100}$. 1.16. 20. 1.17. 74.
1.18. 3,6. 1.19. 1. 1.20. 8. 1.21. 55. 1.22. 41. 1.23. 0,5. 1.24. 2.
1.25. Число α рациональное. 1.26. 6,218. 1.27. 0,19397.
1.28. 1,688. 1.29. 34,68468. 1.30. $|x| < 5$. 1.31. $|x - 2| < 5$.
1.32. $2 \leq |x| \leq 3$. 1.33. $\frac{1}{3} \leq |x| \leq \frac{1}{2}$. 1.37. 2, если $x < 1$; $4x - 2$,
если $1 \leq x < 1,5$; 4, если $1,5 \leq x < 2$; $4x - 4$, если $x \geq 2$.
1.38. $-6 - 6x$, если $x < -2$; 6, если $-2 \leq x < -4/3$; $-6x - 2$, если
 $-4/3 \leq x < -2/3$; 2, если $x \geq -2/3$. 1.39. 2; 4. 1.40. -2; 1.
1.41. 18. 1.42. 6. 1.43. [2, 3]. 1.44. 1. 1.45. 1; 27. 1.46.
 $\left(-\infty, \frac{5}{3}\right) \cup (3, +\infty)$. 1.47. $x \in \mathbb{R}$. 1.48. (3, 7). 1.49. $(3 - \sqrt{13}, 2) \cup$
 $\cup (2, 3 + \sqrt{13})$. 1.50. $(-\infty, 5)$. 1.51. (0, 3). 1.52. $\left[2, \frac{7 + \sqrt{5}}{2}\right]$.
1.53. [0, 3]. 1.54. [2,5, 3]. 1.55. $[1/\alpha] = 1$. 1.59. $\frac{5}{6} \leq x < 1$.
1.60. $0 \leq x < \frac{1}{3}$. 1.61. $\frac{4}{3} \leq x \leq \frac{7}{3}$. 1.62. $x \in [1, 2) \cup [3, 7) \cup [8, 9)$.
1.63. $\frac{1}{2} + n, \frac{1}{4} + n$, где $n \in \mathbb{Z}$. 1.64. $\frac{1}{2} + n$, где $n \in \mathbb{Z}$. 1.65. $-\frac{1}{1} +$
 $+\frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2n-1}$. 1.66. $2 - 8 + 3 - 27 + \dots + n - n^3$. 1.67. $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} +$
 $+\dots + \frac{1}{20 \cdot 21}$. 1.68. $-\frac{1}{1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \dots + \frac{(-1)^n}{n}$. 1.69. $\sum_{k=1}^{100} \frac{1}{3k-2}$.

- 1.70.** $\sum_{k=1}^{19} (k^2 + 1)$. **1.71.** $\sum_{k=1}^{20} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$. **1.72.** $\sum_{k=1}^{25} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2}$.
1.73. $\sum_{k=2}^{100} \left(\frac{1}{k} - \frac{(-1)^{k+1}}{k^2} \right)$. **1.74.** n^2 . **1.75.** $\frac{n}{n+1}$. **1.76.** n^3 .
1.77. $\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$. **1.78.** $\frac{n^2(n+1)^2}{4}$. **1.79.** а) Истинно;
 б) ложно; в) истинно; г) ложно. **1.80.** Ложно. **1.81.** Истинно.
1.82. Истинно. **1.83.** Истинно. **1.84.** а) Истинно; б) истинно.
1.85. а) Истинно; б) истинно; в) ложно.
1.86. а) $f(x_0) = 0$; $f(x_0) \neq 0$;
 б) $f(x_0) = 0 \wedge \forall x (x \neq x_0 \Rightarrow f(x_0) \neq 0)$;
 $f(x_0) \neq 0 \vee (f(x_0) = 0 \wedge \exists x (x \neq x_0 \wedge f(x) = 0))$;
 в) $\exists x_0 (f(x_0) = 0) \wedge$
1.87. а) $\exists k \in \mathbb{Z} (n = km)$; $\forall k \in \mathbb{Z} (n \neq km)$;
 б) $(2 \mid n \wedge 3 \mid n) \Rightarrow 6 \mid n$; $(2 \mid n \wedge 3 \mid n) \wedge 6 \nmid n$; *Замечание.* Так
 как исходное высказывание истинно, то его отрицание ложно.
 в) $\forall n \in \mathbb{N} (n \mid p \Rightarrow (n = 1 \vee n = p))$; $\exists n \in \mathbb{N} (n \mid p \wedge (n \neq 1 \vee n \neq p))$.
1.88. $\{x \in \mathbb{Z} \mid x = 7n, n \in \mathbb{Z}\}$. **1.89.** $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0, x \neq 2, x \neq 3\}$.
1.90. $\{x \in \mathbb{Z} \mid x = 5n + 1, n \in \mathbb{Z}\}$. **1.91.** $\{x \in \mathbb{Z} \mid x = n^2, n \in \mathbb{Z}\}$.
1.92. $\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b, a, b \in \mathbb{R}\}$. **1.93.** $\{x \in \mathbb{R} \mid |x| - x = 0\}$.
1.94. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, x^2 + y^2 = r^2\}$. **1.95.** Да. **1.96.** Да.
1.97. Да. **1.98.** Нет. **1.99.** Да. **1.100.** Нет. **1.101.** Да. **1.102.** а) $\emptyset$,
 $\{1\}$, $\{2\}$, $\{1, 2\}$; б) $\emptyset$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$, $\{2, 3\}$, $\{1, 2, 3\}$; в) $\emptyset$,
 $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$, $\{d\}$, $\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{a, d\}$, $\{b, c\}$, $\{b, d\}$, $\{c, d\}$, $\{a, b, c\}$,
 $\{a, b, d\}$, $\{a, c, d\}$, $\{b, c, d\}$, $\{a, b, c, d\}$. **1.103.** Да. **1.104.** Да.
1.105. Да. **1.106.** Да. **1.107.** Нет.
1.108. $A \cup B = (-3, 5]$, $A \cap B = [0, 3]$, $A \setminus B = (-3, 0)$,
 $B \setminus A = (3, 5]$, $\bar{A} = (-\infty, -3] \cup (3, +\infty)$, $\bar{B} = (-\infty, 0) \cup (5, +\infty)$,
 $\bar{A} \cap \bar{B} = (-\infty, -3] \cup (5, +\infty)$.
1.109. $A \cup B = [-4, 6)$, $A \cap B = (-2, 2]$, $A \setminus B = \emptyset$, $B \setminus A =$
 $[-4, -2] \cup (2, 6)$, $\bar{A} = (-\infty, -2] \cup (2, +\infty)$, $|A \cup C| = 385$, $\bar{B} =$
 $= (-\infty, -4) \cup [6, +\infty)$, $\bar{A} \cap \bar{B} = \bar{B}$.

1.110. а) $\{x \in \mathbb{Z} \mid x = 14k, k \in \mathbb{Z}\}$; б) $\{x \in \mathbb{Z} \mid x = 90k, k \in \mathbb{Z}\}$.

1.111. $X \times Y = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [-3, 3], y \in [0, 5]\}$ — прямоугольник на координатной плоскости.

1.112. $= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [0, 1] \cup [2, 3], y \in [0, 1] \cup [2, 3]\}$ четыре

квадрата на координатной плоскости. **1.113.** $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$ — множество всех точек координатной плоскости.

1.34. 1) $\emptyset$; 2) да. **1.35.** 1) A ; 2) $A \cap B$; 3) $A \cap B$; 4) $A \cup B$.

1.36. 1) $\{x \mid x = 14k, k \in \mathbb{Z}\}$; 2) $\{x \mid x = 90k, k \in \mathbb{Z}\}$.

1.132. $|A \cup B| = 420$, $|B \cup C| = 282$, $|A \cup B \cup C| = 488$.

1.133. 125. **1.142.** а) $\min X$ не существует; $\max X = 1$; б) $[1, +\infty)$; $(-\infty, 0]$; $\sup X = 1$; $\inf X = 0$. **1.143.** $\min X = 0,5$; $\max X$ не существует; $\inf X = 0,5$; $\sup X$ не существует.

1.144. $\min X = -1$; $\max X = 1$; $\inf X = -1$; $\sup X = 1$.

1.145. $\min X = -6$; $\max X$ не существует; $\inf X = -6$; $\sup X = 1$.

1.146. $\min X$, $\max X$ и $\inf X$ не существует; $\sup X = 0$.

1.147. $\min X$ и $\max X$ не существует; $\inf X = 0$; $\sup X = 1$.

1.148. $\sup X = \sqrt{2}$. **1.164.** $\frac{n}{3n+1}$. **1.165.** $\frac{n}{5(6n+5)}$. **1.190.** $n = 7$.

1.191. $n = 4$. **1.192.** $n = 13$. **1.193.** $n \in \{2, 3, 4, 5, 6\}$.

1.194. $n \in \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. **1.195.** $n \in \{2, 3, 4, 5, 6\}$.

1.196. $n \in \{1, 2, 3\}$. **1.197.** 46. **1.198.** 750. **1.199.** $1/36$.

1.200. а) $25!$; б) $\frac{30!}{5!} = A_{30}^{25}$. **1.201.** а) C_n^2 ; б) C_n^3 ; в) $C_m^3 - n \cdot C_{n-1}^3$,

где $m = C_n^2$. **1.202.** а) $9!$; б) $P_5 \cdot P_5 = (5!)^2 = 14\,400$.

1.203. $A_9^5 + 8 \cdot A_8^4 = 28\,560$. **1.204.** $\frac{9(9^n - 1)}{8}$.

1.205. $C_2^1 \cdot C_7^2 \cdot C_{10}^3 = 5040$. **1.206.** а) 36; б) 84; в) 126.

1.207. $C_{n-k-1}^{k-1} + C_{n-k}^k$.

1.208. а) $11!$; б) $\frac{11!}{2}$; в) $\frac{12!}{6! \cdot 2^6} = 10\,395$.

1.209. $\frac{1}{4!} \cdot C_{28}^7 \cdot C_{21}^7 \cdot C_{14}^7 = \frac{28!}{4! \cdot (7!)^4}$.

1.210. а) C_{n-2}^3 ;

б) $C_n^3 - \underbrace{((n-2)+2(n-3)+(n-3)(n-4))}_{\text{количество способов убрать какие-то стоящие рядом}} = C_{n-2}^3.$

количество способов убрать какие-то стоящие рядом

1.211. а) $n! - 2(n-1)!$; б) $n! - 6(n-2)!$; в) $n! - 6(n-1)! + 6(n-2)!$. *Указание.* Использовать формулу включений и

исключений. **1.212.** $\tilde{A}_6^{15} = 6^{15}$. **1.213.** $C_{4(n-1)}^3 - 4C_{n-1}^3 =$

$= 2(n-1)^2(5n-8)$. **1.214.** $P(10, 10, 10, 2) = \frac{32!}{(10!)^3 \cdot 2!}$. **1.215.** 1704.

1.216. а) $C_{52}^{10} - C_{48}^{10}$; б) $C_4^1 \cdot C_{48}^9$; в) $C_{52}^{10} - C_{48}^{10} - C_4^1 \cdot C_{48}^9$; г) $C_4^2 \cdot C_{48}^8$.

1.217. а) $\frac{15!}{(3!)^5 \cdot 5!}$; б) 945. **1.218.** $\tilde{C}_6^n = C_{n+5}^5$. **1.219.** $\tilde{C}_{10}^3 = C_{12}^3 =$

$= 220$. **1.220.** а) 8080; б) 84. **1.221.** а) 2889; б) 5 888 889;

в) $9 \cdot \sum_{i=1}^k k \cdot 10^{k-1}$. **1.222.** 21. **1.223.** 35; 320. **1.224.** $\sum_{i=0}^m (C_n^i \cdot C_k^{m-i}) =$

$= C_{n+k}^m$. **1.226.** $(1+x)^5 = 1 + 5x + 10x^2 + 10x^3 + 5x^4 + x^5$.

1.227. $(a-b)^6 = a^6 - 6a^5b + 15a^4b^2 - 20a^3b^3 + 15a^2b^4 - 6ab^5 + b^6$.

1.228. $(x+y)^7 = x^7 + 7x^6y + 21x^5y^2 + 35x^4y^3 + 35x^3y^4 + 21x^2y^5 + 7xy^6 + y^7$. **1.229.** $(a-b)^8 = a^8 - 8a^7b + 28a^6b^2 - 56a^5b^3 +$

$+ 70a^4b^4 - 56a^3b^5 + 28a^2b^6 - 8ab^7 + b^8$. **1.230.** $(n+2)2^{n-1}$.

1.231. $(n-2)2^{n-1} + 1$. **1.232.** 2^{2n-1} . **1.233.** 2^{2n-1} .

1.234. $(-1)^m C_{n-1}^m$. **1.239.** $9 + 7i$. **1.240.** $-3 + 4i$. **1.241.** $34 + 12i$.

1.242. 10. **1.243.** $-4i$. **1.244.** $11 + 3i$. **1.245.** 0. **1.246.** -1 . **1.247.** 1.

1.248. 1. **1.249.** 0. **1.250.** $\frac{8}{17}$. **1.251.** $\frac{1}{2} - \frac{3}{2}i$. **1.252.** i .

1.253. $-2 + \frac{3}{2}i$. **1.254.** $-\frac{7}{5} + \frac{3}{10}i$. **1.255.** $\frac{1}{10} - \frac{13}{10}i$. **1.256.** $\frac{1}{4} - \frac{1}{4}i$.

1.258. $\frac{49}{5} + \frac{12}{5}i$. **1.255.** $(6\sqrt{3} + 1) + (3\sqrt{3} - 2) \cdot i$. **1.260.** $x = 2,$

$y = -1$. **1.261.** $x = 2, y = 3$. **1.262.** $z_1 = 1, z_2 = i$. **1.263.** $z_1 = 1 + it,$

$z_2 = t, t \in \mathbb{R}$. **1.265.** $z_1 \bar{z}_2 = \sqrt{3} + i(4 + \sqrt{3}), \left(\frac{\bar{z}_1}{z_2} \right)^2 = -\frac{1 + \sqrt{3}}{4} -$

$$-i \frac{2\sqrt{3}+3}{8}. \mathbf{1.266.} \quad z_1 \bar{z}_2 = 2 + 10i, \quad \frac{\bar{z}_1}{z_2} = \frac{17}{8} - \frac{7}{8}i. \mathbf{1.267.} \quad 6 + 3i.$$

$$\mathbf{1.268.} \quad 7 - i. \mathbf{1.269.} \quad z = -0,9 - 0,3i, \quad w = 3,7 - 0,9i. \mathbf{1.270.} \quad z = -4 - i,$$

$$w = -1. \mathbf{1.272.} \quad -1 / \sqrt{3} + i. \mathbf{1.273.} \quad \frac{3}{4} + i. \mathbf{1.274.} \quad 5 - 12i.$$

$$\mathbf{1.275.} \quad -1 - i. \mathbf{1.276.} \quad \frac{1}{\sqrt{2}} + 4i. \mathbf{1.277.} \quad 1 - i. \mathbf{1.278.} \quad 3 + i.$$

1.281. Сдвиг на вектор $\mathbf{a} = \{2, 0\}$. **1.282.** Сдвиг на вектор $\mathbf{a} = \{-3, 1\}$. **1.283.** Поворот на угол $\pi/4$ против часовой стрелки. **1.284.** Поворот на угол $\pi/4$ по часовой стрелке.

1.285. Симметрия относительно начала координат.

1.286. Гомотетия с центром в начале координат и коэффициентом 2. **1.287.** Поворот на угол $\pi/4$ против часовой стрелки

с последующей гомотетией с центром в начале координат и коэффициентом $1/\sqrt{2}$. **1.288.** Отражение относительно

действительной оси. **1.291.** Полуплоскость, лежащая правее оси Ox . **1.292.** Полуплоскость, лежащая ниже прямой $y = 1$.

1.293. Область, лежащая между прямыми $x = 0$ и $x = 1$.

1.294. Область, лежащая между прямыми $y = -1$ и $y = 1$.

1.295. Область, лежащая внутри окружности $x^2 + y^2 = 1$.

1.296. Область, лежащая внутри окружности $x^2 + (y - 2)^2 = 16$.

1.297. Область, лежащая вне окружности $x^2 + (y - 1)^2 = 1$.

1.298. Точки, лежащие на прямой $y = -x$. **1.299.** Кольцо

$1 < (x - 1)^2 + y^2 < 9$. **1.300.** Сектор, ограниченный лучами $l_1 = \{(x, y) | y = 0, x \geq 0\}$ и $l_2 = \{(x, y) | y = x, x \geq 0\}$. **1.301.** Сектор, ограниченный лучами $l_1 = \{(x, y) | y = x, x < 0\}$ и $l_2 =$

$= \{(x, y) | y = -x,$

$$\mathbf{1.303.} \quad \cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4}. \mathbf{1.304.} \quad 2 \left(\cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3} \right).$$

$$\mathbf{1.305.} \quad \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}. \mathbf{1.306.} \quad \cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2}.$$

$$\mathbf{1.307.} \quad 2(\cos \pi + i \sin \pi). \mathbf{1.308.} \quad \cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6}. \mathbf{1.309.} \quad \cos \frac{\pi}{2} +$$

$$+ i \sin \frac{\pi}{2}. \mathbf{1.310.} \quad \cos \alpha + i \sin \alpha. \mathbf{1.311.} \quad \cos \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right).$$

$$\mathbf{1.312.} \quad 32i. \mathbf{1.313.} \quad 2.$$

- 1.314.** $2^{15} = 32768$. **1.315.** $16\sqrt{2}(1-i)$. **1.316.** $16(\sqrt{3}-i)$.
1.317. $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$. **1.318.** $1+i$. **1.319.** $\pm 1, \pm i$. **1.320.** $\pm \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$.
1.321. $-1, \frac{1}{2} \pm i \frac{\sqrt{3}}{2}$. **1.322.** $\pm \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i\sqrt{3})$.
1.323. $\sqrt{2} \left(\cos\left(\frac{3\pi}{8} + k\pi\right) + i \sin\left(\frac{3\pi}{8} + k\pi\right) \right)$, $k = 0, 1$.
1.324. $4 \left(\cos\left(\frac{\pi}{24} + \frac{k\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{24} + \frac{k\pi}{2}\right) \right)$, $k = 0, 1, 2, 3$.
1.325. $\pm 3i$. **1.326.** $^{10}\sqrt{2} \left(\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{5}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{5}\right) \right)$, $k = 0, 1, 2, 3, 4$. **1.327.** $\pm \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)$. **1.328.** $1; \pm \frac{1}{2}(1+i\sqrt{3})$.
1.329. $\pm 2, \pm(1+i\sqrt{3}), \pm(1-i\sqrt{3})$. **1.330.** $\pm(2-i)$. **1.332.** $-1 \pm 2i$.
1.333. $-2+i, -3+i$. **1.334.** $\frac{1}{4} \pm \frac{\sqrt{3}}{4}i$. **1.335.** $1+i, 2-3i$.
1.336. $2 \pm 2i$. **1.337.** $3i, 5i$. **1.338.** $\sqrt{5}e^{i\left(\pi - \arctg \frac{1}{2}\right)}$.
1.339. $5e^{i\left(\pi + \arctg \frac{4}{3}\right)}$. **1.340.** $4e^{-i\frac{\pi}{6}}$. **1.341.** $4e^{i\frac{3\pi}{4}}$. **1.342.** $e^{i\left(\alpha + \frac{3\pi}{2}\right)}$.
1.344. а) $z_1 z_2 = 12$, $\frac{z_1^2}{z_2} = \frac{2}{3}e^{i\pi} = -\frac{2}{3}$; б) $z_1^2 \bar{z}_2 = 8\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$, $\frac{\bar{z}_1^2}{z_2} = \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$. **1.346.** а) $\frac{1}{4}(3\cos\varphi + \cos 3\varphi)$; б) $\frac{1}{4}(3\sin\varphi - \sin 3\varphi)$.
1.348. $4\cos^3\varphi - 3\cos\varphi$. **1.349.** $3\sin\varphi - 4\sin^3\varphi$. **1.350.** $\cos^4\varphi - 6\cos^2\varphi\sin^2\varphi + \sin^4\varphi$. **1.351.** $4\sin\varphi\cos^3\varphi - 4\cos\varphi\sin^3\varphi$.
1.352. $32e^{i\frac{13\pi}{12}}$. **1.353.** $\frac{169}{64}e^{i\left(2\arctg \frac{12}{5} - \pi\right)}$. **1.354.** $25\sqrt{5}e^{i\left(3\arctg \frac{1}{2} - 4\arctg \frac{24}{7}\right)}$.
1.355. $e^{i(2\alpha - \pi)}$. **1.356.** $\sqrt[7]{-128}$. $2e^{i\frac{\pi + 2\pi k}{7}}$, $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$.
1.357. $\sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{24} + \frac{k\pi}{2}\right)}$, $k = 0, 1, 2, 3$.

- 1.358. $\sqrt[10]{2}e^{i\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi k}{5}\right)}$, $k = 0, 1, 2, 3, 4$.
 1.359. $\sqrt[6]{2}e^{i\left(\frac{\pi}{18} + \frac{\pi k}{3}\right)}$, $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$.
 1.360. $\frac{\sin(n\varphi/2)\cos((n+1)\varphi/2)}{\sin(\varphi/2)}$. 1.361. $\frac{\sin 2n\varphi}{2\sin \varphi}$.
 1.362. $\frac{\sin^2 n\varphi}{\sin \varphi}$. 1.363. $1, -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$. 1.364. $-1, \frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$.
 1.365. $0, -4, -2 \pm 2i$. 1.366. $(-2 + \sqrt{2}) \pm i\sqrt{2}, (-2 - \sqrt{2}) \pm i\sqrt{2}$.
 1.367. $z_{1,2} = z_{3,4} = \pm 3i$. 1.368. $\pm i, \pm i\sqrt{3}$. 1.369. $\pm 2i, \pm i\sqrt{5}$.
 1.370. $\pm(1+i), \pm \sqrt[4]{2}\left(\cos \frac{\pi}{8} - i\sin \frac{\pi}{8}\right)$. 1.371. $\frac{1}{2}(1 \pm i\sqrt{3}), -1,$
 $\frac{\sqrt[3]{3}}{2}(1 \pm i\sqrt{3}), -\sqrt[3]{3}$. 1.372. $\pm 1, \pm i, \pm \sqrt{2}(1 \pm i)$.
 1.373. $(z+3)(z-3)(z^2+9)$.
 1.374. $(z^2 - 3\sqrt{2}z + 9)(z^2 + 3\sqrt{2}z + 9)$.
 1.375. $(z^2 - z + 1)(z^2 + z + 1)$. 1.376. $(z^2 + 2z + 2)(z^2 + 2z + 5)$.
 1.377. $(z-1)(z^2 + z + 1)^2$. 1.378. $(z^2 - 2z + 5)(z^2 + 8z + 20)$.

Глава 2

- 2.1. 2; 5; 8; 11; 14. 2.2. 1; 4; 9; 16; 25. 2.3. $0; \frac{3}{2}; \frac{2}{3}; \frac{5}{4}; \frac{4}{5}$. 2.4. 2; 0;
 6; 0; 10. 2.5. $x_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$. 2.6. $x_n = 1 + (-1)^n$. 2.7. $x_n = \frac{2n}{2n-1}$.
 2.8. $x_n = n \cos \frac{\pi(n-1)}{2}$. 2.9. Возрастающая. 2.10. Возрастаю-
 щая. 2.11. Возрастающая. 2.12. Убывающая. 2.13. Немоно-
 тонная. 2.13. Немонотонная. 2.17. Наибольший 2,5, наимень-
 ший 1,5. 2.18. Наибольший 0,5, наименьший -1.
 2.19. Наибольший 6, наименьший -2,8. 2.20. Наибольшего
 нет, наименьший -22. 2.25. $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} (n > n_0 \Rightarrow$
 $\Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon), \exists \varepsilon > 0 \forall n_0 \in \mathbb{N} \exists n \in \mathbb{N} (n > n_0 \wedge |x_n - a| \geq \varepsilon)$.

- 2.2.6.** $\exists a \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} (n > n_0 \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon),$
 $\forall a \quad \exists \varepsilon > 0 \quad \forall n_0 \in \mathbb{N} \quad \exists n \in \mathbb{N} (n > n_0 \wedge |x_n - a| \geq \varepsilon).$ **2.27.** $1/3.$
2.28 $5/2.$ **2.29.** $0.$ **2.30.** $3.$ **2.31.** $1.$ **2.32.** $1.$ **2.33.** $0.$ **2.34.** $0.$
2.35. $-8/3.$ **2.36.** $1.$ **2.37.** $2 - \sqrt{2}.$ **2.38.** $2 - \sqrt{2}.$ **2.39.** $e^{-3}.$
2.40. $e^8.$ **2.41.** $e^{2,5}.$ **2.42.** $e^{20}.$ **2.43.** Бесконечно большая.
2.43. Бесконечно большая. **2.44.** Бесконечно большая.
2.45. Бесконечно большая. **2.46.** Бесконечно большая.
2.47. Бесконечно большая. **2.48.** Бесконечно большая.
2.49. Не бесконечно большая. **2.50.** Не бесконечно большая.
2.51. Бесконечно большая. **2.52.** Не бесконечно большая.
2.49. $0.$ **2.55.** $\forall \varepsilon > 0 \quad \forall n_0 \in \mathbb{N} \quad \exists n \in \mathbb{N} (n > n_0 \wedge |x_n - a| < \varepsilon),$
 $\exists \varepsilon > 0 \quad \forall n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} (n \leq n_0 \vee |x_n - a| \geq \varepsilon).$ **2.56.** $\exists a \quad \forall \varepsilon > 0$
 $\forall n_0 \in \mathbb{N} \quad \exists n \in \mathbb{N} (n > n_0 \wedge |x_n - a| < \varepsilon), \quad \forall a \quad \exists \varepsilon > 0 \quad \forall n_0 \in \mathbb{N}$
 $\forall n \in \mathbb{N} (n \leq n_0 \vee |x_n - a| \geq \varepsilon).$ **2.57.** $1/3, 3.$ **2.58.** $0, 1, -1,$
 $\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2.$ **2.59.** Пределы сходящихся подпоследова-
 тельностей равны $0, 1, 1/2.$ **2.60.** $0,$ предела не существует.
2.61. $2 - i.$ **2.62.** $-1.$ **2.63.** $i.$ **2.64.** $\frac{-7 + 14i}{5}.$ **2.65.** $1.$ **2.66.** $0.$
2.67. $\infty.$ **2.66.** $\infty.$ **2.69.** $\frac{3(3+i)}{10}.$ **2.70.** $\frac{11+3i}{10}.$ **2.83.** $[0, 1].$
2.84. $(-\infty, -3) \cup (-3, 0].$ **2.85.** $[-2, 1).]$ **2.86.** $(-\infty, 2) \cup (2, +\infty).$
 $y = 3\sqrt{\frac{x^2-1}{x-2}}.$ **2.87.** $D(y) = \mathbb{R}, \quad E(y) = [2, +\infty).$ **2.88.** $D(y) =$
 $[-1 - \sqrt{6}, -1 + \sqrt{6}], \quad E(y) = [0, \sqrt{6}].$ **2.89.** $D(y) = \mathbb{R}, \quad E(y) =$
 $=(0, 1].$ **2.90.** $D(y) = (-\infty, -5) \cup (1, +\infty), \quad E(y) = (0, +\infty).$
2.91. $D(y) = (-\infty, -2) \cup (2, +\infty), \quad E(y) = \mathbb{R}.$ **2.92.** $D(y) = (-4, 4),$
 $E(y) = [-4, +\infty).$ **2.93.** $D(y) = \mathbb{R}, \quad E(y) = [4, 4].$ **2.94.** $D(y) =$
 $= \mathbb{R}, \quad E(y) = [5, 6].$ **2.95.** $y = 2^{x^2}.$ $D(y) = \mathbb{R}, \quad E(y) = [1, +\infty).$
2.96. $D(y) = [-1, 1], \quad E(y) = [0, 5, 1].$ **2.97.** а) $x^2;$ б) $x^2 - 2x + 1;$
 в) $\frac{1}{x^2};$ г) $x;$ д) $2x^2;$ е) $(1-x)^4;$ ж) $|x|;$ з) $x^4;$ и) $324x^4.$
2.98. а) $\frac{1}{3x};$ б) $\frac{1}{3x+6};$ в) $\frac{4}{3x+6};$ г) $2 - \frac{4}{3x+6}.$

2.99. а) $f(g(x)) = 2x^3 - 1$; $f(f(x)) = 4x - 3$; $g(f(x)) = (2x - 1)^3$;
 $g(g(x)) = x^9$; б) $f(g(x)) = (\sqrt{x} + 1)^2$; $f(f(x)) = (x^2 + 2x + 2)^2$;
 $g(f(x)) = |x + 1|$; $g(g(x)) = \sqrt[4]{x}$. **2.100.** $(-\infty, -4) \cup (-2, +\infty)$.

