УДК 517.935 + 517.938

© *Л. И. Родина*

ИНВАРИАНТНЫЕ И СТАТИСТИЧЕСКИ СЛАБО ИНВАРИАНТНЫЕ МНОЖЕСТВА УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ[1]

Исследуется расширение понятия инвариантности множеств относительно управляемых систем и дифференциальных включений, которое состоит в изучении статистически инвариантных и статистически слабо инвариантных множеств. Получены достаточные условия существования инвариантных (в указанном смысле) множеств, сформулированные в терминах метрики Хаусдорфа–Бебутова, функций А. М. Ляпунова и производной Ф. Кларка данных функций. В работе рассматриваются как детерминированные системы, так и системы со случайными параметрами, для которых исследуется понятие статистической инвариантности с вероятностью единица. Рассматриваются также задачи о полной управляемости нестационарной линейной системы и о существовании неупреждающего управления для линейной системы со случайными параметрами.

Ключевые слова: управляемые системы, динамические системы, дифференциальные включения, статистически инвариантные множества.

Содержание

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 12–01–00195).

Список основных обозначений

$*$ — операция транспонирования.
$\mathbb{R}_+ \doteq [0, +\infty)$.
$\mathbb{R}^n$ — стандартное евклидово пространство размерности n, то есть в $\mathbb{R}^n$ фиксирован ортонормированный базис $e_1 = \mathrm{col}(1, 0, \ldots, 0), \ldots, e_n = \mathrm{col}(0, \ldots, 0, 1)$.
$\langle x, y \rangle$ — скалярное произведение векторов $x, y \in \mathbb{R}^n$.
$|x| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ — норма вектора $x \in \mathbb{R}^n$.
$\mathrm{col}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ — вектор-столбец с координатами $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$.
$\mathrm{Lin}(q_1, \ldots, q_r)$ — линейная оболочка векторов $q_1, \ldots, q_r \in \mathbb{R}^n$.
$O_r(x_0) \doteq \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| \leqslant r\}$ — замкнутый шар радиуса r с центром в точке $x_0 \in \mathbb{R}^n$.
$S_r(x_0)$ — сфера радиуса r с центром в точке $x_0 \in \mathbb{R}^n$.
Если $A \subset \mathbb{R}^n$, то $\mathrm{cl}\, A$ — замыкание множества A относительно пространства $\mathbb{R}^n$, $\mathrm{fr}\, A$ — граница множества A, $\mathrm{co}A$ — замыкание выпуклой оболочки множества A, $\mathrm{int}\, A$ — внутренность множества A относительно $\mathbb{R}^n$.
$\varrho(A, B) \doteq \inf\limits_{a \in A,\, b \in B} |a - b|$ — расстояние между замкнутыми множествами A и B в $\mathbb{R}^n$.
$d(A, B) \doteq \sup\limits_{a \in A} \varrho(a, B)$ — полуотклонение множества A от множества B.
$\mathrm{dist}(A, B) = \max\{d(A, B), d(B, A)\}$ — расстояние по Хаусдорфу между множествами A и B в пространстве $\mathbb{R}^n$.
$\mathrm{comp}(\mathbb{R}^n)$ — пространство непустых *компактных* подмножеств в $\mathbb{R}^n$ с метрикой Хаусдорфа.
$\mathrm{conv}(\mathbb{R}^n)$ — подпространство в $\mathrm{comp}(\mathbb{R}^n)$, состоящее из *выпуклых компактных* подмножеств $\mathbb{R}^n$ с метрикой Хаусдорфа.
$\mathrm{clos}(\mathbb{R}^n)$ — пространство непустых *замкнутых* подмножеств $\mathbb{R}^n$.
$\mathrm{clcv}(\mathbb{R}^n)$ — пространство, состоящее из непустых *выпуклых замкнутых* (не обязательно ограниченных) подмножеств евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ с метрикой Хаусдорфа–Бебутова Dist.
Если $F \in \mathrm{clcv}(\mathbb{R}^n)$, то $F_r \doteq F \bigcap O_r(f_0)$, где f_0 — точка множества F, ближайшая к нулю пространства $\mathbb{R}^n$.
$\mathrm{Dist}(A, B) = \sup\limits_{r > 0} \min\bigl\{\mathrm{dist}(F_r, G_r), 1/r\bigr\}$ — расстояние Хаусдорфа–Бебутова между множествами $A, B \in \mathrm{clcv}(\mathbb{R}^n)$.
Если (Σ, h^t) — заданная динамическая система, то $\mathrm{orb}(\sigma)$ и $\mathrm{orb}_+(\sigma)$ — траектория и положительная полутраектория точки σ.
$T_x M$ — опорный конус (конус Булигана) к множеству M в точке x.
$A(t, \sigma, X)$ — множеством достижимости управляемой системы в момент времени t из начального множества X.
mes — мера Лебега на числовой прямой.
$V^o(\sigma, x; q) \doteq \limsup\limits_{(\vartheta, y, \varepsilon) \to (\sigma, x, +0)} \dfrac{V(h^\varepsilon \vartheta, y + \varepsilon q) - V(\vartheta, y)}{\varepsilon}$ — обобщенная производная (производная Ф. Кларка) локально липшицевой функции $V(\sigma, x)$ в точке $(\sigma, x) \in \Sigma \times \mathbb{R}^n$ по направлению вектора $q \in \mathbb{R}^n$.
$V^o_{\min}(\sigma, x) \doteq \inf\limits_{q \in F(\sigma, x)} V^o(\sigma, x; q), \quad V^o_{\max}(\sigma, x) \doteq \sup\limits_{q \in F(\sigma, x)} V^o(\sigma, x; q)$ — нижняя и верхняя производные функции V в силу дифференциального включения $\dot{x} \in F(h^t \sigma, x)$.
$M(n, m)$ — пространство $(n \times m)$-матриц над полем $\mathbb{R}$; если $n = m$, то $M(n) \doteq M(n, m)$.
E — единичная $n \times n$ матрица, $\mathrm{rank}\, A$ — ранг матрицы A.
$C^k(X, Y)$ — пространство k раз дифференцируемых функций из X в Y.
S — линейная нестационарная система

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \quad (t, x, u) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m.$$

$L(S, I)$ — пространство управляемости системы S на отрезке I.
$\dim L(S, I)$ — размерность пространства управляемости системы S.

Введение

Одной из важных задач теории управляемых процессов является задача исследования инвариантности множеств относительно различных управляемых систем и дифференциальных включений. Данной тематике посвящены работы Н. Н. Красовского и А. И. Субботина [82], А. Б. Куржанского и Т. Ф. Филипповой [214, 215], Х. Г. Гусейнова и В. Н. Ушакова [39], Ж. П. Обена [181], Ю. Л. Сачкова [142–144], П. Хартмана [173], Е. А. Панасенко и Е. Л. Тонкова [117, 118] и ряда других авторов (см. [32, 38, 87, 161, 162, 173, 182–185, 200, 222, 228]).

Приведем определение инвариантного и слабо инвариантного множества относительно дифференциального включения

$$\dot{x} \in F(t, x), \quad (t, x) \in \mathbb{R}^{1+n}. \tag{0.1}$$

Пусть $M \subset \mathbb{R}^{1+n}$ — замкнутое множество. Положим $M(t) = \{x \in \mathbb{R}^n : (t, x) \in M\}$.

Определение 0.1 (см., например, [39]). Множество $M \subset \mathbb{R}^{1+n}$ называется *инвариантным* (сильно инвариантным) относительно дифференциального включения (0.1), если для любой точки $(t_0, x_0) \in M$ и любого решения $x(t)$ включения (0.1), удовлетворяющего начальному условию $x(t_0) = x_0$, для всех $t \geqslant t_0$ выполнено условие $x(t) \in M(t)$.

Далее, множество $M \subset \mathbb{R}^{1+n}$ называется *слабо инвариантным* относительно включения (0.1), если для любой точки $(t_0, x_0) \in M$ существует решение $x(t)$ данного включения, которое удовлетворяет начальному условию $x(t_0) = x_0$ и при всех $t \geqslant t_0$ включению $x(t) \in M(t)$. Траектория такого решения называется выживающей, а множество M также называется *множеством выживаемости* для дифференциального включения (0.1).

Исследования слабо инвариантных множеств тесно связаны с теорией управления и теорией дифференциальных игр. По-видимому, первый результат в этой области опубликован в работе М. Нагумо [220] в 1942 году, в которой были получены необходимые и достаточные условия слабой инвариантности заданного множества относительно дифференциального уравнения.

Приведем примеры некоторых задач, связанных с существованием инвариантных множеств. Одной из них является задача о приведении управляемой системы на целевое множество, описанная в монографии Н. Н. Красовского и А. И. Субботина [82, с. 52]. Здесь исследуется слабо инвариантное множество $W(t, t_1, X_1)$ в момент времени t с целевым множеством X_1 и конечным моментом времени t_1, которое оказывается максимальным среди всех множеств, обладающих свойством u-стабильности и поэтому называется максимальным стабильным мостом. Свойство u-стабильности множества здесь означает его слабую инвариантность относительно любого дифференциального включения из некоторого семейства (см. [87, 149]). Слабо инвариантные множества дают возможность решать различные задачи верификации. Например, при заданном начальном множестве фазовых переменных X_0 необходимо узнать, можно ли перевести траекторию из X_0 в заданное целевое множество X_1 в фиксированный момент времени t_1. В терминах слабо инвариантных множеств данная задача имеет следующее решение: траекторию можно перевести из X_0 в X_1 на отрезке времени $[t_0, t_1]$ тогда и только тогда, когда

$$X_0 \cap W(t_0, t_1, X_1) \neq \varnothing$$

(см. [87]). Отметим также, что понятие слабой инвариантности является ключевым понятием теории минимаксных решений (см. [152, 181, 195, 203, 224]).

Основным объектом исследования в данной работе является управляемая система (точнее, семейство управляемых систем)

$$\dot{x} = f(h^t\sigma, x, u), \quad (t, \sigma, x, u) \in \mathbb{R} \times \Sigma \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m; \tag{0.2}$$

в качестве вспомогательного объекта будем рассматривать соответствующее системе (0.2) дифференциальное включение

$$\dot{x} \in F(h^t\sigma, x), \quad (t, \sigma, x) \in \mathbb{R} \times \Sigma \times \mathbb{R}^n, \tag{0.3}$$

правая часть которого параметризована с помощью топологической динамической системы (Σ, h^t). Здесь Σ — полное метрическое пространство, h^t — поток на Σ. Такая параметризация позволяет, во-первых, включить в рассмотрение ряд задач, связанных с асимптотическим поведением решений управляемых систем; во-вторых, получить ряд общих утверждений (поскольку с помощью динамической системы сдвигов удается описать все семейство управляемых систем). Мы также будем рассматривать управляемую систему (0.2) и включение (0.3), порожденные метрической динамической системой $(\Sigma, \mathfrak{A}, \nu, h^t)$; это означает, что на сигма-алгебре $\mathfrak{A}$ подмножеств пространства Σ задана вероятностная мера ν, инвариантная относительно потока h^t. В этом случае функция $t \to F(h^t\sigma, x)$ является стационарным в узком смысле случайным процессом и тем самым мы имеем дифференциальное включение со случайными параметрами. Следовательно, для таких включений появляется возможность исследовать свойства решений, которые выполнены с вероятностью единица.

Применение теории, связанной с динамической системой сдвигов для задач управления линейными нестационарными системами, по-видимому, впервые было предложено Е. Л. Тонковым. Это привело к возникновению таких понятий в математической теории управления, как равномерная полная управляемость, равномерная локальная и глобальная управляемость, равномерная стабилизируемость (см. [57, 58, 155, 156, 160]). Управляемые системы, коэффициенты которых являются стационарными случайными процессами, исследовали, наряду с Е. Л. Тонковым, О. В. Баранова [8], А. М. Куриленко [89], Г. Н. Мильштейн [102, 103], А. Н. Сиротин [146], F. Colonius, R. Jonson [193], D. P. De Farias [197], W. H. Fleming, H. M. Soner [199], S. Ibrir, E. K. Boukas [209].

В различных областях математической теории управления при идеализации реальных систем с большими управляющими воздействиями возникают модели управляемых систем и дифференциальных включений с неограниченным множеством скоростей (см., например, [29, 33, 109, 142–144, 206]). В данной работе изучается дифференциальное включение (0.3), правая часть которого имеет выпуклые замкнутые, но не обязательно компактные образы. В случае, когда правая часть включения (0.3) имеет компактные образы, обычно применяется пространство $\mathrm{comp}(\mathbb{R}^n)$, состоящее из непустых *компактных* подмножеств в $\mathbb{R}^n$ с метрикой Хаусдорфа (см., например, [17]), что позволяет ввести в рассмотрение содержательные определения полунепрерывности сверху и снизу функции $(\sigma, x) \to F(\sigma, x)$ со значениями в пространстве $\mathrm{comp}(\mathbb{R}^n)$. Отметим, что вопросам существования решения данных включений и свойствам множества решений посвящено большое количество исследований, среди которых работы А. Маршо [217, 218], С. Зарембы [231, 232], Ж. П. Обена [181], Н. Н. Красовского и А. И. Субботина [82], А. Ф. Филиппова [166–168, 170], А. А. Толстоногова [153], Б. Д. Гельмана и В. В. Обуховского [30], В. А. Плотникова, А. В. Плотникова и А. Н. Витюка [121], Дж. Дэви [196], С. Ху и Н. С. Папагеоргиу [207, 208]. Подробную библиографию и обзор различных направлений исследований можно найти в монографиях Ю. Г. Борисовича, Б. Д. Гельмана, А. Д. Мышкиса и В. В. Обуховского [14, 15].

Для дифференциальных включений вида (0.3), ориентированных на применение к управляемым системам, требование компактности образов F может оказаться обременительным. Поэтому возникает необходимость рассматривать пространство, состоящее из непустых *выпуклых замкнутых* (не обязательно ограниченных) подмножеств евклидова пространства $\mathbb{R}^n$, которое будем обозначать $\mathrm{clcv}(\mathbb{R}^n)$. В пространстве $\mathrm{clcv}(\mathbb{R}^n)$ вводится метрика Dist, которую мы называем метрикой Хаусдорфа–Бебутова, и тогда это пространство становится полным пространством с топологией сходимости, равномерной на компактах. В работе исследованы основные свойства полуотклонений $D(F, G)$, $D(G, F)$ и расстояния $\mathrm{Dist}(F, G)$ между выпуклыми замкнутыми множествами F и G, введено и исследовано понятие полунепрерывности сверху и снизу в терминах полуотклонений D и непрерывности в терминах метрики Dist Хаусдорфа–Бебутова. Получены аналоги известных теорем существования решения задачи Коши для дифференциального включения с фазовыми ограничениями

$$\dot{x} \in F(h^t\sigma, x), \quad x(t) \in M(h^t\sigma),$$

относительно которого предполагается, что функция $(\sigma, x) \to F(\sigma, x)$ определена при всех

$(\sigma, x) \in \Sigma \times \mathbb{R}^n$ и принимает значения в пространстве $\operatorname{clcv}(\mathbb{R}^n)$.

Вопрос о существовании инвариантных множеств имеет важное значение во многих прикладных задачах управления, в частности, в задачах, возникающих в экономике и экологии (см., например, [6, 42, 47, 94, 181]). Основное требование к управлению экономическими системами состоит в том, чтобы не нарушать заданных ограничений на множество допустимых управлений. Но если по ряду причин такие нарушения все-таки происходят и всякая траектория движения уходит из множества, обусловленного ограничениями, то надо научиться управлять таким образом, чтобы относительная частота попадания траектории в данное множество равнялась единице. Одна из возможных математических постановок этой задачи состоит в том, чтобы научиться вычислять относительную частоту пребывания множества достижимости управляемой системы в заранее заданном множестве M. Если эта частота равна единице, то множество M будем называть *статистически инвариантным.* Не менее важно научиться строить для каждой начальной точки множества M такое управление, что решение управляемой системы при заданном управлении статистически инвариантно. В этом случае множество M будем называть *статистически слабо инвариантным* относительно управляемой системы. Таким образом, мы расширяем понятие инвариантности, рассматривая статистически инвариантные множества.

Для определения статистически инвариантного множества относительно управляемой системы (0.2) введем следующую характеристику. Пусть $M = \{(\sigma, x) \in \Sigma \times \mathbb{R}^n : x \in M(\sigma)\}$ — заданое подмножество пространства $\Omega \doteq \Sigma \times \operatorname{clcv}(\mathbb{R}^n)$, $A(t, \sigma, X)$ — *множество достижимости* системы (0.2) в момент времени t из начального множества X. В предположении, что для каждого $\sigma \in \Sigma$ множество $A(t, \sigma, X)$ существует при всех $t \geqslant 0$, *относительной частотой поглощения* множества достижимости системы (0.2) множеством M назовем следующий предел

$$\operatorname{freq}(\sigma, X) \doteq \lim_{\vartheta \to \infty} \frac{\operatorname{mes}\bigl\{t \in [0, \vartheta] : A(t, \sigma, X) \subseteq M(h^t \sigma)\bigr\}}{\vartheta},$$

где mes — мера Лебега на числовой прямой. Подобные характеристики рассматривались в работах В. В. Немыцкого и В. В. Степанова [105], В. В. Степанова [229], H. Hilmy [205] в связи с задачами существования минимального центра притяжения движения и свойством возвращаемости областей, а также в эргодической теории при исследовании различных свойств возвращения, таких как рекуррентность орбиты, топологическая транзитивность, минимальность и топологическое перемешивание (см., например, работы П. Биллингслея [11], А. М. Вершика, И. П. Корнфельда и Я. Г. Синая [21], А. Б. Катка, Я. Г. Синая и А. М. Степина [64], А. Б. Катка и Б. Хасселблата [65], И. П. Корнфельда, Я. Г. Синая и С. В. Фомина [72], В. А. Рохлина [140,141], Я. Г. Синая [145]).

О п р е д е л е н и е 0.2. Множество M будем называть *статистически инвариантным* относительно управляемой системы (0.2), если для всех $\sigma \in \Sigma$ выполнено равенство

$$\operatorname{freq}\bigl(\sigma, M(\sigma)\bigr) \doteq \lim_{\vartheta \to \infty} \frac{\operatorname{mes}\bigl\{t \in [0, \vartheta] : A\bigl(t, \sigma, M(\sigma)\bigr) \subseteq M(h^t \sigma)\bigr\}}{\vartheta} = 1.$$

О п р е д е л е н и е 0.3. Множество M будем называть *статистически слабо инвариантным* относительно управляемой системы (0.2), если для любой точки $(\sigma, x) \in M$ найдется решение $\varphi(t, \sigma, x)$ данной системы, продолжаемое на полуось $\mathbb{R}_+ \doteq [0, \infty)$ и удовлетворяющее начальному условию $\varphi(0, \sigma, x) = x$ и равенству

$$\operatorname{freq}^*(\varphi) \doteq \overline{\lim_{\vartheta \to \infty}} \frac{\operatorname{mes}\{t \in [0, \vartheta] : \varphi(t, \sigma, x) \in M(h^t \sigma)\}}{\vartheta} = 1.$$

Характеристику $\operatorname{freq}^*(\varphi)$ мы называем *верхней относительной частотой попадания решения* $\varphi(t, \sigma, x)$ *в множество* M.

В работе исследуются условия существования статистически инвариантных и статистически слабо инвариантных множеств, дополняющие результаты работ [133–137]. Основные утверждения формулируются в терминах метрики Хаусдорфа–Бебутова, функций А. М. Ляпунова и производной Ф. Кларка данных функций. Получены условия, позволяющие оценивать относительную частоту $\operatorname{freq}\bigl(\sigma, M(\sigma)\bigr)$ через характеристику

$$\varkappa(\sigma) \doteq \lim_{\vartheta\to\infty} \frac{\operatorname{mes}\{t \in [0,\vartheta] : z^*(t,\sigma) \leqslant 0\}}{\vartheta}, \tag{0.4}$$

которая (в предположении, что предел (0.4) существует) является относительной частотой попадания верхнего решения $z^*(t,\sigma)$ задачи Коши

$$\dot z = w(h^t\sigma, z), \quad z(0) = 0, \quad t \geqslant 0$$

в множество $(-\infty, 0]$. Отметим, что в процессе исследования статистически инвариантных множеств возникла следующая задача: требуется определить условия, при которых выполнено равенство $\varkappa(\sigma) = 1$. Такие условия получены, в частности, для линейной задачи Коши

$$\dot z = a(h^t\sigma)z + b(h^t\sigma), \quad z(0) = 0, \quad t \geqslant 0$$

в предположении, что при каждом фиксированном $\sigma \in \Sigma$ функции $t \to a(h^t\sigma)$ и $t \to b(h^t\sigma)$ почти периодические в смысле Бора (см. теорему 15.1, с. 85).

Следующий круг изучаемых вопросов связан с задачами существования инвариантных множеств для систем со случайными параметрами. В данной работе определяются и исследуются статистически инвариантные и статистически слабо инвариантные с вероятностью единица множества управляемой системы (0.2), параметризованной метрической динамической системой $(\Sigma, \mathfrak{A}, \nu, h^t)$.

О п р е д е л е н и е 0.4. Множество M будем называть *статистически инвариантным с вероятностью единица* относительно управляемой системы (0.2), если для почти всех $\sigma \in \Sigma$ выполнено равенство $\operatorname{freq}\bigl(\sigma, M(\sigma)\bigr) = 1$.

В частности, здесь рассматриваются статистически инвариантные множества для линейной управляемой системы

$$\dot x = A(h^t\sigma)x + B(h^t\sigma)u, \quad (t,\sigma,x,u) \in \mathbb{R}\times\Sigma\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m \tag{0.5}$$

и билинейной управляемой системы

$$\dot x = \bigl(A(h^t\sigma) + uB(h^t\sigma)\bigr)x, \quad (t,\sigma,x,u) \in \mathbb{R}\times\Sigma\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}. \tag{0.6}$$

Показано, что данные системы можно отождествить со *стационарным в узком смысле* случайным процессом

$$\xi(h^t\sigma) \doteq \bigl(A(h^t\sigma), B(h^t\sigma)\bigr);$$

при этом для каждого $\sigma \in \Sigma$ функция $t \to \xi(h^t\sigma)$ является кусочно-постоянной и принимает значения в множестве $\Psi = \{\psi_i\}_{i=1}^{\ell}$ — конечном множестве матричных пар, которые будем называть состояниями управляемой системы. Смена состояний системы происходит в случайные моменты времени, которые назовем моментами переключения данной системы или моментами переключения случайного процесса $\xi(h^t\sigma)$. Отметим, что подобные системы со случайными параметрами исследовались многими авторами в связи с задачами полной управляемости, равномерной локальной, равномерной глобальной управляемости, устойчивости и стабилизации.

Задача о построении слабо инвариантных множеств для линейной системы (0.5) тесно связана с задачей построения неупреждающего управления для данной системы. Термин «неупреждающее управление», по-видимому, введен свердловской школой по теории управления (см., например, работы Н. Н. Красовского [78–80], Н. Н. Красовского и А. И. Субботина [82], А. И. Субботина и А. Г. Ченцова [151], А. Г. Ченцова [176, 177]), задача построения управления данного типа для детерминированных систем исследовалась также в работах С. Ф. Николаева и Е. Л. Тонкова [106, 107]. Управление $u(t,x)$ называется *неупреждающим,* если для его построения в момент времени $t=\tau$ может быть использована информация о поведении системы только при $t \leqslant \tau$.

Одна из особенностей построения неупреждающего управления для системы со случайными параметрами (0.5) состоит в том, что нам неизвестны моменты переключения и состояния данной системы, которые появляются при $t>\tau$. Поэтому возникает следующая задача: нужно научиться строить такое управление, чтобы траектория управляемой системы оставалась как угодно долго в некотором (слабо инвариантном) множестве до появления нужного состояния этой системы. В данной работе, на основании результатов работ [95–101, 124–126, 219] получены новые достаточные условия существования неупреждающего управления для системы (0.5), а также оценка снизу вероятности того, что данная система неупреждающе локально управляема на фиксированном отрезке времени.

Другой важной задачей, связанной с задачей существования слабо инвариантных множеств, является задача об исследовании полной управляемости для линейной системы S :

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \quad (t,x,u) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m.$$

Определение 0.5 (Р. Калман, [210]; Н. Н. Красовский, [77]). Система S называется *вполне управляемой на отрезке* $I \doteq [t_0,t_1]$, если для каждого $x_0 \in \mathbb{R}^n$ найдется управление $u:\, [t_0,t_1] \to \mathbb{R}^m$ такое, что решение $x(\cdot)$ задачи Коши

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u(t), \quad x(t_0) = x_0$$

удовлетворяет равенству $x(t_1)=0$.

Далее, система S называется *вполне управляемой*, если для каждого момента времени $t_0 \in \mathbb{R}$ найдется значение $t_1 > t_0$ такое, что система S вполне управляема на отрезке $[t_0,t_1]$.

Если система S стационарна, то есть матрицы A и B не зависят от времени, то для полной управляемости данной системы необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\operatorname{rank}\bigl\{B, AB, \ldots, A^{n-1}B\bigr\} = n.$$

Этот результат был получен для системы с одним входом (то есть при $m=1$) в работе [61] и в общем случае — в [216].

Н. Н. Красовским [77, с. 148] получено достаточное условие полной управляемости системы S в предположении, что элементы матриц $A(t)$ и $B(t)$ имеют непрерывные производные вплоть до $(n-1)$-го порядка. Рассматривается матрица

$$K(t,S) = \bigl\{K_0(t,S), \ldots, K_{n-1}(t,S)\bigr\}, \quad \text{где}$$

$$K_0(t,S) = B(t), \ldots, K_i(t) = A(t)K_{i-1}(t,S) - \dot{K}_{i-1}(t,S), \quad i=1,\ldots,n-1.$$

Утверждается, что *если на отрезке* $I=[t_0,t_1]$ *найдется точка* t^* *такая, что* $\operatorname{rank} K(t^*,S)=n$, *то система* S *вполне управляема на* I. Известно, что данное условие не является необходимым и существуют примеры вполне управляемых систем, для которых $\operatorname{rank} K(t,S) \leqslant n-1$ при всех $t \in I$ (см. [90, 104]). В работе А. Чанга [190] показано, что если функция $t \to S(t)$ аналитическая на некотором открытом интервале, содержащем отрезок I, то условие $\operatorname{rank} K(t^*,S)=n$ не только достаточно, но и необходимо для полной управляемости системы S.

В связи с этими результатами Н. Н. Красовского и А. Чанга возникает следующая задача: если $\operatorname{rank} K(t,S) \leqslant n-1$ при всех $t\in I$ и функция $t \to S(t)$ не является аналитической (но имеет достаточное число производных), то при каких дополнительных условиях система S вполне управляема на отрезке I либо не обладает этим свойством? Такие условия получены в работах В. Т. Борухова [16], Л. Е. Забелло [51, 52], А. А. Левакова [90], С. А. Минюка [104], а также в работах [131, 132, 225], результаты которых представлены в данной статье.

В заключение отметим, что свойства сильной и слабой инвариантности множеств относительно различных управляемых систем и дифференциальных включений при различных предположениях исследуются многими авторами. Например, в работах Х. Г. Гусейнова и В. Н. Ушакова [39] и Х. Г. Гусейнова, А. И. Субботина и В. Н. Ушакова [202] получены условия инвариантности множеств на базе конструкций, развитых в теории дифференциальных игр при изучении стабильных мостов. В работах Е. А. Панасенко и Е. Л. Тонкова [117, 118] исследуются свойства положительной инвариантности и равномерной устойчивости по Ляпунову (в сильном и слабом смысле) относительно дифференциального включения, которое имеет замкнутые, но не обязательно компактные образы. В работе А. Б. Куржанского и П. А. Точилина [87] вводится понятие и исследуется структура слабо инвариантных множеств для так называемых гибридных систем. Такие системы обладают движением, порожденным в каждый момент времени одной из «стандартных систем», принадлежащих заданному набору; при этом общее движение гибридной системы осуществляется попеременно одной из систем совокупности путем мгновенного переключения с одной на другую. Ю. Л. Сачков [142–144] изучает условия, при которых существуют инвариантные ортанты билинейной системы. Кроме того, он исследует свойство управляемости билинейной системы в положительном ортанте при помощи кусочно-постоянного неограниченного управления. В работах В. Н. Ушакова и его учеников [162–165] исследуется свойство инвариантности множеств относительно дифференциального включения. В этих работах введено и исследовано понятие дефекта инвариантности относительно дифференциального включения для множеств, не обладающих свойством инвариантности.

Различные классы задач управления для систем со случайными параметрами рассматривались в работах Дж. Адомиана [2], Н. И. Андреева [3], Ю. М. Астапова и В. С. Медведева [7], И. И. Гихмана и А. В. Скорохода [31], М. Ф. Диментберга [46], Л. Г. Евланова и В. М. Константинова [48], И. Е. Казакова [59], И. Е. Казакова и Б. Г. Доступова [60], И. Я. Каца [66], А. А. Красовского [74, 75], Ж.-П. Обена [183], В. С. Пугачева [123], У. Флеминга и Р. Ришела [172], Р. З. Хасьминского [174, 212] и ряда других авторов (см. [18, 53, 67, 81, 150, 180, 186, 187, 222, 230]).

* * *

Работа состоит из введения, семи глав, включающих двадцать семь параграфов (нумерация параграфов сквозная) и списка литературы.

В первой главе введено и исследовано пространство непустых *замкнутых выпуклых* (но не обязательно компактных) подмножеств $\mathbb{R}^n$ *с метрикой Хаусдорфа–Бебутова,* которое обозначается $\operatorname{clcv}(\mathbb{R}^n)$. Необходимость в таком рассмотрении связана с рядом задач оптимального управления асимптотическими характеристиками управляемой системы

$$\dot{x} = f(t, x, u), \quad (t, x) \in \mathbb{R}^{1+n}, \quad u \in U(t, x), \tag{0.7}$$

где функция U принимает значения в пространстве $\operatorname{clcv}(\mathbb{R}^m)$.

В § 1 введено расстояние $\operatorname{Dist}(F, G)$ между множествами F и G пространства $\operatorname{clcv}(\mathbb{R}^n)$. Для определения этого расстояния обозначим через f_0 и g_0 ближайшие к нулю пространства $\mathbb{R}^n$ точки множеств F и G соответственно, а через $O_r(f_0)$ и $O_r(g_0)$ обозначим замкнутые шары радиуса r с центрами в точках f_0 и g_0 из $\mathbb{R}^n$. Введем в рассмотрение компактные при каждом $r \in [0, \infty)$ множества

$$F_r = F \bigcap O_r(f_0), \quad G_r = G \bigcap O_r(g_0)$$

и полуотклонения $d(F_r, G_r)$, $d(G_r, F_r)$, где

$$d(F_r, G_r) = \max_{f \in F_r} \varrho(f, G_r), \quad d(G_r, F_r) = \max_{g \in G_r} \varrho(g, F_r).$$

Далее, определим полуотклонения

$$D(F,G) = \sup_{r>0} \min\bigl\{d(F_r, G_r),\ 1/r\bigr\}, \quad D(G,F) = \sup_{r>0} \min\bigl\{d(G_r, F_r),\ 1/r\bigr\} \tag{0.8}$$

и расстояние

$$\operatorname{Dist}(F,G) = \max\bigl\{D(F,G),\ D(G,F)\bigr\}, \tag{0.9}$$

которое будем называть *метрикой Хаусдорфа–Бебутова.* Получены основные свойства расстояния $\operatorname{Dist}(F,G)$ (лемма 1.1, с. 23), в частности, показано, что это расстояние принимает конечные значения для любых как ограниченных, так и неограниченных подмножеств $\mathbb{R}^n$.

В § 2 исследованы основные свойства пространства $\operatorname{clcv}(\mathbb{R}^n)$.

О п р е д е л е н и е 0.6. Будем говорить, что последовательность множеств $\{F^i\}_{i=1}^{\infty}$, где $F^i \in \operatorname{clcv}(\mathbb{R}^n)$, *сходится к множеству* $F \in \operatorname{clcv}(\mathbb{R}^n)$ в метрике Хаусдорфа–Бебутова, если для любого $\varepsilon > 0$, всех $r \in [0, 1/\varepsilon]$ и всех достаточно больших индексов i имеет место неравенство

$$\operatorname{dist}(F_r^i, F_r) \leqslant \varepsilon.$$

Такую сходимость будем называть также сходимостью, *равномерной на компактах* в $\mathbb{R}^n$.

Т е о р е м а 0.1. *Пусть последовательность* $\{F^i\}_{i=1}^{\infty}$ *такова, что* $F^i \in \operatorname{clcv}(\mathbb{R}^n)$, $i \in \mathbb{N}$. *Тогда равенство* $\lim\limits_{i\to\infty} \operatorname{Dist}(F^i, F) = 0$ *эквивалентно равномерной на компактах в* $\mathbb{R}^n$ *сходимости последовательности* $\{F^i\}_{i=1}^{\infty}$ *к множеству* $F \in \operatorname{clcv}(\mathbb{R}^n)$.

Т е о р е м а 0.2. *Пространство* $\operatorname{clcv}(\mathbb{R}^n)$ *является полным в метрике Хаусдорфа–Бебутова, определенной равенствами* (0.8), (0.9).

В § 3 для функции $F(\sigma,x)$ переменных $(\sigma,x) \in \Sigma\times\mathbb{R}^n$ со значениями в пространстве $\operatorname{clcv}(\mathbb{R}^n)$ введено и исследовано понятие полунепрерывности сверху и снизу в терминах полуотклонений D и непрерывности в терминах метрики Dist Хаусдорфа–Бебутова.

О п р е д е л е н и е 0.7. Функцию $F(\sigma,x)$ переменных $(\sigma,x) \in \Sigma \times \mathbb{R}^n$ со значениями в пространстве $\operatorname{clcv}(\mathbb{R}^n)$ будем называть *полунепрерывной сверху в точке* (σ_0, x_0), если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для всех точек $(\sigma,x) \in O_\delta(\sigma_0,x_0)$ выполнено неравенство

$$D\bigl(F(\sigma,x), F(\sigma_0,x_0)\bigr) \leqslant \varepsilon.$$

Получены свойства полунепрерывной сверху функции $F(\sigma,x)$, связанные с замкнутостью ее графика. Рассматривается функция $(\sigma,x) \to f_0(\sigma,x)$, где $f_0(\sigma,x)$ — точка множества $F(\sigma,x)$, ближайшая к нулю пространства $\mathbb{R}^n$.

Т е о р е м а 0.3. *Функция* $F : \Sigma \times \mathbb{R}^n \to \operatorname{clcv}(\mathbb{R}^n)$ *полунепрерывна сверху в точке* (σ_0, x_0) *в метрике Хаусдорфа–Бебутова тогда и только тогда, когда для некоторой замкнутой окрестности* $O_\delta(\sigma_0,x_0)$ *график данной функции является замкнутым множеством и функция* $(\sigma,x) \to f_0(\sigma,x)$ *непрерывна в точке* (σ_0,x_0).