2.101. $f^{-1}(x) = \frac{x^3 - 7}{2}$, $D(f^{-1}) = \mathbb{R}$.

2.102. $f(x) = \sqrt[3]{10 - 3x}$. $f^{-1}(x) = \frac{10 - x^3}{3}$, $D(f^{-1}) = \mathbb{R}$.

2.103. $f^{-1}(x) = \frac{5x + 2}{1 - 3x}$, $D(f^{-1}) = (-\infty, 1/3) \cup (1/3, +\infty)$.

2.104. $f^{-1}(x) = \frac{x - 3}{2 - x}$, $D(f^{-1}) = (-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$.

2.105. $f^{-1}(x) = \frac{3 - (x - 1)^2}{2}$, $D(f^{-1}) = [1, +\infty)$.

2.106. $f^{-1}(x) = \frac{(x + 1)^2 + 5}{3}$, $D(f^{-1}) = [-1, +\infty)$.

2.107. $f^{-1}(x) = \log_2 x + 2$, $D(f^{-1}) = (0, +\infty)$.

2.108. $f^{-1}(x) = \frac{\log_2 x + 2}{2}$, $D(f^{-1}) = (0, +\infty)$.

2.109. $f^{-1}(x) = 3^x - 5$, $D(f^{-1}) = \mathbb{R}$.

2.110. $f^{-1}(x) = 5 - 2^{-x}$, $D(f^{-1}) = \mathbb{R}$. **2.111.** а) $f^{-1}(x) = -\sqrt{x + 1}$,
 $D(f^{-1}) = [-1, +\infty)$. б) $f^{-1}(x) = \sqrt{x + 1}$, $D(f^{-1}) = [-1, +\infty)$.

2.112. $y = -x^2 + 2x + 3$; а) $x \in (-\infty, 1]$; б) $x \in [1, +\infty)$.

а) $f^{-1}(x) = -\sqrt{4 - x} - 1$, $D(f^{-1}) = (-\infty, 4]$. б) $f^{-1}(x) = \sqrt{4 - x} - 1$,
 $D(f^{-1}) = (-\infty, 4]$. **2.113.** а) $f^{-1}(x) = \arccos x$, $D(f^{-1}) = [-1, 1]$.

б) $f^{-1}(x) = -\pi - \arccos x$, $D(f^{-1}) = [-1, 1]$. **2.114.** а) $f^{-1}(x) =$
 $= \arcsin x$, $D(f^{-1}) = [-1, 1]$. б) $f^{-1}(x) = \pi - \arcsin x$, $D(f^{-1}) =$
 $= [-1, 1]$. **2.115.** $f(u) = \sin u$, $u = \cos v$, $v = x^2$. **2.116.** $f(x) =$
 $= \sqrt{\cos(\sin x)}$. $f(u) = \sqrt{u}$, $u = \cos v$, $v = \sin x$. **2.117.** $f(u) = 2^u$,

$u = \sin v$, $v = x^2$. **2.118.** $f(x) = \sin^2 2^x$. $f(u) = u^2$, $u = \sin v$,
 $v = 2^x$. **2.119.** $f(u) = \arcsin u$, $u = e^v$, $v = \sqrt[3]{x}$. **2.120.** $f(u) =$
 $= e^u$, $u = \sqrt[3]{v}$, $v = \arcsin x$. **2.157.** $1/4$. **2.158.** 0 . **2.159.** ∞ .

2.160. $2/5$. 2.161. 6. 2.162. -3 . 2.163. 0. 2.164. 0. 2.165. $1/2$.
 2.166. 1. 2.167. $5/7$. 2.168. $5/8$. 2.169. 3. 2.170. $1/3$. 2.171. 0.
 2.172. 0. 2.173. 2. 2.174. 0. 2.175. 0. 2.176. $1/4$. 2.177. $4/3$.
 2.178. $4/3$. 2.179. $1/144$. 2.180. $1/2$. 2.181. 3. 2.182. $12/5$.
 2.183. -5 . 2.184. $1/2$. 2.185. $2/3$. 2.186. $4/3$. 2.187. $1/3$.
 2.188. 1. 2.189. 1. 2.190. 1. 2.191. 1. 2.192. $1/2$. 2.193. 1.
 2.194. 1. 2.195. $3/4$. 2.196. 10. 2.197. $3/5$. 2.198. $1/3$. 2.199. 2.
 2.200. $-4/9$. 2.201. 50. 2.202. $2/9$. 2.203. 4. 2.204. $1/4$.
 2.205. $1/8$. 2.206. $-7/2$. 2.207. $\cos 2$. 2.208. -4π . 2.213. e^{16} .
 2.214. $e^{68/5}$. 2.215. e . 2.216. e^{-2} . 2.217. e^5 . 2.218. e^{-7} .
 2.219. e^{1/π^2} . 2.220. $\sqrt{e}$. 2.221. e . 2.222. $\sqrt{e^3}$. 2.223. e^{-2} .
 2.224. $e^{\operatorname{ctg} 3}$. 2.225. 2. 2.226. $1/2$. 2.227. $a-b$. 2.228. $-1/2$.
 2.229. $+1$, -1 . 2.230. $-\infty$, $+\infty$. 2.231. 0, $+\infty$. 2.232. $+\infty$, 0.
 2.233. 2, -2 . 2.234. -2 , -2 . 2.235. $2/3$. 2.236. 2. 2.237. 3.
 2.238. 1. 2.239. $1/9$. 2.240. 1. 2.241. $1/2$. 2.242. 1. 2.243. 1.
 2.244. 1. 2.245. 1. 2.246. 2. 2.247. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^3 x}{4x^2}$. $1/8$.
 2.248. $1/10$. 2.249. $4/3$. 2.250. 2. 2.251. $1/\sqrt{e}$. 2.252. e^{18} .
 2.253. 540. 2.254. 2. 2.255. $\frac{1}{5 \ln 10}$. 2.256. e . 2.257. 3.
 2.258. $3/2$. 2.259. $3/4$. 2.260. $1/2$. 2.261. 2. 2.262. 4,5. 2.263. 4.
 2.264. 3. 2.265. 2. 2.266. 1. 2.267. 1. 2.268. 0. 2.269. $x_1 = 0$,
 $x_2 = 1$ — точки разрыва 2-го рода. 2.270. $x = 1$ — точка
 устранимого разрыва. 2.271. $x = 0$ — точка устранимого
 разрыва. 2.272. $x = 0$ — точка устранимого разрыва, $x = 1$ —
 точка разрыва 2-го рода. 2.273. $x_1 = 2$, $x_2 = -2$ — точки
 разрыва 2-го рода. 2.274. $x = 1$ — точка разрыва 1-го рода.
 2.275. $x = 2$ — точка разрыва 1-го рода. 2.276. $x = 0$ — точ-
 ка устранимого разрыва, $x_2 = \pm 1$ — точки разрыва 2-го
 рода. 2.277. $x = 1$ — точка разрыва 1-го рода. 2.278. $x = 1$ —
 точка разрыва 1-го рода. 2.2781. Равномерно непрерывна.
 2.282. Не является равномерно непрерывной. 2.283. Рав-
 номерно непрерывна. 2.284. Не является равномерно не-
 прерывной. 2.285. Не является равномерно непрерывной.
 2.286. Не является равномерно непрерывной.

Глава 3

- 3.2. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 27 & -3 & 10 \end{pmatrix}$. 3.3. $\begin{pmatrix} -4 & 9 \\ 7 & -13 \\ -15 & -10 \end{pmatrix}$. 3.4. $\begin{pmatrix} 2+2i & 0 \\ 0 & 2-2i \end{pmatrix}$.
- 3.5. $\begin{pmatrix} 8 & 3 \\ 6 & -10 \end{pmatrix}$. 3.6. $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. 3.7. $\begin{pmatrix} 1+i & 1+i \\ -1+i & 1-i \end{pmatrix}$. 3.8. $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.
- 3.9. $\begin{pmatrix} 1 & 5 & -5 \\ 3 & 10 & 0 \\ 2 & 9 & -7 \end{pmatrix}$. 3.10. $\begin{pmatrix} 11 & -22 & 29 \\ 9 & -27 & 32 \\ 13 & -17 & 26 \end{pmatrix}$.
- 3.11. $\begin{pmatrix} -3+i & -2-3i & 5-i \\ -1-2i & -1 & 7+3i \\ -6-i & 1-3i & 11+i \end{pmatrix}$. 3.12. (31).
- 3.13. $\begin{pmatrix} 12 & 0 & -6 & 9 & 3 \\ 4 & 0 & -2 & 3 & 1 \\ -4 & 0 & 2 & -3 & -1 \\ 20 & 0 & -10 & 15 & 5 \\ 8 & 0 & -4 & 6 & 2 \end{pmatrix}$. 3.14. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n \\ 0 & 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & \dots & n-2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$.
- 3.15. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 & 10 & \dots & \frac{n(n+1)}{2} \\ 0 & 1 & 3 & 6 & \dots & \frac{(n-1)n}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 3 & \dots & \frac{(n-2)(n-1)}{2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$. 3.16. $\begin{pmatrix} 1 & na \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
- 3.17. $\begin{pmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & \lambda^n \end{pmatrix}$. 3.18. $\begin{pmatrix} \cos n\alpha & -\sin n\alpha \\ \sin n\alpha & \cos n\alpha \end{pmatrix}$.
- 3.19. $\begin{pmatrix} a & 2b \\ 3b & a+3b \end{pmatrix}$, где a и b — любые числа.
- 3.20. $\begin{pmatrix} a & 3b \\ -5b & a+9b \end{pmatrix}$, где a и b — любые числа.

3.21. $\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$, где a , b и c — любые числа.

3.22. а) i -я и j -я строки произведения поменяются местами; б) к i -й строке произведения прибавится j -я строка, умноженная на λ ; в) i -й и j -й столбцы произведения поменяются местами; г) к i -му столбцу произведения прибавится j -й столбец, умноженный на λ .

3.23. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$. 3.24. $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1m} & a_{2m} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$.

3.28. $AA^T = \begin{pmatrix} 15 & 4 \\ 4 & 43 \end{pmatrix}$, $A^TA = \begin{pmatrix} 17 & -2 & 21 & -1 \\ -2 & 5 & -3 & 7 \\ 21 & -3 & 26 & -2 \\ -1 & 7 & -2 & 10 \end{pmatrix}$.

3.29. $AA^T = \begin{pmatrix} 5 & -6 & -4 \\ -6 & 12 & 0 \\ -4 & 0 & 8 \end{pmatrix}$, $A^TA = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 5 & -1 & 5 \\ -1 & 5 & -1 & 5 & -1 \\ 5 & -1 & 5 & -1 & 5 \\ -1 & 5 & -1 & 5 & -1 \\ 5 & -1 & 5 & -1 & 5 \end{pmatrix}$.

3.31. 5. 3.32. 1. 3.33. $\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2 - \delta^2$. 3.34. $\sin(\alpha - \beta)$.

3.35. 0. 3.36. -3 . 3.37. 1. 3.38. $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$.

3.39. $\sin(\alpha - \beta) + \sin(\beta - \gamma) + \sin(\gamma - \alpha)$. 3.40. $-\cos(\alpha + \beta) +$

$+\cos(\beta + \gamma) + \sin(\gamma + \alpha)$. 3.44. 1. 3.45. $2a^2(a + x)$. 3.46. 1.

3.47. 0. 3.48. $x = 1, y = 2$. 3.49. $x = 2, y = -5$. 3.50.

$x = 1 - a, y = -1 - a$. 3.51. $x = -2, y = 3, z = -4$. 3.52.

$x = -1, y = -2, z = -4$. 3.53. $x = 1, y = 3, z = -1$. 3.54. Четная.

3.55. Четная. 3.56. Нечетная, если n — число вида $n = 4k + 3$,

$k \in \mathbb{Z}$, $k \geq -1$; четная при всех других n . 3.57. Четность под-

становки совпадает с четностью числа n . 3.58. Если n нечетно,

то подстановка четная при любом k ; если n нечетно, то чет-

ность подстановки совпадает с четностью k . 3.59. Данное про-

изведение не является членом разложения определителя.

3.60. Со знаком «минус». **3.61.** Со знаком «минус». **3.62.** Со знаком «минус», если n — число вида $n = 4k + 3$, $k \in \mathbb{Z}$, $k \geq -1$; со знаком «плюс» при всех других n . **3.63.** Если n — нечетное, то со знаком «плюс» при любом k ; если n четное, то со знаком «плюс» при четном k и со знаком «минус» при нечетном k . **3.64.** а) $i = 1, k = 3$; б) $i = 5, k = 7$. **3.67.** $a_{11} \cdot a_{22} \cdot \dots \cdot a_{nn}$.
3.68. $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n} \cdot a_{2, n-1} \cdot \dots \cdot a_{n1}$. **3.69.** $(-1)^{n-1}$. **3.70.** $(-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}$.
3.72. а) Не изменится; б) не изменится; в) обратится в нуль; г) умножится на $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$; д) умножится на $(-1)^{n-1}$. **3.73.** -8 .
3.74. 18 . **3.75.** -10 . **3.76.** 1 . **3.77.** $(be - cd)^2$. **3.78.** $xyzuv$. **3.79.** 4 .
3.80. $n!$. **3.81.** $2n + 1$. **3.82.** 1 . **3.83.** $(-1)^{n-1} \cdot n$. **3.84.** α^n . **3.85.** Если n нечетное, то $D_n = 0$; если n четное, то $D_n = (-1)^{n/2}$.

$$\mathbf{3.86.} \frac{1 + (-1)^n}{2}. \mathbf{3.87.} 5^{n+1} - 4^{n+1}.$$

$$\mathbf{3.88.} -a_1 a_2 \dots a_{n-1} \cdot \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_{n-1}} \right). \mathbf{3.89.} n + 1.$$

$$\mathbf{3.91.} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1,5 & -0,5 \end{pmatrix}. \mathbf{3.92.} \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}. \mathbf{3.93.} \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{3.94.} \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -i & -i \\ -i+1 & i+1 \end{pmatrix}. \mathbf{3.95.} -\frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 7 & -6 & 1 \\ -5 & 3 & 1 \\ 6 & -3 & -3 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{3.96.} \frac{1}{9} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}. \mathbf{3.97.} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -38 & 41 & -34 \\ 27 & -29 & 24 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{3.98.} \begin{pmatrix} 22 & -6 & -26 & 17 \\ -17 & 5 & 20 & -13 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \\ 4 & -1 & -5 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{3.99.} \begin{pmatrix} 3/4 & -7/24 & -1/24 \\ -1/2 & 5/12 & -1/12 \\ -1/4 & 1/24 & 7/24 \end{pmatrix} = \frac{1}{24} \cdot \begin{pmatrix} 18 & -7 & -1 \\ -12 & 10 & -2 \\ -6 & 1 & 7 \end{pmatrix}.$$

$$3.100. \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 0 \\ -1/3 & -2/3 & -1/3 \\ 0 & -1/4 & 1/4 \end{pmatrix} = \frac{1}{12} \cdot \begin{pmatrix} 12 & -6 & 0 \\ -4 & 8 & -4 \\ 0 & -3 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$3.101. \frac{1}{9} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad 3.102. \begin{pmatrix} -7 & 5 & 12 & -19 \\ 3 & -2 & -5 & 8 \\ 41 & -30 & -69 & 111 \\ -59 & 43 & 99 & -159 \end{pmatrix}.$$

$$3.103. \begin{pmatrix} 22 & -6 & -26 & 17 \\ -17 & 5 & 20 & -13 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \\ 4 & -1 & -5 & 3 \end{pmatrix}, \quad 3.104. \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$3.105. \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad 3.106. \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & \dots & (-1)^{n-1} \\ 0 & 1 & -1 & \dots & (-1)^{n-2} \\ 0 & 0 & 1 & \dots & (-1)^{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

3.108. а) $(A^T | E) \rightarrow (E | B)$, $B = (A^{-1})^T$. При преобразованиях строк матрицы A в матрице A^{-1} соответственно: б) поменяются местами i -й и j -й столбцы; в) i -й столбец умножится на число λ^{-1} ; г) из j -го столбца вычитается i -й столбец, умноженный на λ . При преобразованиях столбцов матрицы A аналогично указанному меняются строки матрицы A^{-1} .

$$3.109. \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad 3.110. \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}, \quad 3.111. \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad 3.112. \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

$$3.113. \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}, \quad 3.114. \begin{pmatrix} 6 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}, \quad 3.115. \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

$$3.116. \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad 3.117. \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

- 3.118. (1, 6, -3, 13). 3.119. (4, 6, -35, -1).
 3.120. (70, 40, -20, -16). 3.121. $\left(10, 6, -\frac{19}{2}, \frac{3}{2}\right)$. 3.123. 2.
 3.124. 3. 3.125. 2. 3.126. 2. 3.127. 3. 3.128. 2. 3.129. 5. 3.130. 2.
 3.134. Линейно независима. 3.135. Линейно зависима. 3.136.
 Линейно независима. 3.137. Линейно зависима. 3.138. Ли-
 нейно независима. 3.139. Линейно зависима. 3.140. 3. 3.141.
 3. 3.142. $r = 3$; $\mathfrak{B} = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4\}$. 3.143. $r = 3$; $\mathfrak{B} = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_5\}$.
 3.144. $r = 2$; $\mathfrak{B}_1 = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}$, $\mathfrak{B}_2 = \{\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$. 3.145. $r = 2$;
 $\mathfrak{B}_1 = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}$, $\mathfrak{B}_2 = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_3\}$, $\mathfrak{B}_3 = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_4\}$. $\mathfrak{B}_2 = \{\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$.
 3.147. (1, -1, 1, -1, 1). 3.148. (5, -1, -1, -1, -1).

Глава 4

- 4.1. а) Параллельно и в одну сторону; б) параллельно и в
 противоположные стороны; в) да. 4.3. а) $\overline{AC}$; б) $\overline{AB}$; в) $\mathbf{0}$.
 4.4. Да. 4.5. а) $\overline{AC_1}$; б) $\overline{AC_1}$; в) $\overline{AC_1}$. 4.7. Да, так как
 $\mathbf{a} = \frac{1}{2}((\mathbf{a} + \mathbf{b}) + (\mathbf{a} - \mathbf{b}))$, $\mathbf{b} = \frac{1}{2}((\mathbf{a} + \mathbf{b}) - (\mathbf{a} - \mathbf{b}))$. 4.9. $\overline{AB} = \frac{4}{3}\overline{AM} -$
 $-\frac{2}{3}\overline{AN}$. 4.10. $\overline{AC} = 2\overline{AB} + \overline{AF}$. 4.11. $\overline{FM} = \overline{FC} + \overline{CM} = 2\overline{AB} +$
 $+\frac{1}{2}\overline{AF}$. 4.12. $-\frac{1}{2}\overline{AB} + \overline{AC} + \frac{1}{2}\overline{AA_1}$. 4.13. $\overline{AA_1} = \frac{1}{2}(\overline{AB_1} + \overline{AD_1} - \overline{AC})$,
 $\overline{AC_1} = \frac{1}{2}(\overline{AB_1} + \overline{AD_1} + \overline{AC})$.
 4.14. а) $\alpha = \beta$; б) $\overline{AB} = \frac{1}{\alpha - \beta}(\beta \overline{BC} - \overline{MN})$, $\overline{AC} = \frac{1}{\alpha - \beta}(\alpha \overline{BC} - \overline{MN})$.
 4.15. $\frac{1}{2}\overline{AB} + \frac{1}{2}\overline{AD} + \overline{AA_1}$. 4.17. $|k| = \frac{|\overline{AC}|}{|\overline{AB}|}$ при $A \neq B$.
 4.18. $\overline{OL} = \frac{\mathbf{a}|\mathbf{b}| + \mathbf{b}|\mathbf{a}|}{|\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|}$. 4.19. $\overline{OC} = \frac{1}{2\cos(\alpha/2)}(\mathbf{a} + \mathbf{b})$.
 4.20. $3\mathbf{p} - 4\mathbf{q} - 3\mathbf{r} - 2\mathbf{s} = \mathbf{0}$. 4.22. 0, 1, -2. 4.23. Медианы тетра-
 эдра делятся точкой пересечения в отношении 3:1, считая
 от вершины. 4.26. Указание. Доказать, что $\overline{CC_1} = \overline{BB_1} + \overline{DD_1}$.

- 4.27. 0. 4.28. $\overline{OP} = \frac{3}{5}\mathbf{a} + \frac{1}{10}\mathbf{b}$. 4.29. $\overline{CM} = -\overline{AC} + \frac{1}{2}\overline{AD} + \frac{1}{2}\overline{AB}$.
- 4.30. $\overline{SE} = \{-1, 1, 2\}$. 4.31. $\overline{SD} = \mathbf{a} - \mathbf{b} + \mathbf{c}$; $\overline{SD} = \{1, -1, 1\}$.
- 4.32. $\overline{SC} = \{-1, 1, 1\}$, $\overline{AM} = \left\{\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right\}$, $\overline{SO} = \left\{-1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\}$.
- 4.33. $\alpha_1 = 3$, $\beta_1 = 9$; $\alpha_2 = -1$, $\beta_2 = 1$. 4.34. $\alpha = -1$, $\beta = 4$.
- 4.36. $\alpha_1 = 5$; $\beta_1 = 4$ или $\alpha_2 = -5$, $\beta_2 = -4$. 4.37. $\alpha = \frac{7}{4}$, $\beta = \frac{17}{12}$.
- 4.38. -6. 4.39. а) $\sqrt{5}$, $\left\{-\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}, 0\right\}$; б) $\frac{2}{\sqrt{5}}$; 3) $-\frac{19}{3}$; 4) 0.
- 4.40. $\mathbf{a} = \left\{-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right\}$, $\mathbf{a} = -\frac{1}{2}\mathbf{e}_1 - \frac{3}{2}\mathbf{e}_2$. 4.41. $\mathbf{a} = \{-7, -1\}$,
 $\mathbf{a} = -7\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2$. 4.42. $\mathbf{a} = \{-2, 1, -1\}$, $\mathbf{a} = -2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3$.
- 4.43. $\mathbf{a} = \{-1, 2, 0\}$, $\mathbf{a} = -\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2$. 4.44. 5 и $\sqrt{130}$. 4.45. 12.
- 4.47. Да. 4.48. (2, 1, 2). 4.49. (3, 2, 5, 2). 4.50. (4, 8, -2),
 (-6, -4, 8), (6, 4, 0). 4.51. $C = (6, -2)$, $D = (2, -4)$.
- 4.52. (5, -2, -4). 4.53. (8, 11, 23), (0, 1, 11).
- 4.54. а) $\{-1, -1, 6\}$; б) $\{-3, 1, 2\}$; в) $\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 3\right\}$.
- 4.55. $\mathbf{a}_0 = \left\{\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right\}$. 4.56. $\left(\frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}\right)$.
- 4.57. $\frac{3}{4}\sqrt{10}$. 4.58. а) $\mathbf{a}_0 = \left\{\frac{2}{\sqrt{13}}, \frac{3}{\sqrt{13}}, 0\right\}$; б) $\{5, 12, 1\}$;
 в) $\mathbf{a} + \mathbf{b} - 2\mathbf{c} = -2\mathbf{j}$; г) 6. 4.59. $\mathbf{x}_1 = -5\mathbf{i} + 10\mathbf{j} + 10\mathbf{k}$, $\mathbf{x}_2 = 5\mathbf{i} - 10\mathbf{j} -$
 $-10\mathbf{k}$. 4.60. $\mathbf{x} = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$. 4.61. $\mathbf{x} = \pm 5\mathbf{i} + \frac{5}{\sqrt{2}}\mathbf{j} - \frac{5}{\sqrt{2}}\mathbf{k}$. 4.62. $\mathbf{x} =$
 $= \frac{5}{3}(\mathbf{i} - 7\mathbf{j} + 2\mathbf{k})$. Указание. Вектор $\mathbf{x} = \lambda(\mathbf{a}_0 + \mathbf{b}_0)$, где $\mathbf{a}_0$ и
 $\mathbf{b}_0$ — орты заданных векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$. 4.63. 2a. 4.64. $a\sqrt{7}$.
- 4.65. $a\sqrt{\frac{17}{6}}$. 4.66. $a\sqrt{10}$. 4.67. $\sqrt{11}$. 4.68. $3\sqrt{3}$. 4.69. а) -3;
 б) 2; в) $\sqrt{57}$; г) $\frac{7}{\sqrt{13}}$; д) $\frac{1}{2}$. 4.70. $\pi - \arccos \frac{1}{\sqrt{10}}$. 4.71. 1.

4.72. $\lambda = \pm \frac{3}{5}$. 4.74. -61. *Указание.* Воспользоваться тем, что

$(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c})^2 = 0$. 4.75. *Указание.* Записать поочередно скалярное произведение вектора $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$ на векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$.

4.76. 120° . 4.77. $1/3$. 4.78. $-0,125$. 4.79. $-\frac{1}{3}$ или $-\frac{23}{27}$.

4.80. 120° . 4.81. $\sqrt{22}$. 4.82. 3. 4.83. 2. 4.84. $\frac{8}{7} \leq |\mathbf{a}| \leq \frac{10}{7}$.

Указание. Выразите вектор $\mathbf{a}$ через векторы $\mathbf{f} = \mathbf{a} + 3\mathbf{b}$ и $\mathbf{d} = 2\mathbf{a} - \mathbf{b}$. 4.85. $-2,75$. 4.86. $\overline{BH} = -\mathbf{a} + \frac{\mathbf{a}\mathbf{b}}{\mathbf{b}^2}\mathbf{b}$. 4.87. $\arccos \frac{25}{\sqrt{742}}$

и $\frac{\sqrt{117}}{2}$. 4.88. $\frac{\sqrt{362}}{6}$. 4.90. 60° или 120° . 4.91. $\frac{5}{\sqrt{3}}\{1, 1, 1\}$.

4.92. Большая диагональ равна $a\sqrt{6}$, остальные — $a\sqrt{2}$.

4.93. $\arccos \frac{1}{4}$. 4.94. $\arccos \frac{3\cos\alpha + 1}{2\cos\alpha + 2}$. *Указание.* Отложить

на лучах отрезки равной длины и рассмотреть полученную правильную пирамиду. 4.95. 5. 4.96. $\frac{\sqrt{13}}{3}$. 4.97. $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

Указание. Ввести систему координат с центром в точке пересечения диагоналей основания. 4.98. $\mathbf{a}_j = 2\mathbf{j}$, $\mathbf{a}_{i,k} = -\mathbf{i} + \mathbf{k}$.

4.99. а) $\{2/3, 2/3, 2/3\}$; б) $\{-5/3, 4/3, 1/3\}$. 4.100. $-\mathbf{i} + \frac{1}{2}\mathbf{j} - \frac{1}{2}\mathbf{k}$. *Указание.* Вектор $\mathbf{a}_{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2}$ имеет вид $\mathbf{a}_{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2} = \lambda_1\mathbf{e}_1 +$

$+\lambda_2\mathbf{e}_2$, где коэффициенты λ_1 и λ_2 могут быть найдены из условия перпендикулярности вектора $\mathbf{a} - \mathbf{a}_{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2}$ плоскости

векторов $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$. 4.101. $x' = (x - x_0)\cos\varphi + (y - y_0)\sin\varphi$,
 $y' = -(x - x_0)\sin\varphi + (y - y_0)\cos\varphi$. 4.102. $X' = X\cos\varphi + Y\sin\varphi$,

$Y' = -X\sin\varphi + Y\cos\varphi$, $Z' = Z$. 4.103. $\{-2, \sqrt{2}, 0\}$.

4.104.

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_1\mathbf{a}_2 = \sum_{i,k=1}^3 X_i^{(1)}X_k^{(2)}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_k = & 5X_1^{(1)}X_1^{(2)} + 2X_2^{(1)}X_2^{(2)} + 9X_3^{(1)}X_3^{(2)} - \\ & - 2(X_1^{(1)}X_2^{(2)} + X_2^{(1)}X_1^{(2)}) - 3(X_1^{(1)}X_3^{(2)} + X_3^{(1)}X_1^{(2)}) + \\ & - 4(X_2^{(1)}X_3^{(2)} + X_3^{(1)}X_2^{(2)}). \end{aligned}$$

4.105. а) 3; б) 9; в) 54. 4.106. 0,75 A. 4.108. $2k - 2i$. 4.109. 0.

4.110. $[a, c]$. 4.111. 3. 4.112. $\pm \frac{1}{\sqrt{94}} \{3, 7, 6\}$.

4.113. $\pm \frac{1}{\sqrt{35}} \{1, -5, -3\}$. 4.114. $\{-6, -24, 8\}$. 4.115. $\alpha = \frac{12}{5}$,

$\beta = \frac{9}{5}$. 4.116. $2\sqrt{11}$. 4.117. $\{-7, -5, -1\}$. 4.119. $\{-4, -2, -4\}$.

4.120. а) $50\sqrt{2}$; б) $\frac{5\sqrt{73}}{2}$; в) $\frac{9\sqrt{2}}{2}$. 4.121. $\sqrt{\frac{395}{34}}$. 4.122. $\frac{3}{8}S$.

4.123. $\frac{2}{9}S$. 4.124. Появится знак минус перед определителем;

в случае косоугольного базиса формула неверна. 4.125. Указание. Длина вектора $[\overline{AP}, \mathbf{q}]$ численно равна площади параллелограмма, построенного на векторах $\overline{AP}$ и $\mathbf{q}$.

4.126. 2) $[a, [b, c]] + [b, [c, a]] + [c, [a, b]] = 0$ (тождество Якоби). Указание. Вычислить координаты векторов в обеих частях и убедиться, что они равны. Вычисление координат удобно производить в следующем специальном базисе: орт $\mathbf{i}$ сонаправлен с вектором $\mathbf{b}$, орт $\mathbf{j}$ лежит в плоскости векторов $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$.

4.128. а) Да; б) нет. 4.131. В общем случае (т.е. некопланарных $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$) направленные отрезки, соответствующие векторам $\mathbf{a} - \mathbf{b}$, $\mathbf{b} - \mathbf{c}$, и $\mathbf{c} - \mathbf{a}$, образуют одну из граней пирамиды, построенной на векторах $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$, т.е. компланарны.

4.132. -21. 4.133. -2A. 4.134. $-\frac{A}{23}$. 4.135. 9. 4.136. $\frac{5}{3}$.

4.137. $\frac{3}{\sqrt{83}}$. 4.138. а) $\frac{a^3}{4}$; б) $\frac{a^3}{48}$. 4.139. $\frac{\sqrt{3}}{9}$. 4.141. $\frac{5}{48}V$.

4.142. а) (0, 0, 0) или (0, 29, 0); б) (0, 1, 0) или (0, 4, 0).

4.144. а) Общее уравнение $x - y - 1 = 0$; нормальное уравне-

ние $\frac{1}{\sqrt{2}}x - \frac{1}{\sqrt{2}}y - \frac{1}{\sqrt{2}} = 0$; $p = \frac{1}{\sqrt{2}}$; б) общее уравнение $-x +$

$+y - 1 = 0$; нормальное уравнение $-\frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}y - \frac{1}{\sqrt{2}} = 0$;

$p = \frac{1}{\sqrt{2}}$. 4.145. а) $\frac{x+1}{3} = \frac{y-2}{-1}$. Общее уравнение $x + 3y - 5 =$

$= 0$, нормальное уравнение $\frac{1}{\sqrt{10}}x - \frac{3}{\sqrt{10}}y - \frac{5}{\sqrt{10}} = 0$; $p = \frac{5}{\sqrt{10}}$.

- б) $\frac{x-1}{0} = \frac{y-1}{-1}$. Общее уравнение $-x+1=0$, нормальное уравнение $x-1=0$; $p=1$. в) $\frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{0}$. Общее уравнение $y-1=0$, нормальное уравнение $y-1=0$; $p=1$.
- 4.146.** а) $\frac{x-1}{-2} = \frac{y-2}{-2}$. Общее уравнение $x-y+1=0$, нормальное уравнение $-\frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}y - \frac{1}{\sqrt{2}} = 0$; $p = \frac{1}{\sqrt{2}}$. в) $\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{0}$. Общее уравнение $y-1=0$, нормальное уравнение $y-1=0$; $p=1$. б) $\frac{x-1}{0} = \frac{y-1}{-3}$. Общее уравнение $x-1=0$, нормальное $x-1=0$; $p=1$. **4.147.** 0,4. **4.148.** $4x-5y-7=0$, $4x-5y+34=0$. **4.149.** $a = \frac{10}{3}$. **4.150.** (0, 8, 5). **4.151.** $x+3y-11=0$. **4.152.** $3x+4y-10=0$. **4.153.** $2x+24y-29=0$.
- 4.154.** $\rho(M, l) = \frac{3}{\sqrt{5}}$, $l_1: \frac{x+1}{-2} = \frac{y-2}{1}$, $l_2: -2(x+1) + (y-2) = 0$.
- 4.155.** $\rho(M, l) = \frac{1}{2}$, $l_1: \frac{x-1}{0} = \frac{y}{2}$, $l_2: 2y=0$. **4.156.** Пересекаются в точке $M_0 = \left(-\frac{3}{4}, -\frac{1}{2}\right)$, $\cos(\widehat{l_1, l_2}) = \frac{1}{\sqrt{5}}$. **4.157.** Пересекаются в точке $M_0 = (1, 0)$, $\cos(\widehat{l_1, l_2}) = \frac{2}{\sqrt{5}}$. **4.158.** Пересекаются в точке $M_0 = \left(-\frac{8}{11}, -\frac{1}{11}\right)$, $\cos(\widehat{l_1, l_2}) = \arccos \frac{3}{\sqrt{493}}$.
- 4.159.** Параллельны, $\rho(l_1, l_2) = \sqrt{2}$. **4.160.** (1, 7), (2, -16/3). **4.161.** $4x-3y+10=0$, $7x-y-8=0$, $3x+4y-5=0$. **4.162.** $x-3y-23=0$, $7x+9y+19=0$, $4x+3y+13=0$. **4.163.** $x-6y+17=0$, $8x+3y-17=0$, $7x+9y+17=0$. **4.164.** $A = (-4, -4)$, $B = (-22, -31)$, $C = (-23, -23)$. **4.165.** Уравнения сторон: $3x-2y+53=0$ и $4x+y+33=0$; уравнения диагоналей $161x-12y+877=0$ и $47x+64y-139=0$. **4.167.** 20 и $-4/5$. **4.168.** По разные. **4.169.** Отрезок

PQ не пересекает прямую l . **4.170.** Точка P не лежит между прямыми. **4.171.** Точка M лежит внутри тупого угла. *Указание.* Воспользоваться формулой отклонения. **4.172.** Лежит.

4.173. В вертикальных. **4.176.** $\frac{7}{\sqrt{5}}$. **4.177.** $\frac{3}{\sqrt{34}}$. **4.178.** $\frac{8}{\sqrt{29}}$.

4.179. $P_1 = (-4, 0)$ и $P_2 = (-7/3, 0)$. **4.180.** $(1, 1)$ и $(-2/3, -2/3)$. **4.181.** Две прямые: $8x - 36y + 9 = 0$ и $28x - 24y + 3 = 0$, по-другому: $10x + 6y - 3 = \pm 6(3x - 5y + 1)$.

4.182. $(-1/4, 1/4)$. **4.183.** $x + y - 2 = 0, 9x + y + 6 = 0$. **4.184.** $2x + y - 4 = 0$. **4.185.** $x + 2y - 10 = 0$. **4.186.** $4x - y - 11 = 0$.

4.187. $(-1, 3)$. **4.188.** а) $x + 2y + 2 = 0$; б) $x - 2y - 2 = 0$; в) $3x + 2y - 2 = 0$. **4.189.** $x - y + 2z - 3 = 0$. **4.190.** $x - 2y - 4z + 16 = 0$. **4.191.** $7x + 2y - z + 8 = 0$. **4.192.** $2x + y = 0$. **4.193.** $x - 2y + z = 0$. **4.194.** $-x + y + 2z - 5 = 0$. **4.195.** $-x + 2y + 3z - 3 = 0$.

4.196. $2x - 2y - z + 1 = 0$. **4.197.** $x + y - 3$. **4.198.** $2x - y - 1 = 0$. **4.199.** $3x - y - 4z + 17 = 0$. **4.200.** $\frac{2}{\sqrt{35}}$. **4.201.** $17x + 6y - 8z + 1 = 0$. **4.202.** $4x - 9y - z - 8 = 0$. **4.203.** $3x + 4y - 2z - 11 = 0$.

4.204. $7x - y + 4z - 10 = 0$. **4.205.** $2x - y - z = 0$. **4.206.** $3x + y - 2z - 20 = 0$ и $3x + y - 2z + 8 = 0$. **4.207.** $2x + 4y - 4z + 5 = 0$.

4.208. Плоскости пересекаются, $\cos(\widehat{\alpha_1, \alpha_2}) = \frac{\sqrt{3}}{42}$.

4.209. Плоскости параллельны, $\rho(\alpha_1, \alpha_2) = \frac{3}{2\sqrt{6}}$.

4.210. Плоскости совпадают. **4.211.** Плоскости параллельны, $\rho(\alpha_1, \alpha_2) = \frac{4}{\sqrt{2}}$. **4.212.** $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z-3}{-4}$; $x = 1+t, y = 2-2t, z = 3-4t$. **4.213.** $\frac{x+1}{0} = \frac{y-2}{-4} = \frac{z}{1}$; $x = -1, y = 2-4t, z = t$.

4.214. $\frac{x-1,4}{-3} = \frac{y+0,2}{4} = \frac{z}{5}$. **4.215.** $\frac{x-0,2}{-1} = \frac{y-1,4}{-7} = \frac{z}{-5}$.

4.216. $3x + 5y - 2z - 29 = 0$. **4.217.** $3x - 5y + 2z + 7 = 0$.

4.218. $3x - 5y - 2z + 7 = 0$. **4.220.** 3. **4.221.** $5/3$. **4.222.** $\frac{5}{\sqrt{13}}$.

4.223. $(1, 0, 0), \left(-\frac{5}{3}, 0, 0\right)$. **4.224.** $\alpha_1: x - 2y + 3z - 6 = 0$,

- $\rho(\alpha, \alpha_1) = \frac{4}{\sqrt{14}}$. **4.225.** $\alpha_1 : 2x + y - z - 2 = 0$, $\rho(\alpha, \alpha_1) = \frac{1}{\sqrt{6}}$.
4.226. $2x + 2y - z - 10 = 0$, $2x + 2y - z + 20 = 0$. **4.227.** $8x - 4y + 12z + 7 = 0$. **4.228.** $5x - 3y + 4z - 19 = 0$. **4.229.** $\frac{40}{\sqrt{762}}$.
4.230. $\frac{x-1}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z+2}{9}$; $x = 1+t$, $y = 3+2t$, $z = -2+9t$.
4.231. $\frac{x-3}{3} = \frac{y-2}{4} = \frac{z+5}{-2}$. **4.232.** $\frac{x+1}{7} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-3}{-5}$.
4.233. $x - y - z + 4 = 0$. **4.234.** $\arccos \sqrt{\frac{6}{17}}$. **4.235.** $\arccos \frac{11}{26}$.
4.236. $\sqrt{\frac{138}{7}}$. **4.237.** $\frac{\sqrt{110}}{\sqrt{21}}$. **4.239.** $\sqrt{\frac{86}{29}}$. **4.240.** 3. **4.241.** 25.
4.242. $\frac{37}{\sqrt{165}}$. **4.243.** $\frac{8}{\sqrt{38}}$. **4.244.** $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z-3}{-1}$, $(1, 0, 3)$,
 $(-4, 1, 1)$. **4.245.** $\frac{x-3}{2} = \frac{y+1}{4} = \frac{z-2}{-5}$. **4.246.** $(-1, 3, 1)$.
4.247. $(-2, 1, 4)$. **4.248.** $(5, 9, -10)$. **4.249.** $\frac{x+1}{4} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-3}{-2}$.
4.250. $\begin{cases} x+y+z-5=0, \\ 3x-2y-z+15=0. \end{cases}$ **4.251.** $(-4, 2, 5)$. **4.252.** $(5, -7, 3)$.
4.253. $(-1, 4, 4)$. **4.254.** $\frac{x-3}{24} = \frac{y-1}{41} = \frac{z+4}{-75}$.
4.255. $2x - 16y - 13z + 31 = 0$. **4.256.** $6x - 20y - 11z + 1 = 0$.
4.257. $a = \frac{11}{15}$; $15x - y - 6z - 19 = 0$. **4.258.** б) $4x + 3y + 12z - 93 = 0$; в) 13; г) $\begin{cases} 54x - 44y - 7z + 181 = 0, \\ -45x - 76y + 34z + 479 = 0. \end{cases}$
4.259. б) $4x + 12y + 3z + 76 = 0$; в) $\frac{127}{13}$; г) $\begin{cases} 53x - 7y - 48z - 429 = 0, \\ 105x - 23y - 44z + 136 = 0. \end{cases}$
4.260. $x + 8y - 5z - 12 = 0$. **4.261.** $\arccos \frac{5}{\sqrt{38}}$.

4.262. а) $\frac{6}{7}$; б) $\arccos \frac{6}{7}$; в) $\arcsin \frac{12}{7\sqrt{41}}$.

4.263. а) $\frac{48}{\sqrt{401}}$; б) $\arccos \frac{9}{\sqrt{401}}$; в) $\arcsin \frac{9}{\sqrt{218}}$.

Глава 5

5.1. $x - y = 0$. 5.2. $4ax \pm c = 0$. 5.3. $y = \pm 2x$. 5.4. $x^2 + y^2 = \frac{c - 2a^2}{2}$

при $c - 2a^2 \geq 0$; таких точек не существует при $c - 2a^2 < 0$.

5.5. $3x^2 + 10|a|x + 3y^2 + 3a^2 = 0$. 5.6. $\frac{x^2}{5} + y^2 = 1$. 5.7. $xy = 2$.

5.8. $y = \frac{1}{8}(x^2 - 6x + 25)$. 5.9. $y = \frac{x^2}{4} - x + 2$. 5.10. а) $C = (2, 0)$,

$R = 2$; б) $C = (0, -4)$, $R = 4$; в) $C = (2, -4)$, $R = 9$.

5.11. а) $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 25$; б) $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 25$;

в) $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 25$; г) $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 4$;

д) $(x - 2)^2 + (y - 4)^2 = 10$; е) $(x + 4)^2 + (y + 1)^2 = 25$.

5.12. а) Пересекает; б) касается; в) общих точек не имеет.

5.13. $\operatorname{tg} \varphi = 1$. 5.14. $r \sin \varphi = 1$. 5.15. $r = \frac{1}{\sqrt{2} \cos \left(\varphi - \frac{\pi}{4} \right)}$.

5.16. $r = a$. 5.17. $r^2 = \frac{a^2}{\cos 2\varphi}$. 5.18. $r = a \cos \varphi$.

5.19. $\varphi = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}$ ($n = 0, 1, 2, 3$) и $r = 0$. 5.20. $r = \frac{1}{4 \sin^2(\varphi / 2)}$.

5.21. $r^2 \sin 2\varphi = 2a^2$. 5.22. $r = 2 \operatorname{tg} \varphi \sin \varphi$. 5.23. $r = a \cos 3\varphi$.

5.24. $r = a |\sin 2\varphi|$. 5.25. Окружность $x^2 + y^2 = 25$. 5.26. Пря-

мая $y = -x$. 5.27. Прямая $x = 2$. 5.28. Прямая $y = 1$.

5.29. Прямая $x - y - 1 = 0$. 5.30. Прямая $x + y - 2 = 0$. 5.31. Окруж-

ность $x^2 + (y - a)^2 = a^2$. 5.32. Пара лучей $x = \pm 2y, y \geq 0$.

5.33. Семейство концентрических окружностей радиусов

$r_n = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, n = 0, 1, 2, \dots$

5.34. Окружность $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$. **5.40.** а) $a = 4$,

$b = 3$; б) $F_1 = (-\sqrt{7}, 0)$, $F_2 = (\sqrt{7}, 0)$; в) $e = \frac{\sqrt{7}}{4}$; г) $d_1: x = -\frac{16}{\sqrt{7}}$,

$d_2: x = \frac{16}{\sqrt{7}}$. **5.41.** а) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$; б) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$; в) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$;

г) $\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{25} = 1$; д) $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{1} = 1$; е) $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{48} = 1$. **5.42.** $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} +$

$+\frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$. **5.43.** а) $C = (3, -1)$, $a = 3$, $b = \sqrt{5}$, $e = 2/3$,

$d_1: 2x + 3 = 0$; $d_2: 2x - 15 = 0$. б) $C = (1, -2)$, $a = 5$, $b = 4$,
 $e = 3/5$, $d_1: 3x + 28 = 0$; $d_2: 2x - 22 = 0$. в) $C = (1, -2)$, $b = 4$,

$a = 2\sqrt{3}$, $e = 1/2$, $d_1: y + 10 = 0$; $d_2: y - 6 = 0$. **5.46.** $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$,

$r_{1,2} = 4 \pm \sqrt{3}$, $\rho_{1,2} = \frac{2}{\sqrt{3}}(4 \pm \sqrt{3})$. **5.47.** $(-15/4, \pm \sqrt{63}/4)$.

5.48. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{y}{b} = 0$. **5.49.** а) Пересекает; б) общих точек не

имеет; в) касается. **5.50.** а) $3x + 2y - 10 = 0$ и $3x + 2y + 10 = 0$;
б) $x + y - 5 = 0$ и $x + y + 5 = 0$. **5.53.** $2x + 11y - 10 = 0$.

5.54. а) $a = 3$, $b = 5$; б) $F_1 = (-\sqrt{34}, 0)$, $F_2 = (\sqrt{34}, 0)$;

в) $e = \frac{\sqrt{34}}{3}$; г) $d_1: x = -\frac{9}{\sqrt{34}}$ и $d_2: x = \frac{9}{\sqrt{34}}$. **5.55.** а) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$;

б) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$; в) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$; г) $\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1$; д) $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{64} = 1$;

е) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$. **5.56.** $\frac{(x-3)^2}{2^2} + \frac{(y-3)^2}{1,6^2} = -1$. **5.57.** $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} +$

$+\frac{(y-y_0)^2}{b^2} = -1$. **5.58.** а) $C = (2, -3)$, $a = 3$, $b = 4$, $e = 5/3$,

уравнения асимптот: $4x - 3y - 17 = 0$ и $4x + 3y + 1 = 0$; урав-

нения директрис: $5x - 1 = 0$ и $5x - 19 = 0$; б) $C = (-5, 1)$,

$a = 8$, $b = 6$, $e = 5/4$, уравнения асимптот: $3x + 4y + 11 = 0$

и $3x - 4y + 19 = 0$; уравнения директрис: $x = -11,4$ и $x = 1,4$;
 в) $C = (2, -1)$, $a = 4$, $b = 3$, $e = 5/4$, уравнения асимптот:
 $4x + 3y - 5 = 0$ и $4x - 3y - 11 = 0$; уравнения директрис:
 $y = -4,2$ и $y = 2,2$. **5.61.** $r_1 = 9/4$, $r_2 = 41/4$, $\rho(M, d_1) = 9/5$,
 $\rho(M, d_2) = 41/5$. **5.62.** $(-6, \pm 4\sqrt{3})$. **5.63.** $\frac{x_0 x}{a^2} - \frac{y_0 y}{b^2} = 1$.
5.64. а) $10x - 3y - 32 = 0$ и $10x - 3y + 32 = 0$; б) $3x - 4y - 10 = 0$
 и $3x - 4y + 10 = 0$. **5.67.** $2x + 11y + 6 = 0$. **5.68.** а) $p = 3$; б) $p = 5/2$;
 в) $p = 2$; г) $p = 1/2$. **5.69.** а) $y^2 = -x$; б) $x^2 = -2y$; в) $x^2 =$
 $= -12y$. **5.70.** а) $(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0)$; б) $(y - y_0)^2 =$
 $= -2p(x - x_0)$. **5.71.** а) $A = (2, 0)$, $p = 2$; б) $A = (0, 2)$, $p = 1/2$;
 в) $A = (1, 3)$, $p = 1/8$; г) $A = (6, -1)$, $p = 3$; д) $A = (1, 2)$, $p = 2$;
 е) $A = (-4, 3)$, $p = 1/4$. **5.73.** 6. **5.74.** а) $y = \frac{1}{8}x^2 - x + 3$; б) $x^2 +$
 $+ 2xy + y^2 - 6x + 2y + 9 = 0$. **5.75.** $y_0 y = p(x + x_0)$. **5.76.** а) $x + y +$
 $+ 2 = 0$; б) $2x - y - 16 = 0$. **5.78.** $y - 18 = 0$. **5.79.** $r^2 = \frac{b^2}{1 - e^2 \cos^2 \varphi}$.
5.80. а) $r = \frac{9}{4 - \sqrt{7} \cos \varphi}$; б) $r = \frac{9}{4 + \sqrt{7} \cos \varphi}$; в) $r^2(1 + 7 \sin^2 \varphi) =$
 $= 144$. **5.81.** $r^2 = \frac{b^2}{e^2 \cos^2 \varphi - 1}$. **5.82.** а) $r = \frac{16}{5 + \sqrt{41} \cos \varphi}$; б) $r =$
 $= \frac{16}{5 - \sqrt{41} \cos \varphi}$. **5.83.** а) $r = \frac{p}{1 - \cos \varphi}$; б) $r = \frac{2p \cos \varphi}{\sin \varphi}$. **5.82.** а) $\rho =$
 $= \frac{16}{5 + \sqrt{41} \cos \varphi}$; б) $\rho = \frac{16}{5 - \sqrt{41} \cos \varphi}$. **5.83.** а) $\rho = \frac{p}{1 - \cos \varphi}$; б) $\rho =$
 $= \frac{2p \cos \varphi}{\sin^2 \varphi}$. **5.84.** Гипербола. **5.85.** Эллипс. **5.86.** Парабола.
5.87. Гипербола. **5.88.** Эллипс. **5.89.** Пара параллельных
 прямых $x = 2$ и $x = 3$. **5.90.** $\frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(y+2)^2}{9} = 1$ — эллипс.
5.91. Точка $C = (1, -2)$. **5.92.** $\frac{(x+2)^2}{4} - \frac{(y-3)^2}{1} = 1$ — гипер-
 бола. **5.93.** Две пересекающиеся прямые $x - 2y + 8 = 0$ и

$x + 2y - 4 = 0$. **5.94.** Две пересекающиеся прямые $x + 2y - 3 = 0$ и $x + 2y - 1 = 0$. **5.95.** Прямая $x + 2y - 2 = 0$. **5.96.** $\emptyset$.

5.97. $\frac{X^2}{9} + \frac{Y^2}{9} = 1$ — эллипс. **5.98.** $4X^2 + 9Y = 0$ — точка.

5.99. $X^2 + \frac{Y^2}{9} = 1$ — эллипс. **5.100.** $X^2 + 2Y^2 + 1 = 0$ — $\emptyset$.

5.101. $X^2 - \frac{Y^2}{9} = 1$ — гипербола. **5.102.** $9X^2 - Y^2 = 0$ — пара

пересекающихся прямых. **5.103.** $\frac{X^2}{25} - \frac{Y^2}{9} = 1$ — гипербола.

5.104. $X^2 = \frac{\sqrt{2}}{2}Y$ — парабола. **5.105.** $X^2 = -\frac{2}{\sqrt{5}}\left(Y - \frac{\sqrt{5}}{2}\right)$ —

парабола. **5.106.** $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} = 1$, $e = \sqrt{2}$, $F_1 = (-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$,

$F_2 = (\sqrt{2}, \sqrt{2})$; $d_{1,2}: x + y \pm \sqrt{2} = 0$. **5.107.** а) $2xy + 11 = 0$;

б) $40xy = 3$. **5.108.** $x^2 + 2xy + y^2 - 4x + 8y - 6 = 0$. **5.109.** $4xy + 3y^2 - 2y - 1 = 0$. **5.110.** $7y^2 + 24xy - 144 = 0$. **5.111.** $2xy = 1$.

5.112. $x^2 + 2xy + y^2 - 6x + 2y + 9 = 0$. **5.113.** $F = (0, 0)$, $4x + 3y + 2 = 0$. **5.114.** а) $x = t$, $y = t + 1$, $t \in [-1, +\infty)$; б) $x =$

$t - 1$, $y = t$, $t \in [0, +\infty)$; в) $x = -1 + \frac{t}{\sqrt{2}}$, $y = \frac{t}{\sqrt{2}}$, $t \in [0, +\infty)$;

г) $x = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\cos t}{\cos(t - 3\pi/4)}$, $y = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sin t}{\cos(t - 3\pi/4)}$, $t \in \left[-\pi, \frac{\pi}{4}\right)$.

5.115. а) $x = 1 + \frac{t}{\sqrt{5}}$, $y = 1 + \frac{2}{\sqrt{5}}t$, $t \in [0, \sqrt{5}]$; б) $x = 2 - \frac{t}{\sqrt{5}}$,

$y = 3 - \frac{2}{\sqrt{5}}t$, $t \in [0, \sqrt{5}]$. **5.116.** $x = x_0 + R \cos t$, $y = y_0 + R \sin t$, $t \in [0, 2\pi)$.