Основным объектом исследования во второй главе являются управляемая система, дифференциальное включение и так называемая *динамическая система сдвигов.* Здесь приводятся основные сведения из теории динамических систем и описывается процесс построения динамической системы сдвигов по заданной управляемой системе и отвечающему ей дифференциальному включению.

В § 4 приведены определения и некоторые свойства *топологической и метрической динамических систем.* Здесь также описано, как по заданной управляемой системе (0.7) построить динамическую систему, которая является *расширением* исходной топологической или метрической динамической системы. В примере 4.1 построено расширение для эргодической метрической динамической системы $(\Sigma, \mathfrak{A}, \nu, h^t)$.

В § 5 построена динамическая система сдвигов, отвечающая системе (0.7) или управляемой системе

$$\dot{x} = g(t, x, u), \quad x \in N(t), \quad u \in U(t, x), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{0.10}$$

где функции N и U принимают значения в пространствах $\operatorname{clcv}(\mathbb{R}^n)$ и $\operatorname{clcv}(\mathbb{R}^m)$ соответственно.

В § 6 получены аналоги известных теорем существования решения задачи Коши для дифференциального включения с фазовыми ограничениями

$$\dot{x} \in F(h^t\sigma, x), \quad x(t) \in M(h^t\sigma), \tag{0.11}$$

относительно которого предполагается, что функции $(\sigma, x) \to F(\sigma, x)$ и $\sigma \to M(\sigma)$ принимают значения в пространстве $\operatorname{clcv}(\mathbb{R}^n)$.

Обозначим через $T_xM(\sigma)$ опорный конус к множеству M в точке x. Функции $F(\sigma, x)$ и $M(\sigma)$ назовем согласованными, если функция $\sigma \to M(\sigma)$ непрерывна и выполнено условие

$$Q(\sigma, x) \doteq F(\sigma, x) \bigcap T_xM(\sigma) \neq \varnothing \quad \text{для всех} \quad (\sigma, x) \in \Sigma \times M(\sigma).$$

Т е о р е м а 0.4. *Пусть функции $F(\sigma, x)$ и $M(\sigma)$ являются согласованными и функция $(\sigma, x) \to F(\sigma, x) \in \operatorname{clcv}(\mathbb{R}^n)$ полунепрерывна сверху в метрике Хаусдорфа–Бебутова. Тогда для каждой точки (σ, x_0), $x_0 \in M(\sigma)$ найдется такой интервал (t_*, t^*) числовой прямой, что решение задачи Коши (0.11) существует при всех $t \in (t_*, t^*)$ и при всех $t \in [0, t^*)$ удовлетворяет включению $x(t) \in M(h^t\sigma)$.*

В теоремах 6.2 и 6.3 получены условия, при которых векторное поле, порожденное задачей (0.11), обладает свойством *слабой полноты*. Это означает, что для любой начальной точки (σ, x_0) множества $M = \{(\sigma, x) \in \Sigma \times \mathbb{R}^n : x \in M(\sigma)\}$ существует по крайней мере одно решение $\varphi(t)$ задачи Коши (0.11), определенное и удовлетворяющее включению $\varphi(t) \in M(h^t\sigma)$ при всех $t \in \mathbb{R}_+$.

В третьей главе получены основные результаты работы, относящиеся к исследованию статистически инвариантных множеств управляемой системы (0.2), параметризованной топологической динамической системой (Σ, h^t). Предполагается, что выполнены следующие условия:
1) для каждой точки (t, σ) функция $(x, u) \to f(h^t\sigma, x, u)$ непрерывна;
2) для каждой точки (σ, x, u) функция $t \to f(h^t\sigma, x, u)$ кусочно-непрерывна;
3) функция $(\sigma, x) \to U(\sigma, x)$ принимает значения в пространстве $\operatorname{clcv}(\mathbb{R}^m)$ и полунепрерывна сверху в метрике Хаусдорфа–Бебутова.

В § 7 введены и исследованы такие характеристики, как *относительная частота, верхняя и нижняя относительная частота поглощения* множества достижимости $A(t, \sigma, X)$ системы (0.2) заданным множеством M. Рассмотрим множество

$$\alpha(\vartheta_0, \vartheta, \omega) \doteq \big\{t \in [\vartheta_0, \vartheta] : A(t, \omega) \subseteq M(h^t\sigma)\big\},$$

где $\omega = (\sigma, X)$. В предположении, что для каждого $\sigma \in \Sigma$ множество достижимости $A(t, \sigma, X)$ существует при всех $t \geqslant 0$, *относительной частотой поглощения* множества достижимости системы (0.2) множеством M называется следующий предел:

$$\operatorname{freq}(\omega) \doteq \lim_{\vartheta \to \infty} \frac{\operatorname{mes} \alpha(0, \vartheta, \omega)}{\vartheta} = \lim_{\vartheta \to \infty} \frac{\operatorname{mes}\{t \in [0, \vartheta] : A(t, \sigma, X) \subseteq M(h^t\sigma)\}}{\vartheta}. \tag{0.12}$$

Далее, если предел (0.12) не существует, то характеристики

$$\operatorname{freq}^*(\omega) \doteq \varlimsup_{\vartheta \to \infty} \frac{\operatorname{mes} \alpha(0, \vartheta, \omega)}{\vartheta}, \quad \operatorname{freq}_*(\omega) \doteq \varliminf_{\vartheta \to \infty} \frac{\operatorname{mes} \alpha(0, \vartheta, \omega)}{\vartheta}$$

будем называть, соответственно, *верхней* и *нижней относительной частотой поглощения* множества достижимости $A(t,\omega)$ системы (0.2) множеством M.

В § 8 доказано обобщение теоремы С. А. Чаплыгина [175] о дифференциальных неравенствах и получены условия существования верхнего решения скалярной задачи Коши

$$\dot{z} = w(h^t\sigma, z), \quad z(t_0) = z_0, \quad t \geqslant t_0 \tag{0.13}$$

в предположении, что выполнены следующие условия:
1) для каждого $\sigma \in \Sigma$ существует последовательность изолированных точек числовой оси $\{\tau_k\}_{k=0}^{\infty}$ такая, что функция $(t,z) \to w(h^t\sigma, z)$ непрерывна в каждой из областей

$$G_i \doteq \{(t,z): \ t \in [\tau_{i-1}, \tau_i), \, z \in \mathbb{R}\}$$

и имеет предел слева при $t \to \tau_i$, $i = 1, 2, \ldots$;
2) для каждой точки $(t,\sigma) \in \mathbb{R} \times \Sigma$ выполнено неравенство

$$\lim_{|z|\to\infty} \frac{|w(h^t\sigma, z)|}{|z|} < \infty\,.$$

В § 9 приведены определения функции А. М. Ляпунова, производной Ф. Кларка, а также нижней и верхней производной в силу дифференциального включения. Обозначим через $M^r(\sigma) = M(\sigma) + O_r(0)$ замкнутую окрестность множества $M(\sigma)$ в $\mathbb{R}^n$, через $N_+^r(\sigma) = M^r(\sigma) \backslash M(\sigma)$ — внешнюю r-окрестность границы множества $M(\sigma)$. Далее,

$$N_+^r \doteq \big\{(\sigma,x) \in \Sigma \times \mathbb{R}^n : x \in N_+^r(\sigma)\big\}.$$

О п р е д е л е н и е 0.8 (см., например, [119]). Скалярную функцию $V(\sigma,x)$ переменных $(\sigma,x) \in \Sigma \times \mathbb{R}^n$ будем называть *функцией Ляпунова* (относительно заданного множества $M \subseteq \Omega$), если она удовлетворяет локальному условию Липшица и выполнены следующие условия:

1) $V(\sigma,x) \leqslant 0$ для всех $(\sigma,x) \in M$;
2) $V(\sigma,x) > 0$ для всех $(\sigma,x) \in N_+^r$.

В некоторых работах (см., например, [45, с. 238]) можно встретить другое определение функции Ляпунова. На протяжении всей работы (главы 3–5) мы будем придерживаться определения 0.8.

Системе (0.2) поставим в соответствие дифференциальное включение

$$\dot{x} \in F(h^t\sigma, x), \quad F(\sigma,x) = \mathrm{co}H(\sigma,x), \tag{0.14}$$

где через $H(\sigma,x)$ обозначено множество всех предельных значений функции $f\big(\sigma, x, U(\sigma,x)\big)$ при $(\sigma_i, x_i) \to (\sigma, x)$, $\mathrm{co}\,H(\sigma,x)$ — замыкание выпуклой оболочки множества $H(\sigma,x)$.

О п р е д е л е н и е 0.9 (Ф. Кларк, [191, с. 17]). Для локально липшицевой функции $V(\sigma,x)$ *обобщенной производной* в точке $(\sigma,x) \in \Sigma \times \mathbb{R}^n$ по направлению вектора $q \in \mathbb{R}^n$ называется следующий верхний предел:

$$V^o(\sigma,x;q) \doteq \limsup_{(\vartheta,y,\varepsilon)\to(\sigma,x,+0)} \frac{V(h^\varepsilon\vartheta, y + \varepsilon q) - V(\vartheta,y)}{\varepsilon}.$$

Далее, выражения

$$V^o_{\min}(\sigma,x) \doteq \inf_{q\in F(\sigma,x)} V^o(\sigma,x;q), \quad V^o_{\max}(\sigma,x) \doteq \sup_{q\in F(\sigma,x)} V^o(\sigma,x;q)$$

называются *нижней и верхней производной* функции V в силу дифференциального включения (0.14).

Исследованы необходимые для дальнейшего свойства функции Ляпунова $V(\sigma,x)$ и функции $V\big(h^t\sigma,\varphi(t,\sigma,x)\big)$, где $\varphi(t,\sigma,x)$ — некоторое решение включения (0.14) (леммы 9.1 – 9.3).

В § 10 получены условия существования решения дифференциального включения (0.14), продолжаемого на полуось $\mathbb{R}_+$, которые являются обобщением теоремы Ла-Салля (см., например, [45, с. 276]).

Т е о р е м а 0.5. *Предположим, что для каждого $\sigma\in\Sigma$ существуют функции $V(\sigma,x)$ и $w(\sigma,z)$ такие, что функция $V(\sigma,x)$ является бесконечно большой функцией Ляпунова и при всех $(\sigma,x)\in\Sigma\times Q_\varrho$, где $Q_\varrho\doteq\{x\in\mathbb{R}^n:\,|x|>\varrho\}$ выполнено неравенство*

$$V^o_{\min}(\sigma,x)\leqslant w\big(\sigma,V(\sigma,x)\big).$$

Тогда при каждом $\sigma\in\Sigma$ для каждой точки $x_0\in\mathbb{R}^n$ существует решение дифференциального включения (0.14)*, удовлетворяющее начальному условию $\varphi(0,\sigma,x_0)=x_0$ и продолжаемое на полуось $\mathbb{R}_+$.*

Т е о р е м а 0.6. *Пусть для каждого $\sigma\in\Sigma$ существуют функции $V(\sigma,x)$ и $w(\sigma,z)$ такие, что $V(\sigma,x)$ является бесконечно большой функцией Ляпунова и при всех $(\sigma,x)\in\Sigma\times Q_\varrho$ выполнено неравенство*

$$V^o_{\max}(\sigma,x)\leqslant w\big(\sigma,V(\sigma,x)\big).$$

Тогда при каждом $\sigma\in\Sigma$ для каждой точки $x_0\in\mathbb{R}^n$ все решения дифференциального включения (0.14)*, удовлетворяющие начальному условию $\varphi(0,\sigma,x_0)=x_0$, продолжаемы на полуось $\mathbb{R}_+$.*

В § 11 в предположении, что верхнее решение $z^*(t,\sigma)$ задачи Коши (0.13) существует для всех $t\geqslant 0$, введена и исследована характеристика

$$\varkappa(\sigma)\doteq\lim_{\vartheta\to\infty}\frac{\operatorname{mes}\{t\in[0,\vartheta]:\;z^*(t,\sigma)\leqslant 0\}}{\vartheta}.$$

Если указанный предел существует, то $\varkappa(\sigma)$ является *относительной частотой пребывания верхнего решения* $z^*(t,\sigma)$ задачи Коши в множестве $(-\infty,0]$. Если предел не существует, рассматриваются характеристики

$$\varkappa^*(\sigma)\doteq\varlimsup_{\vartheta\to\infty}\frac{\operatorname{mes}\{t\in[0,\vartheta]:z^*(t,\sigma)\leqslant 0\}}{\vartheta},$$
$$\varkappa_*(\sigma)\doteq\varliminf_{\vartheta\to\infty}\frac{\operatorname{mes}\{t\in[0,\vartheta]:z^*(t,\sigma)\leqslant 0\}}{\vartheta}.$$

В следующей теореме получены условия *статистической инвариантности* заданного множества $M=\Sigma\times M(\sigma)$ в предположении, что все решения включения (0.14), удовлетворяющие начальному условию $\varphi(0,\sigma,x)=x\in M(\sigma)$, продолжаемы на полуось $\mathbb{R}_+$.

Т е о р е м а 0.7. *Пусть для каждого $\sigma\in\Sigma$ существуют функции $V(\sigma,x)$ и $w(\sigma,z)$ такие, что функция $V(\sigma,x)$ является функцией Ляпунова относительно множества M, при всех $(\sigma,x)\in\Sigma\times\mathbb{R}^n$ выполнено неравенство*

$$V^o_{\max}(\sigma,x)\leqslant w\big(\sigma,V(\sigma,x)\big)$$

и при всех $\sigma\in\Sigma$ имеет место равенство $\varkappa(\sigma)=1$. Тогда множество M статистически инвариантно относительно системы (0.2)*.*

Показано, что для каждого $\sigma\in\Sigma$ для любого множества $X\subseteq M(\sigma)$ верхняя и нижняя относительные частоты поглощения множества достижимости $A(t,\sigma,X)$ множеством M удовлетворяют неравенствам

$$\operatorname{freq}^*(\omega)\geqslant\varkappa^*(\sigma),\quad \operatorname{freq}_*(\omega)\geqslant\varkappa_*(\sigma).$$

В заключение параграфа исследовано свойство *положительной инвариантности* множества M относительно решений включения (0.14). Получены условия, при которых множество достижимости $A(t,\sigma,X)$ поглощается множеством M при каждом $t \geqslant 0$ (следствие 11.2, с. 66).

В § 12 результаты предыдущих параграфов применяются для исследования статистической инвариантности заданного множества M относительно линейной управляемой системы

$$\dot{x} = A(h^t\sigma)x + B(h^t\sigma)u, \quad (t,\sigma,x,u) \in \mathbb{R} \times \Sigma \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m,$$

которая параметризована топологической динамической системой (Σ, h^t).

В четвертой главе получены основные результаты работы, касающиеся вопроса существования слабо инвариантных и статистически слабо инвариантных множеств управляемой системы (0.2) (см. определение (0.3)).

Согласно определению 13.2, множество M называется *слабо инвариантным* относительно системы (0.2), если для любой точки $(\sigma,x) \in M$ найдется хотя бы одно решение $\varphi(t,\sigma,x)$ данной системы с начальным условием $\varphi(0,\sigma,x) = x$, определенное и удовлетворяющее включению

$$\varphi(t,\sigma,x) \in M(h^t\sigma) \quad \text{при всех} \quad t \geqslant 0.$$

В § 13 получены достаточные условия *статистически слабой инвариантности* заданного множества M в предположении, что множество достижимости $A(t,\sigma,X)$ управляемой системы (0.2) существует для всех $\sigma \in \Sigma$ и всех $t \geqslant 0$.

Т е о р е м а 0.8. *Пусть для каждого $\sigma \in \Sigma$ существуют функции $V(\sigma,x)$ и $w(\sigma,z)$ такие, что $V(\sigma,x)$ является функцией Ляпунова относительно множества M, при всех $(\sigma,x) \in \Sigma \times \mathbb{R}^n$ выполнено неравенство*

$$V^o_{\min}(\sigma,x) \leqslant w\big(\sigma, V(\sigma,x)\big)$$

и имеет место равенство $\varkappa^*(\sigma) = 1$. Тогда множество M статистически слабо инвариантно относительно управляемой системы (0.2).

В этом параграфе также получены достаточные условия *слабой инвариантности* множества M относительно системы (0.2) (следствие 13.1, с. 77).

В § 14 получены условия существования предела $\varkappa(\sigma)$ и равенства $\varkappa(\sigma) = 1$ для линейной задачи Коши

$$\dot{z} = a(h^t\sigma)z + b(h^t\sigma), \quad z(0,\sigma) = 0, \quad t \geqslant 0 \tag{0.15}$$

(лемма 14.1, с. 81). Предполагается, что σ является периодической точкой потока $h^t : \Sigma \to \Sigma$, допускающей период T и функции $a(\sigma)$, $b(\sigma)$ непрерывны на множестве Σ.

В § 15 рассматривается задача Коши (0.15) в предположении, что при каждом фиксированном $\sigma \in \Sigma$ функции $t \to a(h^t\sigma)$ и $t \to b(h^t\sigma)$ почти периодические в смысле Бора. Основным результатом этого параграфа является следующее утверждение.

Т е о р е м а 0.9. *Предположим, что для каждого $\sigma \in \Sigma$ имеет место равенство*

$$\lim_{\vartheta \to \infty} \frac{\operatorname{mes}\{t \in [0,\vartheta] : b(h^t\sigma) = 0\}}{\vartheta} = 0,$$

функция $t \to a(h^t\sigma)$ ограничена на $\mathbb{R}_+$, функция $t \to b(h^t\sigma)$ почти периодическая в смысле Бора и удовлетворяет условию Липшица. Если для решения $z(t,\sigma)$ задачи (0.15) *выполнены неравенства*

$$\overline{\lim_{t \to \infty}}\, z(t,\sigma) \leqslant 0, \quad \underline{\lim_{t \to \infty}}\, z(t,\sigma) < 0,$$

то предел $\varkappa(\sigma)$ существует и равен единице.

Доказательство этой теоремы основано на том, что относительная частота попадания в заданное множество обладает всеми свойствами меры, в том числе свойствами счетной аддитивности и непрерывности.

В последнем параграфе главы введены понятия неблуждающего множества достижимости $A(t,\omega)$ системы (0.2) и минимального центра притяжения движения $t \to g^t\omega = \big(h^t\sigma, A(t,\omega)\big)$ (определения 16.2 и 16.3). Получены условия (теоремы $16.1-16.3$) неблуждаемости множества достижимости управляемой системы и условия существования минимального центра притяжения, дополняющие результаты работ [12, гл. 7], [65, ч. 1, гл. 3] и [105, гл. 5].

Основным объектом исследования пятой главы являются статистически инвариантные и статистически слабо инвариантные с вероятностью единица множества управляемой системы со случайными параметрами

$$\dot{x} = f(h^t\sigma, x, u), \quad (t,\sigma,x,u) \in \mathbb{R} \times \Sigma \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m, \tag{0.16}$$

порожденной метрической динамической системой $(\Sigma, \mathfrak{A}, \nu, h^t)$. В частности, здесь изучаются инвариантные множества управляемых систем (0.5) и (0.6). В § 17 построена метрическая динамическая система $(\Sigma, \mathfrak{A}, \nu, h^t)$, которая параметризует управляемые системы (0.5) и (0.6), и поэтому их можно отождествить со стационарным в узком смысле случайным процессом $\xi(h^t\sigma) \doteq \big(A(h^t\sigma), B(h^t\sigma)\big)$, реализации которого являются кусочно-постоянными функциями. В этом параграфе также введены ключевые понятия данной главы.

О п р е д е л е н и е 0.10. Множество M будем называть *статистически инвариантным с вероятностью единица* относительно управляемой системы (0.16), если для почти всех $\sigma \in \Sigma$ выполнено равенство $\operatorname{freq}(\sigma, M(\sigma)) = 1$, то есть

$$\nu\big\{\sigma \in \Sigma : \operatorname{freq}(\sigma, M(\sigma)) = 1\big\} = 1.$$

О п р е д е л е н и е 0.11. Множество M называется *положительно инвариантным с вероятностью единица* относительно системы (0.16), если для любого $t \geqslant 0$ имеет место равенство

$$\nu\big\{\sigma \in \Sigma : A\big(t, \sigma, M(\sigma)\big) \subseteq M(h^t\sigma)\big\} = 1.$$

В следующем параграфе на основании результатов § 11 и § 13 получены достаточные условия статистической инвариантности и статистически слабой инвариантности с вероятностью единица заданного множества M относительно управляемой системы (0.16) (теоремы 18.2 и 18.3).

О п р е д е л е н и е 0.12. Множество M будем называть *статистически слабо инвариантным с вероятностью единица* относительно системы (0.16), если для почти всех $\sigma \in \Sigma$ для любой точки $x \in M(\sigma)$ найдется решение $\varphi(t,\sigma,x)$ системы (0.16) с начальным условием $\varphi(0,\sigma,x) = x$, продолжаемое на полуось $\mathbb{R}_+$, такое, что для этого решения верхняя относительная частота попадания в множество M равна единице:

$$\operatorname{freq}^*(\varphi) \doteq \varlimsup_{\vartheta\to\infty} \frac{\operatorname{mes}\big\{t \in [0,\vartheta] : \varphi(t,\sigma,x) \in M(h^t\sigma)\big\}}{\vartheta} = 1.$$

Далее, множество M называется *слабо инвариантным с вероятностью единица* относительно управляемой системы (0.16), если для почти всех $\sigma \in \Sigma$ для некоторого решения $\varphi(t,\sigma,x)$ с начальным условием

$$\varphi(0,\sigma,x) = x \in M(\sigma)$$

включение $\varphi(t,\sigma,x) \in M(h^t\sigma)$ выполнено при всех $t \geqslant 0$.

В §19 показано, что для проверки инвариантности заданного множества M относительно управляемой системы (0.5) или (0.6) необходимо исследовать поведение решения $z(t,\sigma)$

задачи Коши (0.15) в предположении, что для каждого $\sigma \in \Sigma$ функции $t \to a(h^t\sigma)$ и $t \to b(h^t\sigma)$ кусочно-постоянные и имеют точки разрыва, совпадающие с точками разрыва функции $t \to \xi(h^t\sigma)$. В леммах 19.2 и 19.3 получены условия равенства $\varkappa(\sigma) = 1$ для задачи Коши (0.15), выполненные с вероятностью единица и связанные со сходимостью соответствующей последовательности случайных величин с вероятностью единица. Основные результаты главы доказаны при условии, что для почти всех $\sigma \in \Sigma$ моменты переключения случайного процесса $\xi(h^t\sigma)$ изолированы и число этих моментов бесконечно. Показано, что данное условие выполнено, если функция распределения $F(t)$ длин интервалов между моментами переключения процесса $\xi(h^t\sigma)$ удовлетворяет неравенствам, приведенным в лемме 19.1.

В § 20 на основании результатов предыдущего параграфа получены достаточные условия существования предела $\varkappa(\sigma)$ и равенства $\varkappa(\sigma) = 1$, выполненные с вероятностью единица. Относительно динамической системы $(\Sigma, \mathfrak{A}, \nu, h^t)$ здесь предполагается, что фазовое пространство $\Sigma = \Sigma_1 \times \Sigma_2$, где Σ_1 — пространство числовых последовательностей $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_k, \dots)$, положительные случайные величины $\theta_1, \theta_2, \dots$ независимы и $\theta_2, \theta_3, \dots$ имеют функцию распределения $F(t)$. Далее, пространство

$$\Sigma_2 = \{\varphi : \varphi = (\varphi_0, \varphi_1, \dots \varphi_k, \dots), \varphi_k \in \Psi\}, \quad \text{где} \quad \Psi = \{\psi_1, \dots, \psi_\ell\},$$

и если система

$$\dot z = a(h^t\sigma)z + b(h^t\sigma), \quad (t, \sigma, z) \in \mathbb{R} \times \Sigma \times \mathbb{R} \tag{0.17}$$

находится в состоянии $\psi_i = (a_i, b_i)$, то эта система совпадает с линейным уравнением

$$\dot z = a_i z + b_i, \quad i = 1, \dots, \ell.$$

Предполагаем также, что из любого состояния $\psi_1, \dots, \psi_\ell$ система (0.17) переходит в состояние ψ_i с вероятностью $p_i > 0$, $p_1 + \ldots + p_\ell = 1$ и задано начальное распределение $\pi = (p_1, \dots, p_\ell)$.

Т е о р е м а 0.10. *Предположим, что $a_i \neq 0$ для всех $i = 1, \dots, \ell$, $\ell \geqslant 2$ и найдется такое $j \in \{1, \dots, \ell\}$, что $a_j > 0$. Если имеют место неравенства*

$$\min_{\{i:\, a_i<0\}} \frac{b_i}{a_i} \geqslant \max_{\{i:\, a_i>0\}} \frac{b_i}{a_i}, \qquad \min_{\{i:\, a_i<0\}} \frac{b_i}{a_i} > 0,$$

$$\sum_{i=1}^{\ell} \Big(p_i \int_0^\infty e^{2a_i t} dF(t) \Big) < 1,$$

то для задачи Коши (0.15) равенство $\varkappa(\sigma) = 1$ выполнено с вероятностью единица.

Далее, если $a_i < 0$ для всех $i = 1, \dots, \ell$ и $\min\limits_{\{i=1,\dots,\ell\}} \dfrac{b_i}{a_i} > 0$, то равенство $\varkappa(\sigma) = 1$ выполнено для всех $\sigma \in \Sigma$.

В § 21 рассматриваются примеры множеств, статистически инвариантных с вероятностью единица относительно управляемых систем (0.5) и (0.6). Здесь также получены условия равенства $\varkappa(\sigma) = 1$ для задачи

$$\dot z = b(h^t\sigma), \quad z(0, \sigma) = 0, \quad t \geqslant 0,$$

выполненные с вероятностью единица (см. пример 21.1, с. 113).

В шестой главе исследуются условия полной управляемости на отрезке $I = [t_0, t_1]$ линейной нестационарной системы

$$\dot x = A(t)x + B(t)u, \quad (t, x, u) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m, \tag{0.18}$$

которая отождествляется с функцией $t \to S(t) \doteq \big(A(t), B(t)\big) \in M(n, n+m)$, ее задающей и называется системой S. Рассматривается так называемый критический случай, то есть предполагается, что ранг матрицы Н. Н. Красовского $K(t, S)$ не превосходит $n - 1$ для всех $t \in I$. Напомним, что

$$K(t, S) \doteq \big\{K_0(t, S), \dots, K_{n-1}(t, S)\big\}, \quad \text{где}$$

$$K_0(t,S)=B(t),\ldots,K_i(t)=A(t)K_{i-1}(t,S)-\dot K_{i-1}(t,S),\quad i=1,\ldots,n-1.$$

В § 22 приведены некоторые известные результаты о полной управляемости системы S и получены утверждения о структуре пространства управляемости $L(S,I)$ данной системы на отрезке I (леммы 22.2 и 22.3).

В следующем параграфе на основании результатов §22 получены утверждения о размерности и структуре пространства управляемости $L(S,I)$, выраженные в терминах матрицы Красовского $K(t,S)$. В теореме 23.2 показано, что размерность пространства управляемости

$$\dim L(S,I)\geqslant \operatorname{rank} K(t,S)\quad \text{для всех}\quad t\in I.$$

Далее, получены условия, при которых $\dim L(S,I)=\operatorname{rank} K(t,S)$.

Т е о р е м а 0.11. *Пусть целые числа m и r удовлетворяют неравенствам $1\leqslant m\leqslant n-1$, $m\leqslant rm\leqslant n-m$ и для всех $t\in I$ имеют место равенства*

$$\operatorname{rank} K(t,S)=\operatorname{rank}\big(K_0(t,S),\ldots,K_{r-1}(t,S)\big)=rm.$$

Тогда $\dim L(S,I)=rm$ и, следовательно, система S не является вполне управляемой на отрезке I.

Т е о р е м а 0.12. *Пусть $\operatorname{rank} K(t,S)\equiv r$ для всех $t\in I=[t_0,t_1]$. Тогда пространство управляемости $L(S,I)$ удовлетворяет равенствам*

$$L(S,I)=K(t_0,S)\,\mathbb{R}^{nm}\quad и\quad \dim L(S,I)=r.$$

В последнем параграфе главы получены необходимые и достаточные условия полной управляемости линейной системы S в критическом случае. В лемме 24.1 показано, что если $\operatorname{rank} K(t,S)\equiv r$ для всех $t\in\mathfrak{I}\doteq(t_0,t_1)$, то матрица $K(t,S)$ имеет r столбцов $k_{i_1}(t),\ldots,k_{i_r}(t)$, линейно независимых в $\mathbb{R}^n$ для каждого $t\in\mathfrak{I}$, за возможным исключением счетного числа точек $\{\tau_1,\tau_2,\ldots\}$. По векторам $k_{i_1}(t),\ldots,k_{i_r}(t)$ с помощью процесса ортогонализации построим ортонормированные векторы $\ell_1(t),\ldots,\ell_r(t)$ и рассмотрим следующие пределы:

$$\ell_i(\tau-0)\doteq\lim_{t\to\tau-0}\ell_i(t),\quad \ell_i(\tau+0)\doteq\lim_{t\to\tau+0}\ell_i(t).$$

Т е о р е м а 0.13. *Пусть $\operatorname{rank} K(t,S)\equiv r_1$ при всех $t\in(t_0,\tau)$ и $\operatorname{rank} K(t,S)\equiv r_2$ при всех $t\in(\tau,t_1)$. Если пределы $\ell_1(\tau-0),\ldots,\ell_{r_1}(\tau-0),\ell_1(\tau+0),\ldots,\ell_{r_2}(\tau+0)$ существуют, то условие*

$$\operatorname{Lin}\big(\ell_1(\tau-0),\ldots,\ell_{r_1}(\tau-0),\ell_1(\tau+0),\ldots,\ell_{r_2}(\tau+0)\big)=\mathbb{R}^n$$

является необходимым и достаточным условием полной управляемости системы S на отрезке $I=[t_0,t_1]$.

Основным предметом исследования седьмой главы является задача о существовании неупреждающего управления для линейной нестационарной системы

$$\dot x=A(h^t\sigma)x+B(h^t\sigma)u,\quad (t,\sigma,x,u)\in\mathbb{R}\times\Sigma\times\mathbb{R}^n\times U,\tag{0.19}$$

параметризованной метрической динамической системой $(\Sigma,\mathfrak{A},\nu,h^t)$, построенной в §17 (предполагаем, что множество $U\subset\mathbb{R}^m$ выпукло, компактно и содержит нуль в своей внутренности относительно $\mathbb{R}^m$). Позиционное управление $u_\sigma(t,x)$ называется *неупреждающим* на отрезке $[t_0,t_1]$, если для построения этого управления в точке (τ,x), $\tau\in[t_0,t_1]$ используется информация о матрицах $A(h^t\sigma)$ и $B(h^t\sigma)$ только при $t\leqslant\tau$ и не используется информация об этих матрицах при $t>\tau$, то есть информация о поведении системы «в будущем».

Систему (0.19) будем отождествлять со стационарным в узком смысле случайным процессом $\xi(h^t\sigma) \doteq \big(A(h^t\sigma), B(h^t\sigma)\big)$ и называть системой ξ. Предполагаем, что для каждого $\sigma \in \Sigma$ функция $t \to \xi(h^t\sigma)$ переменного t кусочно-постоянная и принимает значения в множестве $\Psi = \{\psi_i\}_{i=1}^{\ell}$ — конечном множестве матричных пар $\psi_i \doteq (A_i, B_i)$, которые называются состояниями данной системы. Таким образом, если система ξ находится в состоянии ψ_i на промежутке времени $[t_0, t_1)$, то эта система на данном промежутке совпадает с детерминированной системой

$$\dot{x} = A_i x + B_i u, \quad (x, u) \in \mathbb{R}^n \times U,$$

которую назовем системой ψ_i. Предполагаем, что для системы ξ вероятности нахождения в состояниях $\psi_1, \dots, \psi_\ell$ задаются вектором $\pi = (\pi_1, \dots, \pi_\ell)$, а вероятности p_{ij} перехода из состояния ψ_i в состояние ψ_j образуют матрицу $P = (p_{ij})_{i,j=1\dots\ell}$, которая является матрицей переходных вероятностей некоторой однородной цепи Маркова ζ. Основные результаты главы получены в предположении, что существуют постоянные α и β, $0 < \alpha < \beta < \infty$ такие, что длины интевалов $\theta_2, \theta_3, \dots$ между переключениями случайного процесса $\xi(h^t\sigma)$ удовлетворяют неравенствам $\alpha \leqslant \theta_k \leqslant \beta$, $k = 2, 3\dots$

В § 25 показано, что для построения неупреждающего управления для системы (0.19) должна существовать конечная последовательность $w = (\varphi_1, \dots, \varphi_k)$ состояний φ_i множества Ψ (которая названа словом w), обладающая следующими свойствами. Для слова w можно построить множества $D_1, \dots, D_k$ такие, что любую начальную точку x_1 системы ξ из множества D_1 (которое является некоторой окрестностью начала координат) можно при помощи программного управления перевести в точку x_2 множества D_2 за время α; точку x_2 можно перевести в точку $x_3 \in D_3$ за время α, и т. д., точку x_k множества D_k перевести в нуль также за время α. Кроме того, чтобы для системы ξ существовало неупреждающее управление, для множеств $D_1, \dots, D_k$ должны существовать позиционные управления, которые удерживают траекторию решения системы, выходящую из точек $D_1, \dots, D_k$ в этом же множестве до следующего момента переключения системы, в каком бы состоянии из множества Ψ не находилась данная система. Условия, которым должны удовлетворять множества $D_1, \dots, D_k$ и система ξ для существования требуемых управлений, получены в лемме 26.1.

В §§ 26 и 27 получены достаточные условия существования неупреждающего управления и оценка снизу вероятности того, что система ξ неупреждающе локально управляема на заданном отрезке $[0, T]$. В § 26 рассмотрен случай, когда множество Ψ содержит произвольное конечное число состояний. Для слова $w = (\varphi_1, \dots, \varphi_k)$ построена детерминированная линейная система S, которая рассматривается на отрезке $[0, k\alpha]$, причем на промежутке $[0, \alpha)$ система S совпадает с системой φ_1, на $[\alpha, 2\alpha)$ совпадает с φ_2 и так далее, на $[(k-1)\alpha, k\alpha]$ совпадает с φ_k. Ведущую роль в построении главы играет теорема 26.1, в которой получены условия существования неупреждающего управления для системы со случайными параметрами ξ в предположении, что соответствующая ей детерминированная система S локально управляема на отрезке $[0, k\alpha]$.