5.117. а) $x = R(1 + \cos 2t)$, $y = R \sin 2t$, $t \in [-\pi/2, \pi/2)$;

б) $x = R(1 + \cos t)$, $y = R \sin t$, $t \in [0, 2\pi)$. **5.118.** Прямая $x + 2y - 3 = 0$. **5.119.** Парабола $y^2 = x$. **5.120.** Окружность

$(x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 4$. **5.121.** Эллипс $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. **5.122.** Пра-

вая ветвь гиперболы $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. **5.123.** Окружность

$(x - R)^2 + y^2 = R^2$. **5.124.** Окружность $x^2 + (y - R)^2 = R^2$.

5.125. Верхняя ветвь параболы $y^2 = 2px$.

5.126. $x = \frac{ab \cos t}{\sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}}$, $y = \frac{ab \sin t}{\sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}}$,
 $t \in [0, \pi/2)$.

5.127. $x = \frac{ab \cos t}{\sqrt{b^2 \cos^2 t - a^2 \sin^2 t}}$, $y = \frac{ab \sin t}{\sqrt{b^2 \cos^2 t - a^2 \sin^2 t}}$, где
 $t \in \left(-\arctg \frac{b}{a}, \arctg \frac{b}{a}\right)$ для правой ветви и $t \in \left(\pi - \arctg \frac{b}{a}, \pi + \arctg \frac{b}{a}\right)$
 для левой ветви.

5.128. а) $x = \frac{t^2}{2p}$, $y = t$, $t \in (-\infty, +\infty)$; б) $x = 2p \operatorname{ctg}^2 t$, $y = 2p \operatorname{ctg} t$,

где $t \in (0, \pi/2)$ для верхней ветви и $t \in (3\pi/2, 2\pi)$ для
 нижней ветви; в) $x = \frac{p}{2} \operatorname{ctg}^2 \frac{t}{2}$, $y = 2p \operatorname{ctg} \frac{t}{2}$, $t \in (0, 2\pi)$.

5.129. $(x - 4)^2 + y^2 + z^2 = 16$ — сфера радиуса 4 с центром в
 точке $M_0 = (4, 0, 0)$. **5.130.** Плоскость $z = -5$, параллельная

плоскости Oxy . **5.131.** Плоскость с вектором нормали
 $(1, 2, 3)$, проходящую через начало координат. **5.132.** Сфера

радиуса 6 с центром в точке $(1, 0, -2)$. **5.133.** Точка начала

системы координат. **5.134.** Пустое множество. **5.135.** Ось

Oz . **5.136.** Пара пересекающихся плоскостей $x + 2z = 0$ и

$x - 2z = 0$. **5.137.** Пара параллельных плоскостей $x = 0$ и

$x = -4$. **5.138.** Пара координатных плоскостей Oxy и Oyz .

5.139. Тройка координатных плоскостей. **5.140.** $20y + 53 = 0$.

5.147. Эллипсоид. **5.148.** Двуполостной гиперболоид вра-

щения. **5.149.** Параболоид вращения. **5.150.** Эллиптический

параболоид. **5.151.** Параболоид вращения. **5.152.** Однопо-

лостной гиперболоид вращения. **5.153.** Однополостной

гиперболоид. **5.154.** Конус. **5.155.** Гиперболический пара-

болоид. **5.156.** Параболический цилиндр. **5.157.** Гипербо-

лический параболоид. **5.158.** Двуполостной гиперболоид

вращения. **5.159.** Эллиптический параболоид. **5.160.** Гипер-

болический параболоид. **5.160.** Конус второго порядка.

- 5.161. $x^2 + z^2 - 4 = 0$. 5.162. а) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{9} = 1$. б) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1$. 5.163. $\frac{(x-3)^2}{25} + \frac{y^2}{225/16} + \frac{z^2}{100/16} = 1$. 5.164. а) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{25} - \frac{z^2}{49} = 0$; б) $x^2 - 3y^2 + z^2 = 0$. 5.168. На плоскость Oxy : $x^2 + 4xy + 5y^2 - x = 0$; на плоскость Oxz : $x^2 - 2xz + 5y^2 - 4x = 0$; на плоскость Oyz : $y^2 + z^2 + 2y - z = 0$.
- 5.168. $\begin{cases} 3x + 4y - 24 = 0, \\ 3x - 4y - 12z = 0 \end{cases}$ и $\begin{cases} 3x - 4y = 0, \\ z = 0. \end{cases}$ 5.169. $\begin{cases} 2x + z = 0, \\ y - 3 = 0 \end{cases}$ и $\begin{cases} 4x + 3z = 0, \\ x - 3 = 0. \end{cases}$ 5.170. $x^2 + y^2 - z^2 = -2$. 5.171. $y^2 + z^2 = -4ax$.
- 5.172. а) $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{4} = 1$; б) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{10} = 1$.
- 5.173. а) $x^2 + 2y^2 - 3z^2 + 1 = 0$; б) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16} = -1$.
- 5.174. а) Эллипс; б) парабола. 5.175. $M_1 = (3, 4, -2)$ и $M_2 = (6, -2, 2)$. 5.176. $M = (4, -3, 2)$ — прямая касается поверхности. 5.177. Прямая и поверхность не имеют общих точек.

Глава 6

- 6.1. $x = 2, y = -2$. 6.2. $x = 1, y = -1$. 6.3. $x = 2, y = -1, z = 1$. 6.4. $x = 1, y = 2, z = -2$. 6.5. $x_1 = 1, x_2 = -1, x_3 = 2, x_4 = -2$. 6.6. $x_1 = 3, x_2 = -4, x_3 = -1, x_4 = 1$. 6.8. $f(x) = x^2 - 5x + 3$. 6.9. $f_1(x) = \frac{(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)}, f_2(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)}, f_3(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)}$. 6.10. $x_1 = -3, x_2 = 2, x_3 = 1$. 6.11. $x_1 = -1, x_2 = 1, x_3 = -2$. 6.12. $x_1 = 1, x_2 = -1, x_3 = 0, x_4 = 2$. 6.13. $x_1 = 2, x_2 = -2, x_3 = 1, x_4 = -1$. 6.14. $x_1 = 0, x_2 = 2, x_3 = -2, x_4 = -2$.

- $x_5 = 1$. **6.15.** $x_3 = 22x_1 - 33x_2 - 11$, $x_4 = -16x_1 + 24x_2 + 8$.
- 6.16.** Общее решение: $x_1 = \frac{x_3 - 9x_4 - 2}{9}$, $x_2 = \frac{-5x_3 + x_4 + 10}{11}$.
- 6.17.** Общее решение: $x_3 = -\frac{9}{2} - x_1 - 2x_2$, $x_4 = -\frac{25}{2} - 2x_1 - 4x_2$,
 $x_5 = -\frac{15}{2} - 2x_1 - 4x_2$. **6.18.** $x_3 = \frac{4}{3}x_1 + \frac{2}{3}x_2$, $x_4 = -1 - \frac{14}{3}x_1 - \frac{7}{3}x_2$,
 $x_5 = 2 + \frac{4}{3}x_1 + \frac{2}{3}x_2$. **6.20.** c_1E_1 , $E_1 = (3, 1, 5)^T$. **6.21.** $c_1E_1 + c_2E_2$,
 $E_1 = (2, 1, 0)^T$, $E_2 = (3, 0, 1)^T$. **6.22.** Система имеет только тривиальное решение. **6.23.** c_1E_1 , $E_1 = (4, 1, -5)^T$. **6.24.** Общее решение: $c_1E_1 + c_2E_2$, $E_1 = (1, 0, -5/2, -3)^T$, $E_2 = (0, 1, -7/2, -4)^T$.
- 6.25.** Общее решение: $c_1E_1 + c_2E_2$, $E_1 = (1, 0, -5/2, 7/2)^T$, $E_2 = (0, 1, 5, -7)^T$. **6.26.** Общее решение: $c_1E_1 + c_2E_2$,
 $E_1 = (1, 0, 3/4, -3/4, 0)^T$, $E_2 = (0, 1, -1/4, 1/2, 0)^T$,
 $E_3 = (0, 0, 1, 8/11, 4/11)^T$.
- 6.27.** $c_1E_1 + c_2E_2 + c_3E_3$, $E_1 = (1, 1, -1, 1, 0, 0)^T$,
 $E_2 = (-1, 0, 0, 0, 1, 0)^T$, $E_3 = (0, -1, 0, 0, 0, 1)^T$.
- 6.28.** $c_1E_1 + c_2E_2$, $E_1 = (0, 1/3, 1, 0, 0)^T$, $E_2 = (-5, 3, 0, 0, 1)^T$.
- 6.29.** $X_0 + c_1E_1 + c_2E_2 + c_3E_3$, $X_0 = (1/3, 1/3, 0, 0, 0)^T$,
 $E_1 = (0, 1, 1, 0, 0)^T$, $E_2 = (0, 1, 0, 1, 0)^T$, $E_3 = (1/3, -5/3, 0, 0, 1)^T$.
- 6.30.** $X_0 + c_1E_1 + c_2E_2 + c_3E_3$, $X_0 = (2/3, 1/6, 0, 0, 0)^T$,
 $E_1 = (0, 1/2, 1, 0, 0)^T$, $E_2 = (0, -1/2, 0, 1, 0)^T$,
 $E_3 = (1/3, 5/6, 0, 0, 1)^T$.
- 6.31.** $X_0 + c_1E_1 + c_2E_2 + c_3E_3 + c_4E_4$, $X_0 = (2, 0, 0, -1/3, 0, 0)^T$,
 $E_1 = (1, 1, 0, 0, 0, 0)^T$, $E_2 = (-1, 0, 1, 0, 0, 0)^T$,
 $E_3 = (0, 0, 0, 1, 1, 0)^T$, $E_4 = (0, 0, 0, -1, 0, 1)^T$.
- 6.32.** $X_0 + c_1E_1 + c_2E_2 + c_3E_3$, $X_0 = (1, -1/2, 0, 0, 0)^T$,
 $E_1 = (0, -3/2, 1, 0, 0)^T$, $E_2 = (0, -2, 0, 1, 0)^T$,
 $E_3 = (0, -5/2, 0, 0, 1)^T$.
- 6.33.** $(1, -1, -1, 1)^T$. **6.34.** $(6-c, -5+c, 3, -1-c, c)^T$.

$$6.35. \left(\frac{1}{2}c + \frac{31}{6}, \frac{2}{3}, 3, -\frac{1}{2}c - \frac{7}{6}, c \right)^T. \quad 6.36. (3, 0, -5, 11)^T.$$

6.37. Система несовместна.

$$6.38. \left(\frac{-6+8c}{7}, \frac{1-13c}{7}, \frac{15-6c}{7}, c \right)^T. \quad 6.39. (0, 2, -2, 0, 3)^T.$$

Глава 7

7.13. $r = 2$; базисом является, например, $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$. 7.14. $r = 2$; базисом является, например, $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$, $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_3)$, $(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3)$.

7.16. а) Поменяются местами две строки; б) поменяются местами два столбца; в) произойдет симметричное отражение матрицы относительно центра. 7.19. $\mathbf{x} = -13\mathbf{e}'_1 + 6\mathbf{e}'_2 - 27\mathbf{e}'_3$.

$$7.20. \quad T_{\mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = -\frac{1}{2}\mathbf{e}'_1 + \frac{5}{2}\mathbf{e}'_2 - \frac{1}{2}\mathbf{e}'_3. \quad \text{Пусть}$$

$\mathfrak{B} = (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ и $\mathfrak{B}' = (\mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}')$ — прямоугольные базисы в $\mathcal{V}_3$. В задачах 7.21–7.23 найти матрицу перехода $T_{\mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{B}'}$ и выписать столбец координат вектора $\mathbf{x} = -\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$ в базисе $\mathfrak{B}'$.

$$7.21. \quad T_{\mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{B}'} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = -\mathbf{e}'_2 + 2\mathbf{e}'_2 - \mathbf{e}'_3.$$

$$7.22. \quad T_{\mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{B}'} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = -2\mathbf{e}'_2 + \mathbf{e}'_2 + \mathbf{e}'_3.$$

$$7.23. \quad T_{\mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi \\ 0 & \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \mathbf{e}'_1 - (2\cos \varphi + \sin \varphi)\mathbf{e}'_2 + (2\sin \varphi + \cos \varphi)\mathbf{e}'_3.$$

$$7.24. \quad T_{\mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \left(\frac{5}{4}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{4} \right).$$

$$7.25. T_{\mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = (1, 0, -1, 0).$$

7.26. Координаты матрицы в этом базисе совпадают с ее элементами.

$$7.32. T_{\mathfrak{B}' \rightarrow \mathfrak{B}''} = (T_{\mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{B}'})^{-1} \cdot T_{\mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{B}''} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 3 \\ 4 & 3 & 1 & 6 \\ 2 & 5 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

7.33. а) $(0, -2, 4)$; б) $(-1, 2, 1, 0)$. 7.34. $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -2\right)$.

$$7.35. \begin{pmatrix} 1 & -t_0 & t_0^2 & -t_0^3 & \cdots & (-1)^{n-1} t_0^{n-1} \\ 0 & 1 & -2t_0 & 3t_0^2 & \cdots & (-1)^{n-2} (n-1) t_0^{n-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}. \quad \text{В этой}$$

матрице в $(k+1)$ -м столбце стоят числа

$$(-t_0)^k, C_k^{k-1}(-t_0)^{k-1}, C_k^{k-2}(-t_0)^{k-2}, \dots, C_k^1(-t_0), 1, 0, 0, \dots, 0.$$

7.38. Является. 7.39. Не является, так как нарушено условие линейности. 7.40. Не является, так как нарушено условие

взаимной однозначности отображения. 7.42. $T_{\mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$

$$-2 + 3i = -2(1 + i) - 5(-i). \quad 7.43. \text{ а) Не является; б) является.}$$

7.44. Не является. 7.45. а) Является; б) не является; в) является. 7.46. Является.

7.48. Базис будут образовывать векторы

$$(1, 0, 0, 0, 0, 0, \dots, 0), (0, 0, 1, 0, 0, 0, \dots, 0), (0, 0, 0, 0, 1, 0, \dots, 0), \dots, (0, 1, 0, 1, 0, 1, \dots, \lambda),$$

$$\text{где } \lambda = \begin{cases} 0, & \text{если } n \text{ нечетно,} \\ 1, & \text{если } n \text{ четно.} \end{cases} \quad \text{Размерность равна } \left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil + 1.$$

7.52. Размерность равна 3. Базис образуют, например, векторы $\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_5$. 7.53. Размерность равна 3. Базис образуют,

например, векторы $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_4$. **7.54.** Множество решений неоднородной системы есть линейное многообразие, полученное из подпространства размерности $n - \text{rang } A = 3$ решений соответствующей однородной системы сдвигом на произвольное частное решение. **7.58.** а) Базис пересечения подпространств $\mathbf{c} = (5, 9, -13, 27)$; б) базис пересечения подпространств $\mathbf{c} = (1, 3, -1, 1)$. **7.60.** а) -1 ; б) 24 .

$$7.66. \left(\sum_{i=1}^n x_i y_i \right)^2 \leq \sum_{i=1}^n x_i^2 \cdot \sum_{i=1}^n y_i^2.$$

$$7.67. \left| \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} - \sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2} \right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i + y_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2}.$$

$$7.68. \mathbf{e}_1 = \mathbf{f}_1 = (1, 1, 1, 1), \mathbf{e}_2 = (2, 2, -2, -2), \mathbf{e}_3 = (-1, 1, -1, 1).$$

$$7.69. \mathbf{e}_1 = \mathbf{f}_1 = (1, 2, 1, 3), \mathbf{e}_2 = (10/3, -1/3, 1/3, -1), \mathbf{e}_3 = (-19/185, 87/185, 61/185, -72/185).$$

$$7.70. \mathfrak{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}, \mathbf{e}_1 = (1, 2, 2, -1), \mathbf{e}_2 = (2, 3, -3, 2), \mathbf{e}_3 = (2, -1, -1, -2).$$

$$7.71. \mathfrak{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}, \mathbf{e}_1 = (2, 1, 3, -1), \mathbf{e}_2 = (3, 2, -3, -1), \mathbf{e}_3 = (1, 5, 1, 10).$$

$$7.72. \mathbf{e}_3 = \left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{3} \right).$$

$$7.73. \mathbf{e}_3 = (-4, 2, -1, 3), \mathbf{e}_4 = (2, 4, 3, 1).$$

$$7.74. \mathbf{e}_4 = (1, 1, 1, 1, -4), \mathbf{e}_5 = (-2, -2, 3, 3, -2).$$

$$7.76. \mathbf{y} = (1, 7, 3, 3), \mathbf{z} = (-4, -2, 6, 0).$$

$$7.77. \mathbf{y} = (1, -1, -1, 5), \mathbf{z} = (3, 0, -2, -1).$$

$$7.78. \text{Является } A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}. \quad 7.79. \text{Не является.}$$

7.80. Является оператор проектирования на ось, заданную вектором $\mathbf{e}$. Если $\mathbf{e} = \cos \alpha \cdot \mathbf{i} + \cos \beta \cdot \mathbf{j} + \cos \gamma \cdot \mathbf{k}$,

$$A = \begin{pmatrix} \cos^2 \alpha & \cos \beta \cos \alpha & \cos \gamma \cos \alpha \\ \cos \alpha \cos \beta & \cos^2 \beta & \cos \lambda \cos \beta \\ \cos \alpha \cos \gamma & \cos \beta \cos \gamma & \cos^2 \gamma \end{pmatrix}.$$

$$7.81. \text{Является, если } \mathbf{a} = a_1 \mathbf{i} + a_2 \mathbf{j} + a_3 \mathbf{k}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

7.82. Не является. **7.83.** Является, оператор $\mathbf{A} = \mathbf{U}(\mathbf{e}, \varphi)$ представляет собой сумму операторов из задач **7.78**, **7.80** и **7.81**,

матрицы которых известны. **7.84.** Является, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

7.85. Является $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 4 & -1 & 5 \end{pmatrix}$. **7.86.** Не является. **7.87.** Яв-

ляется $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. **7.88.** Не является. **7.89.** Является

$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. **7.90.** $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}$. **7.91.** Оператор не имеет

обратного.

7.92. $\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}) = \frac{1}{9}(x_1 + 2x_2 + 2x_3, 2x_1 + x_2 - 2x_3, 2x_1 - 2x_2 + x_3)$.

7.93. $C = \begin{pmatrix} 22 & 13 & 1 \\ -39 & -16 & 25 \\ -1 & 0 & -6 \end{pmatrix}$,

$\mathbf{C}(\mathbf{x}) = (22x_1 + 13x_2 - 37x_3, -39x_1 - 16x_2 + 25x_3, -x_1 - 6x_3)$.

7.94. $C = \begin{pmatrix} -15 & 23 & -7 \\ 2 & 8 & -4 \\ -7 & 1 & 7 \end{pmatrix}$,

$\mathbf{C}(\mathbf{x}) = (-15x_1 + 23x_2 - 7x_3, 2x_1 + 8x_2 - 4x_3, -7x_1 + x_2 + 7x_3)$.

7.95. $C = 0$, $\mathbf{C}(\mathbf{x}) = 0$. **7.96.** $\mathbf{A}(\mathbf{a}) = (-5, -7, 13)$.

7.97. $\mathbf{A}(\mathbf{a}) = (-6, -21, 2)$. **7.98.** $\frac{1}{3} \begin{pmatrix} -10 & -21 & 9 \\ 5 & 9 & -6 \\ 1 & 6 & 3 \end{pmatrix}$.

7.99. $\begin{pmatrix} -5 & -10 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$. **7.100.** $A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$.

7.101. Если $\mathbf{e} = \cos \alpha \cdot \mathbf{i} + \cos \beta \cdot \mathbf{j} + \cos \gamma \cdot \mathbf{k}$, то $A = (E_1, E_2, E_3)$,

$$\text{где столбцы } E_1 = \begin{pmatrix} \cos^2 \alpha \\ \cos \alpha (\cos \beta \cos \varphi - \cos \gamma \sin \varphi) \\ \cos \alpha (\cos \beta \sin \varphi + \cos \gamma \cos \varphi) \end{pmatrix},$$

$$E_2 = \begin{pmatrix} \cos \alpha (\cos \beta \cos \varphi - \cos \gamma \sin \varphi) \\ \cos^2 \beta \cos^2 \varphi + \cos^2 \gamma \sin^2 \varphi \\ \frac{\cos^2 \beta - \cos^2 \gamma}{2} \sin 2\varphi + \cos \beta \cos \gamma \cos 2\varphi \end{pmatrix},$$

$$E_3 = \begin{pmatrix} \cos \alpha (\cos \beta \cos \varphi - \cos \gamma \sin \varphi) \\ \frac{\cos^2 \beta - \cos^2 \gamma}{2} \sin 2\varphi + \cos \beta \cos \gamma \cos 2\varphi \\ (\cos \beta \sin \varphi + \cos \gamma \cos \varphi)^2 \end{pmatrix}.$$

7.102. Если $\mathbf{a} = a_1 \mathbf{i} + a_2 \mathbf{j} + a_3 \mathbf{k}$, то

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 \cos^2 \varphi + a_3 \sin^2 \varphi & \frac{1}{2}(a_2 - a_3) \sin 2\varphi \\ 0 & \frac{1}{2}(a_2 - a_3) \sin 2\varphi & a_2 \sin^2 \varphi + a_3 \cos^2 \varphi \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{7.103.} \text{ а) } [A]_{\mathfrak{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & 1 \\ 3 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}; \text{ б) } [A]_{\mathfrak{B}'} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & -8 & -7 \\ 1 & 4 & 6 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 7 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{7.104.} [A+B]_{\mathfrak{B}''} = \begin{pmatrix} 44 & 44 \\ -29,5 & -25 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{7.105.} \text{ а) } \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}; \text{ б) } \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

7.106. а) $\text{Ker}(\mathbf{A})$ — двумерное пространство всех векторов, ортогональных вектору $\mathbf{e}$, $\text{Im}(\mathbf{A})$ — одномерное пространство всех векторов, коллинеарных $\mathbf{e}$; б) $\text{Ker}(\mathbf{A})$ — одномерное пространство всех векторов, коллинеарных вектору $\mathbf{a}$, $\text{Im}(\mathbf{A})$ — двумерное пространство всех векторов, ортогональных $\mathbf{a}$. **7.107.** $\text{Ker}(\mathbf{A}) = \mathcal{P}_0 = \mathbb{R}$, $\text{Im}(\mathbf{A}) = \mathcal{P}_{n-1}$. **7.108.** $\text{rang}(\mathbf{A}) =$

$= 2$, базис $\text{Im}(\mathbf{A})$: $E_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $E_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\text{Def}(\mathbf{A}) = 1$, базис

$\text{Ker}(\mathbf{A})$: $E = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. **7.109.** $\text{rang}(\mathbf{A}) = 1$, базис $\text{Im}(\mathbf{A})$: $E = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$;

$\text{Def}(\mathbf{A}) = 2$, базис $\text{Ker}(\mathbf{A})$: $E_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $E_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. **7.111.** $\lambda = a$,

$\mathbf{x}^{(\lambda)}$ — любой ненулевой вектор. **7.112.** $\lambda_1 = 1$, $\mathbf{x}^{(\lambda_1)} = x\mathbf{i}$, $x \neq 0$;

$\lambda_2 = 0$, $\mathbf{x}^{(\lambda_2)} = y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, $y^2 + z^2 \neq 0$. **7.113.** $\lambda = 0$, $\mathbf{x}^{(\lambda)} = x\mathbf{i}$, $x \neq 0$.

7.114. $\lambda_1 = 1$, $\mathbf{x}^{(\lambda_1)}$ — любой ненулевой вектор, параллельный плоскости отражения; $\lambda_2 = -1$, $\mathbf{x}^{(\lambda_2)} = \alpha\mathbf{e}$, $\alpha \neq 0$.

7.115. $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 6$; собственные векторы имеют вид $\mathbf{x}^{(\lambda_1)} = \alpha(1, -1)$ и $\mathbf{x}^{(\lambda_2)} = \alpha(2, 5)$, где $\alpha \neq 0$.

7.116. $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -1$; собственные векторы имеют вид $\mathbf{x} = \alpha(1, 1, -1)$, $\alpha \neq 0$. **7.117.** $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 2$; собственные

векторы имеют вид $\mathbf{x} = \alpha_1(1, 2, 0) + \alpha_2(0, 0, 1)$, где $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 \neq 0$.

7.118. $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$; собственные векторы $\mathbf{x}^{(\lambda_1)} = \alpha(1, 1, 1)$ и $\mathbf{x}^{(\lambda_{2,3})} = \alpha(1, 2, 3)$, где $\alpha \neq 0$. **7.119.** $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = \lambda_3 = -1$;

собственные векторы $\mathbf{x}^{(\lambda_1)} = \alpha(1, 2, 2)$ и $\mathbf{x}^{(\lambda_2)} = \alpha(1, 2, 1)$, где $\alpha \neq 0$, для $\lambda = -1$. **7.120.** $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = -2$; собственные

векторы $\mathbf{x}^{(\lambda_1)} = \alpha(1, 1, 1)$, $\mathbf{x}^{(\lambda_2)} = \alpha(4, 1, 7)$ и $\mathbf{x}^{(\lambda_3)} = \alpha(2, 3, 3)$,

где $\alpha \neq 0$. **7.121.** $\lambda = 2$, собственные векторы $\mathbf{x}^{(\lambda)}$ где $\alpha \neq 0$.

7.123. При любых $\varphi \neq 0, \pi$ оператор $\mathbf{A}$ имеет два собственных числа $\lambda_1(\varphi) = \cos \varphi + i \sin \varphi = e^{i\varphi}$, $\lambda_2(\varphi) = \cos \varphi - i \sin \varphi = e^{-i\varphi}$.

Соответствующие им собственные векторы: $\mathbf{x}^{(\lambda_1)}(\varphi) = \alpha(1, -i)$ и $\mathbf{x}^{(\lambda_2)}(\varphi) = \beta(1, i)$, где α и β — произвольные отличные от нуля комплексные числа. При $\varphi = 0$ и $\varphi = \pi$ оператор $\mathbf{A}$ имеет по одному собственному числу $\lambda(\varphi = 0) = 1$, $\lambda(\varphi = \pi) = -1$. В обоих случаях собственным вектором является любой ненулевой вектор из комплексного пространства L_2 .

7.126. Если λ — собственное число оператора $\mathbf{A}$, то $\frac{1}{\lambda}$ — собственное число оператора $\mathbf{A}^{-1}$. *Указание.* Показать, что из уравнения $|\mathbf{A}^{-1} - \lambda \mathbf{E}| = 0$ следует $|\mathbf{A} - (1/\lambda)\mathbf{E}| = 0$.

$$\mathbf{7.128.} \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}. \quad \mathbf{7.129.} \begin{pmatrix} -83 & -59 & -45 \\ 107 & 83 & 67 \\ 14 & 10 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{7.130.} \begin{pmatrix} 17 & 13 & 13 \\ -11 & \varepsilon^2 - 8 & \varepsilon - 8 \\ 1 & \varepsilon - 8 & \varepsilon^2 - 8 \end{pmatrix}. \quad \mathbf{7.132.} \begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}. \quad \mathbf{7.133.}$$

Поворот на угол φ вокруг начала координат по часовой стрелке.

$$\mathbf{7.134.} \frac{1}{a^2 + b^2} \begin{pmatrix} b^2 - a^2 & -2ab \\ -2ab & a^2 - b^2 \end{pmatrix}, \text{ если } ab \neq 0; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ при}$$

$$a = 0; \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ при } b = 0.$$

$$\mathbf{7.143.} E_1 = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} 1/3 \\ -2/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}, E_3 = \begin{pmatrix} -2/3 \\ 1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & 18 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{7.144.} E_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{18} \\ -1/\sqrt{18} \\ -4/\sqrt{18} \end{pmatrix}, E_3 = \begin{pmatrix} 2/3 \\ -2/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 27 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{7.145.} E_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -i/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ i/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}, E_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$7.147. E_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{3} \end{pmatrix}, E_3 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

$$7.147. U = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 2 & 1+i \\ 1-i & -2 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$7.148. U = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 2-i & -1 \\ 1 & 2+i \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

$$7.149. U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} i & 1 & 0 \\ 1 & i & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$7.150. U = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

$$7.151. U = \frac{1}{3\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & 2 & \sqrt{5} \\ -3 & 4 & 6\sqrt{5} \\ 0 & 5 & -2 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}.$$

7.152. Базис из собственных векторов имеет вид

$$\mathbf{x}_1 = \{1, -1\}, \mathbf{x}_2 = \{2, 5\}, A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

7.153. Базис из собственных векторов имеет вид $\mathbf{x}_1 = (1, 1, 1)$, $\mathbf{x}_2 = (1, 1, 0)$,

$$\mathbf{x}_3 = (1, 0, -3), A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

7.154. Базис из собственных векторов имеет вид $\mathbf{x}_1 = (1, 1, 0, 0)$, $\mathbf{x}_2 = (1, 0, 1, 0)$, $\mathbf{x}_3 = (1, 0, 0, 1)$,

$$\mathbf{x}_4 = (1, -1, -1, -1), A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$7.164. A = \begin{pmatrix} 6 & 0 & -4 \\ 0 & 6 & 2 \\ -4 & 2 & 6 \end{pmatrix}. \quad 7.165. A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$7.166. A' = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$7.167. n = 2, A(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1 y_2 + x_2 y_3 + x_2 y_1 - x_2 y_2, A' = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

7.169. Положительно определенная. 7.170. Отрицательно определенная. 7.171. Общего вида. 7.172. Отрицательно определенная. 7.173. Положительно определенная. 7.174. Общего вида. 7.175. Положительно определенная. 7.176. Эллипс $\frac{x'^2}{2} + y'^2 = 1$, $O' = (-4/5, 2/5)$, $\mathbf{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\mathbf{i} + \frac{2}{\sqrt{5}}\mathbf{j}$,

$$\mathbf{e}_2 = -\frac{2}{\sqrt{5}}\mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{5}}\mathbf{j}. \quad 7.177. \text{Парабола } y'^2 = 4\sqrt{2}x', O' = (2, 1),$$

$$\mathbf{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{j}, \quad \mathbf{e}_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{j}. \quad 7.178. \text{Гипербола } \frac{x'^2}{4} -$$

$$-\frac{y'^2}{9} = 1, O' = (1, 1), \quad \mathbf{e}_1 = \frac{3}{\sqrt{13}}\mathbf{i} + \frac{2}{\sqrt{13}}\mathbf{j}, \quad \mathbf{e}_2 = -\frac{2}{\sqrt{13}}\mathbf{i} + \frac{3}{\sqrt{13}}\mathbf{j}.$$

$$7.179. \text{Параллельные прямые } x' = \pm \frac{\sqrt{5}}{2}, O' = (-3/5, -3/10),$$

$$\mathbf{e}_1 = -\frac{2}{\sqrt{5}}\mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{5}}\mathbf{j}, \quad \mathbf{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\mathbf{i} + \frac{2}{\sqrt{5}}\mathbf{j}, \text{ или в старых переменных}$$

$$2x - y + 1 = 0, 2x - y - 4 = 0. \quad 7.180. \text{Эллипс } \frac{x'^2}{35/6} + \frac{y'^2}{35/36} = 1,$$

$$O' = (7/6, 1/3), \quad \mathbf{e}_1 = \frac{2}{\sqrt{5}}\mathbf{i} - \frac{1}{\sqrt{5}}\mathbf{j}, \quad \mathbf{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\mathbf{i} + \frac{2}{\sqrt{5}}\mathbf{j}. \quad 7.181. \text{Пара-}$$

$$\text{бола } y'^2 = \frac{1}{5}x', O' = (3, 2), \quad \mathbf{e}_1 = -\frac{2}{\sqrt{5}}\mathbf{i} - \frac{1}{\sqrt{5}}\mathbf{j}, \quad \mathbf{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\mathbf{i} - \frac{2}{\sqrt{5}}\mathbf{j}.$$

7.182. Эллипсоид $\frac{x'^2}{2} + \frac{y'^2}{1} + \frac{z'^2}{2/3} = 1$, $O' = (1, 2, -1)$,

$$\mathbf{e}_1 = \frac{1}{3}\mathbf{i} + \frac{2}{3}\mathbf{j} + \frac{2}{3}\mathbf{k}, \mathbf{e}_2 = \frac{2}{3}\mathbf{i} + \frac{1}{3}\mathbf{j} - \frac{2}{3}\mathbf{k}, \mathbf{e}_3 = \frac{2}{3}\mathbf{i} - \frac{2}{3}\mathbf{j} + \frac{1}{3}\mathbf{k}.$$

7.183. Гиперболический параболоид $\frac{x'^2}{2} - \frac{y'^2}{1} = -2z'$,

$$O' = (1, 2, 3), \mathbf{e}_1 = -\frac{2}{3}\mathbf{i} + \frac{1}{3}\mathbf{j} + \frac{2}{3}\mathbf{k}, \mathbf{e}_2 = \frac{1}{3}\mathbf{i} - \frac{2}{3}\mathbf{j} + \frac{2}{3}\mathbf{k}, \mathbf{e}_3 = \frac{2}{3}\mathbf{i} +$$

$+\frac{2}{3}\mathbf{j} + \frac{1}{3}\mathbf{k}$. **7.184.** Двуполостной гиперboloид $\frac{x'^2}{4/5} + \frac{y'^2}{4/5} -$

$$-\frac{z'^2}{4/25} = -1, O' = (0, 1, -2/5), \mathbf{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i} - \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{j}, \mathbf{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{j},$$

$$\mathbf{e}_3 = \mathbf{k}. \text{7.185. Эллиптический параболоид } \frac{x'^2}{5\sqrt{2}/4} + \frac{y'^2}{\sqrt{2}/2} =$$

$$= 2z', O' = (-1/40, -19/40, 1/2), \mathbf{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}\mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{6}}\mathbf{j} - \frac{2}{\sqrt{6}}\mathbf{k}, \mathbf{e}_2 =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{j} + \frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{k}, \mathbf{e}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i} - \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{j}. \text{7.187. Параболический}$$

цилиндр $y'^2 = \frac{4}{3}x'$, $O' = (2, 1, -1)$, $\mathbf{e}_1 = \frac{2}{3}\mathbf{i} + \frac{2}{3}\mathbf{j} + \frac{1}{3}\mathbf{k}$, $\mathbf{e}_2 =$

$$= \frac{2}{3}\mathbf{i} - \frac{1}{3}\mathbf{j} - \frac{2}{3}\mathbf{k}, \mathbf{e}_3 = \frac{1}{3}\mathbf{i} - \frac{2}{3}\mathbf{j} + \frac{2}{3}\mathbf{k}. \text{7.187. Эллиптический}$$

цилиндр $\frac{x'^2}{2} + \frac{y'^2}{1} = 1$, $O' = (0, 1, 0)$, $\mathbf{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{j} - \frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{k}$,

$$\mathbf{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}\mathbf{i} - \frac{2}{\sqrt{6}}\mathbf{j} - \frac{1}{\sqrt{6}}\mathbf{k}, \mathbf{e}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{k}. \text{7.188. Однополост-$$

ной гиперboloид $\frac{x'^2}{1/3} + \frac{y'^2}{1/6} - \frac{z'^2}{1/2} = 1$, $O' = \left(-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$,

$$\mathbf{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{i} - \frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{j} + \frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{k}, \mathbf{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}\mathbf{i} + \frac{2}{\sqrt{6}}\mathbf{j} + \frac{1}{\sqrt{6}}\mathbf{k}, \mathbf{e}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i} - \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{k}.$$

7.189. Гиперболический цилиндр $\frac{x'^2}{1/3} - \frac{y'^2}{1/3} = 1$,

$$O' = \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, -\frac{5}{6} \right), \quad \mathbf{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i} - \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{k}, \quad \mathbf{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{i} - \frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{j} + \frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{k},$$

$$\mathbf{e}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}\mathbf{i} + \frac{2}{\sqrt{6}}\mathbf{j} + \frac{1}{\sqrt{6}}\mathbf{k}.$$

Глава 8

- 8.1. 0,331. 8.2. 0,5. 8.3. $\sqrt[3]{0,27}$. 8.4. -1. 8.5. 2. 8.6. 12. 8.7. $-\frac{2}{27}$.
 8.8. $-\frac{3}{16}$. 8.9. $\frac{1}{2\sqrt{2}}$. 8.10. $\frac{1}{12}$. 8.11. 0. 8.12. -3. 8.13. $2\ln 2$.
 8.14. $\ln 3\sqrt{3}$. 8.15. 2. 8.16. $\frac{1}{e}$. 8.17. $f'_-(0) = -1$, $f'_+(0) = 1$.
 8.18. $f'_-(1) = 1$, $f'_+(1) = 0$. 8.19. $f'_-(0) = -1$, $f'_+(0) = 1$. 8.20. $f'_-(0) = 1$, $f'_+(0) = 0$. 8.23. $-2 + 3x^2$. 8.24. $\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x^2}$. 8.25. $\cos x - x \sin x$.
 8.26. $-\sin x \cdot \sqrt[3]{x^5} + \frac{5}{3} \cos x \cdot \sqrt[3]{x^2}$. 8.27. $\frac{\sin x - x \cos x}{\sin^2 x}$.
 8.28. $\frac{x - (1+x^2) \operatorname{arctg} x}{x(1+x^2)}$. 8.29. $1 + \ln x + 2^x \ln 2$.
 8.30. $\frac{\ln x + 1}{\ln 2} - \frac{e^x(x-1)}{x^2}$. 8.31. $10(2x+1)^{10}$. 8.32. $-\frac{9}{2}\sqrt{1-3x}$.
 8.33. $\frac{2}{\sqrt{1-4x^2}}$. 8.34. $-\frac{1}{2x^2+2x+1}$. 8.35. $-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.
 8.36. $\frac{\sin x}{2\sqrt{1-\cos x}}$. 8.37. $\frac{1}{2\sqrt{x-x^2}}$. 8.38. $\frac{3\sqrt{x}}{1(1+x^3)}$.
 8.39. $-\sin 2x$. 8.40. $2x \sin x$. 8.41. $2^{x/\ln x} \ln 2 \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x}$.
 8.42. $\frac{3}{2} \cdot 3^{\sqrt{\sin^3 x}} \cdot \ln 3 \cdot \sqrt{\sin x} \cdot \cos x$. 8.43. $-\frac{1}{4\sqrt{\operatorname{arctg} \sqrt{x}} \cdot (1+x)x}$.
 8.44. $\frac{1}{2\sqrt{\log_3 \ln x} \cdot \ln 3 \cdot \ln x \cdot x}$. 8.45. $\frac{x \arcsin x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$.

$$8.46. \frac{x^2 - 2}{2\sqrt{1 - 2x - x^2}} + \frac{2}{\sqrt{3 - 2x - x^2}}. 8.47. \frac{1}{x}. 8.48. -\frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}.$$

$$8.49. \operatorname{ch} x. 6.50. \operatorname{sh} x. 8.51. \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}. 8.52. -\frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}.$$

$$8.53. y = \frac{(x-3)(19x-17)}{(x+1)^4}. 8.54. \frac{10-2x-2x^2}{3x^2\sqrt[3]{x^2(x+2)^2(x-1)}}.$$

$$8.55. -\frac{2x^2+9x+1}{2\sqrt{x+2}\sqrt[3]{(x-1)^5(2x+1)^4}}. 8.56. \frac{11x^5-7x^4-58x^3+48x^2}{4\sqrt{(x-1)(x+2)^3}\sqrt[4]{(x-2)^5}}.$$

$$8.57. x^x (\ln x + 1). 8.58. x^{2^x} 2^x \left(\frac{1}{x} + \ln x \cdot \ln 2 \right).$$

$$8.59. \sqrt{x^{\sqrt[3]{x}}} \left(\frac{3 + \ln x}{6\sqrt[3]{x^2}} \right). 8.60. (\ln x)^{1/x} \frac{1 - \ln x \cdot \ln \ln x}{x^2 \ln x}.$$

$$8.61. (\sin x)^{\arcsin x} \left(\frac{\ln \sin x}{\sqrt{1-x^2}} + \arcsin x \cdot \operatorname{ctg} x \right).$$

$$8.62. x^{x^x} \cdot x^{x-1} (1 + x \ln x (\ln x + 1)). 8.63. \frac{(\ln x)^x}{x^{\ln x}} \left(\ln \ln x + \frac{1}{\ln x} - \frac{2 \ln x}{x} \right).$$

$$8.64. y = x^{-x^2+1} (1 + \ln x^2) + x^{2^x} \cdot 2^x \left(\frac{1}{x} + \ln 2 \cdot \ln x \right) + 2^{x^x} \ln 2 \cdot x^x (\ln x + 1).$$

$$8.65. \frac{4}{3}. 8.66. -\frac{1}{e}. 8.67. -\frac{b^2 x}{a^2 y}. 8.68. \frac{x(x^2 - 3y^2)}{y(3x^2 - y^2)}. 8.69. -\sqrt{\frac{y}{x}}.$$

$$8.70. \frac{1}{2(1 + \ln y)}. 8.71. \frac{e^x \sin y + e^y \sin x}{e^y \cos x - e^x \cos y}. 8.72. -\frac{y}{x}. 8.73. 2^{y-x}.$$

$$8.74. \sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2}} \cdot \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{1-\sqrt{1-y^2}}. 8.75. \frac{y}{x} \cdot \frac{x \ln y - y}{y \ln x - x}. 8.76. \frac{y}{x}.$$

$$8.77. \pm \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}. 8.78. \frac{1}{1 - x^2}. 8.79. \frac{1}{\sqrt{1 + 8x}}. 8.80. \frac{1}{1 - x^2}.$$

$$8.81. \frac{\operatorname{ctg} x}{\ln 2}. 8.82. \frac{1}{x(\ln \alpha(x) + 1)}, \text{ где } \alpha(x) - \text{ функция, обратная к } y = x^x.$$

$$8.83. \frac{3t-1}{t^2}. 8.84. \frac{1}{3t}. 8.85. -\frac{b}{a} \operatorname{ctg} \varphi. 8.86. 2\cos^2 t (\cos 2t - 2\sin 2t).$$

$$8.87. 1. 8.88. \frac{b}{a} \operatorname{th} t. 8.89. 1. 8.90. -1. 8.91. 2 + \sqrt{3}. 8.92. -\frac{4}{3}.$$

$$8.93. -2\cos 2x. 8.94. \frac{2-6x^4}{(1+x^4)^2}. 8.95. -\frac{2(x^2+1)}{3\ln 2(x^2-1)^2}.$$

$$8.96. 2e^{-x^2}(2x^2-1). 8.97. \frac{3x}{(1-x^2)^2} + \frac{(1+2x^2)\arcsin x}{(1-x^2)^{5/2}}.$$

$$8.98. x^{\sqrt{x}-1}(2+\ln x) \left(\frac{1}{4} \ln x + \frac{1}{2} - \frac{1}{4\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}(2+\ln x)} \right).$$

$$8.99. \frac{m!}{(m-n)!} x^{m-n}, \text{ если } n \leq m, 0, \text{ если } m > n.$$

$$8.100. \alpha(\alpha-1)(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}. 8.101. a^n e^{ax}.$$

$$8.102. (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{x^n}. 8.103. \cos \left(x + \frac{\pi n}{2} \right). 8.104. \sin x \left(x + \frac{\pi n}{2} \right).$$

$$8.105. 2^{n-1} \cos \left(2x + \frac{\pi n}{2} \right). 8.106. (-2)^n \frac{n!}{(2n-1)^{n+1}}.$$

$$8.107. \cos x(209-x-x^2) - 15\sin x(2x+1).$$

$$8.108. e^x(x^2+39x+360). 8.109. 4\sqrt{2}\sin(x-\pi/4)e^{-x}.$$

$$8.110. \frac{8!}{x^9 \ln 2}. 8.111. -\frac{p^2}{y^3}. 8.112. e^{2y} \frac{2-xe^y}{(1-xe^y)^3}.$$

$$8.113. \frac{y((1+y)^2+(x-1)^2)}{x^2(1+y)^3}. 8.114. -\frac{2(1+y)^2}{y^5}. 8.115. -\operatorname{ctg}^3 t$$

$$\text{или } \frac{1}{(x^2-1)^{3/2}}, \quad x \in (1, +\infty). 8.116. \frac{2}{(t^2-1)} \text{ или } -2\sec^2 x,$$

$$x \in (-\pi/2, \pi/2). 8.117. 2(1+t^2) \text{ или } 2\sec^2 x, \quad x \in (-\pi/2, \pi/2).$$

$$8.118. \frac{1}{3a\cos^4 t \sin t} \text{ или } \frac{a^{2/3}}{3x^{4/3}\sqrt{a^{2/3}-x^{2/3}}}, \quad x \in (0, a).$$

$$8.119. y = (x-1)(x-2)(x-3), x_0 = 0, y = 11x - 6, y = -\frac{1}{11}x - 6.$$

$$8.120. y = -\frac{10}{9}x + \frac{16\sqrt{2}}{9}, y = \frac{9}{10}x - \frac{7\sqrt{2}}{30}. 8.121. y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2},$$

$$y = 2x. 8.122. y = 2x, y = -\frac{x}{2}. 8.123. y = 2x, y = -\frac{x}{2}.$$

$$8.124. y = 2x + 3, y = -\frac{x}{2} + \frac{1}{2}. 8.125. 7x - 10y + 6 = 0,$$

$$10x + 7y - 34 = 0. 8.126. y = 0, (\pi + 4)x + (\pi - 4)y - \pi^2 \frac{\sqrt{2}}{4} = 0.$$

$$8.127. 5x + 6y - 13 = 0, 6x - 5y + 21 = 0. 8.128. x + y - 2 = 0,$$

$$x - y = 0. 8.129. x - y + 2 = 0. 8.130. 3x - y + 7 = 0. 8.131.$$

$$3x + 9y - 8 = 0. 8.132. 2x - 2y - 15 = 0. 8.133. В точке $M_1(0;0)$$$

угол равен 0 (параболы касаются), в точке $M_2(1, 1)$ угол

$$\text{равен } \arctg \frac{1}{7}. 8.134. \arctg \frac{8}{15}. 8.135. \arctg 2\sqrt{2}. 8.136. \pi / 4 \text{ и}$$

$$\pi / 2. 8.137. \text{ а) } t_1 = 0, t_2 = 8; \text{ б) } t \in (0, 4) \cup (8, +\infty); \text{ в) } t_1 =$$

$$= \frac{4}{3}(3 + \sqrt{3}), t_1 = \frac{4}{3}(3 - \sqrt{3}). 8.138. 242. 8.139. -a\omega \sin \omega t.$$

$$8.140. a\omega e^{a\varphi}. 8.143. 2 \text{ см}. 8.144. 3 \text{ см}. 8.145. 2,93. 8.146. 0,05.$$

$$8.147. 0,9998. 8.148. 0,05. 8.149. 0,01. 8.150. -0,8.$$

$$8.151. 2\sqrt{a^2 - x^2} dx. 8.152. x \sin x dx. 8.153. \arctg x dx. 8.154.$$

$$\ln x dx. 8.155. \frac{2x}{5y^4 + 1} dx. 8.156. \frac{x(2y^2 - x^2)}{y(y^2 - 2x^2)} dx.$$

$$8.157. \frac{y^{1/3}}{x^{1/3}} dx. 8.158. \frac{1}{e^y - 1} dx = \frac{1}{x + y - 1} dx. 8.159. \frac{y^2 - 1}{y^2} dy.$$

$$8.160. \frac{x+y}{x-y} dx. 8.161. -\frac{\sin(x+y)}{1+\sin(x+y)} dx. 8.162. -\frac{1+y\sin(xy)}{x\sin(xy)} dx.$$

$$8.163. -ab^2 \sin(bx+c) dx^2. 8.164. 3^{-x^2} \ln 9(2x^2 \ln 3 - 1) dx^2.$$

$$8.165. \frac{(2-x^2)\sin x - 2x \cos x}{x^3} dx^2. 8.166. 2a dx^2.$$

$$8.167. \frac{2(3x^2 - 9x + 7)}{(x^2 - 3x + 2)^3} dx^2. \quad 8.168. -\frac{x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x}{(1-x^2)^{3/2}} dx^2.$$

$$8.169. -\frac{x dx^2}{(1+x^2)^{3/2}}. \quad 8.170. -\frac{a(1+a^2)\sin x}{(1+a^2\sin^2 x)^{3/2}} dx^2. \quad 8.171. -\frac{dx^2}{y^3}.$$

$$8.172. \frac{6x(1+3y^2)dx^2}{(1+3y^2)^3}. \quad 8.173. \frac{(x-y)dx^2}{(1-a\cos y)^3}. \quad 8.174. \frac{dx^2}{(x+2y)^3}.$$

8.175. Возрастает на $[-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}]$, убывает на $[-1, -1/\sqrt{2}]$ и $[1/\sqrt{2}, 1]$, $y_{\min} = y(-1/\sqrt{2}) = -1/\sqrt{2}$, $y_{\max} = y(1/\sqrt{2}) = 1/\sqrt{2}$.

8.176. Возрастает на $(-\infty, -1]$ и $(0, 1]$, убывает на $[-1, 0]$ $[1, +\infty)$, $y_{\max} = y(1) = (-1) = 1$. 8.177. Возрастает на $[e, +\infty)$, убывает на $(0, 1)$ и $(1, e]$, $y_{\min} = y(e) = e$.

8.178. Убывает на $\left[\frac{\pi}{3}(6k-1), \frac{\pi}{3}(6k+1)\right]$, возрастает на $\left[\frac{\pi}{3}(6k+1), \frac{\pi}{3}(6k+5)\right]$, $y_{\min} = y\left(2k\pi + \frac{\pi}{3}\right) = 2k\pi + \left(\frac{\pi}{3} - \sqrt{3}\right)$, $y_{\max} = y\left(2k\pi + \frac{5\pi}{3}\right) = 2k\pi - \left(\frac{\pi}{3} - \sqrt{3}\right)$.

8.179. Убывает на $(0, 2]$, возрастает на $[2, +\infty)$, $y_{\min} = y(2) = 2(1 - \ln 2)$.

8.180. Возрастает на всей области определения. 8.181. $M = 3$, $m = -24$. 8.182. $M = 8$, $m = 0$. 8.183. $M = 0,6$, $m = -1$. 8.184.

$M = 1$, $m = 0,6$. 8.185. $M = 2$, $m = \sqrt[3]{2}$. 8.186. $M = \pi/4$,

$m = 0$. 8.187. $\frac{av_1 + bv_2}{v_1^2 + v_2^2} c$. 8.188. $x = \frac{2p}{4+\pi}$, $y = \frac{1}{2}\left(p - x - \frac{\pi x}{2}\right)$.

$$8.189. \alpha = \frac{2\pi}{3}. \quad 8.190. \frac{ah}{4}. \quad 8.191. \pi a^3. \quad 8.192. \frac{4}{27}\pi r^2 h.$$

8.193. $\frac{8}{3}\pi r^3$. 8.194. $N(1, 1)$. 8.195. На $(-\infty, 0)$ выпуклость

вверх, на $(0, +\infty)$ выпуклость вниз, $M(0, 1)$ — точка перегиба, $k = 7$. 8.196. График всюду выпуклый вниз.