В § 27 рассмотрен случай, когда множество Ψ содержит два сообщающихся состояния ψ_1, ψ_2. В теореме 27.1 получены условия, которым должны удовлетворять пространства управляемости систем φ_1 и φ_2, чтобы система ξ являлась неупреждающе локально управляемой на отрезке $[0, T]$. В данном параграфе выясняется, что для существования неупреждающего управления для системы ξ можно значительно ослабить условия, которым удовлетворяют детерминированные системы φ_1, φ_2. В §26 и §27 также рассматриваются примеры, иллюстрирующие доказанные утверждения.

ГЛАВА I. ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА ПРОСТРАНСТВА $\mathrm{clcv}(\mathbb{R}^n)$

В этой главе рассматривается пространство непустых *замкнутых выпуклых* (но не обязательно компактных) множеств в $\mathbb{R}^n$ *с метрикой Хаусдорфа–Бебутова,* которое обозначается $\mathrm{clcv}(\mathbb{R}^n)$ (см. [115, 116, 119, 137]). Необходимость в таком рассмотрении связана с рядом задач оптимального управления асимптотическими характеристиками управляемой системы

$$\dot{x} = f(t, x, u), \quad (t, x) \in \mathbb{R}^{1+n}, \quad u \in U(t, x), \tag{I.1}$$

где функция U принимает значения в пространстве $\mathrm{clcv}(\mathbb{R}^m)$.

Определим функцию $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathrm{clcv}(\mathbb{R}^n)$:

$$F(t, x) = \mathrm{co}\big\{y \in \mathbb{R}^n : \, y = f(t, x, u), \; u \in U(t, x)\big\}$$

и поставим в соответствие системе (I.1) дифференциальное включение

$$\dot{x} \in F(t, x), \quad (t, x) \in \mathbb{R}^{1+n}, \tag{I.2}$$

правая часть которого имеет выпуклые замкнутые, но не обязательно компактные образы при фиксированных (t, x). В случае, когда правая часть включения (I.2) имеет компактные образы, обычно применяется пространство $\mathrm{comp}(\mathbb{R}^n)$ с метрикой Хаусдорфа dist. Если же правая часть принимает значения в пространстве $\mathrm{clcv}(\mathbb{R}^n)$, необходимо оперировать с множествами, которые могут находиться на бесконечном расстоянии друг от друга, поэтому такие фундаментальные понятия, как непрерывность или полунепрерывность сверху или снизу в точке (t_0, x_0) в метрике Хаусдорфа теряют содержательный смысл. Таким образом, для пространства $\mathrm{clcv}(\mathbb{R}^n)$ возникает необходимость введения другой метрики, которая названа метрикой Хаусдорфа–Бебутова и принимает конечные значения для любых, как ограниченных, так и неограниченных, подмножеств $\mathbb{R}^n$.

В данной главе изучены основные свойства пространства $\mathrm{clcv}(\mathbb{R}^n)$, показано, что это пространство является полным, а также то, что сходимость в метрике Хаусдорфа–Бебутова равносильна сходимости, равномерной на компактах в $\mathbb{R}^n$. В последнем параграфе вводятся определения функций, полунепрерывных сверху, снизу и непрерывных в метрике Хаусдорфа–Бебутова, а также исследуются свойства полунепрерывной сверху функции, связанные с замкнутостью ее графика.

§ 1. Полуотклонения и метрика Хаусдорфа–Бебутова

Пространство непустых *компактных* подмножеств в $\mathbb{R}^n$ будем обозначать $\mathrm{comp}(\mathbb{R}^n)$. В пространстве $\mathrm{comp}(\mathbb{R}^n)$ определена метрика Хаусдорфа

$$\mathrm{dist}(A, B) = \max\{d(A, B), d(B, A)\}, \tag{1.1}$$

где $d(A, B) \doteq \max\limits_{a \in A} \varrho(a, B)$ — *полуотклонение* множества A от множества B, $\varrho(a, B) \doteq \min\limits_{b \in B} |a - b|$ — расстояние от точки a до множества B.

Напомним, что для любых непустых компактных подмножеств A, B и C имеют место следующие свойства:

$$\begin{gathered} 0 \leqslant d(A, B) \leqslant \mathrm{dist}(A, B), \quad \mathrm{dist}(A, B) = \mathrm{dist}(B, A), \\ d(A, B) = 0 \Longleftrightarrow A \subseteq B, \quad \mathrm{dist}(A, B) = 0 \Longleftrightarrow A = B, \\ d(A, B) \leqslant d(A, C) + d(C, B), \\ \mathrm{dist}(A, B) \leqslant \mathrm{dist}(A, C) + \mathrm{dist}(C, B). \end{gathered}$$

Отметим также, что неравенство $d(A, B) \leqslant \varepsilon$ равносильно включению $A \subseteq B + O_\varepsilon(0)$, которое означает, что множество A содержится в замкнутой ε-окрестности множества B, а неравенство

$\operatorname{dist}(A, B) \leqslant \varepsilon$ равносильно тому, что каждое из множеств A и B содержится в замкнутой ε-окрестности другого (см., например, [170, с. 58]).

Пространство, состоящее из непустых *выпуклых замкнутых*, но не обязательно ограниченных подмножеств $\mathbb{R}^n$, будем обозначать $\operatorname{clcv}(\mathbb{R}^n)$. Определим расстояние $\operatorname{Dist}(F, G)$ между множествами F и G пространства $\operatorname{clcv}(\mathbb{R}^n)$. Поскольку множество F выпукло и замкнуто, то оно имеет единственную точку, ближайшую к нулю пространства $\mathbb{R}^n$ (см., например, [170, с. 48]). Обозначим эту точку f_0, тогда $|f_0| = \min\limits_{f \in F} |f|$. Пусть, кроме того, задано множество $G \in \operatorname{clcv}(\mathbb{R}^n)$ и g_0 — ближайшая к нулю точка данного множества. Далее, обозначим через $O_r(f_0)$ и $O_r(g_0)$ замкнутые шары радиуса r с центрами в точках f_0 и g_0 из $\mathbb{R}^n$. Введем в рассмотрение компактные при каждом $r \in [0, \infty)$ множества (см. рис. 1)

$$F_r = F \bigcap O_r(f_0), \quad G_r = G \bigcap O_r(g_0),$$

полуотклонения $d(F_r, G_r)$, $d(G_r, F_r)$, где

$$d(F_r, G_r) = \max_{f \in F_r} \varrho(f, G_r), \quad d(G_r, F_r) = \max_{g \in G_r} \varrho(g, F_r)$$

и метрику Хаусдорфа

$$\operatorname{dist}(F_r, G_r) \doteq \max\bigl\{d(F_r, G_r), d(G_r, F_r)\bigr\}. \tag{1.2}$$

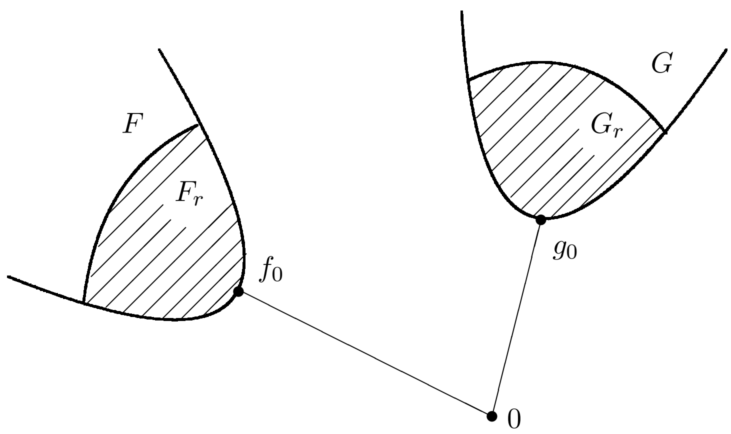

Рис. 1. Множества F, G и F_r, G_r

Далее, введем в рассмотрение два полуотклонения (две полуметрики)

$$\begin{aligned} D(F, G) &= \sup_{r > 0} \min\bigl\{d(F_r, G_r),\ 1/r\bigr\}, \\ D(G, F) &= \sup_{r > 0} \min\bigl\{d(G_r, F_r),\ 1/r\bigr\} \end{aligned} \tag{1.3}$$

и расстояние

$$\operatorname{Dist}(F, G) = \max\bigl\{D(F, G),\ D(G, F)\bigr\}, \tag{1.4}$$

которое назовем *метрикой Хаусдорфа–Бебутова* (см. [116, 119]). Из (1.3), (1.4) следует, что расстояние $\operatorname{Dist}(F, G)$ также задается равенством

$$\operatorname{Dist}(F, G) = \sup_{r > 0} \min\bigl\{\operatorname{dist}(F_r, G_r), 1/r\bigr\}, \tag{1.5}$$

где $\operatorname{dist}(F_r, G_r)$ — метрика Хаусдорфа (1.2). Следовательно, неравенство $\operatorname{Dist}(F, G) \leqslant \varepsilon$ эквивалентно неравенству $\operatorname{dist}(F_r, G_r) \leqslant \varepsilon$, выполненному при всех $r \in (0, 1/\varepsilon]$. Аналогично, неравенство $D(F, G) \leqslant \varepsilon$ эквивалентно неравенству $d(F_r, G_r) \leqslant \varepsilon$, выполненному при всех $r \in (0, 1/\varepsilon]$.

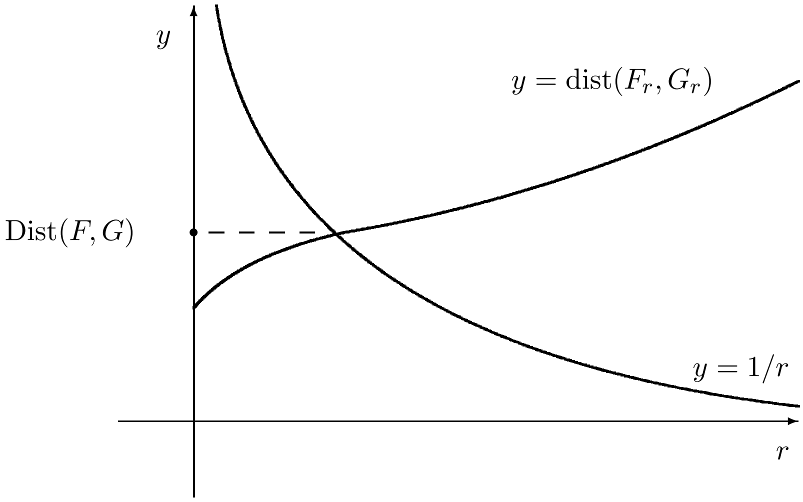

Рис. 2. Расстояния $\mathrm{dist}(F_r, G_r)$ и $\mathrm{Dist}(F, G)$

П р и м е р 1.1. Пусть $F = L_1$ и $G = L_2$ — два луча в $\mathbb{R}^n$ с вершинами в начале координат, наименьший угол между которыми равен α, $\alpha \in [0, \pi]$. Отметим, что расстояние по Хаусдорфу между лучами L_1 и L_2 равно нулю, если $\alpha = 0$ и равно бесконечности, если $\alpha > 0$.

Найдем расстояние $\mathrm{Dist}(L_1, L_2)$. Понятно, что множества F_r и G_r при $r > 0$ являются отрезками длиной r, лежащими на данных лучах, причем одна из вершин каждого отрезка находится в начале координат, поэтому

$$\mathrm{dist}(F_r, G_r) = \begin{cases} r \sin\alpha, & \alpha \in [0, \pi/2], \\ r, & \alpha \in (\pi/2, \pi]. \end{cases}$$

Далее, из определения (1.5) и равенства $r \sin\alpha = r^{-1}$ получаем $r = (\sin\alpha)^{-\frac{1}{2}}$ и, следовательно, $\mathrm{Dist}(L_1, L_2) = \sqrt{\sin\alpha}$, если $\alpha \in [0, \pi/2]$. Аналогично находим, что $\mathrm{Dist}(L_1, L_2) = 1$, если $\alpha \in (\pi/2, \pi]$.

Л е м м а 1.1 (см. [116]). *Для любых* $F, G, Q \in \mathrm{clcv}(\mathbb{R}^n)$ *имеют место следующие свойства:*

1) $0 \leqslant D(F, G) < \infty$ *и равенство* $D(F, G) = 0$ *выполнено в том и только в том случае, если* $F \subseteq G$ *и* $f_0 = g_0$, *где* $|f_0| = \min\limits_{f \in F} |f|$, $|g_0| = \min\limits_{g \in G} |g|$;

2) *имеют место неравенства треугольника*

$$D(F, G) \leqslant D(F, Q) + D(Q, G), \quad D(G, F) \leqslant D(G, Q) + D(Q, F); \tag{1.6}$$

3) $0 \leqslant \mathrm{Dist}(F, G) = \mathrm{Dist}(G, F) < \infty$ *и равенство нулю* $\mathrm{Dist}(F, G) = 0$ *выполнено в том и только в том случае, если* $F = G$;

4) *имеет место неравенство треугольника*

$$\mathrm{Dist}(F, G) \leqslant \mathrm{Dist}(F, Q) + \mathrm{Dist}(Q, G). \tag{1.7}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1) Из определения полуотклонения $D(F, G)$ непосредственно следует, что равенство $D(F, G) = 0$ выполнено в том и только том случае, когда $d(F_r, G_r) = 0$ при всех $r \geqslant 0$. Следовательно, при всех $r \geqslant 0$ выполнено включение

$$F_r \doteq F \bigcap O_r(f_0) \subseteq G_r \doteq G \bigcap O_r(g_0).$$

Поэтому выполнено равенство $f_0 = g_0$ и включение $F \subseteq G$. Далее, равенство $\mathrm{Dist}(F, G) = 0$ равносильно равенству $\mathrm{dist}(F_r, G_r) = 0$, выполненному для всех $r \geqslant 0$, которое означает, что $F_r = G_r$ и, следовательно, множества F и G совпадают.

Покажем, что для любых множеств $F, G \in \mathrm{clcv}(\mathbb{R}^n)$ выполнены неравенства $D(F,G) < \infty$, $D(G,F) < \infty$ и $\mathrm{Dist}(F,G) < \infty$. Для этого отметим, что имеют место следующие включения

$$F_r \subseteq O_r(f_0) \subseteq O_{|f_0-g_0|+r}(g_0) \subseteq G_r + O_{|f_0-g_0|+r}(0),$$

из которых, по свойствам полуотклонений Хаусдорфа, следует неравенство

$$d(F_r, G_r) \leqslant |f_0 - g_0| + r.$$

Покажем, что из последнего неравенства и определения (1.3) следует неравенство для полуотклонения Хаусдорфа–Бебутова:

$$D(F,G) \leqslant \frac{|f_0-g_0| + \sqrt{|f_0-g_0|^2+4}}{2} < \infty. \tag{1.8}$$

Действительно, для полуотклонения выполнено неравенство $D(F,G) \leqslant \dfrac{1}{r_1}$, где

$$r_1 = \frac{-|f_0-g_0| + \sqrt{|f_0-g_0|^2+4}}{2}$$

— положительный корень уравнения $|f_0 - g_0| + r = \dfrac{1}{r}$. Неравенство, аналогичное (1.8), верно и для полуотклонения $D(G,F)$, поэтому из определения (1.4) следует, что

$$\mathrm{Dist}(F,G) \leqslant \frac{|f_0-g_0| + \sqrt{|f_0-g_0|^2+4}}{2} < \infty. \tag{1.9}$$

2) Докажем первое неравенство в (1.6). Обозначим

$$f = r^{-1}, \;\; a = d(F_r, G_r), \;\; b = d(F_r, Q_r), \;\; c = d(Q_r, G_r),$$

тогда, по свойствам полуотклонений Хаусдорфа, выполнено неравенство треугольника $a \leqslant b + c$. Зафиксируем $r > 0$ и покажем, что из неравенства $a \leqslant b + c$ следует неравенство

$$\min\{a, f\} \leqslant \min\{b, f\} + \min\{c, f\}. \tag{1.10}$$

Рассмотрим возможные случаи. Предположим сначала, что $a \leqslant f$. Тогда, если $b \leqslant f$ и $c \leqslant f$, то несложно видеть, что неравенство (1.10) выполнено. Далее, если $f \leqslant b$ и $c \leqslant f$, то из неравенства $a \leqslant f$ следует неравенство $a \leqslant f + c$, и тем самым выполнено соотношение (1.10). Аналогично, если выполнены неравенства $b \leqslant f$ и $f \leqslant c$, то имеет место $a \leqslant b + f$ и, следовательно, (1.10). Несложно проверяется также, что из неравенств $f \leqslant b$ и $f \leqslant c$ следует неравенство (1.10).

Пусть далее выполнено неравенство $f \leqslant a$. Тогда, если $b \leqslant f$ и $c \leqslant f$, то из неравенства треугольника $a \leqslant b + c$ получаем оценки $f \leqslant a \leqslant b + c$ и следовательно, — неравенство (1.10). Если $f \leqslant b$ и $c \leqslant f$, или $b \leqslant f$ и $f \leqslant c$, то имеет место соотношение $f \leqslant f + c$ или $f \leqslant b + f$ соответственно, и, значит, неравенство (1.10) выполнено. При $f \leqslant b$, $f \leqslant c$ очевидно, что неравенство (1.10) также имеет место.

Таким образом, неравенство (1.10) выполнено при всех $r > 0$. Следовательно, имеет место соотношение

$$\sup_{r>0} \min\{a, f\} \leqslant \sup_{r>0} \big[\min\{b, f\} + \min\{c, f\}\big],$$

которое, в силу неравенства $\sup\limits_{r>0}[\alpha(r) + \beta(r)] \leqslant \sup\limits_{r>0} \alpha(r) + \sup\limits_{r>0} \beta(r)$, эквивалентно соотношению

$$\sup_{r>0} \min\{a, f\} \;\leqslant\; \sup_{r>0} \min\{b, f\} + \sup_{r>0} \min\{c, f\}.$$

3) Равенство $\mathrm{Dist}(F,G) = \mathrm{Dist}(G,F)$ следует из определения (1.5) и равенства

$$\mathrm{dist}(F_r, G_r) = \mathrm{dist}(G_r, F_r);$$

остальные свойства следуют из свойства 1).

4) Доказательство неравенства (1.7) практически не отличается от доказательства неравенств (1.6).

Л е м м а 1.2. *Пусть множества* $F, G \in \operatorname{clcv}(\mathbb{R}^n)$, *тогда функции*

$$r \to d(F_r, G_r), \quad r \to d(G_r, F_r) \quad \text{и} \quad r \to \operatorname{dist}(F_r, G_r)$$

непрерывны на $[0, \infty)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Докажем, что для любых $r_0, r \in [0, \infty)$ выполнено неравенство

$$d(F_r, F_{r_0}) \leqslant |r - r_0|. \tag{1.11}$$

Отметим, что это неравенство выполнено, если $F_r = F_{r_0}$ для некоторых $r_0, r \in [0, \infty)$. Если $r \leqslant r_0$, то $F_r \subseteq F_{r_0}$, поэтому полуотклонение $d(F_r, F_{r_0}) = 0$ и неравенство (1.11) выполнено. Рассмотрим случай, когда $r > r_0$ и множество F_r не совпадает с F_{r_0}, тогда $F_{r_0} \subset F_r$. Обозначим через $S_{r_0}(f_0)$ сферу радиуса r_0 с центром в точке f_0, где f_0 — точка множества F, ближайшая к нулю (см. рис. 3). Из выпуклости множества F_r следует, что для любой точки $f \in F_r$ отрезок ff_0 полностью содержится в F_r. Для фиксированной точки $f \in F_r \backslash F_{r_0}$ обозначим через $f_1 \in F_{r_0}$ точку пересечения отрезка ff_0 и сферы $S_{r_0}(f_0)$. Поскольку f_1 является точкой множества F_{r_0}, ближайшей к точке f, то для любой точки $f \in F_r \setminus F_{r_0}$ выполнено неравенство

$$\varrho\,(f, F_{r_0}) = |f - f_1| \leqslant |r - r_0|,$$

из которого следует, что

$$d(F_r, F_{r_0}) = \max_{f \in F_r} \varrho(f, F_{r_0}) \leqslant |r - r_0|.$$

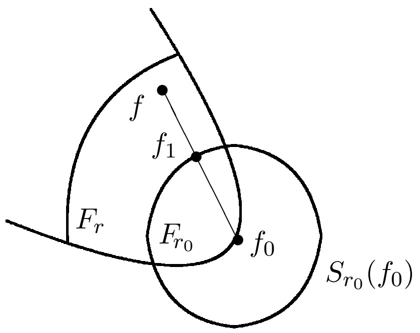

Рис. 3. Точка $f_1 \in F_{r_0}$ является точкой пересечения отрезка ff_0 и сферы $S_{r_0}(f_0)$

Далее, из неравенства треугольника для полуотклонений по Хаусдорфу и неравенства (1.11) получаем

$$d(F_r, G_r) \leqslant d(F_r, F_{r_0}) + d(F_{r_0}, G_r) \leqslant$$
$$\leqslant d(F_r, F_{r_0}) + d(F_{r_0}, G_{r_0}) + d(G_{r_0}, G_r) \leqslant d(F_{r_0}, G_{r_0}) + 2|r - r_0|.$$

Также можно показать, что $d(F_{r_0}, G_{r_0}) \leqslant d(F_r, G_r) + 2|r - r_0|$. Таким образом, для любых $r_0, r \in [0, \infty)$ имеет место неравенство

$$|d(F_r, G_r) - d(F_{r_0}, G_{r_0})| \leqslant 2|r - r_0|,$$

из которого следует непрерывность функции $r \to d(F_r, G_r)$ в произвольной точке $r_0 \in [0, \infty)$. Аналогично доказывается, что функции $r \to d(G_r, F_r)$ и $r \to \operatorname{dist}(F_r, G_r)$ также непрерывны на $[0, \infty)$.

§ 2. Основные свойства пространста $\mathrm{clcv}(\mathbb{R}^n)$

О п р е д е л е н и е 2.1. Будем говорить, что последовательность множеств $\{F^i\}_{i=1}^{\infty}$, где $F^i \in \mathrm{clcv}(\mathbb{R}^n)$, *сходится к множеству* $F \in \mathrm{clcv}(\mathbb{R}^n)$ в метрике Хаусдорфа–Бебутова, если для любого $\varepsilon > 0$, всех $r \in [0, 1/\varepsilon]$ и всех, достаточно больших индексов i, имеет место неравенство

$$\mathrm{dist}(F_r^i, F_r) \leqslant \varepsilon.$$

Такую сходимость будем называть также сходимостью, *равномерной на компактах* в $\mathbb{R}^n$.

Формулируемые ниже утверждения получены в работе [116].

Т е о р е м а 2.1. *Предположим, что последовательность множеств* $\{F^i\}_{i=1}^{\infty}$ *такова, что* $F^i \in \mathrm{clcv}(\mathbb{R}^n)$, $i \in \mathbb{N}$. *Тогда равенство*

$$\lim_{i\to\infty} \mathrm{Dist}(F^i, F) = 0$$

эквивалентно равномерной на компактах в $\mathbb{R}^n$ *сходимости последовательности* $\{F^i\}_{i=1}^{\infty}$ *к множеству* $F \in \mathrm{clcv}(\mathbb{R}^n)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Равенство $\lim\limits_{i\to\infty} \mathrm{Dist}(F^i, F) = 0$ эквивалентно совокупности неравенств $\mathrm{Dist}(F^i, F) \leqslant \varepsilon_i$, где $\varepsilon_i \to 0$. Далее, неравенство $\mathrm{Dist}(F^i, F) \leqslant \varepsilon_i$ эквивалентно двум неравенствам

$$D(F^i, F) \leqslant \varepsilon_i, \quad D(F, F^i) \leqslant \varepsilon_i,$$

которые равносильны неравенствам

$$d(F_r^i, F_r) \leqslant \varepsilon_i, \quad d(F_r, F_r^i) \leqslant \varepsilon_i, \tag{2.1}$$

выполненным при всех $r \in (0, 1/\varepsilon_i]$. В свою очередь, неравенства (2.1) равносильны неравенству $\mathrm{dist}(F_r^i, F_r) \leqslant \varepsilon_i$, которое выполнено при всех $r \in (0, 1/\varepsilon_i]$. Из непрерывности функции $r \to \mathrm{dist}(F_r^i, F_r)$ (см. лемму 1.2) следует, что это неравенство выполнено также при всех $r \in [0, 1/\varepsilon_i]$, что означает, в силу определения 2.1, сходимость, равномерную на компактах в пространстве $\mathbb{R}^n$.

О п р е д е л е н и е 2.2. Будем говорить, что последовательность множеств $\{F^i\}_{i=1}^{\infty}$, где $F^i \in \mathrm{clcv}(\mathbb{R}^n)$, имеет *равномерный на компактах предел сверху* $F^* \in \mathrm{clcv}(\mathbb{R}^n)$, если для любого $\varepsilon > 0$, всех $r \in (0, 1/\varepsilon]$ и каждого, достаточно большого индекса i, имеют место включения

$$f_0^i \in f_0^* + O_\varepsilon(0) \quad \text{и} \quad F_r^i \subseteq F_r^* + O_\varepsilon(0).$$

Здесь через f_0^i и f_0^* обозначены точки множеств F^i и F^*, ближайшие к нулю пространства $\mathbb{R}^n$, $F_r^i \doteq F^i \bigcap O_r(f_0^i)$, $F_r^* \doteq F^* \bigcap O_r(f_0^*)$.

В свою очередь, последовательность $\{F^i\}_{i=1}^{\infty}$, где $F^i \in \mathrm{clcv}(\mathbb{R}^n)$, имеет *равномерный на компактах предел снизу* $F_* \in \mathrm{clcv}(\mathbb{R}^n)$, если для любого $\varepsilon > 0$, всех $r \in (0, 1/\varepsilon]$ и каждого, достаточно большого i, имеют место два включения

$$f_{*0} \in f_0^i + O_\varepsilon(0) \quad \text{и} \quad F_{*r} \subseteq F_r^i + O_\varepsilon(0).$$

Л е м м а 2.1. *Пусть последовательность множеств* $\{F^i\}_{i=1}^{\infty}$ *такова, что* $F^i \in \mathrm{clcv}(\mathbb{R}^n)$. *Тогда равенство* $\lim\limits_{i\to\infty} D(F^i, F^*) = 0$, *где* $F^* \in \mathrm{clcv}(\mathbb{R}^n)$, *обеспечивает равномерный на компактах предел сверху, а равенство* $\lim\limits_{i\to\infty} D(F_*, F^i) = 0$, *где* $F_* \in \mathrm{clcv}(\mathbb{R}^n)$, *обеспечивает равномерный на компактах предел снизу последовательности* $\{F^i\}_{i=1}^{\infty}$.

Доказательство практически не отличается от доказательства теоремы 2.1. Действительно, равенство $\lim\limits_{i\to\infty} D(F^i, F^*) = 0$ эквивалентно семейству неравенств

$$D(F^i, F^*) \leqslant \varepsilon_i, \quad \varepsilon_i \to 0.$$

В силу определения (1.3) полуотклонения D, неравенство $D(F^i, F^*) \leqslant \varepsilon_i$ эквивалентно при каждом i неравенству $d(F^i_r, F^*_r) \leqslant \varepsilon_i$, выполненному при всех $r \in (0, 1/\varepsilon_i]$. Из непрерывности функции $r \to d(F^i_r, F^*_r)$ следует, что последнее неравенство выполнено также при всех $r \in [0, 1/\varepsilon_i]$, поэтому имеют место включения

$$f^i_0 \in f^*_0 + O_{\varepsilon_i}(0), \quad F^i_r \subseteq F^*_r + O_{\varepsilon_i}(0),$$

то есть последовательность $\{F^i\}_{i=1}^{\infty}$ имеет равномерный на компактах предел сверху. Второе утверждение доказывается аналогично.

Пример 2.1. Найдем расстояние в смысле метрики Хаусдорфа–Бебутова и расстояние по Хаусдорфу между компактными множествами

$$F = \big\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \, x_1^2 + x_2^2 \leqslant 1\big\},$$
$$G = \big\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \, (x_1 - 4)^2 + x_2^2 \leqslant 4\big\}.$$

Для множества F ближайшей к нулю точкой является начало координат, для G это точка $(2, 0)$, поэтому для любого $r \geqslant 0$ множества F_r и G_r задаются неравенствами

$$F_r = \big\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \, x_1^2 + x_2^2 \leqslant 1, \;\; x_1^2 + x_2^2 \leqslant r^2\big\},$$
$$G_r = \big\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \, (x_1 - 4)^2 + x_2^2 \leqslant 4, \;\; (x_1 - 2)^2 + x_2^2 \leqslant r^2\big\}.$$

Следовательно, имеют место равенства для расстояний по Хаусдорфу между множествами F_r и G_r :

$$\operatorname{dist}(F_r, G_r) = \begin{cases} 2 + r & \text{при} \quad r \in [0, 1], \\ 3 & \text{при} \quad r \in (1, 2], \\ 1 + r & \text{при} \quad r \in (2, 4], \\ 5 & \text{при} \quad r > 4. \end{cases}$$

Поэтому в силу определения (1.5) имеет место равенство $\operatorname{Dist}(F, G) = \dfrac{1}{r_1}$, где $r_1 = \sqrt{2} - 1$ является положительным корнем уравнения $2 + r = \dfrac{1}{r}$ (см. рис. 4). Таким образом, расстояние $\operatorname{Dist}(F, G) = \sqrt{2} + 1$; расстояние по Хаусдорфу между данными множествами $\operatorname{dist}(F, G) = 5$.

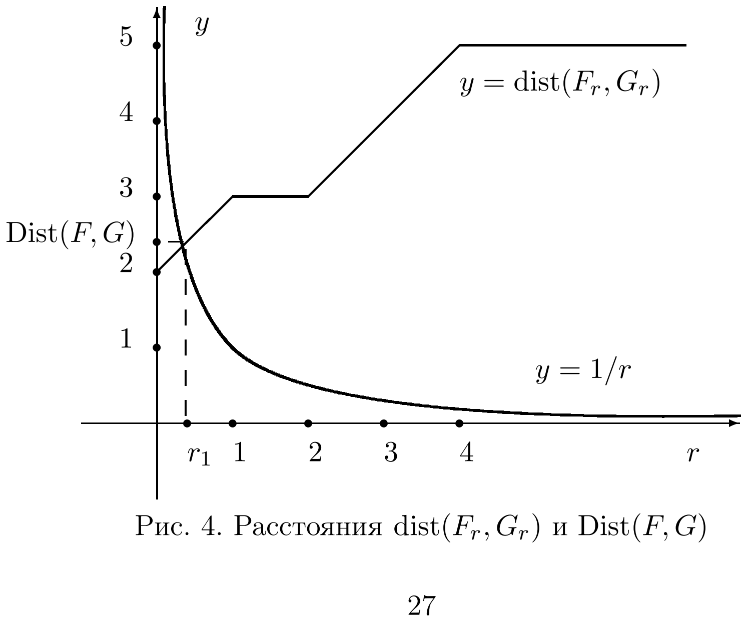

Рис. 4. Расстояния $\operatorname{dist}(F_r, G_r)$ и $\operatorname{Dist}(F, G)$

З а м е ч а н и е 2.1. Наряду с пространством $\mathrm{clcv}(\mathbb{R}^n)$, снабженным метрикой Хаусдорфа–Бебутова Dist, рассмотрим пространство, состоящее из непустых *выпуклых компактных* подмножеств в $\mathbb{R}^n$. Это пространство мы снабдим метрикой Хаусдорфа dist и будем его обозначать $\mathrm{conv}(\mathbb{R}^n)$. Как видно из предыдущего примера, для некоторых компактных множеств расстояния dist и Dist не совпадают, поэтому пространства $\mathrm{conv}(\mathbb{R}^n)$ и $\mathrm{clcv}(\mathbb{R}^n)$ рассматриваются как отдельные объекты, тогда метрика Хаусдорфа dist является *внутренней* метрикой (см. [17, с. 33]) по отношению к метрике Хаусдорфа–Бебутова Dist, а пространство $\mathrm{conv}(\mathbb{R}^n)$ не рассматривается как подпространство в $\mathrm{clcv}(\mathbb{R}^n)$.

Как хорошо известно [92, с. 148], пространство $\mathrm{conv}(\mathbb{R}^n)$ является *полным* метрическим пространством. Отметим еще, что в силу теоремы 2.1, спускаясь в $\mathrm{clcv}(\mathbb{R}^n)$ к подпространству $\mathrm{conv}(\mathbb{R}^n)$, мы можем, не оговаривая это особо, поменять метрику Хаусдорфа–Бебутова на метрику Хаусдорфа. Строгая формулировка этих рассуждений содержится в следующей лемме.

Л е м м а 2.2. *Пусть последовательность множеств $\{F^i\}_{i=1}^{\infty}$ такова, что $F^i\in \mathrm{clcv}(\mathbb{R}^n)$, множество F^i компактно при каждом i и для некоторого $r>0$ множества F^i содержатся в шаре $O_r(0)$ при всех индексах i. Тогда, если для любого целого положительного m имеет место равенство*

$$\lim_{i\to\infty} \mathrm{Dist}(F^i, F^{i+m}) = 0, \tag{2.2}$$

то выполнено равенство

$$\lim_{i\to\infty} \mathrm{dist}(F^i, F^{i+m}) = 0. \tag{2.3}$$

Справедливо и такое утверждение: если имеет место равенство (2.3) *и для каждого индекса i множество F^i выпукло и компактно в $\mathbb{R}^n$, то имеет место равенство* (2.2).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Отметим, что из равенства (2.2) следуют неравенства $\mathrm{Dist}(F^i, F^{i+m}) \leqslant \varepsilon_i$, где $\varepsilon_i \to 0$ при $i\to\infty$, из которых, в силу определения

$$\mathrm{Dist}(F^i, F^{i+m}) \doteq \sup_{r>0} \min\bigl\{\mathrm{dist}(F^i_r, F^{i+m}_r), 1/r\bigr\},$$

следуют неравенства

$$\min\bigl\{\mathrm{dist}(F^i_r, F^{i+m}_r), 1/r\bigr\} \leqslant \varepsilon_i,$$

выполненные для всех $r>0$. Отметим теперь, что в силу компактности множеств F^i и равномерной ограниченности последовательности $\{F^i\}_{i=1}^{\infty}$, найдется такое число $r_0 \geqslant 0$, что для всех $r\geqslant r_0$ будут выполнены равенства $F^{i+m}_r = F^{i+m}$ и $F^i_r = F^i$. Следовательно, для всех $r\geqslant r_0$ и любых достаточно больших индексов i выполнены и неравенства

$$\min\bigl\{\mathrm{dist}(F^i, F^{i+m}), 1/r\bigr\} \leqslant \varepsilon_i.$$

Выберем теперь числовую последовательность $\{r_i\}_{i=1}^{\infty}$ такую, что при всех, достаточно больших индексах i, имеют место неравенства $r_0 \leqslant r_i \leqslant 1/\varepsilon_i$. Тогда из предыдущих рассуждений получаем неравенства $\mathrm{dist}(F^i, F^{i+m}) \leqslant \varepsilon_i$. Мы показали, что справедливо равенство (2.3).