- 8.197.** На $(-\infty, 2)$ выпуклость вверх, на $(2, +\infty)$ выпуклость вниз, $M(2, 0)$ — точка перегиба, $k = 0$. **8.198.** На $(-\infty, -1)$ и $(1, +\infty)$ выпуклость вниз, на $(-1, 1)$ выпуклость вверх, $M_1(-1, \sqrt[3]{2})$ и $M_2(1, \sqrt[3]{2})$ — точки перегиба, $k_1 = k_2 = \infty$. **8.199.** График всюду выпуклый вверх. **8.200.** На $(-\infty, -1)$ выпуклость вверх, на $(-1, +\infty)$ выпуклость вниз, $M(-1, 1 - e^{-2})$ — точка перегиба, $k = -e^{-2}$. **8.201.** На $(-\infty, 0)$ выпуклость вверх, на $(0, +\infty)$ выпуклость вниз. **8.202.** $y = x^3 \ln x + 1$. На $(0, e^{-5/6})$ выпуклость вверх, на $(e^{-5/6}, +\infty)$ выпуклость вниз, $M\left(e^{-5/6}, 1 - \frac{5}{6}e^{-5/6}\right)$ — точка перегиба, $k = -\frac{3}{2}e^{-5/3}$. **8.203.** $x = 2$, $y = 1$. **8.204.** $y = x - \frac{1}{3}$. **8.205.** $x = 0$, $y = 1$ (правая), $y = -1$ (левая). **8.206.** $y = x + \frac{\pi}{2}$ (правая), $y = x - \frac{\pi}{2}$ (левая). **8.207.** $x = 0$, $x = -1$ (левая), $y = 2x$. **8.208.** $y = 0$. **8.209.** $x = -\frac{1}{e}$, $y = x + \frac{1}{e}$. **8.210.** $x = 1$ (левая), $y = 1$. **8.237.** 0. **8.238.** $1/3$. **8.239.** $\frac{m}{n}a^{m-n}$. **8.240.** $a \neq b$, $c \neq d$. $\frac{\ln a - \ln b}{\ln c - \ln d}$. **8.241.** $2/3$. **8.242.** 2. **8.243.** $2/3$. **8.244.** $-1/2$. **8.245.** 0. **8.246.** 2. **8.247.** 0. **8.248.** 2. **8.249.** 0. **8.250.** -1. **8.251.** 0. **8.252.** -1. **8.253.** 1. **8.254.** 1. **8.255.** 1. **8.256.** e . **8.257.** 2. **8.258.** e^2 . **8.259.** $1/\sqrt[6]{e}$. **8.260.** $1/\sqrt{e}$. **8.261.** $-9 + 17(x+1) - 9(x+1)^2 + 2(x+1)^3$. **8.262.** $7 + 11(x-1) + 10(x-1)^2 + 4(x-1)^3 + (x-1)^4$. **8.263.** $1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}$. **8.264.** $\frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \dots + (-1)^{(n-1)/2} \frac{x^n}{n!} + \frac{\sin(\theta x + (n+1)\pi/2)}{(n+1)!}x^{n+1}$, n — нечетно; $\frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \dots + (-1)^{n/2} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{\sin(\theta x + (n+1)\pi/2)}{(n+1)!}x^{n+1}$, n — четно.

$$8.265. 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \dots + (-1)^{(n-1)/2} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{\cos(\theta x + (n+1)\pi/2)}{(n+1)!} x^{n+1},$$

n — нечетно;

$$1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \dots + (-1)^{n/2} \frac{x^n}{n!} + \frac{\cos(\theta x + (n+1)\pi/2)}{(n+1)!} x^{n+1},$$

n — четно.

$$8.266. x - \frac{x^2}{2} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!(1+\theta x)^{n+1}}, \quad x > -1.$$

$$8.267. 1 - x + x^2 + \dots + (-1)^n x^n + (-1)^{n+1} \frac{x^{n+1}}{(1+\theta x)^{n+2}}, \quad x > -1.$$

$$8.268. 1 + \frac{\alpha}{1!} x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + \\ + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n)(1+\theta x)^{\alpha-n-1}}{(n+1)!} x^{n+1}.$$

$$8.269. 1 + \frac{2x}{1!} + \frac{4x^2}{2!} + \dots + \frac{2^2 x^n}{n!} + o(x^n).$$

$$8.270. 1 - \frac{x^2}{2 \cdot 1!} + \frac{x^4}{2^2 2!} + \dots + (-1)^{n/2} \frac{x^n}{2^{n/2} n!} + o(x^{n+1}), \quad n - \text{четно};$$

$$1 - \frac{x^2}{2 \cdot 1!} + \frac{x^4}{2^2 2!} + \dots + (-1)^{(n-1)/2} \frac{x^{n-1}}{2^{(n-1)/2} n!} + o(x^n), \quad n - \text{нечетно}.$$

$$8.271. \frac{2x}{1!} - \frac{2^3 \cdot x^3}{3!} + \frac{2^5 \cdot x^5}{5!} \dots + (-1)^{(n-1)/2} \frac{2^n \cdot x^n}{n!} + o(x^n),$$

n — нечетно;

$$\frac{2x}{1!} - \frac{2^3 \cdot x^3}{3!} + \frac{2^5 \cdot x^5}{5!} \dots + (-1)^{n/2} \frac{2^{n-1} \cdot x^{n-1}}{(n-1)!} + o(x^n), \quad n - \text{четно}.$$

$$8.272. \frac{2x^2}{2!} + \frac{2^3 \cdot x^4}{4!} \dots + (-1)^{1+(n-1)/2} \frac{2^{n-2} x^{n-1}}{(n-1)!} + o(x^n), \quad n - \text{нечетно};$$

$$\frac{2x^2}{2!} + \frac{2^3 x^4}{4!} \dots + (-1)^{1+n/2} \frac{2^{n-1} x^n}{n!} + o(x^n), \quad n - \text{четно}.$$

$$8.273. 2x^2 - \frac{4x^4}{2} + \dots + (-1)^{n/2-1} \frac{2^{n/2} x^n}{n} + o(x^n), \quad n - \text{четно},$$

- $2x^2 - \frac{4x^4}{2} + \dots + (-1)^{(n-1)/2-1} \frac{2^{(n-1)/2} x^{n-1}}{n} + o(x^n)$, n — нечетно.
- 8.281.** $6/5$. **8.282.** 1. **8.283.** $9/35$. **8.284.** $1/2$. **8.285.** Прямая $\frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z}{4}$. **8.286.** В плоскости Oxy дуга окружности $x^2 + y^2 = 2$ между точками $(1, 1)$ и $(0, \sqrt{2})$, пробегаемая против часовой стрелки. **8.287.** Правая ветвь гиперболы $\frac{x^2}{16} - \frac{z^2}{9} = 1$, $y = -1$, пробегаемая снизу вверх, если смотреть от начала координат. **8.288.** В плоскости Oxy парабола $y = \frac{1}{9}(6x - x^2)$, пробегаемая слева направо. **8.289.** Винтовая линия $x = \cos t$, $x = \sin t$, $z = t$. **8.290.** Астроида $x^{2/3} + y^{2/3} = 2^{2/3}$, $z = 0$. **8.295.** Прямая $4x + 3y = 0$, $z = 0$, $\mathbf{v} = 3\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$. **8.296.** Парабола $y = \frac{1}{9}(12x - x^2)$, $z = 0$, $\mathbf{v} = 3\mathbf{i} - (4 - 2t)\mathbf{j}$, $\mathbf{v}|_{t=0} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$, $\mathbf{v}|_{t=1} = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$, $\mathbf{v}|_{t=2} = 3\mathbf{i}$, $\mathbf{v}|_{t=3} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$. **8.297.** $0, 6\mathbf{i} - 0, 8\mathbf{j}$. **8.298.** $\frac{1}{\sqrt{5}}(2\mathbf{i} - \mathbf{j})$. **8.299.** $\cos t \cdot \mathbf{i} - \sin t \cdot \mathbf{j} + \cos 2t \cdot \mathbf{k}$. **8.300.** $(\cos t - t \sin t)\mathbf{i} + (\sin t + t \cos t)\mathbf{j} + \mathbf{k}$. **8.301.** $(1 - \sin t) \cdot \mathbf{i} + \mathbf{j} + \cos t \cdot \mathbf{k}$. **8.302.** $e^t \cdot \mathbf{i} - \sin t \cdot \mathbf{j} + 2t \cdot \mathbf{k}$. **8.303.** $1 + 3t^2 + 5t^4$. **8.304.** $(3t^2 - 2t)\mathbf{i} + (3t^2 - 2t)\mathbf{j} - 2t \cdot \mathbf{k}$. **8.305.** $\cos t(\mathbf{i} + 2u\mathbf{j} + 3u^2 \cdot \mathbf{k})$. **8.306.** $e^t \left(\frac{1}{2\sqrt{u}}\mathbf{i} + \frac{u}{\sqrt{u^2+1}}\mathbf{j} + 2u \cdot \mathbf{k} \right)$. **8.307.** $\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = -\cos t \cdot \mathbf{i} + e^t \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$. **8.308.** $\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = -(2\sin t + t \cos t)\mathbf{j} + (2\cos t - t \sin t)\mathbf{k}$. **8.309.** $\mathbf{w} = 2\sin t \cdot \mathbf{i} + 2\cos t \cdot \mathbf{j}$, $\mathbf{w}|_{t=\pi/2} = 2\mathbf{i}$, $\mathbf{w}|_{t=\pi} = 2\mathbf{j}$. **8.310.** $\mathbf{w} = e^t(t+2)\mathbf{i} + e^t(t^2+4t+2)\mathbf{j}$, $\mathbf{w}|_{t=0} = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$, $\mathbf{w}|_{t=1} = 3e \cdot \mathbf{i} + 7e \cdot \mathbf{j}$. **8.311.** $x + 2z = 4$, $y = 2$ (касательная), $2x - z = 3$ (нормальная плоскость). **8.312.** $\frac{x-2}{1} = \frac{y-8/3}{2} = \frac{z-4}{4}$ (касательная), $3x + 6y + 12z - 70 = 0$ (нормальная плоскость).

- 8.313.** $\frac{x-1}{12} = \frac{y-3}{-4} = \frac{z-4}{3}$ (касательная), $12x - 4y + 3z - 12 = 0$ (нормальная плоскость). **8.314.** $\frac{x-1}{8} = \frac{y+1}{10} = \frac{z-2}{7}$ $y = 2$ (касательная), $8x + 10y + 7z - 12 = 0$ (нормальная плоскость). **8.315.** Парабола $y^2 = x$; $z'(t) = 2t + i$. **8.316.** Прямая $x - y = 2$; $z'(t) = e^{i\pi/4}$. **8.317.** Верхняя полуокружность $y = \sqrt{4 - x^2}$; $z'(t) = 2ie^{it}$. **8.318.** Эллипс $x = 4 \cos t$, $y = 2 \sin t$; $z'(t) = i(3e^{it} - e^{-it})$. **8.319.** Дважды пробегаемая правая ветвь параболы $y = x^2$; $z'(t) = 2t + 4it^3$. **8.320.** Арка циклоиды $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$; $z'(t) = 1 - e^{-it}$.

Глава 9

- 9.5.** $\frac{x^4}{4} + C$. **9.6.** $\frac{x^{101}}{101} + C$. **9.7.** $\frac{3 \cdot \sqrt[3]{x^4}}{4} + C$. **9.8.** $\frac{3 \cdot \sqrt[3]{x^2}}{2} + C$.
9.9. $\frac{e^{3x}}{3} + C$. **9.10.** $-\frac{1}{2^{-x} \cdot \ln 2} + C$. **9.11.** $0,5 \sin 2x + C$.
9.12. $-2 \cos 0,5x + C$. **9.13.** $-3 \operatorname{ctg} \frac{x}{3} + C$. **9.14.** $\frac{\operatorname{tg} 3x}{3} + C$.
9.15. $x^4 + x^3 + 3\sqrt[3]{x} + C$. **9.16.** $\frac{3 \cdot \sqrt[3]{x^4}}{4} + 3\sqrt[3]{x} - \frac{3}{2 \cdot \sqrt[3]{x^2}} + C$.
9.17. $\frac{(3x-5)^{11}}{33} + C$. **9.18.** $-\frac{1}{\sqrt[5]{5x+1}} + C$. **9.19.** $\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x + C$.
9.20. $\frac{x^2}{2} + x + 2 \ln |x-1| + C$. **9.21.** $x + 3 \ln |2x-1| + C$.
9.22. $\frac{3x + 2 \ln |3x+1|}{9} + C$. **9.23.** $3 \sin \frac{x-2}{3} + C$.
9.24. $-\frac{\cos(3x+1)}{3} + C$. **9.25.** $-\frac{\cos 4x}{8} - \frac{\cos 2x}{4} + C$.
9.26. $\frac{5 \sin x + \sin 5x}{10} + C$. **9.27.** $3 \arcsin \frac{x}{2} + C$.

- 9.28.** $\frac{3}{2} \arcsin \frac{2x}{\sqrt{5}} + C$. **9.29.** $\ln |x + \sqrt{x^2 + 16}| + C$.
9.30. $\frac{\ln |4x + \sqrt{16x^2 + 1}|}{4} + C$. **9.31.** $\frac{1}{5} \operatorname{arctg} \frac{x}{5} + C$.
9.32. $\frac{1}{2\sqrt{5}} \cdot \operatorname{arctg} \frac{4x}{\sqrt{5}} + C$. **9.33.** $\frac{\ln |\operatorname{tg} 3x|}{6} + C$.
9.34. $2 \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x}{4} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + C$. **9.35.** $\frac{1}{2\sqrt{5}} \cdot \ln \left| \frac{x - \sqrt{5}}{x + \sqrt{5}} \right| + C$.
9.36. $\frac{1}{12} \cdot \ln \left| \frac{2x-3}{2x+3} \right| + C$. **9.33.** $\frac{(2x^2-1)^7}{28} + C$.
9.34. $\frac{2\sqrt{(3x^3+2)^3}}{27} + C$. **9.35.** $\frac{\sqrt{2x^2-1}}{2} + C$.
9.36. $2\sqrt{x^2+3x+2} + C$. **9.37.** $-\frac{\sin(1-x^2)}{2} + C$.
9.38. $-\cos(x^3+x-5) + C$. **9.39.** $2e^{\sqrt{x}} + C$.
9.40. $\frac{2 \operatorname{arctg} \sqrt{x^3}}{3} + C$. **9.41.** $\frac{\arcsin x^4}{4} + C$.
9.42. $\frac{\ln |x^3 + \sqrt{x^6 + 3}|}{3} + C$. **9.43.** $\frac{\ln^2 x}{2} + C$. **9.44.** $2\sqrt{\ln x} + C$.
9.45. $\operatorname{arctg} e^x + C$. **9.46.** $\frac{\arcsin e^{2x}}{2} + C$. **9.47.** $-\frac{\cos^4 x}{4} + C$.
9.48. $\frac{\ln(\sin 3x)}{3} + C$. **9.49.** $\frac{\arcsin^2 2x}{4} + C$.
9.50. $-\ln(\arccos(x-1)) + C$. **9.51*.** $2 \ln(2 + \sqrt{x}) + C$. *Указание.*
 Сделать замену $y = 2 + \sqrt{x}$. **9.52.** $\operatorname{arctg}(1 + \ln x) + C$.
9.53. $-x \cos x + \sin x + C$. **9.54.** $\frac{2x \sin 2x + \cos 2x}{4} + C$.
9.55. $(6x+4) \sin 0,5x + 12 \cos 0,5x + C$.
9.56. $-\frac{1}{3} \left((2x+1) \cos 3x - \frac{2}{3} \sin 3x \right) + C$.

$$9.57. x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x + C.$$

$$9.58. \frac{-(1+2x^2)\cos 2x + 2x \sin 2x}{4} + C.$$

$$9.59. e^x(x-1) + C. \quad 9.60. \frac{2^x}{\ln 2} \left(2x - 1 - \frac{2}{\ln 2} \right) + C.$$

$$9.61. \frac{x^2 e^{2x}}{2} + C. \quad 9.62. 3^x \left(\frac{x^2 - 1}{\ln 3} - \frac{2x}{\ln^2 3} + \frac{2}{\ln^3 3} \right) + C.$$

$$9.63. \frac{x^2}{4} (2 \ln x - 1) + C. \quad 9.64. x (\ln x - 1) + C.$$

$$9.65. x (\ln^2 x - 2 \ln x + 2) + C. \quad 9.66. \frac{x^2}{4} (2 \ln^2 x - 2 \ln x + 1) + C.$$

$$9.67. x \operatorname{arctg} x - 0,5 \ln(1+x^2) + C. \quad 9.68. \sqrt{1-x^2} + x \arcsin x + C.$$

$$9.69. -\frac{\sqrt{1-x^2}(x^2+2)}{3} + C. \quad 9.70. \frac{x^2 \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} x - x}{2} + C.$$

$$9.71. \frac{e^{3x}(3 \sin x - \cos x)}{10} + C. \quad 9.72. \frac{e^{2x}(3 \sin 3x + 2 \cos 3x)}{13} + C.$$

$$9.73. \frac{1}{2} \left(\arcsin x - x \sqrt{1-x^2} \right) + C. \quad 9.74. \frac{x}{2(1+x^2)} + \frac{\operatorname{arctg} x}{2}. \text{ Ука-}$$

зание. $\int \frac{dx}{(1+x^2)^2} = \int \frac{(1+x^2)dx}{(1+x^2)^2} - \int \frac{x^2 dx}{(1+x^2)^2}$, во втором интегра-

ле $u = x$, $dv = \frac{xdx}{1+x^2}$. $9.75. \frac{1}{6} \ln \left| \frac{x-1}{x+5} \right| + C. \quad 9.76. \frac{1}{3} \ln \left| \frac{x-4}{x-1} \right| + C.$

$$9.77. \frac{1}{\sqrt{6}} \operatorname{arctg} \frac{2(x-1)}{\sqrt{6}} + C. \quad 9.78. \frac{1}{2\sqrt{6}} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{6}} + C.$$

$$9.77. \frac{1}{2} \ln(x^2 - 3x + 3) + \sqrt{3} \operatorname{arctg} \frac{2x-3}{\sqrt{3}} + C.$$

$$9.80. \frac{1}{2} \ln(x^2 - 4x + 8) + \frac{3}{2} \operatorname{arctg} \frac{x-2}{2} + C.$$

$$9.81. \frac{1}{4} \operatorname{arctg} \frac{x^2+3}{2} + C. \quad 9.82. \frac{1}{3} \ln \left| \frac{2y+3-\sqrt{21}}{2y+3+\sqrt{21}} \right| + C.$$

- 9.83. $-\frac{1}{6}\ln|x| - \frac{7}{2}\ln|x-2| + \frac{17}{3}\ln|x-3| + C.$
- 9.85. $\frac{2}{3x} + \frac{29}{9}\ln|x-3| - \frac{2}{9}\ln|x| + C.$ 9.86. $\frac{x^2}{2} + \frac{1}{x+1} + \frac{2}{(x+1)^2} + C.$
- 9.87. $\frac{\ln|x|}{2} - \frac{\ln(x^2+2)}{2} + C.$
- 9.88. $-\arctg x + 2\ln|x-1| - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C.$
- 9.89. $\frac{1}{4(x^2+4)} + \frac{\ln x}{8} - \frac{\ln(x^2+4)}{16} + C.$
- 9.90. $\frac{x}{36(x^2+9)^2} + \frac{x}{216(x^2+9)} + \frac{1}{648}\arctg \frac{x}{3} + C.$
- 9.91. $-\frac{1}{2(x-1)} + 2x + \frac{x^2}{2} - \frac{\arctg x}{2} + 2\ln|x-1| + C.$
- 9.92. $-x + \frac{x^2}{2} - \frac{x+1}{4(x^2+1)} + \arctg x + \frac{1}{4}\ln|x+1| - \frac{5}{8}(x^2+1) + C.$
- 9.93. $-\cos x + \frac{\cos^3 x}{3} + C.$ 9.94. $\sin x - \sin^3 x + \frac{3}{5}\sin^5 x - \frac{1}{7}\sin^7 x + C.$
- 9.95. $\frac{3x}{8} + \frac{\sin x}{2} + \frac{\sin 2x}{16} + C.$ 9.96. $\frac{5}{16}x - \frac{1}{8}\sin 4x + \frac{1}{96}\sin^3 4x +$
 $+\frac{3}{18}\sin 8x + C.$ 9.97. $\frac{x}{8} - \frac{\sin 4x}{32} + C.$
- 9.98. $\frac{1}{192}(12x + 3\sin 2x - 3\sin 4x - \sin 6x) + C.$ 9.99. $-2\sqrt{\cos x} +$
 $+\frac{2}{5}\sqrt{\cos^5 x} + C.$ 9.101. $2\sqrt{\tg x} + C.$ 9.103. $\frac{3-7\cos 2x}{70\cos^2 x} + C.$
- 9.104. $-3\ln|\cos x| + 3\ln|\sin x| + \frac{1-6\cos 2x-3\cos 4x}{16\cos^2 x \sin^4 x} + C.$
- 9.105. $\frac{-10\cos x + 6\cos 3x - \cos 5x}{\cos^5 x} + C.$ 9.106. $\int \frac{\sin^2 x dx}{\cos^6 x}.$
- $\frac{20\sin x - 5\sin 3x - \sin 5x}{120\cos^2 x} + C.$ 9.107. $\frac{3\sin x + \sin 3x}{6\cos^2 x} + C.$

- 9.109.** $-\frac{\cos x}{\sin^2 x} + \frac{1}{2} \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C.$ **9.111.** $\frac{1}{\sqrt{5}} \ln \left| \frac{\sqrt{5} + \operatorname{tg}(x/2)}{\sqrt{5} + \operatorname{tg}(x/2)} \right| + C.$
9.112. $\frac{2\sqrt{3}}{3} \operatorname{arctg} \frac{2\operatorname{tg}(x/2) - 1}{\sqrt{3}} + C.$
9.113. $\ln |\operatorname{tg}(x/2)| + \ln |2\cos(x/2) - \sin(x/2)| + C.$
9.115. $-\frac{\cos 8x}{16} + \frac{\cos 2x}{4} + C.$ **9.116.** $-\frac{\sin 25x}{50} + \frac{\sin 5x}{10} + C.$
9.117. $\frac{3}{5} \sin \frac{5x}{6} + 3 \sin \frac{x}{6} + C.$ **9.119.** $\frac{\sin(x/2)}{2} + \frac{\sin 5x}{20} + \frac{\sin 7x}{28} + C.$
9.120. $\frac{\cos 6x}{24} - \frac{\cos 4x}{16} - \frac{\cos 2x}{8} + C.$ **9.121.** $\frac{\operatorname{sh} 6x}{12} + \frac{x}{2} + C.$
9.122. $\frac{\operatorname{ch}^3 2x}{6} - \frac{\operatorname{ch} 2x}{2} + C.$ **9.123.** $\frac{\operatorname{sh} 4x}{32} - \frac{x}{8} + C.$ **9.124.** $\frac{3x}{8} + \frac{\operatorname{sh} 2x}{4} +$
 $+\frac{\operatorname{sh} 4x}{32} + C.$ **9.125.** $-2\operatorname{cth} 2x + C.$ $\frac{1}{4} \ln \left| \frac{\operatorname{th} x - 2}{\operatorname{th} x + 2} \right| + C.$ **9.126.** $-\frac{1}{\operatorname{sh} x} -$
 $-\operatorname{ctg} x + C.$ **9.128.** $2\sqrt{2} \operatorname{sh} \frac{x}{2} + C.$ **7.129.** $\ln |\operatorname{sh} x| - \frac{\operatorname{cth}^2 x}{2} + C.$
7.130. $x - \operatorname{th} x - \frac{\operatorname{th}^3 x}{3} + C.$ **9.131.** $\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1+x}}{2} + C.$
9.132. $\frac{3}{20} \sqrt[3]{(2x-3)^5} + \frac{9}{8} \sqrt[3]{(2x-3)^2} + C.$
9.133. $2\sqrt{x} + 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} + 6 \ln |\sqrt[6]{x} - 1| + C.$
9.134. $6 \operatorname{arctg} \sqrt[6]{x+1} - 6 \ln \sqrt[6]{x+1} + 3 \ln |1 + \sqrt[3]{x+1}| + C.$
9.135. $\frac{3}{16} \sqrt[3]{\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^4} - \frac{3}{28} \sqrt[3]{\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^7} + C.$
9.136. $\ln \left| \frac{\sqrt{x-1} + \sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1} - \sqrt{x+1}} \right| - 2 \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} + C.$
9.137. $6\sqrt[6]{x} - 12 \operatorname{arctg} \frac{\sqrt[6]{x}}{2} + C.$ **9.138.** $\ln \left| \frac{\sqrt[4]{x} - 1}{\sqrt[4]{x} + 1} \right| - 2 \operatorname{arctg} \sqrt[4]{x} + C.$
9.139. $\frac{1}{2\sqrt{3}} \ln \left| \frac{x - \sqrt{3}\sqrt{4-x^2}}{x + \sqrt{3}\sqrt{4-x^2}} \right| + C.$ **9.140.** $\ln \frac{x + \sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}} + C.$

$$9.141. \sqrt{x^2-1} - \arccos \frac{1}{x} + C. \quad 9.142. \frac{\sqrt{(a^2-x^2)^3}}{3} - a^2 \sqrt{a^2-x^2} + C.$$

$$9.143. \arcsin \frac{x-4}{4} + C. \quad 9.144. \ln \left| x+1+\sqrt{x^2+2x+7} \right| + C.$$

$$9.145. \frac{\sqrt{3}}{3} \arcsin \frac{(x+1)\sqrt{3}}{\sqrt{7}} + C.$$

$$9.146. -2\sqrt{2-x-x^2} + \frac{7}{2} \arcsin \frac{2x+1}{3} + C. \quad 9.147. \sqrt{x^2-6x+1} + C.$$

$$9.148. \sqrt{x^2+x+1} - \frac{1}{2} \ln \left(x + \frac{1}{2} + \sqrt{x^2+x+1} \right) + C.$$

$$9.149. \ln \left| \frac{x}{1+4x+\sqrt{x^2+8x+1}} \right| + C. \quad 9.150. -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{5-x}{x-1}} + C.$$

$$9.151. -\frac{\sqrt{2x^2-x+1}}{x} - \frac{1}{2} \ln \frac{2-x+\sqrt{2x^2-x+1}}{|x|} + C.$$

$$9.152. -\frac{\sqrt{x^2+5}}{9(x+2)} - \frac{2}{27} \ln \frac{5-2x+3\sqrt{x^2+5}}{|x+2|} + C.$$

$$9.153. \frac{x+1}{2} \sqrt{1-2x-x^2} + \arcsin \frac{x+1}{\sqrt{2}} + C.$$

$$9.154. 6 \arcsin \frac{x+1}{2} - \frac{\sqrt{3-2x-x^2}}{4} (x^3+3x^2-7x+9) + C.$$

$$9.155. \frac{x^3}{3\sqrt{(x^2+1)^3}} + C. \quad 9.156. \ln \left| x+\sqrt{x^2-1} \right| - \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} + C.$$

$$9.157. \frac{x-1}{2} \sqrt{x^2-2x+10} + \frac{9}{2} \ln \left(x-1+\sqrt{x^2-2x+10} \right) + C.$$

$$9.158. \frac{x-2}{2} \sqrt{4x-x^2} + 2 \arcsin \frac{x-2}{2} + C.$$

$$9.159. -\frac{\sqrt{x^2+5}}{x} + \ln \left(x+\sqrt{x^2+5} \right) + C.$$

$$9.160. \frac{x}{2} \sqrt{x^2-a^2} + \frac{a^2}{2} \ln \left| x+\sqrt{x^2-a^2} \right| + C. \quad 9.161. \frac{x}{9\sqrt{x^2+9}} + C.$$

- 9.162. $\frac{1}{8}(2x^3 - 5x)\sqrt{x^2 - 1} + \frac{3}{8}\ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) + C$. 9.163. $\frac{35}{2}$.
 9.164. 1. 9.165. $e^{10} - 1$. 9.166. $2/3$. 9.167. $15/4$.
 9.168. $9/2$. 9.169. 5. 9.170. $19/15$. 9.171. $45/4$. 9.172. 1.
 9.173. $e^2 - e$. 9.174. $\frac{7}{\ln 2}$. 9.175. $\ln 2, 5$. 9.176. $\frac{\ln 3}{2}$.
 9.177. $\frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{4}{7}$. 9.178. $\ln\frac{2+\sqrt{5}}{1+\sqrt{2}}$. 9.179. $\frac{1}{2}(e - \sqrt[4]{e})$. 9.180. $\sin 1$.
 9.181. $\frac{\pi}{4}$. 9.182. 1. 9.183. $\frac{2}{3}(2^{3/2} - 1)$. 9.184. $\frac{1}{s+1}$. 9.185. Минус.
 9.186. Плюс. 9.187. Второй. 9.188. Первый. 9.189. $\frac{1}{4}$.
 9.190. $\frac{3}{4}$. 9.191. $\frac{2}{\pi}$. 9.192. $\frac{4}{3\pi}$. 9.193. $\frac{\sin x}{x}$. 9.194. $\frac{\sin x}{2\sqrt{x}} +$
 $+\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x^2}$. 9.195. $-\frac{1}{\sqrt{1+x^3}}$. 9.196. $\frac{x^2-x}{\ln x}$. 9.197. 0. 9.198. 0.
 9.199. 0. 9.200. 0. 9.201. $\frac{2}{3}\left(3 + \ln\frac{2}{5}\right)$. 9.202. $\ln\frac{3}{2}$. 9.203. $\frac{1}{4}(2 + \operatorname{sh} 2)$.
 9.204. $\frac{2}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{5}}$. 9.205. $\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$. 9.206. π . 9.207. $\frac{\pi}{6}$. 9.208. $\frac{\pi}{6}$.
 9.209. $\frac{1}{3}(2\sqrt{3} - \pi)$. 9.210. $\frac{1}{6}$. 9.211. $\ln\frac{\sqrt{5}+3}{2}$. 9.212. $\frac{81}{16}\pi$.
 9.213. 1. 9.214. $\frac{\pi^2-8}{32}$. 9.215. $\frac{e^2+1}{4}$. 9.216. $e - 2$. 9.217. $\pi\sqrt{2} - 4$.
 9.218. $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$. 9.219. $\frac{1}{19}(5\pi\sqrt{3} - 9\ln 3)$. 9.220. $\sqrt{2} - \frac{2}{\sqrt{3}} +$
 $+\ln\frac{2+\sqrt{3}}{1+\sqrt{2}}$. 9.221. $\frac{1}{2}(e^{\pi/2} - 1)$. 9.222. $\frac{4}{25}(e^{3\pi/4} + 1)$. 9.223. $\frac{1}{2}$.
 9.224. Расходится. 9.225. Расходится. 9.226. $\frac{1}{2}$. 9.227. $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$.
 9.229. $1 + \ln 2$. 9.230. $\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$. 9.233. Расходится. 9.234. $\frac{2}{5}$.
 9.235. Сходится. 9.236. Сходится. 9.237. Расходится.

- 9.238.** Сходится. **9.239.** Расходится. **9.240.** Сходится.
9.241. Расходится. **9.242.** Расходится. **9.243.** Расходится.
9.244. $\frac{5}{2}(\sqrt[5]{3}+1)$. **9.245.** π . **9.246.** $\frac{\pi}{3}$. **9.247.** Расходится.
9.248. $2\sqrt{2}$. **9.249.** Сходится. **9.250.** Сходится. **9.251.** Расходится. **9.252.** Сходится. **9.253.** Расходится. **9.254.** Сходится.
9.255. e^2 . **9.256.** πab . **9.257.** $\frac{16}{3}$. **9.258.** $\frac{9}{2}$. **9.259.** $2\ln 2 - 0,5$.
9.260. 1. **9.261.** $4\ln 2 - 1$. **9.262.** $1,5 - 2\ln 2$. **9.263.** $\frac{3\pi a^2}{2}$.
9.264. $\frac{\pi a^2}{8}$. **9.265.** $\frac{\pi a^2}{4}$. **9.266.** $\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}$. **9.267.** $\frac{3\pi a^2}{8}$.
9.268. 12π . **9.270.** $\frac{24}{5}ab\sqrt{3}$. **9.271.** $\frac{1}{2}\operatorname{sh} 6$. **9.272.** $\frac{4}{\pi}\ln \operatorname{tg} \frac{3\pi}{8}$.
9.273. $\frac{134}{27}p$. **9.274.** $\pi a\sqrt{2}$. **9.275.** $6a$. **9.276.** $\sqrt{2}(e-1)$. **9.277.**
 $\frac{4\sqrt{3}}{9}$. **9.278.** $\frac{13}{3}$. **9.279.** $\frac{\sqrt{1+a^2}}{a}$. **9.280.** $8(2-\sqrt{3})$. **9.281.** $\frac{3}{2}\pi a$.
9.282. $5\pi\sqrt{1+4\pi^2} + \frac{5}{2}\ln(2\pi + \sqrt{1+4\pi^2})$. **9.283.** $\frac{\pi}{8}(\operatorname{sh} 12 + 12)$.
9.284. $\frac{2\pi}{9}(2\sqrt{2}-1)$. **9.285.** 48π . **9.286.** $\frac{16}{15}\pi a^2(\sqrt{2}+1)$. **9.287.**
 $8\pi + \frac{4\pi}{\sqrt{3}}\ln(2+\sqrt{3})$. **9.288.** $6\pi^2 a^2$. **9.289.** $\frac{272}{15}\pi$. **9.290.** $\frac{11}{14}\pi$.
9.291. $\frac{\pi^3}{2}$. **9.292.** $\frac{64}{3}\pi$. **9.295.** $\sqrt{2} + \ln(1+\sqrt{2})$.
9.296. $M_x = \frac{1}{2}\left(e\sqrt{1+e^2} - \sqrt{2} + \ln(\sqrt{2}-1)\left(e + \sqrt{1+e^2}\right)\right)$,
 $I_x = \frac{1}{3}\left((1+e^2)^{3/2} - \sqrt{8}\right)$. **9.297.** $M_x = \frac{32}{3}a^2$, $I_x = \frac{256}{15}a^3$.
9.298. $x^2 + y^2 \geq R^2$. $I_x = \frac{\pi a^3}{2}$. **9.299.** $\frac{v_0^2}{2g}$.
9.300. $t = 6$ с, $s = 144$ м. **9.301.** $\frac{1}{12}g\gamma\pi R^2 H^2$.

$$9.302. \frac{1}{12} g \gamma \pi a^2 H^2. \quad 9.303. e_o e \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right); \frac{e_o e}{a}.$$

$$9.304. \frac{p_0 v_0}{k-1} \left(\left(\frac{v_0}{v_1} \right)^{k-1} - 1 \right).$$

Глава 10

$$10.1. x^2 + y^2 \leq R^2. \quad 10.2. x^2 + y^2 \geq R^2. \quad 10.3. x^2 + y^2 < R^2.$$

$$10.4. x^2 + y^2 > R^2. \quad 10.5. x \neq y. \quad 10.6. x^2 + y^2 \leq 1.$$

$$10.7. x + y < 0. \quad 10.8. x \leq x^2 + y^2 < 2x.$$

$$10.9. x^2 + y^2 + z^2 \geq 1. \quad 10.10. x^2 + y^2 \leq z. \quad 10.11. x^2 + y^2 \leq z^2.$$

$$10.12. x^2 + y^2 - z^2 < 1. \quad 10.13. n\text{-мерный куб } -1 \leq x_k \leq 1, \quad k = 1, 2,$$

$$\dots, n. \quad 10.14. n\text{-мерный шар } x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \leq 1. \quad 10.15. f(2, 1) = 1/4. \quad f(1, 2) = 4, \quad f(-2, 1) = 7/8, \quad f(-2, -1) = 1/4.$$

$$10.16. f(-3, 4) = -24/25, \quad f(3, 4) = 24/25, \quad f(1, y/x) = f(x, y).$$

$$10.17. f(\varphi(x, y), y^2) = x^4 - 2x^2 y^2 + 2y^4. \quad 10.18. f(\varphi(x), \psi(x)) =$$

$$= \cos 2x. \quad 10.19. 6. \quad 10.20. 0. \quad 10.21. e. \quad 10.22. 0. \quad 10.26. \text{ Не имеет.}$$

$$10.27. (1, -1). \quad 10.28. (m, n), \quad m, n \in \mathbb{Z}. \quad 10.29. \text{ Линии разрыва — прямые } y = -\pi/4 + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad 10.30. \text{ Линии разрыва —}$$

$$\text{прямая } x + y = 0 \text{ и парабола } y^2 = x. \quad 10.31. \text{ Линии разрыва —}$$

$$\text{окружность } x^2 + y^2 = 1 \text{ и гипербола } x^2 - y^2 = 1. \quad 10.32. \text{ Линии}$$

$$\text{разрыва — прямые } x = 0 \text{ и } y = 0. \quad 10.33. \text{ Поверхности раз-}$$

$$\text{рыва — координатные плоскости } x = 0, y = 0, z = 0. \quad 10.34. \text{ По-}$$

$$\text{верхность разрыва — конус } x^2 + y^2 - z^2 = 0. \quad 10.35. \text{ Поверх-}$$

$$\text{ность разрыва — однополостной гиперболоид } x^2 + y^2 - z^2 = 1.$$

$$10.36. \text{ Поверхность разрыва — двуполостной гиперболоид}$$

$$x^2 + y^2 - z^2 = 1. \quad 10.37. \frac{\partial z}{\partial x} = 5x^4 - 15x^2 y^3, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 5y^4 - 15y^2 x^3,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 20x^3 - 30xy^3, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 20y^3 - 30yx^3, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 45x^3 y^3.$$

$$10.38. \frac{\partial z}{\partial x} = y, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x + \frac{1}{x}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{2y}{x^3}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 1 - \frac{1}{x^2}.$$

10.47. r . **10.48.** $r^2 \cos \theta$.

10.53. $dz = \frac{xdx}{\sqrt{x^2 + y^2} \left(y + \sqrt{x^2 + y^2} \right)} + \frac{dy}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$

10.54. $dz = \frac{y}{x^2 \cos^2(y^2 / x)} (2xdy - ydx).$

10.55. $dz = \frac{1}{y^2 \cos^2} \operatorname{tg} \frac{x}{y} (xdy - ydx).$

10.56. $du = (xy)^z \left(\frac{z}{x} dx + \frac{z}{y} dy + \ln(xy) dz \right).$

10.57. $dz = 3x(x + 2y)dx + 3(x^2 - y^2)dy,$

$d^2z = 6((x + y)dx^2 + 2xdxdy - ydy^2).$

10.58. $dz = (xdy - ydx) \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} \right),$

$d^2z = 2 \left(\frac{y}{x^3} dx^2 + \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2} \right) dx dy - \frac{x}{y^3} dy^2 \right).$

10.61. $du = (y + z)dx + (z + x)dy + (x + y)dz,$

$d^2z = 2(dxdy + dxdz + dydz).$

10.62. $u = e^{xyz}$. **10.65.** $d^6u = -\frac{5!(dx + dy + dz)^6}{(x + y + z)^6}.$

10.67. 8,29. **10.68.** 2,95. **10.69.** 0,227. **10.70.** 8,2 м³.

10.71. $\frac{dz}{dt} = \frac{2e^{2t}(x - y)}{x^2 + y^2}$. **10.72.** $\frac{dz}{dt} = x^y \left(\frac{y}{xt} + \ln x \cos t \right).$

10.76. $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y}{y^2 + (x + 1)^2}, \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y(1 - 2(x + 1)^2)}{y^2 + (x + 1)^2}.$

10.77. $\frac{\partial z}{\partial x} = 2u \left(\frac{ux}{v} - \frac{u \ln v}{x^2} \right), \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 2u \left(\frac{\ln v}{x} - \frac{uy}{v} \right).$

10.81. $d^2u = 4f''(t)(xdx + ydy + zdz)^2 + 2f'(dx^2 + dy^2 + dz^2).$

10.83. $\frac{\partial z}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{2}$. **10.93.** $z_{\min} = -9$ при $x = 0, y = 3$.

$$10.84. z_{\max} = -1/64 \text{ при } x = 1/4, y = 31/2.$$

$$10.99. z_{\min} = -19/4 \text{ при } x = y = -3/2.$$

$$10.101. z_{\min} = -1 - 2\sqrt{2} \text{ при } x = -1/\sqrt{2}, y = 1/\sqrt{2};$$

$$z_{\max} = 1 - 2\sqrt{2} \text{ при } x = 1/\sqrt{2}, y = -1/\sqrt{2}.$$

Глава 11

$$11.1. \frac{8}{3}. \quad 11.2. \frac{\pi}{6} \cdot \int_0^3 dy \int_2^5 \frac{dx}{(x+2y)^2}. \quad 11.3. \frac{a^3}{4}(\pi+4). \quad 11.4. \frac{3}{2}\pi.$$

$$11.9. \int_1^5 dx \int_2^4 f(x, y) dy = \int_2^4 dy \int_1^5 f(x, y) dx.$$

$$11.11.$$

$$\int_{-a}^a dx \int_{x^2/a}^{\sqrt{2a^2-x^2}} f(x, y) dy = \int_0^a dy \int_{-\sqrt{ay}}^{\sqrt{ay}} f(x, y) dx + \int_a^{a\sqrt{2}} dy \int_{-\sqrt{2a^2-y^2}}^{\sqrt{2a^2-y^2}} f(x, y) dx.$$

$$11.15. \frac{4}{3}a^3. \quad 11.16. 112/9. \quad 11.17. 1/4. \quad 11.18. 9/20.$$

$$11.19. 68/15. \quad 11.20. \pi^2/128. \quad 11.21. \frac{1}{3} \int_a^b du \int_p^q f\left(\sqrt[3]{u^2v}, \sqrt[3]{uv^2}\right) dv.$$

$$11.22. \frac{1}{2} \int_1^3 du \int_{-u}^{6-u} f\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right) dv. \quad 11.23. \frac{1}{2} \int_a^b dv \int_p^q f\left(\sqrt{\frac{u}{v}}, \sqrt{uv}\right) du.$$

$$11.25. \int_0^{\pi/6} d\varphi \int_0^{a\sqrt{3}\sin\varphi} f(r) r dr + \int_{\pi/6}^{\pi/2} d\varphi \int_0^{a\cos\varphi} f(r) r dr.$$

$$11.26. \int_{\pi/4}^{\pi/2} d\varphi \int_{a\cos\varphi/\sin^2\varphi}^{2a\sin\varphi} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) r dr. \quad 11.29. \frac{\pi}{4}(e^{a^2} - 1).$$

$$11.30. \frac{2}{9}a^3. \quad 11.31. \frac{128}{3}\pi. \quad 11.32. \frac{\pi a^3}{6}. \quad 11.33. \frac{64}{3}a^2.$$

$$11.34. \frac{1}{2}(15 - 16\ln 2). \quad 11.35. \frac{1}{4}(b^2 - a^2)(\pi + 2).$$

$$11.36. (\pi - 1)a^2. \quad 11.37. \frac{4}{\sqrt{3}}a^2. \quad 11.38. 8\sqrt{2}a^2. \quad 11.39. 2\sqrt{2}\pi p^2.$$

- 11.40. $4\pi a^2(2 - \sqrt{2})$. 11.41. $\frac{16}{3}ab^2$. 11.42. $\frac{4}{3}a^3(2 - \sqrt{2})$.
 11.43. $\frac{2}{3}\pi a^3(2 - \sqrt{2})$. 11.44. $\frac{2}{3}\pi(2 - \sqrt{2})$. 11.45. $\frac{1}{2}\pi\delta R^2$.
 11.46. $\frac{a^2b}{6}$. 11.47. $M_x = \frac{\pi}{24}$, $M_y = 1 - \frac{\pi^2}{12}$.
 11.48. $I_x = \frac{21}{32}\pi a^4$, $I_x = \frac{49}{32}\pi a^4$, $I_x = \frac{35}{16}\pi a^4$.
 11.53. $\int_a^b dx \int_0^{(12-2x)/3} dy \int_0^{(12-2x-3y)/4} f(x, y, z) dz$.
 11.54. $\int_{-a}^a dx \int_{-b/a\sqrt{a^2-x^2}}^{b/a\sqrt{a^2-x^2}} dy \int_{-c\sqrt{1^2-x^2/a^2-y^2/b^2}}^{-c\sqrt{1^2-x^2/a^2-y^2/b^2}} f(x, y, z) dz$. 11.57. $1/6$.
 11.58. $81/4$. 11.59. $a^4/12$. 11.60. $a^4/8$. 11.61. $1/96$.
 11.62. $4/15$. 11.63. $\frac{4}{3}a^3h$. 11.64. $\frac{\pi}{4}a^4$. 11.71. $\frac{\pi R^3}{12}(2 - \sqrt{2})$.
 11.72. $\frac{\pi a^4}{16}$. 11.75. $\pi^2 abc/4$. 11.76. $\frac{19}{6}\pi a^3$.
 11.79. $\left(0, \frac{4}{5}a, \frac{4}{15}h\right)$. 11.80. $\left(0, \frac{3}{7}b, \frac{2}{7}h\right)$. 11.84. $\frac{1}{10}\gamma\pi HR^4$.
 11.85. $1/3$. 11.86. $\pi/2$. 11.87. $4a$. 11.88. $1/3$. 11.89. Расходится.
 11.90. Сходится при $\alpha > 1$. 11.91. 4 . 11.92. $\frac{3}{2}\pi$. 11.93. Сходится при $\alpha < 1$. 11.94. Сходится при $\alpha < 3/2$.

Глава 12

- 12.11. $y(\ln|x^2 - 1| + 1) = 1$. 12.12. $y(1 + x) = 1$. 12.13. $y = 2 - 3\cos x$. 12.14. $x = y \cdot e^{y+1}$. 12.15. $x = y \ln \frac{y}{2}$. 12.16. $x^2 + y = xy'$.
 12.17. $xy' + y = 0$. 12.18. $y' = y \operatorname{th} x$. 12.19. $2xyy' = y^2 + x^2$.
 12.20. $y'^3 = 4y(xy' - 2y)$. 12.21. $y = (x - 1)y' + y'^2$.
 12.22. $y^2 + y'^2 = 1$. 12.23. $y' = -\frac{y}{x}$. 12.24. $y = 1$.

- 12.25. $y = -x$. 12.26. $y = \frac{x^2}{4}$. 12.27. $y = 0$, $27y = 4x^3$.
- 12.28. $(y-1)^3 + (x-1)^3 = C$. 12.29. $x + y = C(1 - xy)$.
- 12.30. $y^2 = \ln(1 + e^x)^2 + C$. 12.31. $4\sqrt{1 + y^2} - \sqrt{1 + 4x^2} = C$.
- 12.32. $y^2 - x^2 + \frac{1}{y} - \frac{1}{x} = C$. 12.33. $y = e^{C \cdot \operatorname{tg} \frac{x}{2}}$.
- 12.34. $\ln y = \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right|$. 12.35. $2 \ln |\sin y| = e^{(x-1)^2} - 1$.
- 12.36. $\operatorname{arctg} e^x = \frac{y^3}{3} + \frac{\pi}{4}$. 12.37. $2(x-2) = \ln^2 y$.
- 12.38. $y^2 - x^2 = C$. 12.39. $y^2 + x^2 = C$. 12.40. $e^x + e^{-y} = C$.
- 12.41. $y = \ln \operatorname{tg}(e^x + C)$. 12.42. $\sin y \cos x = C$.
- 12.43. $y = Ce^{\sqrt{1-x^2}}$, $x = \pm 1$. 12.44. $\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y = C$. 12.45. $xy = Ce^{y-x}$.
- 12.46. $x + y + 2(\sqrt{y} - \sqrt{x}) + 2 \ln |(\sqrt{x} + 1)(\sqrt{y} - 1)| = C$, $y = 1$, $x = 1$.
- 12.47. $2 \sin x + \ln \left| \operatorname{tg} \frac{y}{2} \right| = C$, $y = \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.
- 12.48. $y = a \sin \left(\arcsin \frac{x}{a} + C \right)$, $y = \pm a$. 12.49. $x = Cy e^{\frac{y+x}{xy}}$,
 $C \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $y = 0$. 12.50. $\operatorname{tg} \frac{x+y}{2} - x = C$, $x + y = (2k+1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
- 12.51. $\frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{4x+y+1}{2} - x = C$. 12.52. $4y - 6x - 7 = Ce^{-2x}$.
- 12.53. $Cy^2 = e^{xy - \frac{1}{xy}}$. 12.54. $\frac{1}{2} \ln^2 y = \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right|$.
- 12.55. $y = e^{\frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg} x}$. 12.56. $\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+y^2} = \sqrt{2} + 1$.
- 12.57. $2e^{-y}(y+1) = x^2 + 1$. 12.58. $2 \ln |\sin y| = e^{(x-1)^2} - 1$.
- 12.59. $\operatorname{arctg} e^x = \frac{y^3}{3} + \frac{\pi}{4}$. 12.60. $\ln |\operatorname{tg} y| = 4(1 - \cos x)$.
- 12.61. $x^2 - 4 = \ln^2 y$. 12.62. $y = e^x - 3$. 12.63. $xy = C$, $C \neq 0$,
т.е. семейство равносторонних гипербол, зависящее от одно-

$$12.100. y = x^2 + Cx. \quad 12.101. y = x^2(1 + Ce^{1/x}).$$

$$12.102. y = Ce^{x^2} + \frac{1}{2}x^2. \quad 12.103. y = Cx^a + \frac{x}{1-a} - \frac{1}{a}.$$

$$12.104. y = Cx\sqrt{x^2 - 1} + ax. \quad 12.105. y = \frac{C}{x^n} + \frac{a}{x^{n-1}}.$$

$$12.106. y = x^n(e^x + C). \quad 12.107. x = Cy^2e^{1/y} + y^2.$$

$$12.108. y = \frac{x^2 + C}{\cos x}. \quad 12.109. y = e^{-x^2}(C_1 + x^2).$$

$$12.110. x = y^2 + Cy, y = 0. \quad 12.111. x = e^y + Ce^{-y}.$$

$$12.112. x = Cy^3 + y^2, y = 0. \quad 12.113. (y-1)^2 x = y - \ln Cy, y = 0, y = 1.$$

$$12.114. y = \frac{4x}{4C - x^4}, y = 0. \quad 12.115. y = \frac{1}{\sqrt{x + 0,5 + Ce^{2x}}}, y = 0.$$

$$12.116. y = \frac{1}{\sin^2 x (\cos x + C \sin x)}, y = 0.$$

$$12.117. y = \frac{-1}{(x+1)(C + \ln(x+1))}, y = 0.$$

$$12.118. y = x^4 \left(C + \frac{1}{2} \ln |x| \right)^2, y = 0.$$

$$12.119. y = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1 + Ce^{x^2}}}, y = 0. \quad 12.120. y = \frac{\sin x}{\sqrt{C + 2\cos x}}, y = 0.$$

$$12.121. y = \frac{1}{Cx + 2(1 + \ln x)}, y = 0.$$

$$12.122. y = \frac{1}{x + C\sqrt{|x^2 - 1|}}, y = 0. \quad 12.123. y = \frac{x^2}{Cx + 1}, y = 0.$$

$$12.124. y = \frac{x^2}{C(x-1) + 1}, y = 0. \quad 12.125. y^2 = -x \ln x + Cx.$$

$$12.126. y^2 = C\sqrt{|x^2 - 1|} + x^2 - 1. \quad 12.127. y = \frac{x}{x + C}.$$

Искомые кривые — гиперболы и (при $C = 0$) прямая $y = 1$. Кроме того, решением является также прямая $y = 0$.

$$12.128. x^2 - xy + y^2 = !. \quad 12.129. xy - x^3 - 2y^2 = C.$$

- 12.130.** $3x^2y^2 + x^4 + y^3 = C$. **12.131.** $\ln|x+y| + \frac{y}{x+y} = C$.
- 12.132.** $x^2 + y^2 = Cx^3$. **12.133.** $\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 - \arctg \frac{x}{y} = C$.
- 12.134.** $x^2 - y^2 = Cy^3$. **12.135.** $x \sin y = C$.
- 12.136.** $x \sin y + y \cos x = C$. **12.137.** $\sin \frac{y}{x} - \cos \frac{x}{y} + x - \frac{1}{y} = C$.
- 12.138.** $x \cdot e^y + ye^x = C$. **12.139.** $x^2 + ye^{-x} = C$.
- 12.140.** $\sqrt{x^2 - y^2} + xy - \frac{1}{y} = C$. **12.141.** $\sqrt{1 + x^2 + y^2} + \ln \sqrt{\frac{x-y}{x+y}} = C$.
- 12.142.** $\sqrt{x^2 + y^2} + \frac{y}{x} = C$. **12.143.** $x^2y + \ln \left| \frac{x}{y} \right| = C$, $x = 0$, $y = 0$.
- 12.144.** $2xy^2 + \frac{1}{xy} = !$, $x = 0$, $y = 0$. **12.145.** $(y^2 + x^2)^2 + 2a(y^2 - x^2) = C$. **12.146.** $xy(C - x^2 - y^2) = -1$, $x = 0$, $y = 0$.
- 12.147.** $x \sin y + y \cos x + \ln |x/y| = 0$. **12.148.** $x^2 \cos^2 y + y^2 = C$. **12.149.** $x^2 + ye^{x/y} = C$. **12.150.** $x = 2p + 6p^2 + C$, $y = p^2 + 4p^3$; $y = 0$ (особое решение).
- 12.151.** $x = 2\sqrt{p^2 + 1} - \ln(1 + \sqrt{p^2 + 1}) + \ln p + C$, $y = p\sqrt{p^2 + 1}$, $y = 0$ (особое решение). **12.152.** $x = e^p + C$, $y = (p-1)e^p$.
- 12.153.** $y = Cx + \frac{1}{2}(C^2 - x^2)$, $y = -x^2$ (особое решение).
- 12.154.** $x = Cy + C^2$, $x = -\frac{1}{4}y^2$ (особое решение).
- 12.155.** $x = p^3 - p + 2$, $y = \frac{3}{4}p^4 - \frac{p^2}{2} + C$.
- 12.156.** $x = p \cos p$, $y = p^2 \cos p - p \sin p - \cos p + C$.
- 12.157.** $y^2 = 2Cx - C \ln C$, $2x = 1 + 2 \ln |y|$. **12.158.** $x = 2p - \ln p$, $y = p^2 - p + C$. **12.159.** $Cx = \ln Cy$; $y = e^x$ (особое решение).
- 12.160.** $y = \frac{1}{2}Cx^2 + \frac{1}{2C}$; $y = \pm x$ (особые решения).

$$12.161. x = \frac{C}{p^2} - \frac{2}{p^3}, y = \frac{2C}{p} - \frac{3}{p^2}. \quad 12.162. x = -p - \frac{1}{2} + \frac{C}{(1-p)^2},$$

$$y = -\frac{1}{2}p^2 + \frac{Cp^2}{(1-p)^2}; \quad y = 0, y = x + 1 \text{ (особые решения)}.$$

$$12.163. x = Cp - \ln p - 2, \quad y = \frac{1}{2}Cp^2 - p.$$

$$12.164. y = Cx - \frac{1}{C}; \quad y^2 = -4x \text{ (особое решение)}.$$

$$12.165. y = Cx + C + \sqrt{C}; \quad y = -\frac{1}{4(x+1)} \text{ (особое решение)}.$$

$$12.166. y = Cx - e^C; \quad y = x(\ln x - 1) \text{ (особое решение)}.$$

$$12.167. y = Cx + \cos C; \quad y = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} \text{ (особое решение)}. \quad 12.168. \text{ Линейное; замена } y = uv. \quad 12.169. \text{ Однородное; замена } y = ux. \quad 12.170. \text{ С разделяющимися переменными.}$$

$$12.171. \text{ Уравнение Бернулли; замена } y = uv. \quad 12.172. \text{ Линейное относительно } x; \text{ замена } x = uv. \quad 12.173. \text{ Уравнение в полных дифференциалах.} \quad 12.174. \text{ Однородное; замена } x = uy. \quad 12.175. \text{ Уравнение Бернулли относительно } x; \text{ замена } x = uv. \quad 12.176. \text{ Приводящееся к уравнению с разделяющимися переменными; замена } u = y - x. \quad 12.177. \text{ Линейное; замена } y = uv. \quad 12.178. \text{ Уравнение Бернулли; замена } y = uv.$$

$$12.179. y^2 = Cxe^{-y/x}. \quad 12.180. xy - \frac{2}{x} + \frac{3}{y} = C.$$

$$12.181. x = Ce^y - y^2 - 2y - 2. \quad 12.182. x^2y - 5xy^3 + 3y^2 = C.$$

$$12.183. y = 1 + Ce^{-x^3/3}. \quad 12.184. x = Ce^{2y} + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}y + \frac{1}{4}.$$

$$12.185. e^{y/x} = Cy, \quad y = 0. \quad 12.186. y(x^2 + 1)^2 = \arctg x + C.$$

$$12.187. y^2 = x^2 \ln |Cx^2|. \quad 12.188. y = \frac{1}{x^3} \left(C + \frac{1}{2}x^2e^{x^2} - \frac{1}{2}e^{x^2} \right).$$

$$12.189. y = e^{-x^2} \left(C + \frac{x^2}{2} \right). \quad 12.190. x^2 \sin y + y^2 \sin x = C.$$

$$12.191. C(y-x) = e^{\frac{x}{y-x}}, \quad C \neq 0, y = x.$$

$$12.192. y = Ce^{4x} - \frac{4}{25}(\sin 3x + 3 \cos 3x).$$

12.193. $C(x+y) = e^{x/(x+y)}$, $x=0$. **12.194.** $y^2 = Ce^{-x^2} + 4$.