Пусть теперь выполнено (2.3). Тогда, в силу полноты пространства $\mathrm{conv}(\mathbb{R}^n)$, из равенства (2.3) следует, что существует компактное выпуклое множество F, являющееся пределом (в смысле метрики dist) последовательности $\{F^i\}_{i=1}^{\infty}$. Следовательно, равенство (2.3) эквивалентно равенству

$$\lim_{i\to\infty} \mathrm{dist}(F^i, F) = 0, \tag{2.4}$$

которое означает, что для любого $\varepsilon>0$ для всех достаточно больших i выполнено неравенство $\mathrm{dist}(F^i, F) \leqslant \varepsilon$.

Обозначим через f_0 и f^i_0 ближайшие к нулю пространства $\mathbb{R}^n$ точки множеств F и F^i соответственно. Покажем, что в силу выпуклости множеств F и F^i из равенства (2.4) следует равенство $\lim\limits_{i\to\infty} |f^i_0 - f_0| = 0$.

Рассмотрим случай, когда точка f_0 не совпадает с началом координат. Покажем сначала, что множество F^i обязательно содержит хотя бы одну точку, принадлежащую окрестности $O_\varepsilon(f_0)$. Действительно, если это не так, то $\varrho(f_0, F_i) > \varepsilon$, что противоречит неравенству

$$d(F, F^i) \doteq \max_{f \in F} \varrho(f, F_i) \leqslant \varepsilon.$$

Таким образом, найдется точка $f^i \in F^i$ такая, что $f^i \in O_\varepsilon(f_0)$, тогда для этой точки выполнено неравенство $|f^i| \leqslant |f_0| + \varepsilon$.

Выберем $\varepsilon < |f_0|$ и обозначим через f_+ и f_- точки на прямой $(0f_0)$, находящиеся на расстоянии ε от точки f_0, причем

$$|f_+| = |f_0| + \varepsilon, \quad |f_-| = |f_0| - \varepsilon.$$

Рассмотрим замкнутое множество H, ограниченное сферой $S_{|f_0|+\varepsilon}(0)$ и плоскостью α, проходящей через точку f_- перпендикулярно к прямой $(0f_0)$ (предполагаем, что H не содержит начало координат).

Покажем, что если выполнено неравенство $\operatorname{dist}(F^i, F) \leqslant \varepsilon$, то точка f_0^i, ближайшая к нулю точка множества F^i, содержится в множестве H. Действительно, множество F^i обязательно содержит точку f^i, для которой выполнено неравенство $|f^i| \leqslant |f_0| + \varepsilon$, поэтому ближайшая к началу координат точка данного множеста не может находиться вне сферы $S_{|f_0|+\varepsilon}(0)$ (поскольку для всех точек f вне заданной сферы $|f| > |f_0| + \varepsilon$.) Кроме того, из выпуклости F следует, что множество $F + O_\varepsilon(0)$ также выпукло (см. [170, с. 50]), поэтому все точки множества $F + O_\varepsilon(0)$ содержатся в замкнутом полупространстве, ограниченном плоскостью α и не содержащем начало координат. Из включения $F^i \subseteq F + O_\varepsilon(0)$ получаем, что все точки множества F^i также содержатся в этом полупространстве.

Из доказанного выше следует, что расстояние от точки f_0 до ближайшей к нулю точки множества F^i будет максимальным в том случае, когда точка f_0^i находится на пересечении сферы $S_{|f_0|+\varepsilon}(0)$ и плоскости α. Для всех таких точек f_0^i найдем расстояние (см. рис. 5)

$$|f_0^i - f_-| = \sqrt{|f_0^i|^2 - |f_-|^2} = \sqrt{(|f_0| + \varepsilon)^2 - (|f_0| - \varepsilon)^2} = 2\sqrt{\varepsilon |f_0|},$$

тогда максимальное расстояние между ближайшими к нулю точками множеств F и F^i равно

$$|f_0^i - f_0| = \sqrt{|f_0^i - f_-|^2 + |f_0 - f_-|^2} = \sqrt{4\varepsilon |f_0| + \varepsilon^2}. \tag{2.5}$$

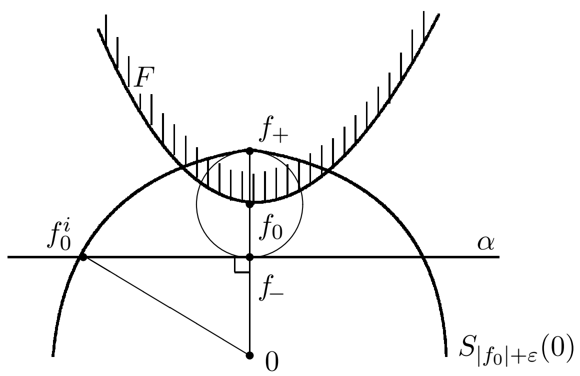

Рис. 5. Расстояние $|f_0^i - f_0|$ равно максимальному расстоянию между ближайшими к нулю точками множеств F и F^i

Пусть теперь точка f_0 совпадает с началом координат. Как показано выше, множество F^i обязательно содержит хотя бы одну точку, принадлежащую окрестности $O_\varepsilon(0)$, поэтому для ближайшей к нулю точки этого множества выполнено неравенство $|f_0^i| \leqslant \varepsilon$. Таким образом, из (2.5) и последнего неравенства следует, что

$$\lim_{i\to\infty} |f_0^i - f_0| = 0. \tag{2.6}$$

Далее, из (2.6) получаем

$$|f_0^i - f_0^{i+m}| \leqslant |f_0^i - f_0| + |f_0 - f_0^{i+m}| \to 0 \quad \text{при} \quad i \to \infty.$$

Поэтому шары $O_r(f_0^i)$ и $O_r(f_0^{i+m})$ при больших индексах i мало отличаются друг от друга, а это означает, что выполнено неравенство

$$\operatorname{dist}\big(O_r(f_0^i), O_r(f_0^{i+m})\big) \leqslant \varepsilon_i. \tag{2.7}$$

Покажем, что при больших i и всех $r > 0$ множества F_r^i и F_r^{i+m} тоже мало отличаются друг от друга, точнее, если выполнено неравенство (2.7) и неравенство $\operatorname{dist}(F^i, F^{i+m}) \leqslant \varepsilon_i$, то для множеств F_r^i и F_r^{i+m} при больших i и всех $r > 0$ справедливо неравенство

$$\operatorname{dist}(F_r^i, F_r^{i+m}) < \sqrt{2}\,\varepsilon_i. \tag{2.8}$$

Отметим, что при $r \geqslant r_0$ выполнены равенства $F_r^{i+m} = F^{i+m}$ и $F_r^i = F^i$, поэтому неравенство (2.8) следует из неравенства $\operatorname{dist}(F^i, F^{i+m}) \leqslant \varepsilon_i$. Пусть для некоторого $r > 0$ множества F_r^i и F^i не совпадают (случай, когда F_r^{i+m} и F^{i+m} не совпадают, рассматривается аналогично). Тогда граница множества F^i пересекается со сферой $S_r(f_0^i)$ радиуса r с центром в точке f_0^i; следовательно, граница $\operatorname{fr}(F^i + O_{\varepsilon_i}(0))$ множества $F^i + O_{\varepsilon_i}(0)$ пересекается со сферой $S_{r+\varepsilon_i}(f_0^i)$. Обозначим буквой a одну из точек, получившихся в пересечении множеств

$$\operatorname{fr}\big(F^i + O_{\varepsilon_i}(0)\big) \quad \text{и} \quad S_{r+\varepsilon_i}(f_0^i).$$

Поскольку множества F^i и $O_r(f_0^i)$ выпуклые, то существуют единственная точка $b \in F^i$, ближайшая к точке a и единственная точка $d \in O_r(f_0^i)$, ближайшая к точке a, причем

$$|a - b| = |a - d| = \varepsilon_i.$$

Построим плоскость (размерности 2), проходящую через точки a, b, d, и обозначим буквой c точку пересечения данной плоскости с множеством $\operatorname{fr} F^i \bigcap S_r(f_0^i)$, ближайшую к точке a. Таким образом, мы построили плоский четырехугольник с вершинами в точках a, b, c, d (см. рис. 6).

Поскольку множество $O_r(f_0^i)$ строго выпукло, то угол $\measuredangle\, adc$ тупой. Из выпуклости множества F^i следует, что угол $\measuredangle\, abc$ может быть либо прямым, либо тупым, а также то, что угол $\measuredangle\, bcd$ тупой. Следовательно, оставшийся угол $\measuredangle\, bad$ данного четырехугольника острый. Поскольку угол $\measuredangle\, bcd$ тупой, то точка c находится внутри полукруга, построенного на диаметре bd; поскольку угол $\measuredangle\, bad$ острый, то расстояние $|b - d| < \sqrt{2}\varepsilon_i$ и несложно посчитать, что $|a - c| < \sqrt{2}\varepsilon_i$.

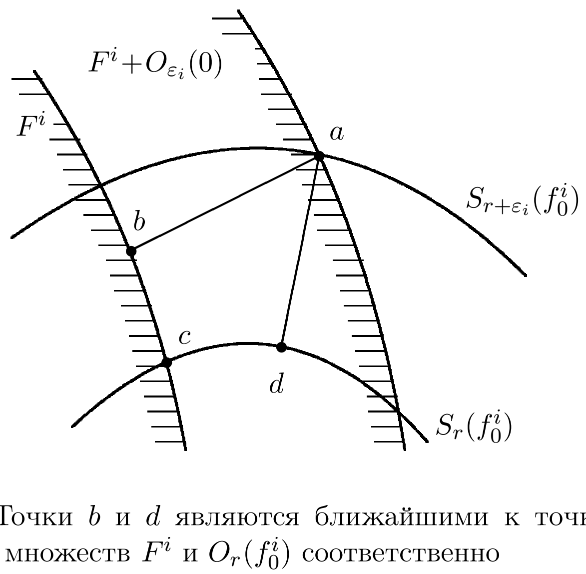

Рис. 6. Точки b и d являются ближайшими к точке a точками множеств F^i и $O_r(f_0^i)$ соответственно

Из неравенств (2.7) и $\operatorname{dist}(F^i, F^{i+m}) \leqslant \varepsilon_i$ следуют включения

$$O_r(f_0^{i+m}) \subseteq O_{r+\varepsilon_i}(f_0^i), \quad F^{i+m} \subseteq F^i + O_{\varepsilon_i}(0),$$

поэтому имеет место включение

$$F_r^{i+m} \doteq F^{i+m} \bigcap O_r(f_0^{i+m}) \subseteq \big(F^i + O_{\varepsilon_i}(0)\big) \bigcap O_{r+\varepsilon_i}(f_0^i).$$

Далее, из последнего неравенства и неравенства $|a-c| < \sqrt{2}\varepsilon_i$ следует включение

$$F_r^{i+m} \subset F_r^i + O_{\sqrt{2}\varepsilon_i}(0).$$

Аналогично можно показать, что имеет место включение $F_r^i \subset F_r^{i+m} + O_{\sqrt{2}\varepsilon_i}(0)$, тогда два последних включения равносильны неравенству (2.8).

Таким образом, мы показали, что при всех $r > 0$ и всех достаточно больших индексах i выполнено неравенство (2.8), из которого следуют неравенство $\operatorname{Dist}(F^i, F^{i+m}) < \sqrt{2}\varepsilon_i$ и равенство $\lim\limits_{i\to\infty} \operatorname{Dist}(F^i, F^{i+m}) = 0.$ $\square$

В нижеследующей теореме доказывается, что пространство $\operatorname{clcv}(\mathbb{R}^n)$, как и пространства $\operatorname{conv}(\mathbb{R}^n)$ и $\operatorname{comp}(\mathbb{R}^n)$, тоже полное. Прежде всего отметим, что полнота пространства $\operatorname{clcv}(\mathbb{R}^n)$ означает, что каждая последовательность Коши сходится в этом пространстве.

Напомним, что последовательность $\{F^i\}_{i=1}^{\infty}$ элементов F^i пространства $\operatorname{clcv}(\mathbb{R}^n)$, снабженного метрикой Хаусдорфа–Бебутова Dist, называется *последовательностью Коши,* если имеет место равенство

$$\lim_{i,j\to\infty} \operatorname{Dist}(F^i, F^j) = 0. \tag{2.9}$$

Т е о р е м а 2.2. *Пространство* $\operatorname{clcv}(\mathbb{R}^n)$ *является полным в метрике Хаусдорфа–Бебутова, определенной равенствами* (1.3), (1.4).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\{F^i\}_{i=1}^{\infty}$ — последовательность элементов F^i пространства $\operatorname{clcv}(\mathbb{R}^n)$, удовлетворяющая равенству (2.9). Покажем тогда, что последовательность $\{F^i\}_{i=1}^{\infty}$ имеет предел $F \in \operatorname{clcv}(\mathbb{R}^n)$. Действительно, это равенство означает, в силу определения метрики Dist, что для любого $\varepsilon > 0$ и любых достаточно больших индексов i, j выполнено неравенство

$$\operatorname{Dist}(F^i, F^j) = \sup_{r>0} \min\big\{\operatorname{dist}(F_r^i, F_r^j), 1/r\big\} \leqslant \varepsilon.$$

Следовательно, $\min\big\{\operatorname{dist}(F_r^i, F_r^j), 1/r\big\} = \operatorname{dist}(F_r^i, F_r^j) \leqslant \varepsilon$ для всех $r \in (0, 1/\varepsilon]$ и, в силу непрерывности функции $r \to \operatorname{dist}(F_r^i, F_r^j)$, неравенство $\operatorname{dist}(F_r^i, F_r^j) \leqslant \varepsilon$ выполнено для всех $r \in [0, 1/\varepsilon]$. Это означает, что для всякого целого положительного k, любых достаточно больших индексов i, j и всех положительных $r \leqslant k$ выполнено неравенство

$$\operatorname{dist}(F_r^i, F_r^j) \leqslant 1/k. \tag{2.10}$$

Вспомним теперь, что неравенство (2.10) при любых фиксированных i, j в свою очередь эквивалентно двум неравенствам

$$d(F_r^i, F_r^j) \leqslant 1/k, \quad d(F_r^j, F_r^i) \leqslant 1/k,$$

которые равносильны включениям

$$F_r^i \subseteq F_r^j + O_\varepsilon(0), \quad F_r^j \subseteq F_r^i + O_\varepsilon(0), \quad r \leqslant k, \quad \varepsilon = 1/k, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Положим $r = m \leqslant k$, $m \in \mathbb{N}$, $\varepsilon = 1/k$, где $k = 1, 2, \ldots$. Тогда при каждом целом положительном m множество F_m^i компактно и выпукло, и из двух неравенств

$$d(F_m^i, F_m^j) \leqslant \varepsilon, \quad d(F_m^j, F_m^i) \leqslant \varepsilon$$

следует, что последовательность $\{F_m^i\}_{i=1}^{\infty}$ является последовательностью Коши относительно метрики Хаусдорфа dist.

Как показано в монографии [92, с. 148], при каждом натуральном $m \leqslant k$ существует компактное выпуклое множество F_m такое, что $\lim\limits_{i\to\infty} \mathrm{dist}(F_m^i, F_m) = 0$. Кроме того, при всех целых $m \geqslant 1$ имеет место вложение $F_m \subseteq F_{m+1}$, причем возможны два случая — либо найдется такое число m_0, что равенство $F_m = F_{m+1}$ выполнено для всех $m \geqslant m_0$ (тогда определим множество $F \doteq \bigcup\limits_{m=1}^{m_0} F_m$), либо такого m_0 не существует (тогда положим $F \doteq \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} F_m$). Во втором случае, в силу специфики F_m, равенство $\mathrm{dist}(F_m, F_{m+1}) = 1$ выполнено при всех целых m. Отметим также, что множество F_m имеет вид $F_m = F \bigcap O_m(f_0)$, где f_0 — точка множества F, ближайшая к нулю пространства $\mathbb{R}^n$.

Множество $F \doteq \bigcup\limits_{m=1}^{m_0} F_m$ замкнуто как объединение конечного числа замкнутых множеств. Покажем, что множество $F = \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} F_m$ также замкнуто как множество, состоящее из объединения замкнутых вложенных множеств F_m, отстоящих друг от друга на расстоянии, не меньшем единицы. Предположим, что это неверно, тогда существует сходящаяся последовательность точек $\{p_i\}_{i=1}^{\infty}$, $p_i \in F$ такая, что $p_i \to p$ и $p \notin F$. Обозначим через m_1 наименьшее целое число, ограничивающее последовательность $\{|p_i|\}_{i=1}^{\infty}$, тогда все точки последовательности $\{p_i\}_{i=1}^{\infty}$ содержатся в множестве $F_{m_1} = F \bigcap O_{m_1}(f_0)$, а точка p этому множеству не принадлежит. Получили противоречие с тем, что множество F_{m_1} замкнуто. Множество F также является выпуклым как объединение расширяющегося семейства выпуклых множеств, см. [92, с. 8].

Докажем равенство

$$\lim_{i\to\infty} \mathrm{Dist}(F^i, F) = 0. \tag{2.11}$$

Пусть $F^i \in \mathrm{clcv}(\mathbb{R}^n)$, $F_m^i = F^i \bigcap O_m(f_0^i)$. Доказано, что последовательность $\{F_m^i\}_{i=1}^{\infty}$ является последовательностью Коши относительно метрики Хаусдорфа dist. Известно, что в силу полноты пространства $\mathrm{conv}(\mathbb{R}^n)$ для каждого натурального m существует компактное выпуклое множество F_m такое, что

$$\lim_{i\to\infty} \mathrm{dist}(F_m^i, F_m) = 0. \tag{2.12}$$

Пусть задано $\varepsilon > 0$. Тогда для $m = [1/\varepsilon] + 1$ найдется номер i_0 такой, что для всех $i \geqslant i_0$ выполнено неравенство

$$\mathrm{dist}(F_m^i, F_m) \leqslant \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}.$$

Из (2.8) следует, что для всех $r \leqslant m$ имеет место неравенство

$$\mathrm{dist}(F_r^i, F_r) \leqslant \varepsilon. \tag{2.13}$$

Поскольку неравенство (2.13) выполнено для всех $r \leqslant \dfrac{1}{\varepsilon}$, то в силу определения метрики Dist получаем, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой номер i_0, что $\mathrm{Dist}(F^i, F) \leqslant \varepsilon$ для всех $i \geqslant i_0$, то есть справедливо равенство (2.11). Таким образом, полнота пространства $\mathrm{clcv}(\mathbb{R}^n)$ доказана.

§ 3. Утверждения о свойствах полунепрерывной сверху функции

Пусть задано дифференциальное включение

$$\dot{x} \in F(h^t\sigma, x), \tag{3.1}$$

параметризованное топологической динамической системой (Σ, h^t).

Напомним, что *топологической динамической системой* называется пара (Σ, h^t), где Σ — *полное* метрическое пространство с метрикой ρ_{Σ}; h^t — *однопараметрическая группа* преобразований пространства Σ в себя, удовлетворяющая следующим условиям, которые называются аксиомами динамической системы:

(1) $h^t\sigma|_{t=0} = \sigma$;

(2) функция $h^t\sigma$ непрерывна по совокупности переменных (t, σ) на множестве $\mathbb{R} \times \Sigma$;

(3) при всех $t, s \in \mathbb{R}$ выполнено групповое свойство $h^{t+s} = h^t \circ h^s$ (см., например, [105, с. 346]).

Относительно функции $(\sigma, x) \to F(\sigma, x)$ предполагаем, что она определена при всех $(\sigma, x) \in \Sigma \times \mathbb{R}^n$ и принимает значения в пространстве $\operatorname{clcv}(\mathbb{R}^n)$. Для исследования вопроса существования решений задачи (3.1) нужно ввести определения полунепрерывности сверху и снизу в терминах полуотклонений D и непрерывности в терминах метрики Dist Хаусдорфа–Бебутова.

Обозначим через $O_\delta(\sigma_0, x_0)$ замкнутую окрестность точки (σ_0, x_0) :

$$O_\delta(\sigma_0, x_0) = \big\{(\sigma, x) \in \Sigma \times \mathbb{R}^n : \rho_\Sigma(\sigma, \sigma_0) + |x - x_0| \leqslant \delta\big\}.$$

О п р е д е л е н и е 3.1 (см. [116]). Функцию $F(\sigma, x)$ переменных $(\sigma, x) \in \Sigma \times \mathbb{R}^n$ со значениями в пространстве $\operatorname{clcv}(\mathbb{R}^n)$ будем называть *полунепрерывной сверху в точке* (σ_0, x_0), если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для всех точек $(\sigma, x) \in O_\delta(\sigma_0, x_0)$ выполнено неравенство

$$D\big(F(\sigma, x), F(\sigma_0, x_0)\big) \leqslant \varepsilon. \tag{3.2}$$

Функцию $F : \Sigma \times \mathbb{R}^n \to \operatorname{clcv}(\mathbb{R}^n)$ будем называть *полунепрерывной снизу в точке* (σ_0, x_0), если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для всех точек $(\sigma, x) \in O_\delta(\sigma_0, x_0)$ выполнено неравенство

$$D\big(F(\sigma_0, x_0), F(\sigma, x)\big) \leqslant \varepsilon.$$

Далее, если функция $F(\sigma, x)$ одновременно полунепрерывна сверху и снизу в точке (σ_0, x_0), то она называется *непрерывной* в точке (σ_0, x_0). Обычным образом понимается полунепрерывность сверху, снизу и непрерывность на произвольном множестве $D \subseteq \Sigma \times \mathbb{R}^n$.

Напомним, что графиком функции $(\sigma, x) \to F(\sigma, x)$ называется множество

$$G \doteq \big\{(\sigma, x, f) \in \Sigma \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n : f \in F(\sigma, x)\big\}.$$

Обозначим через $f_0(\sigma, x)$ точку множества $F(\sigma, x)$, ближайшую к нулю пространства $\mathbb{R}^n$ и рассмотрим функцию $(\sigma, x) \to f_0(\sigma, x)$.

Т е о р е м а 3.1 (см. [137]). *Функция $F : \Sigma \times \mathbb{R}^n \to \operatorname{clcv}(\mathbb{R}^n)$ полунепрерывна сверху в точке (σ_0, x_0) в метрике Хаусдорфа–Бебутова тогда и только тогда, когда для некоторой окрестности $O_\delta(\sigma_0, x_0)$ график данной функции является замкнутым множеством и функция $(\sigma, x) \to f_0(\sigma, x)$ непрерывна в точке (σ_0, x_0).*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть функция $F(\sigma, x)$ переменных (σ, x) полунепрерывна сверху в точке $(\sigma_0, x_0) \in \Sigma \times \mathbb{R}^n$ в метрике Хаусдорфа–Бебутова, тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для всех точек $(\sigma, x) \in O_\delta(\sigma_0, x_0)$ при $r \in [0, 1/\varepsilon]$ выполнено неравенство

$$d\big(F_r(\sigma, x), F_r(\sigma_0, x_0)\big) \leqslant \varepsilon. \tag{3.3}$$

Это означает, что функция $(\sigma, x) \to F_r(\sigma, x)$ полунепрерывна сверху в точке (σ_0, x_0) в метрике Хаусдорфа. При $r = 0$ неравенство (3.3) равносильно включению

$$f_0(\sigma, x) \in O_\varepsilon(f_0(\sigma_0, x_0)),$$

то есть функция $(\sigma, x) \to f_0(\sigma, x)$ непрерывна в точке (σ_0, x_0).

Покажем, что функция $(\sigma, x) \to F_r(\sigma, x)$ ограничена в некоторой окрестности $O_\delta(\sigma_0, x_0)$ точки (σ_0, x_0). Предположим, что это не так, тогда найдутся такие точки

$$(\sigma^i, x^i) \in O_\delta(\sigma_0, x_0) \;\text{ и }\; f_r(\sigma^i, x^i) \in F_r(\sigma^i, x^i),$$

что $|f_r(\sigma^i, x^i)| \to \infty$ при $i \to \infty$. Из построения множества $F_r(\sigma^i, x^i)$ следует, что для произвольной точки $f_r(\sigma^i, x^i)$ из $F_r(\sigma^i, x^i)$ и ближайшей к нулю точки $f_0(\sigma^i, x^i)$ данного множества выполнено неравенство

$$|f_r(\sigma^i, x^i) - f_0(\sigma^i, x^i)| \leqslant r,$$

поэтому из условия $|f_r(\sigma^i, x^i)| \to \infty$ следует, что $|f_0(\sigma^i, x^i)| \to \infty$ при $i \to \infty$. Из включения $f_0(\sigma^i, x^i) \in O_\varepsilon(f_0(\sigma_0, x_0))$ получаем неравенство $|f_0(\sigma^i, x^i)| \leqslant |f_0(\sigma_0, x_0)| + \varepsilon$, которое противоречит предположению $|f_r(\sigma^i, x^i)| \to \infty$.

Поскольку функция $(\sigma, x) \to F_r(\sigma, x)$ полунепрерывна сверху и ограничена в окрестности точки (σ_0, x_0), то график данной функции, то есть множество

$$G_r \doteq \big\{(\sigma, x, f) \in \Sigma \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n : (\sigma, x) \in O_\delta(\sigma_0, x_0),\ f \in F_r(\sigma, x)\big\}$$

является замкнутым (см. [13, с. 204], [170, с. 53]). Возьмем $r = m \in \mathbb{N}$ и отметим, что график G функции $(\sigma, x) \to F(\sigma, x)$ можно представить в виде объединения $G = \bigcup\limits_m G_m$ конечного или бесконечного числа замкнутых множеств G_m. Если найдется такое число $m_0 \in \mathbb{N}$, что $G = \bigcup\limits_{m=0}^{m_0} G_m$, то множество G замкнуто как объединение конечного числа замкнутых множеств. Покажем, что множество $G = \bigcup\limits_{m=0}^{\infty} G_m$ также является замкнутым. Предположим, что это не так, тогда существует сходящаяся последовательность точек

$$\{g^i\}_{i=1}^\infty, \quad g^i = (\sigma^i, x^i, f^i) \in G, \quad f^i \in F(\sigma^i, x^i)$$

такая, что $(\sigma^i, x^i) \to (\sigma_0, x_0)$, $f^i \to f_0$ при $i \to \infty$ и $f_0 \notin F(\sigma_0, x_0)$. Каждой точке f^i множества $F(\sigma^i, x^i)$ поставим в соответствие точку f_0^i, ближайшую к нулю точку этого же множества. Поскольку функция $(\sigma, x) \to f_0(\sigma, x)$ непрерывна в точке (σ_0, x_0), то последовательность $\{f_0^i\}_{i=1}^\infty$ сходится к точке $f_0(\sigma_0, x_0)$, ближайшей к нулю точке множества $F(\sigma_0, x_0)$; следовательно, сходится и последовательность норм $\{|f^i - f_0^i|\}_{i=1}^\infty$. Обозначим через m_1 наименьшее целое число, ограничивающее данную последовательность, тогда для всех i имеет место включение $f^i \in F_{m_1}(\sigma^i, x^i)$, которое означает, что точка $g^i = (\sigma^i, x^i, f^i)$ содержится в замкнутом множестве G_{m_1}. Следовательно, предельная точка $g = (\sigma_0, x_0, f_0)$ принадлежит множеству G_{m_1}, которое содержится в множестве G.

Предположим теперь, что для некоторой замкнутой окрестности $O_\delta(\sigma_0, x_0)$ график G функции $(\sigma, x) \to F(\sigma, x)$, $(\sigma, x) \in O_\delta(\sigma_0, x_0)$ является замкнутым множеством и функция $(\sigma, x) \to f_0(\sigma, x)$ непрерывна в точке (σ_0, x_0). Рассмотрим множество

$$H_r(\sigma, x) \doteq \big\{(\sigma, x, f) \in \Sigma \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n : (\sigma, x) \in O_\delta(\sigma_0, x_0),\ f \in O_r\big(f_0(\sigma, x)\big)\big\},$$

где $O_r\big(f_0(\sigma, x)\big)$ — замкнутый шар в пространстве $\mathbb{R}^n$ радиуса r с центром в точке $f_0(\sigma, x)$. Поскольку функция $f_0(\sigma, x)$ непрерывна в точке (σ_0, x_0) и множество $O_\delta(\sigma, x)$ замкнуто, то множество $H_r(\sigma, x)$ замкнуто.

Отметим, что график функции $(\sigma, x) \to F_r(\sigma, x)$ можно представить в виде пересечения $G_r = G \bigcap H_r(\sigma, x)$, поэтому он также является замкнутыми множеством для каждого $r \in [0, \infty)$. Из ограниченности $F_r(\sigma, x)$ в окрестности $O_\delta(\sigma_0, x_0)$ следует, что для любого $r \in [0, \infty)$ функция $(\sigma, x) \to F_r(\sigma, x)$ полунепрерывна сверху в точке (σ_0, x_0) в метрике Хаусдорфа (см., например, [170, с. 53]). В силу определения 3.1 отсюда следует полунепрерывность сверху функции $(\sigma, x) \to F(\sigma, x)$ в точке (σ_0, x_0) в метрике Хаусдорфа–Бебутова (см. доказательство теоремы 2.2).

Аналогично теореме 3.1 доказывается следующее утверждение.

Л е м м а 3.1. *Функция $F : \Sigma \times \mathbb{R}^n \to \mathrm{clcv}(\mathbb{R}^n)$ полунепрерывна сверху на замкнутом множестве $D \subseteq \Sigma \times \mathbb{R}^n$ в метрике Хаусдорфа–Бебутова тогда и только тогда, когда график данной функции является замкнутым множеством и функция $(\sigma, x) \to f_0(\sigma, x)$ непрерывна на множестве D.*

ГЛАВА II. ДИНАМИЧЕСКАЯ СИСТЕМА СДВИГОВ

Заслуживающими особого внимания объектами в данной работе являются управляемая система, дифференциальное включение и так называемая *динамическая система сдвигов* [105, гл. 5]. Динамическая система сдвигов возникает естественным образом в тех случаях, когда мы изучаем асимптотические свойства решений нестационарной управляемой системы, равномерные относительно начального момента времени (см. [117–119, 129, 133, 159, 160]). В этой главе приводятся основные сведения из теории динамических систем и описывается процесс построения динамической системы сдвигов по заданной управляемой системе и отвечающему ей дифференциальному включению.

В первом параграфе главы приведены определения и некоторые свойства *топологической и метрической динамических систем.* Здесь также описано, как по заданной управляемой системе

$$\dot{x} = f(t, x, u), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in U(t, x), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{II.1}$$

построить динамическую систему, которая является *расширением* исходной топологической или метрической динамической системы.

В следующем параграфе построена динамическая система сдвигов, отвечающая системе (II.1) или управляемой системе

$$\dot{x} = g(t, x, u), \quad x \in N(t), \quad u \in U(t, x), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{II.2}$$

где функции N и U принимают значение в пространствах $\operatorname{clcv}(\mathbb{R}^n)$ и $\operatorname{clcv}(\mathbb{R}^m)$ соответственно. Определим функцию $G : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \operatorname{clcv}(\mathbb{R}^n)$ следующим образом:

$$G(t, x) = \operatorname{co}\bigl\{y \in \mathbb{R}^n : \, y = g(t, x, u), \; u \in U(t, x)\bigr\},$$

тогда системе (II.2) соответствует задача

$$\dot{x} \in G(t, x), \quad x \in N(t), \quad t \in \mathbb{R}$$

о существовании решений дифференциального включения, не выходящих при всех t из заданного множества $N(t)$. Введем в рассмотрение функцию

$$(t, x) \to \mathcal{S}(t, x) \doteq \bigl(G(t, x), N(t)\bigr) \in \operatorname{clcv}(\mathbb{R}^n) \times \operatorname{clcv}(\mathbb{R}^n)$$

и построим множество функций

$$\Sigma \doteq \operatorname{cl}\{(t, x) \to \mathcal{S}_\tau(t, x) : \tau \in \mathbb{R}\}, \qquad \text{где} \qquad \mathcal{S}_\tau(t, x) = \mathcal{S}(t + \tau, x),$$

а замыкание cl берется по метрике, которую мы будем называть *метрикой Бебутова*:

$$\rho_\Sigma(\mathcal{S}^1, \mathcal{S}^2) = \sup_{\vartheta > 0, a > 0} \min\left\{ \max_{|t| \leqslant \vartheta, |x| \leqslant a} \operatorname{Dist}\bigl(\mathcal{S}^1(t, x), \mathcal{S}^2(t, x)\bigr), \frac{1}{\vartheta + a} \right\},$$

где $\mathcal{S}^i = (G^i, N^i) \in \Sigma$. Доказано, что при определенных условиях пространство Σ компактно и на данном пространстве действует однопараметрическая группа преобразований h^τ пространства Σ в себя, удовлетворяющая всем аксиомам динамической системы.

В этой главе также получены аналоги известных теорем (см., например, [181, с. 93–101]) существования решения задачи Коши для дифференциального включения с фазовыми ограничениями

$$\dot{x} \in F(h^t \sigma, x), \quad x(t) \in M(h^t \sigma). \tag{II.3}$$

В частности, получены условия, при которых векторное поле, порожденное задачей (II.3), обладает свойством слабой полноты.

§ 4. Топологические и метрические динамические системы

О п р е д е л е н и е 4.1 (см., например, [105, с. 346]). *Топологической динамической системой* называется пара (Σ, h^t), где Σ — *полное* метрическое пространство с метрикой ρ_{Σ}; h^t — *однопараметрическая группа* преобразований пространства Σ в себя, удовлетворяющая следующим условиям, которые называются аксиомами динамической системы:

1) $h^t\sigma|_{t=0} = \sigma$;
2) функция $h^t\sigma$ непрерывна по совокупности переменных (t, σ) на множестве $\mathbb{R} \times \Sigma$;
3) при всех $t, s \in \mathbb{R}$ выполнено равенство $h^{t+s} = h^t \circ h^s$ (свойство группы).

Из условия 2) в качестве следствия получается свойство *непрерывной зависимости $h^t\sigma$ от начальной точки*, которое формулируется следующим образом. *Для любой точки $\widehat{\sigma} \in \Sigma$, каждого $T > 0$ и любого $\varepsilon > 0$ найдется такое число $\delta > 0$, что для всех $\sigma \in \Sigma$ таких, что $\rho_{\Sigma}(\sigma, \widehat{\sigma}) \leqslant \delta$ и всех $\tau \in [-T, T]$ имеет место неравенство $\rho_{\Sigma}(h^{\tau}\sigma, h^{\tau}\widehat{\sigma}) \leqslant \varepsilon$.* Другими словами, если начальные точки выбраны достаточно близко, то в течение заданного, сколь угодно большого промежутка времени, расстояние между одновременными положениями движущихся точек будет оставаться меньше заданного $\varepsilon > 0$ (см., например, [4, с. 204–227], [105, гл. 5]).

Напомним, что пространство Σ называется *фазовым пространством* динамической системы (Σ, h^t), функция $t \to h^t\sigma$ — *движением* точки σ, функция $h^t : \Sigma \to \Sigma$ — *потоком* на фазовом пространстве Σ, а $\operatorname{orb}(\sigma) \doteq \{h^t\sigma : t \in \mathbb{R}\}$ и $\operatorname{orb}_{+}(\sigma) \doteq \{h^t\sigma : t \geqslant 0\}$ — *траекторией* и *положительной полутраекторией* точки σ.

О п р е д е л е н и е 4.2 (см., например, [4, с. 156], [72, с. 12]). *Метрической* динамической системой называется четверка $(\Sigma, \mathfrak{A}, \nu, h^t)$, где Σ — фазовое пространство; $\mathfrak{A}$ — некоторая сигма-алгебра подмножеств пространства Σ; h^t — однопараметрическая группа *измеримых* преобразований фазового пространства Σ в себя (измеримость означает, что $h^tA \in \mathfrak{A}$ для каждого $A \in \mathfrak{A}$ и для любого $t \in \mathbb{R}$). Далее, ν — вероятностная борелевская мера, инвариантная относительно потока h^t, то есть $\nu(h^tA) = \nu(A)$ для всех $A \in \mathfrak{A}$ и любого $t \in \mathbb{R}$.

Отметим, что различные примеры метрических динамических систем, условия инвариантности меры ν относительно потока h^t и алгоритмы построения инвариантной меры приведены в работах [11, 21, 22, 50, 64, 65, 71, 72, 112, 113, 145].

4.1. Расширение топологической динамической системы

Пусть заданы непрерывная функция $f(t, x, u)$ переменных $(t, x, u) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ и функция $U(t, x)$ переменных $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ со значениями в пространстве $\operatorname{clcv}(\mathbb{R}^m)$. Рассмотрим управляемую систему

$$\dot{x} = f(t, x, u), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in U(t, x), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{4.1}$$

порожденную функциями f и U.

Построим топологическую динамическую систему (Ω, g^t) по заданой топологической динамической системе (Σ, h^t) и управляемой системе (4.1), служащую расширением исходной динамической системы.

О п р е д е л е н и е 4.3 (см. [4]). Топологическая динамическая система (Ω, g^t) называется *расширением* динамической системы (Σ, h^t), а система (Σ, h^t) — *фактором* системы (Ω, g^t), если существует непрерывная проекция p пространства Ω на Σ, сопрягающая потоки, то есть $p(\Omega) = \Sigma$ и диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \Omega & \xrightarrow{p} & \Sigma \\ \downarrow g^t & & \downarrow h^t \\ \Omega & \xrightarrow{p} & \Sigma \end{array}$$

коммутативна: $pg^t = h^tp$.

Расширим множество допустимых управлений системы (4.1) до множества вероятностных мер Радона, для этого заданному множеству $U \in \mathrm{clcv}(\mathbb{R}^m)$ поставим в соответствие пространство с мерой $(U, \mathfrak{F}, \eta)$. Здесь через $\mathfrak{F}$ обозначена борелевская сигма-алгебра подмножеств U, η — вероятностная мера Радона, сосредоточенная на множестве U.

Определение 4.4 (см. [19, с. 404]). *Мерой Радона* с носителем U называется конечная регулярная счетно-аддитивная функция $\eta : A \to \mathbb{R}$ множеств $A \in \mathfrak{F}$. Мера η называется *регулярной*, если для любых $A \in \mathfrak{F}$ и $\varepsilon > 0$ существуют открытое и замкнутое множества B и C такие, что

$$B, C \in \mathfrak{F}, \;\; C \subset A \subset B \quad \text{и} \quad \eta\,(B \setminus C) \leqslant \varepsilon.$$

Положительная регулярная мера η называется *вероятностной* мерой, если $\eta(U) = 1$.

Обозначим через $\mathrm{rpm}(U)$ пространство вероятностных мер Радона с носителем U. Управляемая система задается при каждом $\sigma \in \Sigma$ множеством *допустимых процессов*, определенных следующим образом.

Определение 4.5 (см. [19, с. 404]). *Допустимым процессом* управляемой системы при каждом фиксированном $\sigma \in \Sigma$ называется всякая функция $t \to (\varphi(t,\sigma), \eta_t)$ переменного t, определенная на полуинтервале $[0, \tau)$ и удовлетворяющая следующим условиям:

1) управление $t \to \eta_t$ является измеримой по Лебегу[2] мерозначной функцией со значениями в пространстве $\mathrm{rpm}(U(t))$ вероятностных мер Радона с носителем $U(t) \doteq U(h^t\sigma, \varphi(t,\sigma))$;

2) функция $t \to \varphi(t,\sigma)$ является абсолютно непрерывным решением системы

$$\dot{x}(t) = \int_{U(t)} f(h^t\sigma, x(t), u)\eta_t(du), \quad t \in [0, \tau), \tag{4.2}$$

где $[0, \tau)$ — правый максимальный интервал существования решения φ системы (4.2).

По функциям f и U построим дифференциальное включение

$$\dot{x} \in F(h^t\sigma, x), \quad F(\sigma, x) = \mathrm{co}\big\{y \in \mathbb{R}^n : \, y = f(\sigma, x, u), \; u \in U(\sigma, x)\big\}, \tag{4.3}$$

где $\mathrm{co}\, G$ — замыкание выпуклой оболочки множества G. Между управляемой системой (4.2) и включением (4.3) существует следующая связь: если $(\varphi(t), \eta_t)$ является допустимым процессом системы (4.2), то $\varphi(t)$ — решение включения (4.3). При некоторых дополнительных предположениях верно и обратное: если $\varphi(t)$ — решение включения (4.3), то найдется такое управление $\eta_t \in \mathrm{rpm}(U(t))$, что $(\varphi(t), \eta_t)$ является допустимым процессом системы (4.2) (см. [19, с. 404]).

Определение 4.6. Каждому значению $\sigma \in \Sigma$, множеству X из пространства $(\mathbb{R}^n)$ и моменту времени $t \geqslant 0$ поставим в соответствие множество $A(t, \sigma, X)$, состоящее из всех значений в момент времени t решений $t \to \varphi(t, \sigma, x)$ включения (4.3), когда начальное условие $\varphi(0, \sigma, x) = x$ пробегает все множество X. Множество $A(t, \sigma, X)$ является сечением в момент времени $t \geqslant 0$ *интегральной воронки* включения (4.3). Оно называется *множеством достижимости* управляемой системы (4.2) в момент t из начального множества X.

Чтобы построить *расширение топологической динамической системы* (Σ, h^t), будем предполагать, что выполнено следующее условие.

Условие 4.1. Множество $X \in \mathrm{comp}(\mathbb{R}^n)$, функция $f(\sigma, x, u)$ *непрерывна* для всех $(\sigma, x, u) \in \Sigma \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, а функция $U(\sigma, x)$ со значениями в $\mathrm{comp}(\mathbb{R}^m)$ *полунепрерывна сверху в метрике Хаусдорфа* при всех $(\sigma, x) \in \Sigma \times \mathbb{R}^n$.

[2]Это означает, что для всякой непрерывной функции $a(t,u)$ переменных (t,u) функция $t \to \langle \eta_t, a \rangle$, где $\langle \eta_t, a \rangle \doteq \int_{U(t)} a(t,u)\eta_t(du)$, измерима по Лебегу.

В силу результатов работ В. И. Благодатских и А. Ф. Филиппова [13, с. 204–213], [170, с. 53–70] имеет место следующее утверждение.

Л е м м а 4.1. *Если выполнено условие* 4.1, *то найдется такое* $\varepsilon > 0$, *что при всех* $t \in [0, \varepsilon)$ *множество достижимости* $A(t, \omega)$, $\omega = (\sigma, X)$ *управляемой системы* (4.2) *существует, компактно при каждом* t *и непрерывно по* (t, ω). *Кроме того, при всех допустимых* t *и* s *множество достижимости* $A(t, \omega)$ *удовлетворяет следующим условиям:*

$$A(t, \omega)|_{t=0} = X \quad \text{и} \quad A(t+s, \omega) = A\big(t, h^s\sigma, A(s, \omega)\big).$$

Отметим также, что свойства множеств достижимости для различных управляемых систем и дифференциальных включений получены в работах [34–37, 41, 108, 110, 154, 157–160, 189].

Если дополнительно предполагать, что каждое решение включения (4.3) определено при всех $t \in \mathbb{R}_+ \doteq [0, \infty)$, то функция $g^t : \Omega \to \Omega$, заданная равенством $g^t\omega \doteq \big(h^t\sigma, A(t, \omega)\big)$, порождает полупоток на Ω и, следовательно, пара (Ω, g^t) образует топологическую динамическую систему, которая служит расширением исходной динамической системы (Σ, h^t).

4.2. Расширение метрической динамической системы

Построим теперь метрическую динамическую систему $(\Omega_0, \mathfrak{B}, \mu, g^t)$, которая служит расширением системы $(\Sigma, \mathfrak{A}, \nu, h^t)$ и строится по включению (4.3).

О п р е д е л е н и е 4.7. Множество $\Omega_0 \subseteq \Omega$ называется *положительно инвариантным* относительно полупотока g^t, если $g^t\omega \in \Omega_0$ для всех $\omega \in \Omega_0$ и всех $t \geqslant 0$.

Отметим, что если точка ω принадлежит положительно инвариантному относительно полупотока g^t множеству Ω_0, то в это множество входит вся положительная полутраектория $\operatorname{orb}_+(\omega) \doteq \{g^t\omega : t \geqslant 0\}$, определяемая этой точкой, поэтому каждая полутраектория является положительно инвариантным множеством. Множество, состоящее из любого числа полутраекторий, также положительно инвариантно, и любое положительно инвариантное множество является множеством, составленным из полутраекторий.

Предполагаем, что выполнено следующее условие.

У с л о в и е 4.2. Найдется функция $H : \Sigma \to \operatorname{comp}(\mathbb{R}^n)$, непрерывная в метрике Хаусдорфа, такая, что множество $\Omega_0 \doteq \Sigma \times H(\sigma)$ положительно инвариантно относительно полупотока g^t.

Обозначим через $\mathfrak{B}_\sigma$ наименьшую сигма-алгебру борелевских множеств, порожденную при каждом фиксированном σ системой множеств из $\operatorname{comp}(H(\sigma))$. Определим наименьшую сигма-алгебру $\mathfrak{B}$ множеств вида $S \times H_\sigma \doteq \big\{(\sigma, X) \in \Omega_0 : \sigma \in S,\ X \subseteq H_\sigma\big\}$, где $S \in \mathfrak{A}$, $H_\sigma \in \mathfrak{B}_\sigma$.

Поскольку пространство Ω_0 компактно и положительно инвариантно относительно полупотока g^t, то по теореме Н. М. Крылова и Н. Н. Боголюбова [105, гл. 5], [213] на данном пространстве существует инвариантная относительно полупотока g^t борелевская вероятностная мера μ, то есть такая мера, что $\mu(g^tB) = \mu(B)$ для любого множества $B \in \mathfrak{B}$ и любого момента времени $t \in \mathbb{R}_+$.

Пространство Ω_0 называется *фазовым пространством* метрической динамической системы $(\Omega_0, \mathfrak{B}, \mu, g^t)$, а проекция функции $t \to g^t\omega$ на фазовое пространство — *траекторией* точки ω. Будем говорить также, что g^t задает *полупоток* на Ω_0, а функция $t \to g^t\omega$ задает *движение* точки ω в фазовом пространстве Ω_0. Построенный таким образом полупоток g^t определяет *стационарный в узком смысле случайный процесс.*

Напомним, что случайный процесс $\xi(t)$, $t \in \mathbb{R}_+$ называется *стационарным в узком смысле,* если для любых $t, t_k \in \mathbb{R}_+$, $k = 1, \ldots, n$, $n \geqslant 1$ совместное распределение случайных величин

$$\xi(t_1 + t), \xi(t_2 + t), \ldots, \xi(t_n + t)$$

не зависит от t. Другими словами, процесс стационарен в узком смысле, если его конечномерные распределения не меняются при допустимых сдвигах времени [179, с. 176]. Оказывается, что с точностью до множества меры нуль всякий стационарный в узком смысле процесс $\xi(t)$ может быть задан в виде $\xi(t) = g^t\xi(0)$ [4, с. 159], [73, с. 280].

П р и м е р 4.1. Пусть задана *эргодическая* (*неразложимая*) метрическая динамическая система $(\Sigma, \mathfrak{A}, \nu, h^t)$. Напомним, что динамическая система $(\Sigma, \mathfrak{A}, \nu, h^t)$ называется *эргодической* по отношению к мере ν, если пространство Σ нельзя представить как сумму двух измеримых инвариантных множеств положительной меры без общих точек, иначе: если Σ_0 инвариантно, измеримо и $\nu(\Sigma_0) > 0$, то $\nu(\Sigma \setminus \Sigma_0) = 0$. Таким образом, если система $(\Sigma, \mathfrak{A}, \nu, h^t)$ эргодическая, то мера всякого инвариантного измеримого множества Σ_0 из Σ равна нулю или единице. Динамическая система $(\Sigma, \mathfrak{A}, \nu, h^t)$ называется *строго эргодической*, если эргодическая мера на Σ единственна (см. [72, с. 20], [105, с. 386]).

Покажем, как можно построить инвариантную меру μ, согласованную с мерой ν, где согласованность означает выполнение равенства $\mu\big(S \times H(\sigma)\big) = \nu(S)$ для всех $S \in \mathfrak{A}$ и $\sigma \in \Sigma$. Обозначим через Σ_0 нетривиальное инвариантное подмножество фазового пространства Σ. Пусть $\sigma_0 \in \Sigma_0$ фиксировано, тогда для любого значения $\sigma \in \Sigma_0$ найдется такой момент времени $t \geqslant 0$, что $\sigma_0 = h^t\sigma$. Обозначим через μ_{σ_0} некоторую вероятностную меру на сигма-алгебре $\mathfrak{B}_{\sigma_0}$ и по заданной мере μ_{σ_0} определим для каждого $\sigma \in \Sigma_0$ и любого множества $X \in \mathfrak{B}_\sigma$ вероятностную меру

$$\mu_\sigma(X) \doteq \mu_{\sigma_0}\big(A(t, \sigma, X)\big) = \mu_{h^t\sigma}\big(A(t, \sigma, X)\big).$$

Далее, определим меру $\widetilde{\mu}$ для множеств вида $S \times H_\sigma \in \mathfrak{B}$ равенством

$$\widetilde{\mu}(S \times H_\sigma) \doteq \int_{S \times H_\sigma} d\nu d\mu_\sigma. \tag{4.4}$$

Тогда существует единственная вероятностная мера μ на измеримом пространстве $(\Omega_0, \mathfrak{B})$, которая является продолжением меры $\widetilde{\mu}$ на сигма-алгебру $\mathfrak{B}$ (см. [179, с. 176]). Аналогично [72, с. 190] можно показать, что мера μ инвариантна относительно потока g^t. Согласованность меры μ с мерой ν следует из равенства (4.4) и условия $\mu_\sigma\big(H(\sigma)\big) = 1$.

§ 5. Динамическая система сдвигов

Рассмотрим управляемую систему

$$\dot{x} = g(t, x, u), \quad x \in N(t), \quad u \in U(t, x), \quad t \in \mathbb{R}. \tag{5.1}$$

Предполагаем, что функция $g(t, x, u)$ непрерывна и функции $U(t, x)$, $N(t)$ принимают значения в пространстве $\operatorname{clcv}(\mathbb{R}^n)$ непустых *замкнутых выпуклых* подмножеств $\mathbb{R}^n$, которое будем обозначать $\operatorname{clcv}(\mathbb{R}^n)$. Системе (5.1) поставим в соответствие дифференциальное включение с некомпактной правой частью

$$\dot{x} \in G(t, x), \quad x \in N(t), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{5.2}$$

где функция $G : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \operatorname{clcv}(\mathbb{R}^n)$ определена следующим образом:

$$G(t, x) = \operatorname{co}\big\{y \in \mathbb{R}^n : \, y = g(t, x, u), \; u \in U(t, x)\big\}.$$

Таким образом, системе (5.1) соответствует задача о существовании решений дифференциального включения (5.2), не выходящих при всех t из заданного множества $N(t)$.

В статье М. В. Бебутова [10] доказана теорема о компактности пространства $\mathcal{R}$, которое является замыканием множества сдвигов действительной непрерывной функции $t \to f(t)$, определенной при всех $t \in \mathbb{R}$. Сформулируем это утверждение.

Рассматривается пространство

$$\mathcal{R} \doteq \operatorname{cl}\{t \to f^\tau(t) : \tau \in \mathbb{R}\}, \quad \text{где} \quad f^\tau(t) = f(t + \tau),$$

а замыкание cl берется по метрике, введенной М. В. Бебутовым:

$$\rho(f,g)=\sup_{r>0}\min\Big\{\max_{|t|\leqslant r}|f(t)-g(t)|,\,\frac{1}{r}\Big\}.$$

Т е о р е м а 5.1 (см. [10]). *Для того чтобы пространство $\mathcal{R}$ было компактным, необходимо и достаточно, чтобы функция $f(t)$ была ограничена и равномерно непрерывна на всей числовой прямой.*

Следующее утверждение является аналогом теоремы М. В. Бебутова для функций $\mathcal{S}(t,x)$ со значениями в пространстве $\operatorname{clcv}(\mathbb{R}^{2n})$.

Дифференциальному включению (5.2) поставим в соответствие функцию

$$(t,x)\to\mathcal{S}(t,x)\doteq\big(G(t,x),N(t)\big)\in\operatorname{clcv}(\mathbb{R}^n)\times\operatorname{clcv}(\mathbb{R}^n).$$

Согласно равенству (1.5), определим расстояние

$$\operatorname{Dist}\big(\mathcal{S}(t,x),\widehat{\mathcal{S}}(t,x)\big)\doteq\sup_{r>0}\min\Big\{\operatorname{dist}\big(\mathcal{S}_r(t,x),\widehat{\mathcal{S}}_r(t,x)\big),\,\frac{1}{r}\Big\}.$$

Введем норму множества $\mathcal{S}(t,x):|\mathcal{S}(t,x)|\doteq\operatorname{Dist}\big(\mathcal{S}(t,x),\{0\}\big)$.

Построим множество функций

$$\Sigma\doteq\operatorname{cl}\{(t,x)\to\mathcal{S}_\tau(t,x):\tau\in\mathbb{R}\},\quad\text{где}\quad\mathcal{S}_\tau(t,x)=\mathcal{S}(t+\tau,x),$$

а замыкание cl берется по метрике, которую мы будем называть метрикой Бебутова [10]:

$$\rho_\Sigma(\mathcal{S}^1,\mathcal{S}^2)=\sup_{\vartheta>0,a>0}\min\Big\{\max_{|t|\leqslant\vartheta,|x|\leqslant a}\operatorname{Dist}\big(\mathcal{S}^1(t,x),\mathcal{S}^2(t,x)\big),\,\frac{1}{\vartheta+a}\Big\},\tag{5.3}$$

где $\mathcal{S}^i=(G^i,N^i)\in\Sigma$. Наша задача состоит в том, чтобы доказать, что при определенных условиях пространство Σ компактно и на данном пространстве действует однопараметрическая группа преобразований h^τ пространства Σ в себя, удовлетворяющая всем аксиомам динамической системы. Введем в рассмотрение следующее условие.

У с л о в и е 5.1. Функция $t\to\mathcal{S}(t,x)$ ограничена на $\mathbb{R}$ при каждом $x\in\mathbb{R}^n$ и равномерно непрерывна на числовой прямой равномерно относительно x на компактах в $\mathbb{R}^n$.

Напомним, что функция $t\to\mathcal{S}(t,x)$ называется *равномерно непрерывной на числовой прямой равномерно относительно x на компактах в* $\mathbb{R}^n$, если для любого $\varepsilon>0$ и каждого компакта K в $\mathbb{R}^n$ найдется такая константа $\delta=\delta(\varepsilon,K)>0$, что неравенство

$$\operatorname{Dist}\big(\mathcal{S}(t,x),\mathcal{S}(t+s,x)\big)\leqslant\varepsilon\tag{5.4}$$

выполнено при каждом $s\in[-\delta,\delta]$, всех $t\in\mathbb{R}$ и $x\in K$.

О п р е д е л е н и е 5.1. Будем говорить, что последовательность $\{\mathcal{S}^i\}_{i=1}^\infty$, $\mathcal{S}^i\in\Sigma$ сходится к точке $\widehat{\mathcal{S}}\in\Sigma$ *равномерно на компактах* в $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$, если для любого $\varepsilon>0$ и всех точек $(t,x)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$, удовлетворяющих условию $|t|\leqslant\vartheta,|x|\leqslant a$, где $\vartheta+a\leqslant 1/\varepsilon$, найдется такой индекс $i_0=i_0(\varepsilon)$, что для каждого $i\geqslant i_0$ выполнено неравенство

$$\operatorname{Dist}\big(\mathcal{S}^i(t,x),\widehat{\mathcal{S}}(t,x)\big)\leqslant\varepsilon.\tag{5.5}$$

Л е м м а 5.1. *Пусть выполнено условие* 5.1. *Тогда пространство* Σ *компактно и сходимость последовательности* $\{\mathcal{S}^i\}_{i=1}^{\infty}$, $\mathcal{S}^i \in \Sigma$, *к точке* $\widehat{\mathcal{S}} \in \Sigma$ *в метрике Бебутова* ρ_{Σ} *эквивалентна сходимости, равномерной на компактах в* $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Покажем, что сходимость последовательности $\{\mathcal{S}^i\}_{i=1}^{\infty}$ к $\widehat{\mathcal{S}} \in \Sigma$ эквивалентна сходимости, равномерной на компактах. Предположим, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой номер $i_0 = i_0(\varepsilon)$, что $\rho_{\Sigma}\big(\mathcal{S}^i, \widehat{\mathcal{S}}\big) \leqslant \varepsilon$ при всех $i \geqslant i_0$. Тогда из определения (5.3) получаем, что для всех $\vartheta > 0, a > 0$ и всех $i \geqslant i_0$ выполнено неравенство

$$\min\left\{\max_{|t|\leqslant\vartheta,|x|\leqslant a} \operatorname{Dist}\big(\mathcal{S}^i(t,x), \widehat{\mathcal{S}}(t,x)\big), \frac{1}{\vartheta + a}\right\} \leqslant \varepsilon.$$

Следовательно, для всех $|t| \leqslant \vartheta, |x| \leqslant a$ таких, что $\vartheta + a \leqslant 1/\varepsilon$, неравенство (5.5) выполнено для каждого $i \geqslant i_0$. Верно и обратное утверждение: если для всех $|t| \leqslant \vartheta, |x| \leqslant a$, $\vartheta + a \leqslant 1/\varepsilon$, неравенство (5.5) выполнено для каждого $i \geqslant i_0$, то $\rho_{\Sigma}\big(\mathcal{S}^i, \widehat{\mathcal{S}}\big) \leqslant \varepsilon$ при всех $i \geqslant i_0$.

Докажем, что пространство Σ компактно. Рассмотрим последовательность $\{\mathcal{S}^{\tau_i}(t,x)\}_{i=1}^{\infty}$. Отметим, что неравенство (5.4) равносильно неравенству

$$\operatorname{Dist}\big(\mathcal{S}^{\tau_i}(t,x), \mathcal{S}^{\tau_i}(t+s,x)\big) \leqslant \varepsilon, \tag{5.6}$$

выполненному для всех $s \in [-\delta, \delta]$, всех $t \in \mathbb{R}$, $\tau_i \in \mathbb{R}$ и $x \in K$. Следовательно, последовательность функций $\{\mathcal{S}^{\tau_i}(t,x)\}_{i=1}^{\infty}$ равностепенно непрерывна по t (также равномерно относительно x на компактах в $\mathbb{R}^n$). Далее, так как функция $t \to \mathcal{S}(t,x)$ ограничена на $\mathbb{R}$ при каждом $x \in \mathbb{R}^n$, то последовательность $\{\mathcal{S}^{\tau_i}\}_{i=1}^{\infty}$ также равномерно ограничена.

Покажем, что из последовательности $\{\mathcal{S}^{\tau_i}(t,x)\}_{i=1}^{\infty}$ можно выделить подпоследовательность, сходящуюся в метрике Хаусдорфа–Бебутова при $|t| \leqslant 1$. Возьмем натуральное число m такое, чтобы выполнялось неравенство $\dfrac{1}{m} < \delta = \delta(\varepsilon, K)$. Разобьем отрезок $[-1,1]$ на $2m$ равных частей $\left[\dfrac{k}{m}, \dfrac{k+1}{m}\right]$, $k = -m, -m+1, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, m-1$. Тогда

$$\operatorname{Dist}\big(\mathcal{S}^{\tau_i}(t,x), \mathcal{S}^{\tau_i}(t+s,x)\big) \leqslant \varepsilon$$

для любых $t, t+s$ таких, что $|s| \leqslant \dfrac{1}{m}$, в частности, для $t, t+s$, принадлежащих одному и тому же частичному отрезку $\left[\dfrac{k}{m}, \dfrac{k+1}{m}\right]$.

Каждой функции $\mathcal{S}^{\tau_i}(t,x)$ поставим в соответствие непрерывную функцию $P^{\tau_i}(t,x)$, которая на каждом отрезке $\left[\dfrac{k}{m}, \dfrac{k+1}{m}\right]$, $k = -m, -m+1, \ldots, m-1$ задается равенством

$$P^{\tau_i}(t,x) = (mt-k) \cdot \mathcal{S}^{\tau_i}\Big(\frac{k+1}{m}, x\Big) + (k+1-mt) \cdot \mathcal{S}^{\tau_i}\Big(\frac{k}{m}, x\Big).$$

Отметим, что $P^{\tau_i}(t,x) = \mathcal{S}^{\tau_i}(t,x)$ для всех $t = k/m$, где $k = -m, -m+1, \ldots, m$.

Докажем, что для всех $\tau_i \in \mathbb{R}$, $t \in [-1,1]$ и $x \in K$ выполнено неравенство

$$\operatorname{Dist}\big(P^{\tau_i}(t,x), \mathcal{S}^{\tau_i}(t,x)\big) \leqslant \varepsilon. \tag{5.7}$$

Обозначим через $s_0^{\tau_i}(t,x)$ ближайшую к нулю пространства $\mathbb{R}^{2n}$ точку множества $\mathcal{S}^{\tau_i}(t,x)$, также обозначим $\mathcal{S}_r^{\tau_i}(t,x) = \mathcal{S}^{\tau_i}(t,x) \bigcap O_r(s_0^{\tau_i}(t,x))$. Аналогично определим множество

$$P_r^{\tau_i}(t,x) = P^{\tau_i}(t,x) \bigcap O_r(p_0^{\tau_i}(t,x)),$$

где $p_0^{\tau_i}(t,x)$ — ближайшая к нулю пространства $\mathbb{R}^{2n}$ точка множества $P^{\tau_i}(t,x)$. Из определения метрики Dist следует, что неравенство (5.6) равносильно неравенству

$$\operatorname{dist}\big(\mathcal{S}_r^{\tau_i}(t,x), \mathcal{S}_r^{\tau_i}(t+s,x)\big) \leqslant \varepsilon, \tag{5.8}$$

которое справедливо для всех $r \in [0, 1/\varepsilon]$, $\tau_i \in \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{R}$, $|s| \leqslant 1/m$, $x \in K$.

Докажем, что из неравенства (5.8) следует неравенство

$$\operatorname{dist}\big(P_r^{\tau_i}(t,x), \mathcal{S}_r^{\tau_i}(t,x)\big) \leqslant \varepsilon, \tag{5.9}$$

выполненное для всех $r \in [0, 1/\varepsilon]$, всех $t \in [-1, 1]$, $\tau_i \in \mathbb{R}$, $x \in K$. Пусть $\alpha = mt - k$, тогда

$$P_r^{\tau_i}(t,x) = \alpha \mathcal{S}_r^{\tau_i}\Big(\frac{k+1}{m}, x\Big) + (1-\alpha)\mathcal{S}_r^{\tau_i}\Big(\frac{k}{m}, x\Big).$$

Из (5.8) следует неравенство для полуотклонения

$$d\Big(\mathcal{S}_r^{\tau_i}(t,x), \mathcal{S}_r^{\tau_i}\Big(\frac{k}{m}, x\Big)\Big) = \sup_{s \in \mathcal{S}_r^{\tau_i}(t,x)} \varrho\Big(s, \mathcal{S}_r^{\tau_i}\Big(\frac{k}{m}, x\Big)\Big) \leqslant \varepsilon,$$

выполненное для всех $t \in \Big[\dfrac{k}{m}, \dfrac{k+1}{m}\Big]$, $\tau_i \in \mathbb{R}$, $x \in K$. Поэтому для произвольной точки s множества $\mathcal{S}_r^{\tau_i}(t,x)$ имеет место неравенство

$$\varrho\Big(s, \mathcal{S}_r^{\tau_i}\Big(\frac{k}{m}, x\Big)\Big) \leqslant \varepsilon.$$

Аналогично можно показать, что справедливо неравенство $\varrho\Big(s, \mathcal{S}_r^{\tau_i}\Big(\dfrac{k+1}{m}, x\Big)\Big) \leqslant \varepsilon$. Множества $\mathcal{S}_r^{\tau_i}\Big(\dfrac{k}{m}, x\Big)$ и $\mathcal{S}_r^{\tau_i}\Big(\dfrac{k+1}{m}, x\Big)$ замкнутые и выпуклые, поэтому существует единственная точка s_1 множества $\mathcal{S}_r^{\tau_i}\Big(\dfrac{k}{m}, x\Big)$, ближайшая к точке s и единственная точка $s_2 \in \mathcal{S}_r^{\tau_i}\Big(\dfrac{k+1}{m}, x\Big)$, также ближайшая к точке s (см. [170], с. 48). Отметим, что

$$|s - s_1| = \varrho\Big(s, \mathcal{S}_r^{\tau_i}\Big(\frac{k}{m}, x\Big)\Big) \leqslant \varepsilon$$

и $|s - s_2| \leqslant \varepsilon$. Рассмотрим точку $p = \alpha s_2 + (1-\alpha)s_1$, которая содержится в множестве $P_r^{\tau_i}(t,x)$. Поскольку точки s_1 и s_2 содержатся в замкнутой ε-окрестности $O_\varepsilon(s)$ точки s и множество $O_\varepsilon(s)$ выпукло, то точка p также принадлежит $O_\varepsilon(s)$, поэтому $|s-p| \leqslant \varepsilon$. Следовательно,

$$\varrho\big(s, P_r^{\tau_i}(t,x)\big) = \inf_{p \in P_r^{\tau_i}(t,x)} |s - p| \leqslant \varepsilon.$$

Последнее неравенство выполнено для каждой точки s множества $\mathcal{S}_r^{\tau_i}(t,x)$, поэтому

$$d(\mathcal{S}_r^{\tau_i}(t,x), P_r^{\tau_i}(t,x)) = \sup_{s \in \mathcal{S}_r^{\tau_i}(t,x)} \varrho\Big(s, P_r^{\tau_i}(t,x)\Big) \leqslant \varepsilon. \tag{5.10}$$

Из определения множества $P_r^{\tau_i}(t,x)$ следует включение

$$P_r^{\tau_i}(t,x) \subseteq \operatorname{conv}\Big(\mathcal{S}_r^{\tau_i}\Big(\frac{k}{m}, x\Big), \mathcal{S}_r^{\tau_i}\Big(\frac{k+1}{m}, x\Big)\Big).$$

Далее, из неравенства (5.8) получаем включения $\mathcal{S}_r^{\tau_i}\Big(\dfrac{k}{m}, x\Big) \subseteq \mathcal{S}_r^{\tau_i}(t,x) + O_\varepsilon(0)$ и

$$\mathcal{S}_r^{\tau_i}\Big(\frac{k+1}{m}, x\Big) \subseteq \mathcal{S}_r^{\tau_i}(t,x) + O_\varepsilon(0),$$

которые выполнены для всех $r \in [0, 1/\varepsilon]$, $t \in \Big[\dfrac{k}{m}, \dfrac{k+1}{m}\Big]$, $\tau_i \in \mathbb{R}$, $x \in K$.

Из выпуклости множества $\mathcal{S}_r^{\tau_i}(t,x)$ следует, что множество $\mathcal{S}_r^{\tau_i}(t,x) + O_\varepsilon(0)$ выпукло, поэтому справедливы включения

$$P_r^{\tau_i}(t,x) \subseteq \operatorname{conv}\Big(\mathcal{S}_r^{\tau_i}\Big(\frac{k}{m}, x\Big), \mathcal{S}_r^{\tau_i}\Big(\frac{k+1}{m}, x\Big)\Big) \subseteq \mathcal{S}_r^{\tau_i}(t,x) + O_\varepsilon(0).$$

Следовательно, имеет место неравенство

$$d\Big(P_r^{\tau_i}(t,x), \mathcal{S}_r^{\tau_i}(t,x)\Big) \leqslant \varepsilon. \tag{5.11}$$

Из неравенств (5.10) и (5.11) следует, что для всех $r \in [0, 1/\varepsilon]$, $t \in \Big[\dfrac{k}{m}, \dfrac{k+1}{m}\Big]$, $\tau_i \in \mathbb{R}$, $x \in K$ выполнено неравенство

$$\operatorname{dist}\Big(P_r^{\tau_i}(t,x), \mathcal{S}_r^{\tau_i}(t,x)\Big) \leqslant \varepsilon,$$

откуда, в силу определения метрики Dist, получаем неравенство (5.7). Поскольку k — произвольное число из множества $\{-m, -m+1, \ldots, m\}$, то (5.7) верно для всех $t \in [-1,1]$, $\tau_i \in \mathbb{R}$, $x \in K$. Таким образом, множество P функций $P^\tau(t,x)$, определенных для всех $t \in [-1,1]$, $\tau \in \mathbb{R}$, $x \in K$, образует ε-сеть для пространства

$$\Sigma_1 \doteq \operatorname{cl}\{(t,x) \to \mathcal{S}^\tau(t,x) : \tau \in \mathbb{R}, t \in [-1,1]\}.$$

Далее, из ограниченности функции $t \to \mathcal{S}(t,x)$ на $\mathbb{R}$ при каждом $x \in \mathbb{R}^n$ следует равномерная ограниченность множества Σ, (а также множества Σ_1), поэтому

$$|P_\tau(t,x)| = \operatorname{dist}\big(P_\tau(t,x), \{0\}\big) \leqslant \operatorname{dist}\big(\mathcal{S}_\tau(t,x), \{0\}\big) + \operatorname{dist}\big(P_\tau(t,x), \mathcal{S}_\tau(t,x)\big) \leqslant c + \varepsilon = c_1,$$

то есть множество P равномерно ограничено. Таким образом, для любого $\varepsilon > 0$ можно построить компактную ε-сеть для Σ_1. Поскольку пространство Σ_1 полное, то оно компактное.