12.195. $\sin \frac{y-2x}{x+1} = C(x+1)$. **12.196.** $x - \arctg \frac{y}{x} = C$.

12.197. $y^2 = x^2(C - 2a \sin x)$. **12.198.** $\sqrt{x} + \sqrt{y} \ln |Cy| = 0$,

$x=0$, $y=0$. **12.199.** $(x+C) \left(\tg \frac{y-x-1}{2} - 1 \right) = 2$, $y-x-1 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$,

$k \in \mathbb{Z}$. **12.200.** $xe^y - y^2 = C$. **12.201.** $xy - \ln(xy^3) = C$.

12.202. $y = \pm \ln |x^2 - 1|$. **12.203.** $y^2 = 4x$ и $xy^2 = 4$.

12.204. $y = \pm \frac{x}{x-1}$. **12.205.** $(x+C)^2 + y^2 = a^2$.

12.206. $y^2 = \pm 2a(x+C)$. **12.207.** $y = 2 \operatorname{ch} \frac{x}{2}$.

12.208. $y^2 = \frac{x^2}{x^2+3}$. **12.209.** $y^2 = 6x+9$. **12.210.** $y^2 = 4(x-1)$

и $\frac{(x+1)^2}{4} + \frac{y^2}{8} = 1$. **12.211.** $y^2 = \frac{2}{3}(x-a)$. **12.212.** $r = 2e^{\varphi/a}$.

12.213. $x^2 + y^2 = 2y$. **12.214.** $x = y(3 \pm \ln y)$.

12.215. $y^2 = 2x+1-e^{2x}$. **12.216.** $y = \frac{1}{x} - x^2$.

12.217. $x = \pm \left(\frac{1}{y} - y \right)$. **12.218.** $y = x\sqrt{5x^2-1}$.

12.219. $r = \varphi + \frac{\pi}{2}$. **12.220.** $2x^2 + 3y^2 = C^2$. **12.221.** $x^2 + 2y^2 = C^2$.

12.222. $y = \frac{C}{x^2}$. **12.223.** $y = ae^{2x}$. Ответ. $x + y^2 = C$.

2.224. 18,1 кг. Указание. Уравнение имеет вид $\frac{dx}{dt} = k \left(\frac{1}{3} - \frac{x}{300} \right)$,

где k — коэффициент пропорциональности. **12.225.** 5,2 кг.

Указание. Уравнение имеет вид $\frac{dx}{dt} = kx \left(\frac{10-x}{90} - \frac{1}{3} \right)$.

12.226. Через 1575 лет. **12.227.** $v = 10\sqrt{725}$ см/с. Указание.

Уравнение имеет вид $\frac{dv}{dt} = 20 \frac{t}{v}$.

12.228. $t = \frac{h(v_1 - v_0)}{v_0 v_1 \ln \frac{v_1}{v_0}} = \frac{3}{40 \ln 2,5}$ с. *Указание.* Уравнение имеет

вид $m \frac{dv}{dt} = kv^2$. **12.229.** $t = -\frac{5 \ln 10}{\ln 0,8}$ с. *Указание.* Уравнение

имеет вид $m \frac{dv}{dt} = -kv$. **12.230.** $T = 20 + 80(0,5)^{t/20} = 60$ мин.

Указание. Уравнение имеет вид $\frac{dT}{dt} = k(T - T_0)$.

12.231. За 6 мин 5 с. *Указание.* Уравнение имеет вид $\omega v(h)dt = -S(h)dh$, где ω — площадь отверстия; $v(h)$ — скорость истечения воды; h — уровень жидкости, $S(h)$ — площадь поперечного сечения сосуда; t — время.

12.232. 0,82 кг. *Указание.* Уравнение имеет вид $\frac{ds}{dt} = ks(s + 6)$.

Влага, содержащаяся в пористом веществе, испаряется в окружающее пространство со скоростью, пропорциональной количеству влаги в данном веществе, а также разности между влажностью окружающего воздуха и влажностью воздуха насыщенного.

12.233. 32,2 мин. **12.234.** $T = \frac{2}{3}x$; 864 000 кал. *Указание.*

Уравнение имеет вид $\frac{dT}{dx} = -\frac{Q}{kA}$, где $Q = \text{const}$. В силу закона Ньютона скорость Q , с которой теплота распространяется через площадку A , перпендикулярную оси Ox , равна $Q = -kS \frac{dT}{dt}$, где k — коэффициент теплопроводности данного вещества; T — температура; t — время; S — площадь A ($k = 0,0015$).

12.235. $i = \frac{E}{R^2 + L^2 \omega^2} \left(R \sin \omega t - L \omega \cos \omega t + L \omega e^{-\frac{R}{2L}t} \right)$.

12.236. $y'_0 < x_0^2$. **12.237.** $y'_0 > 0$. **12.238.** $x_0 \neq 0$ и y'_0 — любое,

$y_0 \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. **12.239.** $x_0 \neq y'_0$, $y_0 \neq 0$, y''_0 — любое.

12.248. $y = (C_1 + \arctg x)x - \ln \sqrt{1 + x^2} + C_2$.

$$12.249. y = \frac{x^4}{24} - \sin x + C_1 x^2 + C_2 x + C_3. \quad 12.250. y = \ln |\sin x| +$$

$$+ C_1 x^2 + C_2 x + C_3. \quad 12.251. y = \frac{x^3}{6} \ln |x| + C_1 x^3 + C_2 x^2 + C_3 x + C_4.$$

$$12.252. C_1^2 y = C_1 x - \ln |C_1 x + 1| + C_2, \quad y = \frac{x^2}{2} + C, \quad y = C.$$

$$12.253. y = x^2 \ln |x| + C_1 x^2 + C_2 x + C_3. \quad 12.254. 2y = C_1 \cos 2x +$$

$$+ (1 + 2C_1)x^2 + C_2 x + C_3. \quad 12.255. y = C_1 e^{ax} + C_2 e^{-ax}. \quad 12.256. y =$$

$$= C_1(x - e^{-x}) + C_2. \quad 12.257. 2y = C_1 x^2 - 2C_1(x + C_1) \ln |x + C_1| +$$

$$+ C_2 x + C_3, \quad y = \frac{x^2}{2} + C_3, \quad y = C_4. \quad 12.258. y = C_1 \sin x + C_2 - x -$$

$$- \frac{1}{2} \sin 2x. \quad 12.259. y = \frac{1}{C_1} e^{C_1 x + 1} \left(x - \frac{1}{C_1} \right) + C_2, \quad y = \frac{ex^2}{2} + C.$$

$$12.260. y = C_1 \ln x + C_2 x + C_3 - \frac{1}{2x}. \quad 12.261. y = C_2 e^{C_1 x}.$$

12.262. $y = C_2 x e^{C_1 x}$. Указание. Уравнение однородное относительно y, y', y'' .

$$12.263. y = C_2 \sqrt{|C_1 + x^2|}. \quad 12.264. y = C_1 x^4 + C_2 x^2 + C_3 x + C_4.$$

$$12.265. 4(C_1 y - 1) = C_1^2 (x + C_2)^2, \quad C_1 \neq 0.$$

$$12.266. y - C_1 \ln |y| = x + C_2, \quad y = C.$$

$$12.267. y = C_1 e^{x/a} + C_2 e^{-x/a} + C_3 x + C_4.$$

$$12.268. \begin{cases} x = -a \sin t + C_1, \\ y = a \cos t + C_2 \end{cases} \text{ или } (x - C_1)^2 + (y - C_2)^2 = a^2.$$

$$12.269. y = \pm \frac{2}{3} (x + C_1)^{3/2} + C_2. \quad 12.270. y = C_2 x e^{C_1 x} - \frac{C_2}{C_1} e^{C_1 x} + C_3.$$

$$12.271. y = Cx^2 + e^x(x - 1). \quad 12.272. y = \frac{x^3 - 3x^2 + 6x + 4}{6}.$$

$$12.273. y = \frac{x^2 + 1}{2}. \quad 12.274. y = x + 1. \quad 12.275. y = \sqrt{2x - x^2}.$$

$$12.276. y = -\ln |x - 1|. \quad 12.278. y = C_1 e^{5x} + C_2 e^x.$$

$$12.279. y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-x}. \quad 12.280. y = C_1 \frac{\cos x}{x} + C_2 \frac{\sin x}{x}.$$

$$12.281. y = C_1 \left(\frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| - 1 \right) + C_2 x. \quad 12.282. y = C_1 x + \frac{C_2}{x} + \frac{C_3}{x^2}.$$

12.283. Линейно независима. 12.284. Линейно зависима.

12.285. Линейно независима. 12.286. Линейно независима.

12.287. Линейно независима. 12.288. Линейно зависима.

12.289. Линейно независима. 12.290. $y'' + y' = 0$.

$$12.291. y'' - 4y' + 5y = 0. \quad 12.292. y'' - \frac{6}{x}y' + \frac{12}{x^2}y = 0.$$

$$12.293. y''' - y'' = 0. \quad 12.294. y''' + y' = 0.$$

$$12.295. y''' - 2y'' + y' - 2y = 0. \quad 12.296. y'' - 8y' + 15y = 0.$$

$$12.298. \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \dots & y_n'(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n)}(x) & y_2^{(n)}(x) & \dots & y_n^{(n)}(x) \end{vmatrix} = 0. \quad \text{Указание. Всякое}$$

решение искомого уравнения вместе с функциями $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ образует линейно зависимую систему.

$$12.299. y = -\cos x + \sin x. \quad 12.300. y = e^x + 3\sin x + 2\cos x.$$

$$12.301. y = e^x + 2e^{2x} + 3e^{3x}. \quad 12.302. y = C_1 e^x + C_2 x - x^2 - 1.$$

$$12.303. C_1 \cos x + C_2 x \cos x - \sin x \cos x. \quad 12.304. y = C_1 e^{5x} + C_2 e^x + 5x + 6 - e^{2x}. \quad 12.305. y = C_1 + C_2 \sin x + C_3 \cos x + \frac{1}{2}e^x - \sin 2x.$$

$$12.306. y = e^x (x \ln |x| + C_1 x + C_2).$$

$$12.307. y = (e^{-x} + e^{-2x}) \ln(e^x + 1) + C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x}.$$

$$12.308. y = \sin 2x \ln |\cos x| - x \cos 2x + C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x.$$

$$12.309. y = -x \cos x + \sin x \ln |\sin x| + C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

$$12.310. C_1 e^{2x} + C_2 e^{-4x}. \quad 12.311. C_1 e^{3x} + C_2 e^{5x}.$$

$$12.312. C_1 e^{4x} + C_2 x e^{4x}. \quad 12.313. (C_1 + C_2 x + C_3 x^2) e^{-x/2}.$$

$$12.314. C_1 e^{3x} \cos 2x + C_2 e^{3x} \sin 2x. \quad 12.315. C_1 \cos \frac{x}{2} + C_2 \sin \frac{x}{2}.$$

$$12.316. e^{-x} (C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x). \quad 12.317. (C_1 + C_2 x) e^x + C_3 e^{-2x}.$$

- 12.318. $(C_1 + C_2 x)e^{-x} + C_3 e^{3x}$.
- 12.319. $C_1 e^{-3x} + e^{3x/2} \left(C_2 \cos \frac{x\sqrt{27}}{2} + C_3 \sin \frac{x\sqrt{27}}{2} \right)$.
- 12.320. $C_1 e^{x\sqrt{2}} + C_2 e^{-x\sqrt{2}} + C_3 \cos(x\sqrt{2}) + C_4 \sin(x\sqrt{2})$.
- 12.321. $e^x (C_1 \cos x + C_2 \sin x) + e^{-x} (C_3 \cos x + C_4 \sin x)$.
- 12.322. $C_1 e^{2x} + e^{-x} (C_2 \cos 2x + C_3 \sin 2x)$.
- 12.323. $C_1 e^{-3x} + e^{-2x} (C_2 \cos x + C_3 \sin x)$.
- 12.324. $C_1 \cos x + C_2 \sin x + C_3 x \cos x + C_4 x \sin x$.
- 12.325. $C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + e^{3x} (C_4 + C_5 x)$.
- 12.326. $C_1 + C_2 \cos 2x + C_3 \sin 2x + x(C_4 \cos 2x + C_5 \sin 2x)$.
- 12.327. $C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + C_4 x^3 + e^{-x} (C_5 + C_6 x)$.
- 12.328. $y'' - 3y' - 10y = 0$, $y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{5x}$.
- 12.329. $y''' + 2y'' - 25y' - 50y = 0$, $C_1 e^{-2x} + (C_2 + C_3 x)e^{5x}$.
- 12.330. $y''' + 3y'' + 3y' + y = 0$, $y = (C_1 + C_2 x + C_3 x^2)e^{-x}$.
- 12.331. $y'' + 4y' + 13y = 0$, $y = e^{-2x} (C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x)$.
- 12.332. $y''' - 3y'' + 9y' - 27y = 0$, $y = C_1 e^{3x} + C_2 \cos 3x + C_3 \sin 3x$.
- 12.333. $y^{IV} - 4y''' + 9y'' - 4y' + 8y = 0$, $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + e^{2x} (C_3 \cos 2x + C_4 \sin 2x)$. 12.334. $y'' - y' - 2y = 0$.
- 12.335. $y''' - y'' - 8y' + 12y = 0$. 12.336. $y''' + y'' + 8y' - 10y = 0$.
- 12.337. $y''' + 6y'' + 12y' + 8y = 0$. 12.338. $y = (7 - 3x)e^{x-2}$.
- 12.339. $y = 2 + e^{-x}$. 12.340. $y = Ce^{-3x}$, $C \in \mathbb{R}$. 12.341. $y = 0$.
- 12.342. $y = \left(-\int f(x) \sin x dx + C_1 \right) \cos x + \left(\int f(x) \sin x dx + C_2 \right) \sin x$.
- 12.343. $y = \left(\frac{1}{3} \int f(x) e^{-2x} dx + C_1 \right) e^{2x} + \left(-\frac{1}{3} \int f(x) e^x dx + C_2 \right) e^{-x}$.
- 12.344. $y = \frac{1}{5} e^{4x} + C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x}$. 12.345. $y = (2x - 2)e^x + C_1 \cos x + C_2 \sin x$. 12.346. $y = xe^x + x^2 + 2 + C_1 e^x + C_2 e^{-x}$.
- 12.347. $y = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x}{3} \right) e^x + C_1 e^x + C_2 e^{-2x}$.

- 12.348. $y = -\frac{x}{5}e^{-4x} - \left(\frac{x}{6} + \frac{1}{36}\right)e^{-x} + C_1e^x + C_2e^{-4x}$.
- 12.349. $x = \left(\frac{t^3}{12} - \frac{t^2}{16} + \frac{t}{32}\right)e^t + C_1e^t + C_2e^{-3t}$.
- 12.350. $x = \frac{e^{3t}}{37}(6\sin t - \cos t) + C_1e^{3t} + C_2e^{-3t}$.
- 12.351. $y = -5x^2 + 3x - 29 + C_1e^{2x} + C_2e^{-2x}\cos x + C_3e^{-2x}\sin x$.
- 12.352. $\frac{1}{15}\cos 2x + C_1e^x + C_2e^{-x} + C_3\cos x + C_4\sin x$.
- 12.353. $\tilde{y} = Ae^{3x}\cos x + Be^{3x}\sin x + Cx^2 + Dx + E$.
- 12.354. $\tilde{y} = x(Ax + B)e^{-x}\cos 5x + x(Cx + D)e^{-x}\sin 5x$.
- 12.355. $\tilde{y} = x(Ax + B)e^{4x} + C$.
- 12.356. $\tilde{y} = Ae^{-2x}\cos 3x + Be^{-2x}\sin 3x$.
- 12.357. $\tilde{y} = (Ax + B)e^x\cos 5x + (Cx + D)e^x\sin 5x + (Ex^2 + Fx + G)e^{-x}$.
- 12.358. $\tilde{y} = Ae^x\cos x + Be^x\sin x + x(Cx^2 + Dx + E)e^{-x}$.
- 12.359. $\tilde{y} = Ax + B + (Cx^2 + Dx)e^{2x} + x(Ex + F)e^{-3x}\cos 2x + x(Gx + H)e^{-3x}\sin 2x$. 12.360. $y = C_1x^2 + C_2x^3$.
- 12.361. $y = C_1x^3 + C_2x^{-1}$. 12.362. $y = x(C_1 + C_2\ln|x| + C_3\ln^2|x|)$.
- 12.363. $y = (2x + 1)(C_1 + C_2\ln|2x + 1|)$.
- 12.364. $y = 2x^3 + x(C_1 + C_2\ln|x|)$.
- 12.365. $y = C_1x^2 + \frac{1}{x}\left(C_2 - \frac{2}{3}\ln x - \ln^2 x\right)$. 12.366. $y = C_1x^3 + C_2x^{-2} + x^3\ln|x| - 2x^2$. 12.367. $y = \frac{C_1}{x} + \left(C_2x^{-2} - \frac{1}{3}\ln(-x) + \frac{1}{2}\ln^2(-x)\right)x^2$.
- 12.368. $x^2 + y^2 = z^2 - 2z(y - xy')$, $x + yy' = zz' - z'(y' - xy')$.
- 12.369. $yy' + zz' = 0$, $y^2 + 2xzz' = x^2 + z'^2$.
- 12.370. $\frac{dx}{1} = \frac{dy}{z} = \frac{dz}{u} = \frac{du}{xyz - z^3}$. 12.371. $\frac{dx}{1} = \frac{dy}{u} = \frac{du}{v} = \frac{dv}{w} = \frac{dw}{y^2}$.
- 12.372. $\frac{dx}{1} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w} = \frac{du}{t} = \frac{dv}{v + w} = \frac{dw}{w + t} = \frac{dt}{t + v}$.
- 12.373. $\frac{dx}{1} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{u} = \frac{du}{2y - z} = \frac{dv}{w} = \frac{dw}{x + y - z}$.

$$12.374. \frac{dx}{1} = \frac{dy}{t} = \frac{dz}{x^2 - uz} = \frac{dt}{z + u} = \frac{du}{v} = \frac{dv}{w} = \frac{dw}{-xy}.$$

$$12.380. C_1 x^2 = 2t + C_2, y^2 = C_1(2t + C_2).$$

$$12.381. x^2 = t^2 + C_1, y^2 = t^2 + C_2.$$

$$12.382. y^2 = \frac{(C_1 + C_2 - x)^2}{2(C_2 - x)}, z^2 = \frac{(C_1 - C_2 + x)^2}{2(C_2 - x)}.$$

$$12.383. x = \ln |C_3(C_1 t + C_2)|, y = \ln |C_3(C_1 t + C_2)| - C_1,$$

$$z = (C_1 + 1)t + C_2. \quad 12.384. x^2 + y^2 + z^2 = C_1 y, z = C_2 y.$$

$$12.385. x = C_1 t, y = C_2 e^t + \frac{2}{C_1}. \quad 12.386. z - 2y = C_1, 2\sqrt{z - x - y} +$$

$$+ y = C_2. \quad 12.387. x^2 = C_1 e^{2t} + C_2 e^{-2t}, y^2 = C_1 e^{2t} - C_2 e^{-2t}.$$

$$12.388. y = x + \frac{1}{C_1 C_2} e^{-C_1 x}, z = C_2 e^{C_1 x}; y = x - e^x, z = e^{-x}.$$

$$12.389. z = C_1 y, y^3 = \frac{3x^2}{2C_1} + C_2; z = y, y^3 = \frac{3}{2}x^2 + 1.$$

$$12.390. 2e^{2-y} = x^2 + (y-1)^2. \quad 12.391. y^3 + 3y(x^2 - 1) - 10 = 0.$$

$$12.392. y = x(1 + \ln \sqrt{|x|}). \quad 12.393. (y-x)^2 + x^2 = 1.$$

$$12.394. y = C_1 x^{1+\sqrt{2}} + C_2 x^{1-\sqrt{2}}, z = x^{\sqrt{2}-1} C_1 (2+\sqrt{2}) + x^{-\sqrt{2}-1} C_2 (2-\sqrt{2}).$$

$$12.395. y = C_1 + C_2 x, z = 2C_2 + \frac{C_1}{x}. \quad 12.396. x = C_1 t + \frac{C_2}{t},$$

$$y = -C_1 t + \frac{C_2}{t}. \quad 12.397. x = \frac{C_2}{t^2}, y = C_2 e^t + \frac{C_1}{t^2}.$$

$$12.398. X(t) = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{-t} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{3t}.$$

$$12.399. X(t) = C_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t} + C_2 \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-3t}.$$

$$12.400. X(t) = C_1 \begin{pmatrix} -\cos 2t - 2\sin 2t \\ \cos 2t \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 2\cos 2t - \sin 2t \\ \sin 2t \end{pmatrix}.$$

$$12.401. X(t) = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^t + C_2 \left(\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} t \right) e^t.$$

$$12.402. X(t) = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} + C_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-t}.$$

$$12.403. X(t) = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^t + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} e^{2t} + C_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} e^{5t}.$$

$$12.404. X(t) = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} + C_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{2t} + C_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} e^{-5t}.$$

$$12.405. X(t) = C_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} \cos t + \sin t \\ \cos t + 2\sin t \\ -\sin t \end{pmatrix} + C_3 \begin{pmatrix} 2\sin t \\ 2\sin t \\ \cos t - \sin t \end{pmatrix}.$$

$$12.406. X(t) = C_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^t + C_2 \begin{pmatrix} \sin 2t \\ -\cos 2t \\ -3\cos 2t \end{pmatrix} e^t + C_3 \begin{pmatrix} 2\cos 2t \\ -\cos 2t \\ 3\sin 2t \end{pmatrix} e^t.$$

$$12.407. X(t) = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{3t} + C_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t}.$$

$$12.408. X(t) = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + C_3 \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) e^t.$$

$$12.409. X(t) = C_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t} + C_3 \begin{pmatrix} t \\ -1-2t \\ -1-t \end{pmatrix} e^{-t}.$$

$$12.410. X(t) = \begin{pmatrix} C_1 + C_2 t + C_3 t^2 \\ 2C_1 - C_2 + (2C_2 - 2C_3)t + 2C_3 t^2 \\ C_1 - C_2 + 2C_3 + (C_2 - 2C_3)t + C_3 t^2 \end{pmatrix} e^{2t}.$$

$$12.411. X(t) = \begin{pmatrix} C_1 + C_3 t \\ C_2 + 2C_3 t \\ C_1 - C_2 - C_3 - C_3 t \end{pmatrix} e^t.$$

$$12.412. X(t) = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^t + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-t} + C_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-2t}.$$

$$12.413. x = C_1 \cos t + C_2 \sin t + \operatorname{tg} t, \quad y = -C_1 \sin t + C_2 \cos t + 2.$$

$$12.414. x = C_1 e^t + 2C_2 e^{4t} - e^{2t}, \quad y = -C_1 e^t + C_2 e^{4t} - e^{2t}.$$

$$12.415. x = C_1 e + C_2 e^{-t} - \ln t, \quad y = C_1 e - C_2 e^{-t} - \frac{1}{t}.$$

$$12.416. x = (C_1 + 2C_2 t - 8t^{5/2})e^t, \quad y = (C_1 + 2C_2 t - C_2 - 8t^{5/2} + 10t^{3/2})e^t.$$

$$12.417. X(t) = \begin{pmatrix} -2 \sin t - \cos t \\ \sin t + 3 \cos t \end{pmatrix} + C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{2t} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t}.$$

$$12.418. X(t) = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix} + \left(C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} t \right) \right) e^t.$$

$$12.419. X(t) = \begin{pmatrix} 2t+2 \\ 10t \end{pmatrix} + C_1 \begin{pmatrix} \cos 2t \\ \cos 2t + 2 \sin 2t \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} -\sin 2t \\ 2 \cos 2t - \sin 2t \end{pmatrix}.$$

$$12.420. X(t) = \begin{pmatrix} e^t + t + 1 \\ -2e^t - 2t - 1 \end{pmatrix} + C_1 e^t \begin{pmatrix} \cos t \\ -\cos t - \sin t \end{pmatrix} + C_2 e^t \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t - \sin t \end{pmatrix}.$$

$$12.421. X(t) = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^t + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t} + \begin{pmatrix} t \\ -t - 1 \end{pmatrix} e^t - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{4t}.$$

12.422. Неустойчиво. **12.423.** Асимптотически устойчиво.

12.424. Асимптотически устойчиво, если $a < -1/2$; устойчиво, если $a = -1/2$ и неустойчиво при $a > -1/2$.

12.425. $\dot{z}_i = -\dot{\varphi}_i + f_i(t, z_1 + \varphi_1(t), \dots, z_n + \varphi_n(t)) = F_i(t, z_1, \dots, z_n)$, ($i = 1, 2, \dots, n$). *Указание.* Преобразовать систему (12.59) к новым переменным, полагая $z_i = x_i - \varphi_i$, ($i = 1, 2, \dots, n$).

12.426. Неустойчивый фокус. **12.427.** Седло. **12.428.** Неустойчивый фокус.

12.429. Устойчивый узел. **12.430.** Устойчивый узел.

12.431. Ни при каких a . **12.432.** При $|a| \geq 2$. **12.433.** Устойчивый узел (рис. О12.1).

12.434. Точка покоя — седло; неустойчива (рис. О12.2). **12.435.** $V = x^2 + y^2$; устойчива.

12.436. $V = x^2 + y^2$; неустойчива. **12.437.** $V = x^4 + y^4$;

устойчива. **12.438.** $V = x^2 + y^2$; неустойчива. **12.439.**

$V = 2x^2 + y^2$; устойчива.

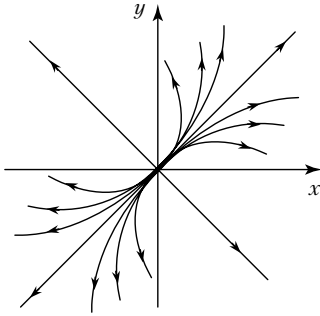


Рис. О12.1

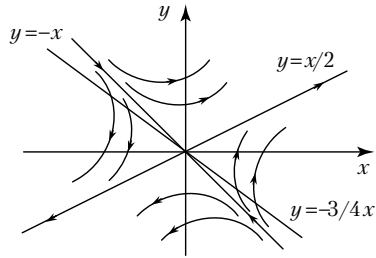


Рис. О12.2

12.440. $V = -\frac{1}{2}x^2 + y^2$; неустойчива. **12.441.** Устойчива.

12.442. Неустойчива. **12.443.** Неустойчива. **12.444.** Устойчива. **12.445.** Устойчива. **12.446.** Неустойчива. **12.447.** $V = 3x^2 + 4y^2$; асимптотически устойчива.

Учебное издание

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ

Часть 1

Учебное пособие для бакалавров

Под редакцией *А. С. Поспелова*

Редактор *В. А. Русев*

Корректор *М. Б. Быкова*

Художественное оформление *А. И. Гиренко*

Компьютерная верстка *М. А. Гольдман*

Формат 84×108 $\frac{1}{32}$.

Гарнитура «Petersburg». Печать офсетная.

Усл. печ. л. 31,76. Доп. тираж 1000 экз. Заказ №

ООО «ИД Юрайт»

140004, Московская обл., г. Люберцы, 1-й Панковский проезд, д. 1.

Тел.: (495) 744-00-12. E-mail: izdat@urait.ru, www.urait.ru