Мы показали, что из последовательности $\{\mathcal{S}^{\tau_i}(t,x)\}$ можно выделить подпоследовательность $\{\mathcal{S}^{\tau_i^{(1)}}(t,x)\}$, сходящуюся в метрике Dist при $|t| \leqslant 1$. Из этой подпоследовательности можно выделить новую подпоследовательность $\{\mathcal{S}^{\tau_i^{(2)}}(t,x)\}$, сходящуюся в метрике Dist при $|t| \leqslant 2$ и т. д. Получаем следующие включения:

$$\{\mathcal{S}^{\tau_i}(t,x)\} \supseteq \{\mathcal{S}^{\tau_i^{(1)}}(t,x)\} \supseteq \cdots \supseteq \{\mathcal{S}^{\tau_i^{(k)}}(t,x)\} \supseteq \ldots,$$

причем $\{\mathcal{S}^{\tau_i^{(k)}}(t,x)\}$ сходится в метрике Dist при $|t| \leqslant k$. Тогда диагональная последовательность

$$\{\mathcal{S}^{\tau_1^{(1)}}(t,x)\}, \ldots, \{\mathcal{S}^{\tau_i^{(i)}}(t,x)\}, \ldots$$

будет сходиться в метрике Dist на каждом конечном интервале, что и доказывает компактность пространства Σ. □

З а м е ч а н и е 5.1. Обозначим через $s_0(t,x)$ точку множества $\mathcal{S}(t,x)$, ближайшую к нулю пространства $\mathbb{R}^{2n}$. Из определения метрики Хаусдорфа–Бебутова Dist следует неравенство

$$\operatorname{Dist}\big(\mathcal{S}(t,x), \{0\}\big) \leqslant \frac{|s_0(t,x)| + \sqrt{|s_0(t,x)|^2 + 4}}{2},$$

которое доказывается так же, как неравенство (1.8). Поэтому условие ограниченности функции $t \to \mathcal{S}(t,x)$ на $\mathbb{R}$ при каждом $x \in \mathbb{R}^n$ равносильно условию ограниченности функции $t \to s_0(t,x)$ на числовой прямой при каждом $x \in \mathbb{R}^n$.

Переобозначим элементы пространства Σ буквами $\sigma \in \Sigma$ (таким образом, $\sigma \in \Sigma$ в том и только в том случае, если $\sigma = \widehat{\mathcal{S}}$, где $\widehat{\mathcal{S}} = \lim\limits_{i\to\infty} \mathcal{S}_{\tau_i}$) и введем в рассмотрение однопараметрическую группу $h^\tau : \Sigma \to \Sigma$, определенную равенством $h^\tau \sigma = \sigma_\tau$.

Л е м м а 5.2. *Функция $(\tau, \sigma) \to h^\tau \sigma$ непрерывна по совокупности переменных (τ, σ) на множестве $\mathbb{R} \times \Sigma$ равномерно относительно τ на любом отрезке времени. Это означает, что для любого $\varepsilon > 0$ и каждого $T > 0$ найдется такое число $\delta = \delta(\varepsilon, T) > 0$, что для всех $\sigma, \widehat{\sigma} \in \Sigma$ таких, что $\rho_\Sigma(\sigma, \widehat{\sigma}) \leqslant \delta$ и всех $\tau \in [-T, T]$ имеет место неравенство*

$$\max_{|\tau| \leqslant T} \rho_\Sigma(h^\tau \sigma, h^\tau \widehat{\sigma}) \leqslant \varepsilon.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть заданы последовательности $\{t_i\}$ и $\{\sigma^i\}$ $\sigma^i \in \Sigma$, такие, что $t_i \to t_0$ и $\rho_{\Sigma}(\sigma^i, \widehat{\sigma}) \to 0$. Надо доказать, что $\rho_{\Sigma}(h^{t_i}\sigma^i, h^{t_0}\widehat{\sigma}) \to 0$. В силу леммы 5.1 из равенства $\lim\limits_{i\to\infty} \rho_{\Sigma}(\sigma^i, \widehat{\sigma}) = 0$ следует, что последовательность $\{\sigma^i\}$, где $\sigma^i = \mathcal{S}^i(t,x)$, сходится к $\widehat{\sigma} = \widehat{\mathcal{S}}(t,x)$ равномерно на каждом компакте в $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$. Следовательно, для $\varepsilon > 0$ и $t_0 \in \mathbb{R}$ найдется такой номер i_1, что для любых $i \geqslant i_1$, для всех $(s,x) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ таких, что $|s| \leqslant \vartheta, |x| \leqslant a$ и $\vartheta + a \leqslant 2/\varepsilon$, выполнено неравенство

$$\operatorname{Dist}\big(\mathcal{S}^i(s+t_0,x), \widehat{\mathcal{S}}(s+t_0,x)\big) \leqslant \varepsilon/2.$$

В силу равномерной непрерывности функции $t \to \mathcal{S}(t,x)$ на прямой $\mathbb{R}$ равномерно относительно x на компактах в $\mathbb{R}^n$ для любого $\varepsilon > 0$ и компакта $K = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leqslant a\}$ найдется такое $\delta = \delta(\varepsilon, K) > 0$, что неравенство

$$\operatorname{Dist}\big(\mathcal{S}_t(s,x), \mathcal{S}_{t_0}(s,x)\big) \leqslant \varepsilon/2$$

выполнено при всех $|t - t_0| \leqslant \delta$, всех $s \in \mathbb{R}$, $|x| \leqslant a$. Выберем такое i_2, что $|t_i - t_0| \leqslant \delta$ при $i \geqslant i_2$. Пусть $i_0 = \max\{i_1, i_2\}$, тогда для всех $i \geqslant i_0$ и всех $(s,x) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ таких, что $|s| \leqslant \vartheta, |x| \leqslant a$, $\vartheta + a \leqslant 1/\varepsilon$, справедливы неравенства

$$\operatorname{Dist}\big(\mathcal{S}^i_{t_i}(s,x), \widehat{\mathcal{S}}_{t_0}(s,x)\big) \leqslant \operatorname{Dist}\big(\mathcal{S}^i_{t_i}(s,x), \mathcal{S}^i_{t_0}(s,x)\big) + \operatorname{Dist}\big(\mathcal{S}^i_{t_0}(s,x), \widehat{\mathcal{S}}_{t_0}(s,x)\big) \leqslant \varepsilon,$$

следовательно, если $t^i \to t_0$ и $\rho_{\Sigma}(\sigma^i, \widehat{\sigma}) \to 0$ при $i \to \infty$, то $\lim\limits_{i\to\infty} \rho_{\Sigma}(h^{t_i}\sigma^i, h^{t_0}\widehat{\sigma}) = 0$.

Покажем, что движение $\tau \to h^{\tau}\sigma$ непрерывно зависит от начальной точки. Предположим, что это неверно, тогда найдутся число $\alpha > 0$, последовательность $\{\sigma_i\}_{i=1}^{\infty}$ элементов пространства Σ, $\lim\limits_{i\to\infty} \sigma_i = \sigma$ и соответствующая числовая последовательность $\{t_i\}_{i=1}^{\infty}$, $|t_i| \leqslant T$ такая, что $\rho_{\Sigma}(h^{t_i}\sigma, h^{t_i}\sigma_i) > \alpha > 0$. По теореме Вейерштрасса, из последовательности $\{t_i\}_{i=1}^{\infty}$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность (которую снова обозначим $\{t_i\}_{i=1}^{\infty}$) такую, что $\lim\limits_{n\to\infty} t_i = t_0$, $|t_0| \leqslant T$. По свойствам метрического пространства имеем

$$\rho_{\Sigma}(h^{t_i}\sigma, h^{t_i}\sigma_i) \leqslant \rho_{\Sigma}(h^{t_i}\sigma, h^{t_0}\sigma) + \rho_{\Sigma}(h^{t_0}\sigma, h^{t_i}\sigma_i).$$

Из непрерывности функции $(t,\sigma) \to h^t\sigma$ следует, что расстояния в правой части последнего неравенства при достаточно больших индексах i можно сделать меньше константы $\alpha/2$, и мы приходим к противоречию: $\alpha < \alpha$. □

В силу лемм 5.1 и 5.2 пара (Σ, h^t) образует топологическую динамическую систему, которая называется динамической системой сдвигов. Таким образом, доказана следующая теорема.

Т е о р е м а 5.2. *Пусть выполнено условие* 5.1. *Тогда пара* (Σ, h^{τ}), *образованная семейством дифференциальных включений*

$$\dot{x} \in \widehat{G}(t,x), \quad x(t) \in \widehat{N}(t) \tag{5.12}$$

и группой $h^{\tau}\widehat{\mathcal{S}} \doteq \widehat{\mathcal{S}}_{\tau}$, *где* $\widehat{\mathcal{S}}(t,x) \doteq \big(\widehat{G}(t,x), \widehat{N}(t)\big)$, *образует динамическую систему сдвигов.*

Отметим, что аналогичным образом строится динамическая система сдвигов для управляемой системы

$$\dot{x} = f(t,x,u), \quad u \in U(t,x), \quad t \in \mathbb{R},$$

заданной непрерывной функцией $f(t,x,u)$ и функцией $U : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \to \operatorname{clcv}(\mathbb{R}^n)$.

5.1. Полезная параметризация семейства дифференциальных включений

Рассмотренная в теореме 5.2 динамическая система сдвигов может быть параметризована следующим образом. Пусть задана удовлетворяющая условию 5.1 функция

$$(\tau,x) \to \mathcal{S}(\tau,x) \doteq \big(G(\tau,x), N(\tau)\big) \in \operatorname{clcv}(\mathbb{R}^n)\times\operatorname{clcv}(\mathbb{R}^n)$$

переменных $(\tau, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, по которой, как и раньше, строится множество функций

$$\Sigma \doteq \operatorname{cl}\big\{(\tau, x) \to \mathcal{S}_t(\tau, x) : t \in \mathbb{R}\big\}, \quad \text{где} \quad \mathcal{S}_t(\tau, x) = \mathcal{S}(\tau + t, x),$$

а замыкание cl берется в метрике (5.3). Пусть $\sigma = \widehat{\mathcal{S}} \doteq (\widehat{G}, \widehat{N})$, где

$$\widehat{\mathcal{S}}(\tau, x) \doteq \big(\widehat{G}(\tau, x), \widehat{N}(\tau)\big), \quad h^t : \Sigma \to \Sigma, \quad h^t\sigma \doteq h^t\widehat{\mathcal{S}} = \widehat{\mathcal{S}}_t.$$

Введем в рассмотрение две функции $F : \Sigma \times \mathbb{R}^n \to \operatorname{clcv}(\mathbb{R}^n)$ и $M : \Sigma \to \operatorname{clcv}(\mathbb{R}^n)$, определенные равенствами $F(\sigma, x) \doteq \widehat{G}(0, x)$, $M(\sigma) \doteq \widehat{N}(0)$. Тогда

$$F(h^t\sigma, x) = \widehat{G}(t, x), \quad M(h^t\sigma) = \widehat{N}(t),$$

и поэтому семейство включений (5.12) можно записать в виде

$$\dot{x} \in F(h^t\sigma, x), \quad x(t) \in M(h^t\sigma), \quad \sigma \in \Sigma. \tag{5.13}$$

Записав семейство включений в виде (5.13), мы можем теперь забыть, что динамическая система (Σ, h^t) предполагалась *динамической системой сдвигов* и, не меняя записи (5.13), можем рассматривать семейство включений (5.13), параметризованных с помощью произвольной топологической динамической системы.

§ 6. Теоремы существования

Пусть задана топологическая динамическая система (Σ, h^t), относительно фазового пространства которой будем предполагать, что фазовое пространство Σ *локально компактно* (то есть для любой точки σ_0 пространства Σ пересечение шара $O_a(\sigma_0) \doteq \{\sigma \in \Sigma : \varrho_\Sigma(\sigma, \sigma_0) \leqslant a\}$ с пространством Σ компактно). Будем рассматривать задачу

$$\dot{x} \in F(h^t\sigma, x), \quad x(t) \in M(h^t\sigma), \tag{6.1}$$

относительно которой предполагается, что функция $(\sigma, x) \to F(\sigma, x)$, задающая дифференциальное включение

$$\dot{x} \in F(h^t\sigma, x),$$

определена при всех $(\sigma, x) \in \Sigma \times \mathbb{R}^n$ и принимает значения в пространстве $\operatorname{clcv}(\mathbb{R}^n)$ непустых выпуклых замкнутых подмножеств в $\mathbb{R}^n$, функция $\sigma \to M(\sigma)$, задающая фазовые ограничения задачи (6.1), также принимает значения в пространстве $\operatorname{clcv}(\mathbb{R}^n)$ и для каждого шара $O_r(0)$ достаточно большого радиуса r *непрерывна* в каждой точке $\sigma \in \Sigma$.

При исследовании вопросов существования решений задачи (6.1) будем пользоваться определениями полунепрерывности сверху и снизу в терминах полуотклонений D и непрерывности в терминах метрики Dist Хаусдорфа–Бебутова (см. определение 3.1, с. 33).

З а м е ч а н и е 6.1. Отметим, что в пространстве $\operatorname{conv}(\mathbb{R}^n)$ мы сохраняем метрику $\operatorname{dist}(F, G)$ и полуотклонения $d(F, G)$, $d(G, F)$ Хаусдорфа. Такая метрика является *внутренней* (см. [17, с. 42]) относительно метрики $\operatorname{Dist}(F, G)$ пространства $\operatorname{clcv}(\mathbb{R}^n)$. Поэтому пространство $\operatorname{conv}(\mathbb{R}^n)$ не может рассматриваться как подпространство в $\operatorname{clcv}(\mathbb{R}^n)$.

Далее, следует заметить, что в силу определения 3.1 из непрерывности, полунепрерывности снизу или полунепрерывности сверху в смысле метрики Хаусдорфа–Бебутова произвольной функции $(\sigma, x) \to F(\sigma, x)$ с *компактными* значениями в $\mathbb{R}^n$ следует непрерывность, полунепрерывность снизу или полунепрерывность сверху в смысле метрики и полуотклонений Хаусдорфа в $\operatorname{conv}(\mathbb{R}^n)$.

О п р е д е л е н и е 6.1 (см. [115]). *Пусть задана топологическая динамическая система* (Σ, h^t). *Множество* $M = \{(\sigma, x) \in \Sigma \times \mathbb{R}^n : x \in M(\sigma)\}$ *называется слабо инвариантным относительно решений включения*

$$\dot{x} \in F(h^t\sigma, x),$$

если для любой точки $(\sigma, x_0) \in M$ *существуют интервал* $[0, \varepsilon)$ *и по крайней мере одно решение* $\varphi(t) = \varphi(t, \sigma, x_0)$ *задачи Коши*

$$\dot{x} \in F(h^t\sigma, x), \quad x(0) = x_0 \tag{6.2}$$

такие, что для всех $t \in [0, \varepsilon)$ *выполнено включение* $\varphi(t) \in M(h^t\sigma)$.

О п р е д е л е н и е 6.2 (см., например, [44, с. 10], [181, с. 25]). Пусть множество M содержится в пространстве $\operatorname{clcv}(\mathbb{R}^n)$ и $x \in M$. Тогда *опорным конусом* (конусом Bouligand) к множеству M в точке x называется выпуклый конус T_xM, определенный равенством

$$T_xM = \Big\{p \in \mathbb{R}^n : \liminf_{\varepsilon \to +0} \frac{\varrho(x + \varepsilon p, M)}{\varepsilon} = 0\Big\}.$$

Отметим, что вектор p принадлежит конусу T_xM в том и только том случае, если существуют две последовательности $\{\varepsilon_i\}$, $\{p_i\}$ такие, что $\varepsilon_i > 0$, $\varepsilon_i \to 0$, $p_i \to p$ и $x + \varepsilon_i p_i \in M$.

О п р е д е л е н и е 6.3 (см. [1, с. 20]). Векторное поле, порожденное задачей (6.1), обладает свойством *слабой полноты*, если для любой начальной точки (σ, x_0) множества M существует по крайней мере одно решение $\varphi(t)$ задачи Коши (6.2), определенное и удовлетворяющее включению $\varphi(t) \in M(h^t\sigma)$ при всех $t \in \mathbb{R}_+ \doteq [0, \infty)$.

У с л о в и е 6.1. Функции $(\sigma, x) \to F(\sigma, x) \in \operatorname{clcv}(\mathbb{R}^n)$, $\sigma \to M(\sigma) \in \operatorname{clcv}(\mathbb{R}^n)$, задающие краевую задачу (6.1), являются *согласованными*, то есть функция $\sigma \to M(\sigma)$ непрерывна и выполнено условие

$$Q(\sigma, x) \doteq F(\sigma, x) \bigcap T_xM(\sigma) \neq \varnothing \quad \text{для всех } (\sigma, x) \in M.$$

Множества $F(\sigma, x)$, $Q(\sigma, x)$ и $T_xM(\sigma)$ изображены на рис. 7.

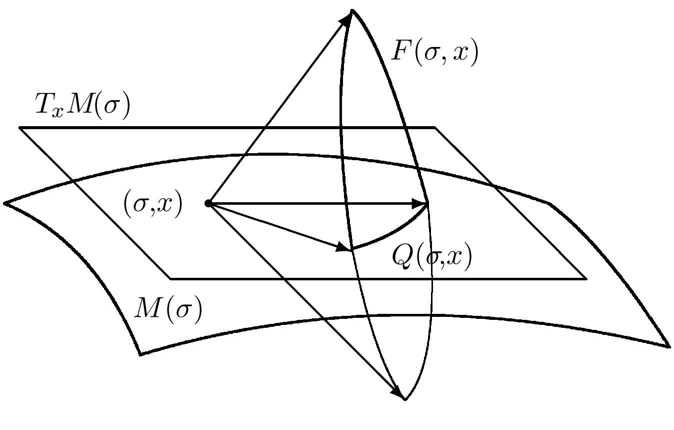

Рис. 7. Проекция вектограммы $F(\sigma, x)$ на пространство $T_xM(\sigma)$, касательное к многообразию $M(\sigma)$ в точке (σ, x)

Формулируемые ниже утверждения получены в работе [115].

Т е о р е м а 6.1. *Пусть выполнено условие* 6.1 *и функция* $(\sigma, x) \to F(\sigma, x) \in \mathrm{clcv}(\mathbb{R}^n)$ *полунепрерывна сверху в метрике Хаусдорфа–Бебутова. Тогда для каждой точки* $(\sigma, x_0) \in M$ *найдется такой интервал* (t_*, t^*) *числовой прямой, что решение задачи Коши* (6.2) *существует при всех* $t \in (t_*, t^*)$ *и при всех* $t \in [0, t^*)$ *удовлетворяет включению* $x(t) \in M(h^t\sigma)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим функцию

$$(\sigma, x) \to F_r(\sigma, x) \doteq F(\sigma, x) \bigcap O_r\big(f_0(\sigma, x)\big),$$

где $f_0(\sigma, x)$ — ближайшая к нулю точка множества $F(\sigma, x)$. Поскольку $F(\sigma, x) \in \mathrm{clcv}(\mathbb{R}^n)$, то множество $F_r(\sigma, x)$ выпукло и компактно.

Покажем, что функция $(\sigma, x) \to F_r(\sigma, x)$ полунепрерывна сверху в метрике Хаусдорфа. Действительно, из полунепрерывности сверху функции $F(\sigma, x)$ в метрике Хаусдорфа–Бебутова (см. определение 3.1, с. 33) следует, что для всякого $r \geqslant 0$ для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для всех $(\sigma, x) \in O_\delta(\sigma_0, x_0)$ выполнено неравенство

$$d\big(F_r(\sigma, x), F_r(\sigma_0, x_0)\big) \leqslant \varepsilon,$$

которое означает, что для любого $r \geqslant 0$ функция $(\sigma, x) \to F_r(\sigma, x)$ полунепрерывна сверху для всех $(\sigma, x) \in \Sigma \times \mathbb{R}^n$.

Из условия 6.1, как можно заметить, следует, что найдется константа $r > 0$, обеспечивающая условие

$$Q_r(\sigma, x) \doteq F_r(\sigma, x) \bigcap T_x M(\sigma) \neq \varnothing \quad \text{для всех} \quad (\sigma, x) \in M.$$

Поэтому, в силу предложения 3.4.2 (см. монографию [181, с. 94]), для каждой точки (σ, x_0), $x_0 \in M(\sigma)$ найдется такой интервал (t_*, t^*) числовой прямой, что решение задачи Коши

$$\dot{x} \in F_r(h^t\sigma, x), \quad x(0) = x_0 \tag{6.3}$$

существует при всех $t \in (t_*, t^*)$ и при всех $t \in [0, t^*)$ удовлетворяет включению $x(t) \in M(h^t\sigma)$. Осталось отметить, что любое решение задачи (6.3) является также и решением задачи (6.2).

Т е о р е м а 6.2. *Пусть существует такое* $\varepsilon > 0$, *что для любой точки* $(\sigma, x_0) \in M$ *найдется по крайней мере одно решение* $x(t)$ *задачи Коши* (6.2), *определенное при всех* $t \in [0, \varepsilon]$ *и удовлетворяющее включению*

$$x(t) \in M(h^t\sigma), \quad 0 \leqslant t \leqslant \varepsilon.$$

Тогда векторное поле, порожденное задачей (6.1), *обладает свойством слабой полноты.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $(\sigma, x_0) \in M$, $\varepsilon > 0$ и $x(t) = x(t, \sigma, x_0)$ — решение задачи (6.2), удовлетворяющее при всех $t \in I_0 \doteq [0, \varepsilon]$ включению $x(t) \in M(h^t\sigma)$. Положим $\sigma_1 = h^\varepsilon\sigma$, $x_1 = x(\varepsilon, \sigma, x_0)$ и для точки $(\sigma_1, x_1) \in M$ рассмотрим решение $\widehat{x}(t) = \widehat{x}(t, \sigma_1, x_1)$ задачи (6.2), удовлетворяющее при всех $t \in I_0 \doteq [0, \varepsilon]$ включению $\widehat{x}(t) \in M(h^t\sigma_1)$. В силу условий теоремы такое решение существует. Непосредственно проверяется, что функция $x_1(t)$, определенная на отрезке $[\varepsilon, 2\varepsilon]$ равенством $x_1(t) = \widehat{x}(t - \varepsilon, \sigma_1, x_1)$, продолжает решение $x(t)$ задачи (6.2) на отрезок $[0, 2\varepsilon]$. Такое построение можно продолжить.

Т е о р е м а 6.3. *Пусть выполнено условие* 6.1, *функция*

$$(\sigma, x) \to Q(\sigma, x) = F(\sigma, x) \bigcap T_x M(\sigma) \in \mathrm{clcv}(\mathbb{R}^n)$$

полунепрерывна сверху в метрике Хаусдорфа–Бебутова и найдутся непрерывные функции $a :$ $\Sigma \to \mathbb{R}_+$ *и* $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ *такие, что неравенство*

$$|Q(\sigma, x)| \doteq \mathrm{Dist}\big(Q(\sigma, x), \{0\}\big) \leqslant a(\sigma) g(|x|)$$

выполнено для всех $(\sigma, x) \in M$. *Если* $\displaystyle\int_{z_0}^{\infty} \frac{dz}{g(z)} = \infty$ *для любого* $z_0 \geqslant 0$, *то векторное поле, порожденное задачей* (6.1), *обладает свойством слабой полноты.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим через $q_0(\sigma, x)$ ближайшую к нулю пространства $\mathbb{R}^n$ точку множества $Q(\sigma, x)$, также обозначим

$$r(\sigma, x) \doteq a(\sigma)g(|x|), \quad Q_r(\sigma, x) \doteq Q(\sigma, x) \bigcap O_r\big(q_0(\sigma, x)\big).$$

Из неравенства $|Q(\sigma, x)| \leqslant r(\sigma, x)$ следует неравенство $\operatorname{dist}\big(Q_r(\sigma, x), \{0\}\big) \leqslant r(\sigma, x)$, выполненное для любого $r \in [0, 1/r(\sigma, x)]$. Из последнего неравенства, в свою очередь, следует неравенство

$$d\big(Q_r(\sigma, x), \{0\}\big) \leqslant r(\sigma, x),$$

которое означает, что $Q_r(\sigma, x) \subseteq O_{r(\sigma,x)}(0)$, то есть $|q(\sigma, x)| \leqslant r(\sigma, x)$ для всех точек $q(\sigma, x) \in Q_r(\sigma, x)$.

Покажем, что для любой начальной точки $(\sigma, x_0) \in M$ существует по крайней мере одно решение $x(t) = x(t, \sigma, x_0)$ задачи (6.1) с начальным условием $x(0, \sigma, x_0) = x_0 \in M(\sigma)$, определенное при всех $t \in \mathbb{R}$. Для этого нужно показать, что для любой точки (σ, x_0) из множества M существует хотя бы одно, определенное при всех $t \in \mathbb{R}$, решение $\varphi(t) = \varphi(t, \sigma, x_0)$ задачи

$$\dot{x} \in S(h^t\sigma, x), \quad x(t) \in M(h^t\sigma), \tag{6.4}$$

где $S(\sigma, x) \doteq Q_{1/r(\sigma,x)}(\sigma, x)$. Отметим, что решение $\varphi(t)$ является также и решением задачи (6.1), а функция $(\sigma, x) \to S(\sigma, x)$ определена при всех $(\sigma, x) \in M$ и принимает значения в пространстве $\operatorname{conv}(\mathbb{R}^n)$. В силу определения 3.1 из полунепрерывности сверху функции $Q(\sigma, x)$ следует полунепрерывность сверху функции $S(\sigma, x)$ в смысле полуотклонений по Хаусдорфу, поэтому решение $\varphi(t)$ существует в некоторой окрестности точки $t = 0$ и удовлетворяет включению $\varphi(t) \in M(h^t\sigma)$ (см. [170, с. 60]). С учетом вышесказанного для каждого $\sigma \in \Sigma$ справедливы следующие неравенства:

$$d|\varphi(t)|/dt \leqslant |\dot{\varphi}(t)| \leqslant r(h^t\sigma, \varphi(t)) \leqslant a(h^t\sigma)g(|\varphi(t)|),$$

поэтому $|\varphi(t)| \leqslant z(t)$, где $z(t) = z(t, \sigma, z_0)$ — решение задачи

$$\dot{z} = a(h^t\sigma)g(z), \quad z_0 = |x_0|.$$

Предположим, что решение $z(t)$ с начальным условием $z(0) = z_0$ можно продолжить только на некоторый конечный интервал (α, β), где $\alpha < 0$, $\beta > 0$. Тогда из условия

$$\int_{z_0}^{\infty} \frac{dz}{g(z)} = \infty,$$

выполненного для всех $z_0 \geqslant 0$, следует условие

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^{\beta - \varepsilon} a(h^t\sigma)dt = \infty,$$

которое противоречит интегрируемости непрерывной функции $a(h^t\sigma)$ на отрезке $[0, \beta]$. Следовательно, решение $z(t)$ неограниченно продолжаемо вправо и аналогично можно показать, что оно неограниченно продолжаемо влево. Таким образом, из оценки $|\varphi(t)| \leqslant z(t)$ следует, что все решения $\varphi(t) = \varphi(t, \sigma, x_0)$ задачи (6.4) с начальным условием

$$\varphi(0, \sigma, x_0) = x_0 \in M(\sigma)$$

определены при всех $t \in \mathbb{R}$.

ГЛАВА III. СТАТИСТИЧЕСКИ ИНВАРИАНТНЫЕ МНОЖЕСТВА УПРАВЛЯЕМОЙ СИСТЕМЫ

В этой главе рассматриваются *статистически инвариантные* множества, то есть множества, обладающие следующим свойством. Пусть заданное по условиям задачи множество M не обязательно является положительно инвариантным относительно потока g^t, определяемого управляемой системой. Это означает, что существуют траектории данного потока, начинающиеся в M, которые в течении некоторого промежутка времени могут покидать данное множество. Если относительная частота пребывания всех таких траекторий, то есть множества достижимости управляемой системы, в множестве M равна единице, то множество M будем называть *статистически инвариантным.*

Здесь описаны результаты исследования статистически инвариантных множеств, полученные в работах [115, 129, 133], а также в [137], где распространяются полученные ранее теоремы об инвариантных множествах на дифференциальные включения без предположения компактности образов правой части. Основные утверждения формулируются в терминах метрики Хаусдорфа–Бебутова, функций А. М. Ляпунова и динамической системы (Σ, h^t), сопутствующей правой части дифференциального включения.

Для исследования инвариантности заданного множества M введены такие статистические характеристики, как *относительная частота* $\operatorname{freq}(\omega)$, *верхняя и нижняя относительные частоты* $\operatorname{freq}^*(\omega)$, $\operatorname{freq}_*(\omega)$ *поглощения множества достижимости* $A(t,\omega)$ управляемой системы

$$\dot{x}(t) = \int_{U(t)} f(h^t\sigma, x(t), u)\eta_t(du) \tag{III.1}$$

множеством M, доказаны основные свойства этих характеристик. Получены условия, позволяющие оценивать верхнюю и нижнюю относительные частоты $\operatorname{freq}^*(\omega)$ и $\operatorname{freq}_*(\omega)$ через характеристики $\varkappa^*(\sigma)$ и $\varkappa_*(\sigma)$, называемые *верхней и нижней относительной частотой пребывания верхнего решения* $z^*(t,\sigma)$ скалярной задачи Коши

$$\dot{z} = w(h^t\sigma, z), \quad z(0) = 0, \quad t \geqslant 0 \tag{III.2}$$

в множестве $(-\infty, 0]$.

В предположении, что для каждого фиксированного $\sigma \in \Sigma$ функция $(t,z) \to w(h^t\sigma, z)$ кусочно-непрерывна по t, доказано обобщение теоремы С. А. Чаплыгина о дифференциальных неравенствах и получены условия существования верхнего решения задачи Коши (III.2).

Здесь также приводятся определения и основные свойства функций Ляпунова, производной Кларка, нижней и верхней производной в силу дифференциального включения. В этих терминах получены условия продолжаемости решений управляемой системы (III.1) и теорема об относительной частоте поглощения множества достижимости управляемой системы (III.1) заданным множеством M.

§ 7. Статистические характеристики множества достижимости управляемой системы

Пусть заданы топологическая динамическая система (Σ, h^t), функция $f(\sigma, x, u)$ переменных $(\sigma, x, u) \in \Sigma \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ и функция $U(\sigma, x)$ переменных $(\sigma, x) \in \Sigma \times \mathbb{R}^n$, принимающая значения в пространстве $\operatorname{clcv}(\mathbb{R}^m)$. Предполагаем, что выполнено следующее условие.

У с л о в и е 7.1. 1) Для каждой точки (t, σ) функция $(x, u) \to f(h^t\sigma, x, u)$ непрерывна;

2) для каждой точки (σ, x, u) функция $t \to f(h^t\sigma, x, u)$ кусочно-непрерывна;

3) функция $(\sigma, x) \to U(\sigma, x)$ полунепрерывна сверху в метрике Хаусдорфа–Бебутова (см. определение 3.1, с. 33).

Рассмотрим управляемую систему

$$\dot{x} = f(h^t\sigma, x, u), \quad (t, \sigma, x, u) \in \mathbb{R} \times \Sigma \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m,$$

порожденную динамической системой (Σ, h^t) и функциями f и U. Расширим множество допустимых управлений до множества мер Радона, для этого заданному множеству $U \in \operatorname{clcv}(\mathbb{R}^m)$ поставим в соответствие пространство с мерой $(U, \mathfrak{F}, \eta)$. Здесь через $\mathfrak{F}$ обозначена борелевская сигма-алгебра подмножеств U, η — вероятностная мера Радона, сосредоточенная на множестве U (см. определение 4.4, с. 37).

Напомним, что управляемая система задается при каждом $\sigma \in \Sigma$ множеством *допустимых процессов*, определенных следующим образом. Допустимым процессом управляемой системы при каждом фиксированном $\sigma \in \Sigma$ называется всякая функция $t \to (\varphi(t, \sigma), \eta_t)$ переменного t, определенная на полуинтервале $[0, \tau)$ и удовлетворяющая следующим условиям:

1) управление $t \to \eta_t$ является измеримой по Лебегу мерозначной функцией со значениями в пространстве $\operatorname{rpm}(U(t))$ вероятностных мер Радона с носителем $U(t) \doteq U\big(h^t\sigma, \varphi(t, \sigma)\big)$;

2) функция $t \to \varphi(t, \sigma)$ является абсолютно непрерывным решением системы

$$\dot{x}(t) = \int_{U(t)} f(h^t\sigma, x(t), u)\eta_t(du), \quad t \in [0, \tau), \tag{7.1}$$

где $[0, \tau)$ — правый максимальный интервал существования решения φ системы (7.1).

По функциям f и U построим дифференциальное включение

$$\dot{x} \in F(h^t\sigma, x), \quad F(\sigma, x) = \operatorname{co}H(\sigma, x), \tag{7.2}$$

где через $H(\sigma, x)$ обозначено множество всех предельных значений функции

$$f\big(\sigma, x, U(\sigma, x)\big) \quad \text{при} \quad (\sigma_i, x_i) \to (\sigma, x),$$

$\operatorname{co} H(\sigma, x)$ — замыкание выпуклой оболочки множества $H(\sigma, x)$.

Пусть X — фиксированное множество пространства $\operatorname{clcv}(\mathbb{R}^n)$. Напомним, что множество $A(t, \sigma, X)$, состоящее из всех значений в момент времени t решений $t \to \varphi(t, \sigma, x)$ включения (7.2), когда начальное условие $\varphi(0, \sigma, x) = x$ пробегает все множество X, называется сечением в момент времени $t \geqslant 0$ *интегральной воронки* включения (7.2). Множество $A(t, \sigma, X)$ называется *множеством достижимости* управляемой системы (7.1) в момент времени t из начального множества X.

Введем в рассмотрение следующее условие.

У с л о в и е 7.2. Для всех $\sigma \in \Sigma$ *множество достижимости* $A(t, \omega)$, *где* $\omega = (\sigma, X)$, *существует при всех* $t \geqslant 0$. Это означает, что для каждой точки $x \in X$ *существует* решение $\varphi(t, \sigma, x)$ включения (7.2), удовлетворяющее начальному условию $\varphi(0, \sigma, x) = x$ и продолжаемое на полуось $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$.

Пусть $\Omega \doteq \Sigma \times \operatorname{clcv}(\mathbb{R}^n)$, задано подмножество $M = \{(\sigma, x) \in \Sigma \times \mathbb{R}^n : x \in M(\sigma)\}$ пространства Ω, где функция $\sigma \to M(\sigma)$ непрерывна в метрике Хаусдорфа–Бебутова и принимает значения в пространстве $\operatorname{clcv}(\mathbb{R}^n)$. В предположении, что выполнено условие 7.2, рассмотрим множество

$$\alpha(\vartheta_0, \vartheta, \omega) \doteq \{t \in [\vartheta_0, \vartheta] : A(t, \omega) \subseteq M(h^t\sigma)\}. \tag{7.3}$$

О п р е д е л е н и е 7.1 (см. [133]). Обозначим

$$\operatorname{freq}(\omega) \doteq \lim_{\vartheta \to \infty} \frac{\operatorname{mes} \alpha(0, \vartheta, \omega)}{\vartheta} = \lim_{\vartheta \to \infty} \frac{\operatorname{mes}\{t \in [0, \vartheta] : A(t, \omega) \subseteq M(h^t\sigma)\}}{\vartheta}, \tag{7.4}$$

где $\omega = (\sigma, X)$, mes — мера Лебега на числовой прямой. Если указанный предел существует, то характеристику $\mathrm{freq}(\omega)$ будем называть *относительной частотой поглощения* множества достижимости $A(t,\omega)$ системы (7.1) заданным множеством M.

Далее, если предел (7.4) не существует, то характеристики

$$\mathrm{freq}^*(\omega) \doteq \varlimsup_{\vartheta\to\infty} \frac{\mathrm{mes}\,\alpha(0,\vartheta,\omega)}{\vartheta}, \quad \mathrm{freq}_*(\omega) \doteq \varliminf_{\vartheta\to\infty} \frac{\mathrm{mes}\,\alpha(0,\vartheta,\omega)}{\vartheta}$$

будем называть, соответственно, *верхней* и *нижней относительной частотой поглощения* множества достижимости $A(t,\omega)$ системы (7.1) множеством M.

Следующее определение возникло в результате обсуждений ряда задач управления с Е. Л. Тонковым и В. Н. Ушаковым.

О п р е д е л е н и е 7.2. Множество M называется *статистически инвариантным* относительно управляемой системы (7.1), если для всех $\sigma \in \Sigma$ выполнено равенство

$$\mathrm{freq}(\sigma, M(\sigma)) \doteq \lim_{\vartheta\to\infty} \frac{\mathrm{mes}\big\{t \in [0,\vartheta] : A(t,\sigma,M(\sigma)) \subseteq M(h^t\sigma)\big\}}{\vartheta} = 1.$$

Отметим, что если множество M статистически инвариантно относительно управляемой системы (7.1), то множество достижимости $A(t,\sigma,X)$ из любого начального множества $X \subseteq M(\sigma)$ содержится в множестве M с относительной частотой, равной единице.

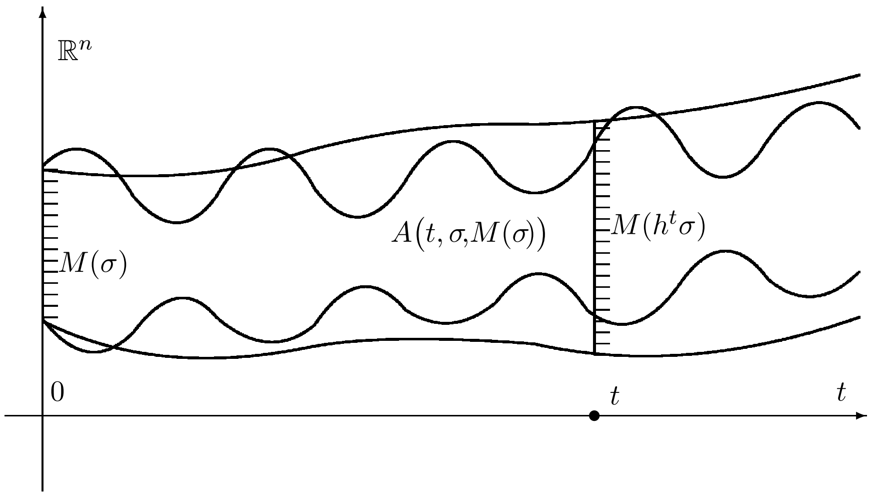

Рис. 8. Если $\mathrm{freq}(\sigma, M(\sigma)) = 1$ для всех $\sigma \in \Sigma$, то множество M статистически инвариантно относительно системы (7.1)

О п р е д е л е н и е 7.3 (близкое определение приведено в [117]). Множество M называется *положительно инвариантным* относительно управляемой системы (7.1), если для всех $\sigma \in \Sigma$ и для любого $t \geqslant 0$ имеет место включение

$$A\big(t,\sigma,M(\sigma)\big) \subseteq M(h^t\sigma).$$

Обозначим через $u_0(\sigma,x)$ ближайшую к нулю пространства $\mathbb{R}^m$ точку множества $U(\sigma,x)$, через $O_r\big(u_0(\sigma,x)\big)$ — замкнутый шар радиуса r с центром в точке $u_0(\sigma,x)$. Далее, для каждого $(\sigma,x) \in \Sigma \times \mathbb{R}^n$ определим множество

$$U_r(\sigma,x) \doteq U(\sigma,x) \bigcap O_r\big(u_0(\sigma,x)\big).$$

Поскольку множество $U(\sigma,x)\in\mathrm{clcv}(\mathbb{R}^m)$ непусто, то множество $U_r(\sigma,x)$ также непусто, замкнуто и, кроме того, компактно. Поставим в соответствие этому множеству управляемую систему

$$\dot{x}=\int_{U_r(h^t\sigma,x)} f(h^t\sigma,x,u)\,\eta_t(du) \tag{7.5}$$

и дифференциальное включение

$$\dot{x}\in F_r(h^t\sigma,x),\quad F_r(\sigma,x)=\mathrm{co}H_r(\sigma,x), \tag{7.6}$$

где $H_r(\sigma,x)$ является множеством всех предельных значений функции $f\big(\sigma,x,U_r(\sigma,x)\big)$ при $(\sigma_i,x_i)\to(\sigma,x)$.

Л е м м а 7.1. *Если выполнено условие* 7.1, *то функции*

$$(\sigma,x)\to H_r(\sigma,x)\quad \textit{и}\quad (\sigma,x)\to F_r(\sigma,x)$$

полунепрерывны сверху в метрике Хаусдорфа при всех $(\sigma,x)\in\Sigma\times\mathbb{R}^n$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из полунепрерывности сверху функции $U(\sigma,x)$ переменных (σ,x) в метрике Хаусдорфа–Бебутова следует, что для всякого $r\geqslant 0$ для любого $\varepsilon>0$ найдется такое $\delta>0$, что для всех $(\sigma,x)\in O_\delta(\sigma_0,x_0)$ выполнено неравенство

$$d\big(U_r(\sigma,x),U_r(\sigma_0,x_0)\big)\leqslant\varepsilon,$$

которое означает, что для любого $r\geqslant 0$ функция $(\sigma,x)\to U_r(\sigma,x)$ полунепрерывна сверху в метрике Хаусдорфа для всех $(\sigma,x)\in\Sigma\times\mathbb{R}^n$. Следовательно, учитывая ограниченность данной функции в каждой точке $(\sigma,x)\in\Sigma\times\mathbb{R}^n$, получаем, что в точках непрерывности функции $f(\sigma,x,U_r(\sigma,x))$ следующие функции:

$$(\sigma,x)\to f\big(\sigma,x,U_r(\sigma,x)\big),\ (\sigma,x)\to H_r(\sigma,x)\ \text{и}\ \ (\sigma,x)\to F_r(\sigma,x)$$

ограничены и полунепрерывны сверху в метрике Хаусдорфа (см. [13, с. 204], [170, с. 53–54]). Следовательно, в силу условия 7.1 функция $(\sigma,x)\to H_r(\sigma,x)$ ограничена в окрестности каждой точки $(\sigma,x)\in\Sigma\times\mathbb{R}^n$, и поскольку график функции $H_r(\sigma,x)$ является замыканием графика функции $f(\sigma,x,U_r(\sigma,x))$, то он замкнут. В силу лемм 14 и 16 монографии [170, с. 53] функции

$$(\sigma,x)\to H_r(\sigma,x)\quad\text{и}\quad(\sigma,x)\to F_r(\sigma,x)$$

полунепрерывны сверху.

Следующее утверждение является обобщением леммы 4 работы [133].

Л е м м а 7.2. *Пусть выполнены условия* 7.1 *и* 7.2. *Если*

$$X\in\mathrm{clcv}(\mathbb{R}^n),\ \ \vartheta_0\geqslant 0\quad \textit{и}\quad A(\vartheta_0,\omega)\subseteq M(h^{\vartheta_0}\sigma),$$

то имеют место следующие утверждения.
1. *Множество* (7.3) *непусто и измеримо по Лебегу при каждом* $\vartheta\geqslant\vartheta_0$.
2. *Для любых фиксированных* $\vartheta_0\geqslant 0$ *и* $\tau\geqslant 0$ *имеют место равенства*

$$\mathrm{freq}^*(\omega)=\varlimsup_{\vartheta\to\infty}\frac{\mathrm{mes}\ \alpha(\vartheta_0,\vartheta,\omega)}{\vartheta-\vartheta_0}=\varlimsup_{\vartheta\to\infty}\frac{\mathrm{mes}\ \alpha(\tau,\tau+\vartheta,\omega)}{\vartheta}, \tag{7.7}$$

$$\mathrm{freq}_*(\omega)=\varliminf_{\vartheta\to\infty}\frac{\mathrm{mes}\ \alpha(\vartheta_0,\vartheta,\omega)}{\vartheta-\vartheta_0}=\varliminf_{\vartheta\to\infty}\frac{\mathrm{mes}\ \alpha(\tau,\tau+\vartheta,\omega)}{\vartheta}. \tag{7.8}$$

3. *Пусть* $\omega = (\sigma, X)$, $g^\tau \omega = \big(h^\tau\sigma, A(\tau,\omega)\big)$, *тогда для каждого* $\tau \geqslant 0$

$$\operatorname{freq}^*(g^\tau\omega) = \operatorname{freq}^*(\omega), \quad \operatorname{freq}_*(g^\tau\omega) = \operatorname{freq}_*(\omega).$$

4. *Если функции* $t \to A(t,\omega)$ *и* $t \to M(h^t\sigma)$ *периодичны с общим периодом* $T > 0$, *то предел* (7.4) *существует и*

$$\operatorname{freq}(\omega) = \frac{\operatorname{mes}\, \alpha(0,T,\omega)}{T}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1. Из включения $A(\vartheta_0,\omega) \subseteq M(h^{\vartheta_0}\sigma)$ следует, что множество $\alpha(\vartheta_0,\vartheta,\omega)$, определенное равенством (7.3), непусто, поэтому для доказательства первого утверждения леммы достаточно показать, что это множество замкнуто. Представим множество $X \in \operatorname{clcv}(\mathbb{R}^n)$ в виде объединения компактных множеств

$$X = \bigcup_{m=1}^{\infty} X_m, \quad \text{где} \quad X_m = X \bigcap O_m(x_0),$$

x_0 — ближайшая к нулю пространства $\mathbb{R}^n$ точка множества X. Обозначим через $A^m(t,\sigma,X_m)$ множество достижимости системы (7.5) из компактного начального множества X_m при $r = m \in \mathbb{N}$ и отметим, что множество $A^m(t,\sigma,X_m)$ существует на некотором промежутке $[0,\varepsilon)$, компактно при каждом t и непрерывно по t (см., например, [13, с. 204–213], [170, с. 53–70]).

Поскольку любое решение управляемой системы (7.5) является также и решением системы (7.1), то множество достижимости $A(t,\sigma,X)$ системы (7.1) можно представить в виде объединения множеств достижимости $A^m(t,\sigma,X_m)$, то есть

$$A(t,\sigma,X) = \bigcup_{m=1}^{\infty} A^m(t,\sigma,X_m).$$

Выберем последовательность $\{t_i\}_{i=1}^{\infty}$ такую, что $t_i \in [\vartheta_0,\vartheta]$, $t_i \to t_*$ при $i \to \infty$ и включения $A(t_i,\omega) \subseteq M(h^{t_i}\sigma)$ имеют место при всех $i = 1,2,\ldots$. Следовательно, для каждого $m \in \mathbb{N}$ при всех $i = 1,2,\ldots$

$$A^m(t_i,\sigma,X_m) \subseteq A(t_i,\sigma,X) \subseteq M(h^{t_i}\sigma).$$

Множество $\bigcup\limits_{t\in[\vartheta_0,\vartheta]} A^m(t,\sigma,X_m)$ компактно (см., например, [170, с. 53]), поэтому для некоторого $r > 0$ оно содержится в компактном множестве

$$\bigcup_{t\in[\vartheta_0,\vartheta]} M_r(h^t\sigma), \quad \text{где} \quad M_r(h^t\sigma) = M(h^t\sigma) \bigcap O_r\big(m_0(h^t\sigma)\big),$$

$m_0(h^t\sigma)$ — ближайшая к нулю точка множества $M(h^t\sigma)$. Следовательно, для всех $t_i \in [\vartheta_0,\vartheta]$ имеют место включения $A^m(t_i,\sigma,X_m) \subseteq M_r(h^{t_i}\sigma)$.

Далее, в силу непрерывности в метрике Хаусдорфа–Бебутова функции $t \to M(h^t\sigma)$, найдется такая последовательность $\{\varepsilon_i\}_{i=1}^{\infty}$, что $\varepsilon_i > 0$, $\varepsilon_i \to 0$ и

$$M_r(h^{t_i}\sigma) \subseteq M_r(h^{t_*}\sigma) + O_{\varepsilon_i}(0).$$

Поэтому вложения $A^m(t_i,\sigma,X_m) \subseteq M_r(h^{t_*}\sigma) + O_{\varepsilon_i}(0)$ выполнены при всех i. Далее, из непрерывности $A^m(t,\sigma,X_m)$ по t и замкнутости $M_r(h^{t_*}\sigma)$ имеем вложение

$$A^m(t_*,\sigma,X_m) \subseteq M_r(h^{t_*}\sigma) \subseteq M(h^{t_*}\sigma),$$

из которого следует, что

$$A(t^*,\sigma,X) = \bigcup_{m=1}^{\infty} A^m(t^*,\sigma,X_m) \subseteq M(h^{t_*}\sigma).$$

Таким образом, $t_* \in \alpha(\vartheta_0, \vartheta, \omega)$.

2. Для доказательства второго утверждения отметим, что имеют место следующие равенства:

$$\operatorname{mes}\alpha(0,\vartheta,\omega) = \operatorname{mes}\alpha(0,\vartheta_0,\omega) + \operatorname{mes}\alpha(\vartheta_0,\vartheta,\omega),$$
$$\lim_{\vartheta\to\infty} \frac{\operatorname{mes}\alpha(0,\vartheta_0,\omega)}{\vartheta} = 0.$$

Поэтому, в силу свойств верхнего предела

$$\begin{aligned} \operatorname{freq}^*(\omega) &= \varlimsup_{\vartheta\to\infty} \frac{\operatorname{mes}\alpha(0,\vartheta,\omega)}{\vartheta} = \lim_{\vartheta\to\infty} \frac{\operatorname{mes}\alpha(0,\vartheta_0,\omega)}{\vartheta} + \varlimsup_{\vartheta\to\infty} \frac{\operatorname{mes}\alpha(\vartheta_0,\vartheta,\omega)}{\vartheta} = \\ &= 0 + \lim_{\vartheta\to\infty} \frac{\vartheta-\vartheta_0}{\vartheta} \varlimsup_{\vartheta\to\infty} \frac{\operatorname{mes}\alpha(\vartheta_0,\vartheta,\omega)}{\vartheta-\vartheta_0} = \varlimsup_{\vartheta\to\infty} \frac{\operatorname{mes}\alpha(\vartheta_0,\vartheta,\omega)}{\vartheta-\vartheta_0}, \end{aligned}$$

что доказывает первое равенство в (7.7). Доказательство второго равенства в (7.7) следует из равенств

$$\begin{aligned} \operatorname{freq}^*(\omega) &= \lim_{\vartheta\to\infty} \frac{\operatorname{mes}\alpha(0,\tau,\omega)}{\vartheta} + \varlimsup_{\vartheta\to\infty} \frac{\operatorname{mes}\alpha(\tau,\vartheta,\omega)}{\vartheta} + 0 = \\ &= 0 + \varlimsup_{\vartheta\to\infty} \frac{\operatorname{mes}\alpha(\tau,\vartheta,\omega)}{\vartheta} + \lim_{\vartheta\to\infty} \frac{\operatorname{mes}\alpha(\vartheta,\tau+\vartheta,\omega)}{\vartheta} = \varlimsup_{\vartheta\to\infty} \frac{\operatorname{mes}\alpha(\tau,\tau+\vartheta,\omega)}{\vartheta}. \end{aligned}$$

Аналогично доказываются равенства (7.8).

3. Для доказательства следующего утверждения отметим, что

$$\begin{aligned} \alpha(\tau,\tau+\vartheta,\omega) &= \{t \in [0,\vartheta] : A(t+\tau,\omega) \subseteq M(h^{t+\tau}\sigma)\} = \\ &= \{t \in [0,\vartheta] : A(t, g^\tau\omega) \subseteq M\big(h^t(h^\tau\sigma)\big)\} = \alpha(0,\vartheta,g^\tau\omega). \end{aligned}$$

Поэтому, например, для верхней частоты выполнены равенства

$$\operatorname{freq}^*(g^\tau\omega) = \varlimsup_{\vartheta\to\infty} \frac{\operatorname{mes}\alpha(0,\vartheta,g^\tau\omega)}{\vartheta} = \varlimsup_{\vartheta\to\infty} \frac{\operatorname{mes}\alpha(\tau,\tau+\vartheta,\omega)}{\vartheta} = \varlimsup_{\vartheta\to\infty} \frac{\operatorname{mes}\alpha(0,\vartheta,\omega)}{\vartheta} = \operatorname{freq}^*(\omega).$$

4. Докажем последнее утверждение леммы. Сначала рассмотрим случай, когда $\vartheta = kT$. Из периодичности функций $t \to A(t,\omega)$ и $t \to M(h^t\sigma)$ получаем, что для любого натурального i выполнены равенства $\alpha\big((i-1)T, iT, \omega\big) = \alpha\big(0,T,\omega)$, следовательно,

$$\operatorname{mes}\alpha(0,kT,\omega) = \sum_{i=1}^{k} \operatorname{mes}\alpha\big((i-1)T, iT,\omega\big) = k\operatorname{mes}\alpha(0,T,\omega),$$
$$\lim_{k\to\infty} \frac{\operatorname{mes}\alpha(0,kT,\omega)}{kT} = \lim_{k\to\infty} \frac{k\operatorname{mes}\alpha(0,T,\omega)}{kT} = \frac{\operatorname{mes}\alpha(0,T,\omega)}{T}.$$

Далее, для произвольного $\vartheta > 0$ найдется такое целое $k = k(\vartheta)$, что $(k-1)T < \vartheta \leqslant kT$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \frac{\operatorname{mes}\alpha(0,T,\omega)}{T} &= \lim_{k\to\infty} \frac{(k-1)\operatorname{mes}\alpha(0,T,\omega)}{kT} = \lim_{k\to\infty} \frac{\operatorname{mes}\alpha(0,(k-1)T,\omega)}{kT} \leqslant \\ &\leqslant \varliminf_{\vartheta\to\infty} \frac{\operatorname{mes}\alpha(0,\vartheta,\omega)}{\vartheta} \leqslant \varlimsup_{\vartheta\to\infty} \frac{\operatorname{mes}\alpha(0,kT,\omega)}{\vartheta} \leqslant \lim_{k\to\infty} \frac{k\operatorname{mes}\alpha(0,T,\omega)}{(k-1)T} = \frac{\operatorname{mes}\alpha(0,T,\omega)}{T}. \end{aligned}$$

Таким образом, для относительной частоты $\operatorname{freq}(\omega)$ имеет место равенство

$$\operatorname{freq}(\omega) \doteq \lim_{\vartheta\to\infty} \frac{\operatorname{mes}\alpha(0,\vartheta,\omega)}{\vartheta} = \frac{\operatorname{mes}\alpha(0,T,\omega)}{T},$$

что и доказывает последнее утверждение леммы.

§ 8. Обобщение теоремы о дифференциальных неравенствах

В этом параграфе исследуется поведение верхнего решения скалярной задачи Коши

$$\dot{z} = w(h^t\sigma, z), \quad z(t_0) = z_0, \quad t \geqslant t_0 \tag{8.1}$$

в предположении, что для каждого фиксированного $\sigma \in \Sigma$ функция $w(h^t\sigma, z)$ переменных (t, z) удовлетворяет *условиям Каратеодори.*

О п р е д е л е н и е 8.1 (см., например, [170, с. 7]). При каждом фиксированном $\sigma \in \Sigma$ функция $w(h^t\sigma, z)$ переменных (t, z) удовлетворяет *условиям Каратеодори*, если:

1) функция $z \to w(h^t\sigma, z)$ непрерывна при почти всех t;

2) функция $t \to w(h^t\sigma, z)$ измерима при каждом z;

3) для каждого отрезка I на числовой прямой существует локально суммируемая функция $m_I(h^t\sigma)$ такая, что для всех $(t, z) \in \mathbb{R} \times I$ выполнено неравенство $|w(h^t\sigma, z)| \leqslant m_I(h^t\sigma)$.

При каждом фиксированном $\sigma \in \Sigma$ рассматриваем уравнение

$$\dot{z} = w(h^t\sigma, z) \tag{8.2}$$

с правой частью, удовлетворяющей условиям Каратеодори. Решением уравнения (8.2) на интервале $\mathfrak{I} \subset \mathbb{R}$ называется абсолютно непрерывная функция $z(t, \sigma)$, удовлетворяющая интегральному уравнению

$$z(t, \sigma) = z(t_0, \sigma) + \int_{t_0}^{t} w\big(h^s\sigma, z(s, \sigma)\big)ds$$

при каком-нибудь $t_0 \in \mathfrak{I}$.

Отметим, что в данной главе будем рассматривать только случай, когда для каждого $\sigma \in \Sigma$ функция $t \to w(h^t\sigma, z)$ кусочно-непрерывна.

Напомним, что *верхним решением* задачи Коши (8.1) называется такое решение $z^*(t, \sigma)$, что для любого другого решения $z(t, \sigma)$ этой задачи на общем интервале существования выполнено неравенство $z^*(t, \sigma) \geqslant z(t, \sigma)$. В работах А. И. Перова [120] и Ф. Хартмана [173, с. 38] показано, что если правая часть $w(h^t\sigma, z)$ непрерывна, то верхнее решение существует на некотором интервале $\mathfrak{I} \subset \mathbb{R}$. Аналогично определяется нижнее решение, которое тоже существует.

Для дальнейшего необходимо получить условия существования верхнего решения $z^*(t, \sigma)$ задачи (8.1) для всех $t \in [t_0, +\infty)$ и доказать аналог теоремы С. А. Чаплыгина [175] о дифференциальных неравенствах для кусочно-непрерывной функции $w(h^t\sigma, z)$. Отметим, что теорема о существовании верхнего решения при более общих условиях принадлежит А. Ф. Филиппову и опубликована в работе [166]. Теорема 8.1 приводится с доказательством, поскольку оно несколько отличается от доказательства А. Ф. Филиппова.

Л е м м а 8.1 (см. [129]). *Пусть для некоторого $\sigma \in \Sigma$ функция $w(h^t\sigma, z)$ переменных (t, z) непрерывна в области $G \doteq \{(t, z) :\ t \in [t_0, \tau_1),\ z \in \mathbb{R}\}$ и имеет предел слева при $t \to \tau_1$. Если для всех $t \in [t_0, \tau_1)$ выполнено неравенство*

$$\lim_{|z| \to \infty} \frac{|\, w(h^t\sigma, z)|}{|z|} < \infty, \tag{8.3}$$

то для любого $z_0 \in \mathbb{R}$ верхнее решение $z^*(t, \sigma)$ задачи Коши (8.1) *существует для всех $t \in [t_0, \tau_1]$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из неравенства (8.3) следует, что любое решение задачи Коши (8.1) продолжаемо на весь отрезок $[t_0, \tau_1]$ (см., например, [171, с. 33]). Покажем, что при выполнении условий леммы верхнее решение $z^*(t, \sigma)$ задачи (8.1) существует также на всем отрезке $[t_0, \tau_1]$.

Обозначим через $G(z_0)$ прямоугольник, содержащий все решения задачи (8.1) с начальным условием $z(t_0) = z_0$, определенные на отрезке $[t_0, \tau_1]$. Также обозначим через $\widetilde{w}(h^t\sigma, z)$ функцию, которая получается из функции $w(h^t\sigma, z)$, если ее доопределить по непрерывности при $t = \tau_1$ в области G. Рассмотрим последовательность гладких функций $\{w_k(h^t\sigma, z)\}_{k=1}^{\infty}$, монотонно убывающих и сходящихся равномерно к функции $\widetilde{w}(h^t\sigma, z)$ в прямоугольнике $G(z_0)$. Покажем, что существует такое число $k_0 = k_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, что для каждого $k \geqslant k_0$ решение $z_k(t, \sigma)$ задачи Коши

$$\dot{z} = w_k(h^t\sigma, z), \quad z_k(t_0) = z_0, \quad t \geqslant t_0 \tag{8.4}$$

определено на всем отрезке $[t_0, \tau_1]$. Действительно, из равномерной сходимости последовательности $\{w_k(h^t\sigma, z)\}_{k=1}^{\infty}$ следуют неравенства, выполненные для всех $k \geqslant k_0$ и всех $(t, z) \in G(z_0)$:

$$|w_k(h^t\sigma, z)| \leqslant |w_k(h^t\sigma, z) - \widetilde{w}(h^t\sigma, z)| + |\widetilde{w}(h^t\sigma, z)| \leqslant |\widetilde{w}(h^t\sigma, z)| + \varepsilon,$$

откуда получаем, что решение $z_k(t, \sigma)$ задачи Коши (8.4) продолжается на весь отрезок $[t_0, \tau_1]$.

Далее, пусть $z(t, \sigma)$ — произвольное решение задачи (8.1), определенное на $[t_0, \tau_1]$, тогда, в силу теоремы А. И. Перова [120], выполнены неравенства

$$z(t, \sigma) \leqslant z_{k+1}(t, \sigma) \leqslant z_k(t, \sigma), \quad t \in [t_0, \tau_1].$$

Предел монотонно убывающей компактной последовательности решений $\{z_k(t, \sigma)\}_{k=k_0}^{\infty}$ на отрезке $[t_0, \tau_1]$ обозначим $z^*(t, \sigma)$, он является решением задачи (8.1) и удовлетворяет неравенству $z(t, \sigma) \leqslant z^*(t, \sigma)$, то есть $z^*(t, \sigma)$ является верхним решением задачи (8.1), которое определено для всех $t \in [t_0, \tau_1]$. $\square$

Далее получено обобщение теоремы о дифференциальных неравенствах в предположении, что функция $w(h^t\sigma, z)$ удовлетворяет условию.

У с л о в и е 8.1. Имеют место следующие свойства:

1) для каждого $\sigma \in \Sigma$ существует (конечная или бесконечная) последовательность изолированных точек числовой оси $\{\tau_k\}_{k=0}^{\infty}$, $t_0 = \tau_0 < \tau_1 < \tau_2 < \ldots$ такая, что функция $(t, z) \to w(h^t\sigma, z)$ непрерывна в каждой из областей $G_i \doteq \{(t, z) : t \in [\tau_{i-1}, \tau_i), z \in \mathbb{R}\}$ и имеет предел слева при $t \to \tau_i$, $i = 1, 2, \ldots$;

2) для каждой точки $(t, \sigma) \in \mathbb{R} \times \Sigma$ выполнено неравенство

$$\lim_{|z| \to \infty} \frac{|w(h^t\sigma, z)|}{|z|} < \infty\,. \tag{8.5}$$

Т е о р е м а 8.1 (см. [129]). *Пусть выполнено условие* 8.1 *и для каждого* $\sigma \in \Sigma$ *существует функция* $v(t, \sigma)$, *непрерывная на* $[t_0, \infty)$, *дифференцируемая для почти всех* $t \in [t_0, \infty)$ *и удовлетворяющая неравенствам* (*в тех точках* $[t_0, \infty)$, *в которых* $v(t, \sigma)$ *дифференцируема*)

$$\dot{v}(t, \sigma) \leqslant w(h^t\sigma, v(t, \sigma)), \quad v(t_0, \sigma) \leqslant z_0. \tag{8.6}$$

Тогда для каждого $\sigma \in \Sigma$ *существует верхнее решение* $z^*(t, \sigma)$ *задачи Коши* (8.1), *определенное для всех* $t \in [t_0, \infty)$, *и имеет место неравенство* $v(t, \sigma) \leqslant z^*(t, \sigma)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\sigma \in \Sigma$ фиксировано. Докажем существование верхнего решения задачи Коши (8.1) для всех $t \geqslant t_0$. В силу леммы 8.1, верхнее решение задачи Коши (8.1) существует на отрезке $[t_0, \tau_1]$, обозначим это решение через $z_1^*(t, \sigma)$. Далее, обозначим через $z_2^*(t, \sigma)$ верхнее решение задачи Коши

$$\dot{z} = w(h^t\sigma, z), \quad z(\tau_1) = z_1^*(\tau_1, \sigma), \quad t \geqslant \tau_1,$$

которое существует на отрезке $[\tau_1, \tau_2]$, и введем в рассмотрение функцию

$$z^*(t,\sigma) = \begin{cases} z_1^*(t,\sigma) & \text{при} \quad t \in [t_0, \tau_1), \\ z_2^*(t,\sigma) & \text{при} \quad t \in [\tau_1, \tau_2), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

Отметим, что для произвольного решения $z(t,\sigma)$ задачи Коши (8.1) в точке τ_1 имеют место соотношения

$$z_2^*(\tau_1,\sigma) = z_1^*(\tau_1,\sigma) \geqslant z(\tau_1,\sigma),$$

тогда из результатов работы А. И. Перова [120] следует, что для всех $t \in [\tau_1, \tau_2]$ выполнены неравенства $z_2^*(t,\sigma) \geqslant z(t,\sigma)$. Таким образом, функция $z^*(t,\sigma)$ является верхним решением задачи Коши (8.1) для всех $t \in [t_0, \tau_2]$. Аналогично можно показать, что $z^*(t,\sigma)$ является верхним решением задачи (8.1) для всех $t \in [t_0, \tau_n]$ и любого натурального n.

Отметим, что данное решение $z^*(t,\sigma)$ можно продолжить на весь промежуток $[t_0, \infty)$. Для этого нужно показать, что если точки разрыва функции $w(h^t\sigma, z)$ изолированы, то каждый отрезок числовой оси содержит только конечное число таких точек. Предположим, что это не так и некоторый отрезок содержит бесконечное число изолированных точек $\tau_1, \tau_2, \dots$; тогда мы имеем бесконечное ограниченное числовое множество, которое должно иметь хотя бы одну предельную точку τ. Точка τ также является точкой разрыва функции $w(h^t\sigma, z)$ и в любой своей окрестности содержит бесконечно много других точек разрыва, то есть τ не является изолированной точкой разрыва, получили противоречие.

Из неравенств (8.6), в силу теоремы А. И. Перова [120], следует неравенство $v(t,\sigma) \leqslant z_1^*(t,\sigma)$, выполненное для всех $t \in [t_0, \tau_1]$. Далее, для всех $t \in [\tau_1, \tau_2]$ (для которых функция $v(t,\sigma)$ дифференцируема) имеют место неравенства

$$\dot{v}(t,\sigma) \leqslant w\big(h^t\sigma, v(t,\sigma)\big), \quad v(\tau_1,\sigma) \leqslant z_1^*(\tau_1,\sigma),$$

поэтому $v(t,\sigma) \leqslant z_2^*(t,\sigma)$ для всех $t \in [\tau_1, \tau_2]$. Продолжая последовательно применять теорему А. И. Перова, получаем, что верхнее решение $z^*(t,\sigma)$ задачи (8.1) удовлетворяет неравенству $v(t,\sigma) \leqslant z^*(t,\sigma)$ для всех $t \geqslant t_0$.

§ 9. Функции А. М. Ляпунова и дифференциальные включения

Пусть $\Omega \doteq \Sigma \times \operatorname{clcv}(\mathbb{R}^n)$ и задано подмножество $M = \{(\sigma,x) \in \Sigma \times \mathbb{R}^n : x \in M(\sigma)\}$ пространства Ω, где функция $\sigma \to M(\sigma)$ непрерывна в метрике Хаусдорфа–Бебутова. Построим замкнутую окрестность $M^r(\sigma) = M(\sigma) + O_r(0)$ множества $M(\sigma)$ в $\mathbb{R}^n$ и внешнюю r-окрестность $N_+^r(\sigma) = M^r(\sigma) \setminus M(\sigma)$ границы множества $M(\sigma)$, а также множество

$$N_+^r = \{(\sigma,x) \in \Sigma \times \mathbb{R}^n : x \in N_+^r(\sigma)\}.$$

Для формулировки основных результатов введем ряд обозначений и определений.

О п р е д е л е н и е 9.1. Функция $(\sigma,x) \to V(\sigma,x)$ удовлетворяет *локальному условию Липшица*, если для каждого $\sigma \in \Sigma$ и любого $\vartheta > 0$ найдется такая константа ℓ, что для любой пары точек

$$(t_i, x_i) \in Q \doteq \big\{(t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n : \, |t| \leqslant \vartheta, \, x \in M^r(h^t\sigma)\big\}, \quad i = 1, 2,$$

выполнено неравенство $|V(h^{t_1}\sigma, x_1) - V(h^{t_2}\sigma, x_2)| \leqslant \ell\big(|t_1 - t_2| + |x_1 - x_2|\big)$.

О п р е д е л е н и е 9.2 (см., например, [133]). Скалярную функцию $V(\sigma,x)$ переменных $(\sigma,x) \in \Sigma \times \mathbb{R}^n$ будем называть *функцией Ляпунова* (относительно заданного множества $M \subseteq \Omega$), если она удовлетворяет локальному условию Липшица и выполнены следующие условия:

1) $V(\sigma,x) \leqslant 0$ при всех $(\sigma,x) \in M$;
2) $V(\sigma,x) > 0$ для всех $(\sigma,x) \in N_+^r$.

О п р е д е л е н и е 9.3 (см., например, [45, с. 248]). Функция $V(\sigma, x)$, определенная при всех $(\sigma, x) \in \Sigma \times \mathbb{R}^n$, называется *бесконечно большой*, если для каждого $\sigma \in \Sigma$ и любой последовательности $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ такой, что $|x_i| \to \infty$, выполнено равенство $\lim\limits_{i\to\infty} V(\sigma, x_i) = +\infty$.

О п р е д е л е н и е 9.4 (Ф. Кларк, [191, с. 17]). Для локально липшицевой функции $V(\sigma, x)$ *обобщенной производной* в точке $(\sigma, x) \in \Sigma \times \mathbb{R}^n$ по направлению вектора $q \in \mathbb{R}^n$ называется следующий верхний предел:

$$V^o(\sigma, x; q) \doteq \limsup_{(\vartheta, y, \varepsilon)\to(\sigma, x, +0)} \frac{V(h^{\varepsilon}\vartheta, y + \varepsilon q) - V(\vartheta, y)}{\varepsilon},$$

а выражения

$$V^o_{\min}(\sigma, x) \doteq \inf_{q\in F(\sigma,x)} V^o(\sigma, x; q), \quad V^o_{\max}(\sigma, x) \doteq \sup_{q\in F(\sigma,x)} V^o(\sigma, x; q)$$

называются *нижней и верхней производной* функции V в силу включения (7.2).

В данном параграфе приведены необходимые для дальнейшего свойства функций Ляпунова и производных в силу включения.

Л е м м а 9.1 (см. [133]). *Предположим, что* $U(\sigma, x) \in \operatorname{comp}(\mathbb{R}^m)$ *для всех* $(\sigma, x) \in \Sigma\times\mathbb{R}^n$, *тогда имеют место соотношения*

$$V^o_{\min}(\sigma, x) \leqslant \min_{u\in U(\sigma,x)} V^o\big(\sigma, x; f(\sigma, x, u)\big), \tag{9.1}$$

$$V^o_{\max}(\sigma, x) = \max_{u\in U(\sigma,x)} V^o\big(\sigma, x; f(\sigma, x, u)\big). \tag{9.2}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Отметим, что функция $q \to V^o(\sigma, x; q)$ локально липшицева, субаддитивна и положительно однородна (Ф. Кларк, [191, с. 32]), то есть, если $\lambda \geqslant 0$, то

$$V^o(\sigma, x; \lambda q) = \lambda V^o(\sigma, x; q),$$
$$V^o(\sigma, x; q + p) \leqslant V^o(\sigma, x; q) + V^o(\sigma, x; p).$$

Кроме того, в силу теоремы Каратеодори (см., например, [170, с. 50]), всякая точка q множества

$$F(\sigma, x) = \operatorname{co}\big\{y \in \mathbb{R}^n : \, y = f(\sigma, x, u), \, u \in U(\sigma, x)\big\}$$

представима в виде выпуклой комбинации не более, чем $n+1$ точек множества $f(\sigma, x, U(\sigma, x))$:

$$q = \lambda_1 f(\sigma, x, u_1) + \ldots + \lambda_{n+1} f(\sigma, x, u_{n+1}), \;\; \lambda_i \geqslant 0, \;\; \lambda_1 + \ldots + \lambda_{n+1} = 1.$$

Докажем неравенство (9.1). Пусть $\widehat{\lambda}_i \geqslant 0$, $\widehat{\lambda}_1 + \ldots + \widehat{\lambda}_{n+1} = 1$ и

$$\widehat{q} = \widehat{\lambda}_1 f(\sigma, x, \widehat{u}_1) + \ldots + \widehat{\lambda}_{n+1} f(\sigma, x, \widehat{u}_{n+1})$$

— точка множества $F(\sigma, x)$, в которой функция $V^o(\sigma, x; q)$ достигает своего минимума; $\widehat{u}$ — точка множества $U(\sigma, x)$, в которой минимума достигает $V^o\big(\sigma, x; f(\sigma, x, u)\big)$. Тогда из включения $f(\sigma, x, \widehat{u}) \in F(\sigma, x)$ следует неравенство

$$V^o_{\min}(\sigma, x) \leqslant V^o\big(\sigma, x; f(\sigma, x, \widehat{u})\big).$$

Далее, если $\widehat{u}$ выбрано из условия максимума

$$\max_{u\in U(\sigma,x)} V^o\big(\sigma, x; f(\sigma, x, u)\big) = V^o\big(\sigma, x; f(\sigma, x, \widehat{u})\big),$$

то для всех $q \in F(\sigma, x)$ имеем

$$V^o(\sigma, x; q) = V^o\big(\sigma, x; \lambda_1 f(\sigma, x, u_1) + \ldots + \lambda_{n+1} f(\sigma, x, u_{n+1})\big) \leqslant$$
$$\leqslant \lambda_1 V^o\big(\sigma, x; f(\sigma, x, u_1)\big) + \ldots + \lambda_{n+1} V^o\big(\sigma, x; f(\sigma, x, u_{n+1})\big) \leqslant$$
$$\leqslant \lambda_1 V^o\big(\sigma, x; f(\sigma, x, \widehat{u})\big) + \ldots + \lambda_{n+1} V^o\big(\sigma, x; f(\sigma, x, \widehat{u})\big) = V^o\big(\sigma, x; f(\sigma, x, \widehat{u})\big),$$

что и доказывает равенство (9.2).

Л е м м а 9.2 (см. [133]). *Пусть $\varphi(t, \sigma, x)$ — одно из решений включения* (7.6) *такое, что $\varphi(0, \sigma, x) \in M(\sigma)$ и функция $(\sigma, x) \to V(\sigma, x)$ удовлетворяет локальному условию Липшица. Тогда функция*

$$t \to v(t, \sigma) \doteq V\big(h^t\sigma, \varphi(t, \sigma, x)\big)$$

локально липшицева для всех $t \geqslant 0$, для которых $\big(t, \varphi(t, \sigma, x)\big) \in M^r(h^t\sigma)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\vartheta > 0$ и $\big(t, \varphi(t, \sigma, x)\big) \in M^r(h^t\sigma)$ при всех $|t| \leqslant \vartheta$. Тогда при всех $t, t+\tau \in [-\vartheta, \vartheta]$ имеем

$$|v(t+\tau, \sigma) - v(t, \sigma)| = \big|V\big(h^{t+\tau}\sigma, \varphi(t+\tau, \sigma)\big) - V\big(h^t\sigma, \varphi(t, \sigma)\big)\big| \leqslant$$
$$\leqslant \ell\big(|\tau| + |\varphi(t+\tau, \sigma) - \varphi(t, \sigma)|\big) \leqslant \ell\Big(|\tau| + \Big|\int_t^{t+\tau} \dot{\varphi}(s, \sigma)\, ds\Big|\Big) \leqslant$$
$$\leqslant \ell\Big(|\tau| + \Big|\int_t^{t+\tau} \big|F_r\big(h^s\sigma, \varphi(s, \sigma)\big)\big|\, ds\Big|\Big) \leqslant \ell(|\tau| + k|\tau|) = \ell(1+k)|\tau|,$$

где ℓ — константа Липшица, а константа k мажорирует $\big|F_r(\sigma, x)\big|$, постоянные ℓ и k не зависят от σ.

Л е м м а 9.3 (см. [118]). *Пусть функция $(\sigma, x) \to V(\sigma, x)$ удовлетворяет локальному условию Липшица и $\varphi(t, \sigma, x)$ — решение включения* (7.6)*. Тогда в точках дифференцируемости функции $t \to v(t, \sigma) \doteq V\big(h^t\sigma, \varphi(t, \sigma, x)\big)$ выполнены неравенства*

$$V^o_{\min}\big(h^t\sigma, \varphi(t, \sigma, x)\big) \leqslant \dot{v}(t, \sigma) \leqslant V^o_{\max}\big(h^t\sigma, \varphi(t, \sigma, x)\big). \tag{9.3}$$

§ 10. Условия продолжаемости решений управляемой системы

Пусть заданы топологическая динамическая система (Σ, h^t), функция $f(\sigma, x, u)$ переменных $(\sigma, x, u) \in \Sigma \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ и функция $U(\sigma, x)$ переменных $(\sigma, x) \in \Sigma \times \mathbb{R}^n$, принимающая значения в пространстве $\operatorname{clcv}(\mathbb{R}^m)$. Предполагаем, что функции f, U и динамическая система (Σ, h^t) удовлетворяют условию 7.1. Напомним это условие.

У с л о в и е 7.1. 1) Для каждой точки (t, σ) функция $(x, u) \to f(h^t\sigma, x, u)$ непрерывна;

2) для каждой точки (σ, x, u) функция $t \to f(h^t\sigma, x, u)$ кусочно-непрерывна;

3) функция $(\sigma, x) \to U(\sigma, x)$ полунепрерывна сверху в метрике Хаусдорфа–Бебутова (см. определение 3.1, с. 33).

Рассмотрим управляемую систему

$$\dot{x} = f(h^t\sigma, x, u), \quad (t, \sigma, x, u) \in \mathbb{R} \times \Sigma \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m, \tag{10.1}$$

и дифференциальное включение

$$\dot{x} \in F(h^t\sigma, x), \quad F(\sigma, x) = \operatorname{co} H(\sigma, x), \tag{10.2}$$

где через $H(\sigma, x)$ обозначено множество всех предельных значений функции $f\big(\sigma, x, U(\sigma, x)\big)$ при $(\sigma_i, x_i) \to (\sigma, x)$, $\operatorname{co} H(\sigma, x)$ — замыкание выпуклой оболочки множества $H(\sigma, x)$.

В этом параграфе получены условия, при которых для каждой точки $\sigma \in \Sigma$ и любого начального состояния $x_0 \in \mathbb{R}^n$ существует решение $\varphi(t, \sigma, x_0)$ дифференциального включения (10.2), удовлетворяющее начальному условию $\varphi(0, \sigma, x_0) = x_0$ и определенное при всех $t \in \mathbb{R}_+$.

Обозначим через $Q_\varrho \doteq \{x \in \mathbb{R}^n : |x| > \varrho\}$ внешность сферы радиуса ϱ с центром в начале координат. Напомним, что функция $w(h^t\sigma, z)$ удовлетворяет условию 8.1, если имеют место следующие свойства:

1) для каждого $\sigma \in \Sigma$ существует (конечная или бесконечная) последовательность изолированных точек числовой оси $\{\tau_k\}_{k=0}^{\infty}$, $t_0 = \tau_0 < \tau_1 < \tau_2 < \ldots$ такая, что функция $(t, z) \to w(h^t\sigma, z)$ непрерывна в каждой из областей $G_i \doteq \{(t, z) : t \in [\tau_{i-1}, \tau_i), z \in \mathbb{R}\}$ и имеет предел слева при $t \to \tau_i$, $i = 1, 2, \ldots$;

2) для каждой точки $(t, \sigma) \in \mathbb{R} \times \Sigma$ выполнено неравенство

$$\lim_{|z|\to\infty} \frac{|w(h^t\sigma, z)|}{|z|} < \infty\,. \tag{10.3}$$

Следующая теорема доказана в работе [137] для случая, когда функции $f(\sigma, x, u)$ и $w(\sigma, z)$ непрерывны и является обобщением теоремы Ла-Салля (см., например, [45, с. 276]).

Т е о р е м а 10.1. *Пусть выполнено условие* 7.1 *и для каждого* $\sigma \in \Sigma$ *существуют функция* $V(\sigma, x)$ *переменных* $(\sigma, x) \in \Sigma \times \mathbb{R}^n$ *и функция* $w(\sigma, z)$ *переменных* $(\sigma, z) \in \Sigma \times \mathbb{R}$ *такие, что:*

1) *функция* $w(h^t\sigma, z)$ *удовлетворяет условию* 8.1;

2) *функция* $V(\sigma, x)$ *является бесконечно большой функцией Ляпунова и при всех* $(\sigma, x) \in \Sigma \times Q_\varrho$ *выполнено неравенство*

$$V^o_{\min}(\sigma, x) \leqslant w\big(\sigma, V(\sigma, x)\big). \tag{10.4}$$

Тогда при каждом $\sigma \in \Sigma$ *для каждой точки* $x_0 \in \mathbb{R}^n$ *существует решение дифференциального включения* (10.2)*, удовлетворяющее начальному условию* $\varphi(0, \sigma, x_0) = x_0$ *и продолжаемое на полуось* $\mathbb{R}_+$.

Для доказательства теоремы 10.1 нам понадобятся следующие обозначения и утверждения. Для всех $(\sigma, x) \in \Sigma \times Q_\varrho$ определим множество $\widehat{U}(\sigma, x)$ равенством

$$\widehat{U}(\sigma, x) \doteq \big\{\, u \in U(\sigma, x) : V^o\big(\sigma, x; f(\sigma, x, u)\big) \leqslant w\big(\sigma, V(\sigma, x)\big) \big\}.$$

Отметим, что при любых фиксированных $(\sigma, x) \in \Sigma \times Q_\varrho$ множество $\widehat{U}(\sigma, x)$ замкнуто (но не обязательно компактно). Действительно, если последовательность $\{u_i\}_{i=1}^{\infty}$ такова, что $u_i \in \widehat{U}(\sigma, x)$ и $u_i \to u$, то $f(\sigma, x, u_i) \to f(\sigma, x, u)$ и в силу липшицевости функции $q \to V^o(\sigma, x; q)$, выполнено неравенство

$$V^o\big(\sigma, x; f(\sigma, x, u)\big) = \lim_{i\to\infty} V^o\big(\sigma, x; f(\sigma, x, u_i)\big) \leqslant w\big(\sigma, V(\sigma, x)\big).$$

Обозначим через $\widehat{u}_0(\sigma, x)$ ближайшую к нулю пространства $\mathbb{R}^m$ точку множества $\widehat{U}(\sigma, x)$, через $O_r\big(\widehat{u}_0(\sigma, x)\big)$ — замкнутый шар радиуса r с центром в точке $\widehat{u}_0(\sigma, x)$, далее для каждого $(\sigma, x) \in \Sigma \times Q_\varrho$ определим множество

$$\widehat{U}_r(\sigma, x) \doteq \widehat{U}(\sigma, x) \bigcap O_r\big(\widehat{u}_0(\sigma, x)\big)$$

и множество $\widehat{H}_r(\sigma, x)$, состоящее из всех предельных значений функции $f\big(\sigma, x, \widehat{U}_r(\sigma, x)\big)$ при $(\sigma_i, x_i) \to (\sigma, x)$. Из второго условия теоремы следует, что множество $\widehat{U}(\sigma, x)$ непусто, тогда множество $\widehat{H}_r(\sigma, x)$ при фиксированных $(\sigma, x) \in \Sigma \times Q_\varrho$ также непусто, замкнуто и, кроме того, компактно. Поставим в соответствие множеству $\widehat{U}_r$ управляемую систему

$$\dot{x} = \int_{\widehat{U}_r(h^t\sigma, x)} f(h^t\sigma, x, u)\, \eta_t(du) \tag{10.5}$$

и дифференциальное включение

$$\dot{x} \in \widehat{F}_r(h^t\sigma, x), \quad \widehat{F}_r(\sigma, x) = \mathrm{co}\widehat{H}_r(\sigma, x). \tag{10.6}$$

Напомним, что допустимый процесс задачи (10.5) — это такая пара $(\varphi(t,\sigma), \eta_t)$, что $\varphi(t,\sigma)$ является решением системы

$$\dot{x}(t) = \int_{\widehat{U}_r(t)} f(h^t\sigma, x(t), u)\eta_t(du), \quad t \in [0, \tau), \tag{10.7}$$

где $\widehat{U}_r(t) = \widehat{U}_r(h^t\sigma, \varphi(t,\sigma))$, $\eta_t \in \mathrm{rpm}\big(\widehat{U}_r(t)\big)$, $[0,\tau)$ — правый максимальный интервал существования решения φ системы (10.7). Если $(\varphi(t,\sigma), \eta_t)$ — допустимый процесс, то $\varphi(t,\sigma)$ — решение включения (10.6). Верно и обратное утверждение, если $\varphi(t,\sigma)$ является решением включения (10.6), то найдется такое управление η_t, что пара $(\varphi(t,\sigma), \eta_t)$ образует допустимый процесс задачи (10.5).

Л е м м а 10.1 (см. [137]). *Если выполнено условие* 7.1, *то функции*

$$(\sigma, x) \to \widehat{H}_r(\sigma, x) \ \ \text{и} \ \ (\sigma, x) \to \widehat{F}_r(\sigma, x)$$

полунепрерывны сверху в метрике Хаусдорфа при всех $(\sigma, x) \in \Sigma \times Q_\varrho$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Отметим, что график функции

$$(\sigma, x) \to \widehat{H}_r(\sigma, x), \quad (\sigma, x) \in \Sigma \times Q_\varrho$$

— это замыкание графика функции $(\sigma, x) \to f\big(\sigma, x, \widehat{U}_r(\sigma, x)\big)$, поэтому этот график является замкнутым множеством. Так же, как в лемме 7.1, доказывается, что функция $(\sigma, x) \to \widehat{H}_r(\sigma, x)$ ограничена в окрестности каждой точки $(\sigma, x) \in \Sigma \times Q_\varrho$. Следовательно, для любого $r \in [0, \infty)$ функция $(\sigma, x) \to \widehat{H}_r(\sigma, x)$ полунепрерывна сверху для всех $(\sigma, x) \in \Sigma \times Q_\varrho$ в метрике Хаусдорфа. Поэтому из равенства $\widehat{F}_r(\sigma, x) = \mathrm{co}\widehat{H}_r(\sigma, x)$ следует полунепрерывность сверху функции $\widehat{F}_r(\sigma, x)$ (см., например, [13, с. 204], [170, с. 53–54]).

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 10.1. В силу леммы 10.1 условие 7.1 влечет полунепрерывность сверху функции $(\sigma, x) \to \widehat{F}_r(\sigma, x)$ в метрике Хаусдорфа. Следовательно, в силу теоремы А. Ф. Филиппова (см. [13, с. 213]), через каждую точку (σ, x_0) множества $\Sigma \times Q_\varrho$ проходит решение $\varphi(t, \sigma, x_0)$ дифференциального включения (10.6), удовлетворяющее начальному условию $\varphi(0, \sigma, x_0) = x_0$.

Из определения множеств $\widehat{U}_r(\sigma, x)$ и $\widehat{U}(\sigma, x)$ следует, что для всех точек $(\sigma, x) \in \Sigma \times Q_\varrho$ и любого $r \in [0, \infty)$ имеют место включения

$$\widehat{U}_r(\sigma, x) \subseteq \widehat{U}(\sigma, x) \subseteq U(\sigma, x).$$

Поэтому $\widehat{F}_r(\sigma, x) \subseteq F(\sigma, x)$ и $\varphi(t, \sigma, x_0)$ — решение дифференциального включения (10.6), также является и решением исходного включения (10.2).

В силу леммы 7.1 через каждую точку (σ, x_0) множества $\Sigma \times \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < \varrho_1\}$, где $\varrho_1 > \varrho$, также проходят решения $\varphi(t, \sigma, x_0)$ включения (10.2) (которые не обязательно являются решениями включения (10.6)). Нужно показать, что среди этих решений существует решение, продолжаемое на полуось $\mathbb{R}_+$. Предположим, что таких решений нет, тогда для каждого решения $\varphi(t, \sigma, x_0)$ найдется момент времени $t_1 < \infty$ такой, что

$$|\varphi(t, \sigma, x_0)| \to \infty \ \ \text{при} \ \ t \to t_1, \ t < t_1.$$

Следовательно, при $t \in (t_0, t_1)$, где $t_0 < t_1$, решение $\varphi(t, \sigma, x_0)$ целиком будет содержаться в множестве $Q_{\varrho_1} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| > \varrho_1\}$ (см. рис. 9).

Выделим среди этих решений те решения, которые удовлетворяют дифференциальному включению (10.6), и рассмотрим функцию $v(t,\sigma) = V\big(h^t\sigma, \varphi(t,\sigma,x_0)\big)$. Из условия локальной липшицевости функции $V(\sigma,x)$ следует, что функция $t \to v(t,\sigma)$ локально липшицева (см. лемму 9.2, с. 59); поэтому, в силу теоремы Радемахера, функция $v(t,\sigma)$ дифференцируема при почти всех t. Из неравенства (10.4) следует, что в точках дифференцируемости данной функции, принадлежащих интервалу (t_0,t_1), выполнено неравенство

$$\dot v(t,\sigma) \leqslant w\big(h^t\sigma, v(t,\sigma)\big).$$

Далее, в силу теоремы 8.1 верхнее решение $z^*(t,\sigma)$ задачи (8.1) определено при всех $t \geqslant 0$ и удовлетворяет неравенству $v(t,\sigma) \leqslant z^*(t,\sigma)$ при всех $t \in (t_0,t_1)$. Но функция $V(\sigma,x)$ является бесконечно большой, поэтому

$$\lim_{t\to t_1} v(t,\sigma) = \lim_{|\varphi(t,\sigma,x_0)|\to\infty} V\big(h^t\sigma, \varphi(t,\sigma,x_0)\big) = +\infty,$$

что противоречит неравенству $v(t,\sigma) \leqslant z^*(t,\sigma)$.

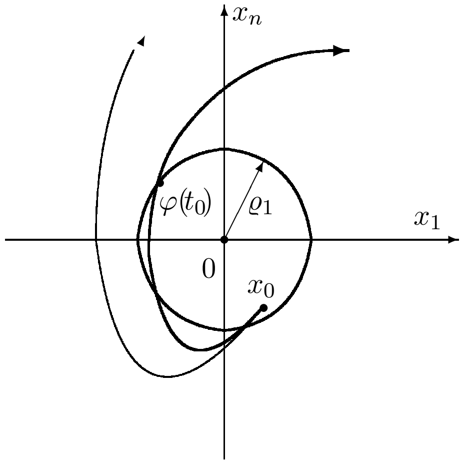

Рис. 9. Траектория решения $\varphi(t,\sigma,x_0)$ при $t \in (t_0,t_1)$ содержится в множестве Q_{ϱ_1}

Аналогично можно показать, что для любой точки $(\sigma,x_0) \in \Sigma \times \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \geqslant \varrho_1\}$ существует решение $\varphi(t,\sigma,x_0)$ дифференциального включения (10.6) (которое является и решением включения (10.2)) с начальным условием $\varphi(t,\sigma,x_0) = x_0$, продолжаемое на полуось $\mathbb{R}_+$.

Т е о р е м а 10.2. *Предположим, что выполнено условие* 7.1 *и для каждого* $\sigma \in \Sigma$ *существуют функция* $V(\sigma,x)$ *переменных* $(\sigma,x) \in \Sigma \times \mathbb{R}^n$ *и функция* $w(\sigma,z)$ *переменных* $(\sigma,z) \in \Sigma \times \mathbb{R}$ *такие, что:*

1) *функция* $w(h^t\sigma,z)$ *удовлетворяет условию* 8.1;

2) *функция* $V(\sigma,x)$ *является бесконечно большой функцией Ляпунова и при всех* $(\sigma,x) \in \Sigma \times Q_\varrho$ *выполнено неравенство*

$$V^o_{\max}(\sigma,x) \leqslant w\big(\sigma, V(\sigma,x)\big). \tag{10.8}$$

Тогда при каждом $\sigma \in \Sigma$ *для каждой точки* $x_0 \in \mathbb{R}^n$ *все решения дифференциального включения* (10.2), *удовлетворяющие начальному условию* $\varphi(0,\sigma,x_0) = x_0$, *продолжаемы на полуось* $\mathbb{R}_+$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\varphi(t,\sigma,x_0)$ — произвольное решение включения (10.2), удовлетворяющее начальному условию $\varphi(t,\sigma,x_0) = x_0$ (такое решение существует в силу леммы 7.1). Предположим, что данное решение $\varphi(t,\sigma,x_0)$ не может быть продолжено на полуось

$\mathbb{R}_+$, тогда найдется такой момент времени $t_1 < \infty$, что $|\varphi(t,\sigma,x_0)| \to \infty$ при $t \to t_1$, $t < t_1$. Следовательно, при $t \in (t_0, t_1)$, где $t_0 < t_1$, решение $\varphi(t,\sigma,x_0)$ целиком будет содержаться в множестве

$$Q_{\varrho_1} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| > \varrho_1\}, \quad \text{где} \quad \varrho_1 > \varrho.$$

Рассмотрим функцию $v(t,\sigma) = V\big(h^t\sigma, \varphi(t,\sigma,x_0)\big)$, которая дифференцируема при почти всех t. Из леммы 9.3 и неравенства (10.8) следует, что в точках дифференцируемости данной функции, принадлежащих интервалу (t_0, t_1), выполнено неравенство

$$\dot v(t,\sigma) \leqslant w\big(h^t\sigma, v(t,\sigma)\big).$$

Из последнего неравенства, в силу теоремы 8.1, следует неравенство $v(t,\sigma) \leqslant z^*(t,\sigma)$, выполненное при всех $t \in (t_0, t_1)$ (здесь через $z^*(t,\sigma)$ обозначено верхнее решение задачи (8.1)). Поскольку функция $V(\sigma,x)$ является бесконечно большой, то предел $\lim\limits_{t\to t_1} v(t,\sigma) = +\infty$, что противоречит неравенству $v(t,\sigma) \leqslant z^*(t,\sigma)$.

§ 11. Теорема об относительной частоте поглощения множества достижимости управляемой системы заданным множеством

Пусть задано подмножество X пространства $\operatorname{clcv}(\mathbb{R}^n)$ и подмножество

$$M = \{(\sigma,x) \in \Sigma \times \mathbb{R}^n : x \in M(\sigma)\}$$

пространства $\Omega \doteq \Sigma \times \operatorname{clcv}(\mathbb{R}^n)$, где функция $\sigma \to M(\sigma)$ непрерывна в метрике Хаусдорфа–Бебутова и принимает значения в пространстве $\operatorname{clcv}(\mathbb{R}^n)$. Обозначим через $A(t,\sigma,X)$ *множество достижимости* управляемой системы (10.1) в момент времени t из начального множества X.

Рассмотрим множество

$$\alpha(\vartheta_0,\vartheta,\omega) \doteq \big\{t \in [\vartheta_0,\vartheta] : A(t,\omega) \subseteq M(h^t\sigma)\big\},$$

где $\omega = (\sigma, X)$. Напомним, что в параграфе 7 вводится характеристика

$$\operatorname{freq}(\omega) \doteq \lim_{\vartheta\to\infty} \frac{\operatorname{mes}\alpha(0,\vartheta,\omega)}{\vartheta} = \lim_{\vartheta\to\infty} \frac{\operatorname{mes}\{t \in [0,\vartheta] : A(t,\omega) \subseteq M(h^t\sigma)\}}{\vartheta}, \tag{11.1}$$

которая называется *относительной частотой поглощения* множества достижимости $A(t,\omega)$ системы (10.1) заданным множеством M. Далее, если предел (11.1) не существует, то характеристики

$$\operatorname{freq}^*(\omega) \doteq \varlimsup_{\vartheta\to\infty} \frac{\operatorname{mes}\alpha(0,\vartheta,\omega)}{\vartheta}, \quad \operatorname{freq}_*(\omega) \doteq \varliminf_{\vartheta\to\infty} \frac{\operatorname{mes}\alpha(0,\vartheta,\omega)}{\vartheta}$$

будем называть, соответственно, *верхней* и *нижней относительной частотой поглощения* множества достижимости $A(t,\omega)$ системы (10.1) множеством M.

Предположим, что верхнее решение $z^*(t,\sigma)$ скалярной задачи Коши

$$\dot z = w(h^t\sigma, z), \quad z(0) = 0, \quad t \geqslant 0 \tag{11.2}$$

существует для всех $t \geqslant 0$ и определим характеристику

$$\varkappa(\sigma) \doteq \lim_{\vartheta\to\infty} \frac{\operatorname{mes}\{t \in [0,\vartheta] : z^*(t,\sigma) \leqslant 0\}}{\vartheta}. \tag{11.3}$$

Если указанный предел существует, то характеристика $\varkappa(\sigma)$ является *относительной частотой пребывания верхнего решения* $z^*(t,\sigma)$ задачи Коши (11.2) в множестве $(-\infty, 0]$. Отметим, что подобные характеристики рассматривались в монографии [105, с. 389].

Если предел (11.3) не существует, то введем в рассмотрение следующие характеристики:

$$\begin{aligned} \varkappa^*(\sigma) &\doteq \varlimsup_{\vartheta\to\infty} \frac{\operatorname{mes}\{t \in [0,\vartheta] : z^*(t,\sigma) \leqslant 0\}}{\vartheta}, \\ \varkappa_*(\sigma) &\doteq \varliminf_{\vartheta\to\infty} \frac{\operatorname{mes}\{t \in [0,\vartheta] : z^*(t,\sigma) \leqslant 0\}}{\vartheta}, \end{aligned} \tag{11.4}$$

называемые *верхней и нижней относительной частотой пребывания верхнего решения* $z^*(t,\sigma)$ скалярной задачи Коши (11.2) в множестве $(-\infty, 0]$.

З а м е ч а н и е 11.1. Характеристики $\varkappa^*(\sigma)$ и $\varkappa_*(\sigma)$ обладают свойствами, аналогичными свойствам верхней и нижней относительной частоты поглощения (см. лемму 7.2, с. 52):
1) множество $\beta(\vartheta_0,\vartheta,\sigma) \doteq \{t \in [\vartheta_0,\vartheta] :\ z^*(t,\sigma) \leqslant 0\}$ измеримо по Лебегу;
2) для любых фиксированных $\vartheta_0 \geqslant 0$ и $\tau \geqslant 0$ имеют место равенства

$$\begin{aligned} \varkappa^*(\sigma) &= \varlimsup_{\vartheta\to\infty} \frac{\operatorname{mes}\beta(\vartheta_0,\vartheta,\sigma)}{\vartheta-\vartheta_0} = \varlimsup_{\vartheta\to\infty} \frac{\operatorname{mes}\beta(\tau,\tau+\vartheta,\omega)}{\vartheta}, \\ \varkappa_*(\sigma) &= \varliminf_{\vartheta\to\infty} \frac{\operatorname{mes}\beta(\vartheta_0,\vartheta,\sigma)}{\vartheta-\vartheta_0} = \varliminf_{\vartheta\to\infty} \frac{\operatorname{mes}\beta(\tau,\tau+\vartheta,\omega)}{\vartheta}; \end{aligned}$$

3) если решение $z^*(t,\sigma)$ периодично по t с периодом T, то

$$\varkappa^*(\sigma) = \varkappa_*(\sigma) = \frac{\operatorname{mes}\beta(0,T,\sigma)}{T}.$$

Доказательства этих утверждений повторяют доказательство леммы 7.2.

Следующая теорема доказана в работе [137] для случая, когда функции $f(\sigma,x,u)$ и $w(\sigma,z)$ непрерывны.

Т е о р е м а 11.1. *Предположим, что для всех $\sigma \in \Sigma$ для каждой точки $x \in M(\sigma)$ все решения включения* (10.2), *удовлетворяющие начальному условию $\varphi(0,\sigma,x) = x$, продолжаемы на полуось $\mathbb{R}_+$. Пусть для каждого $\sigma \in \Sigma$ существуют функция $V(\sigma,x)$ переменных $(\sigma,x) \in \Sigma \times \mathbb{R}^n$ и функция $w(\sigma,z)$ переменных $(\sigma,z) \in \Sigma \times \mathbb{R}$ такие, что:*

1) *функция $w(h^t\sigma,z)$ удовлетворяет условию* 8.1;

2) *функция $V(\sigma,x)$ является функцией Ляпунова относительно множества M и при всех $(\sigma,x) \in \Sigma \times \mathbb{R}^n$ выполнено неравенство*

$$V^o_{\max}(\sigma,x) \leqslant w\bigl(\sigma, V(\sigma,x)\bigr). \tag{11.5}$$

Тогда для каждого $\sigma \in \Sigma$ для любого множества $X \subseteq M(\sigma)$ верхняя и нижняя относительные частоты поглощения множества достижимости $A(t,\sigma,X)$ множеством M удовлетворяют неравенствам

$$\operatorname{freq}^*(\omega) \geqslant \varkappa^*(\sigma), \quad \operatorname{freq}_*(\omega) \geqslant \varkappa_*(\sigma). \tag{11.6}$$

Далее, если $\varkappa(\sigma) = 1$ для всех $\sigma \in \Sigma$, то множество M статистически инвариантно относительно системы (10.1).

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу теоремы 8.1 из условия 8.1 следует, что для всех $\sigma \in \Sigma$ верхнее решение $z^*(t,\sigma)$ задачи Коши (11.2) определено при всех $t \geqslant 0$. Пусть $\varphi(t,\sigma,x)$ — решение включения (10.2), определенное на полуоси $\mathbb{R}_+$ и удовлетворяющее начальному условию $\varphi(0,\sigma,x) = x \in X$. Рассмотрим функцию $v(t,\sigma) = V\bigl(h^t\sigma, \varphi(t,\sigma,x)\bigr)$. В силу теоремы Радемахера функция $v(t,\sigma)$ дифференцируема при почти всех t, и поскольку

$$\varphi(0,\sigma,x) \in X \subseteq M(\sigma),$$

то $v(0,\sigma) \leqslant 0$. В точках дифференцируемости функции $v(t,\sigma)$ выполнены неравенства (см. лемму 9.3, с. 59)

$$V^o_{\min}\big(h^t\sigma, \varphi(t,\sigma,x)\big) \leqslant \dot v(t,\sigma) \leqslant V^o_{\max}\big(h^t\sigma, \varphi(t,\sigma,x)\big),$$

поэтому с учетом неравенства (11.5) имеем при всех $t \geqslant 0$ неравенство

$$\dot v(t,\sigma) \leqslant w\big(h^t\sigma, v(t,\sigma)\big).$$

В силу теоремы 8.1 из этого неравенства при всех $t \geqslant 0$ следует неравенство $v(t,\sigma) \leqslant z^*(t,\sigma)$, где $z^*(t,\sigma)$ — верхнее решение задачи (11.2). Отметим теперь, что каждое из множеств

$$\{t \in [0,\vartheta] : v(t) \leqslant 0\}, \quad \{t \in [0,\vartheta] : z^*(t,\sigma) \leqslant 0\},$$

измеримо по Лебегу; это доказывается так же, как лемма 7.2.

Обозначим через $\operatorname{freq}^*(\varphi)$ верхнюю относительную частоту попадания решения $\varphi(t,\sigma,x)$ в множество M, тогда

$$\operatorname{freq}^*(\varphi) \doteq \varlimsup_{\vartheta\to\infty} \frac{\operatorname{mes}\{t \in [0,\vartheta] : \varphi(t,\sigma,x) \in M(h^t\sigma)\}}{\vartheta} = \varlimsup_{\vartheta\to\infty} \frac{\operatorname{mes}\{t \in [0,\vartheta] : v(t,\sigma) \leqslant 0\}}{\vartheta}.$$

Далее, в силу (11.4) из неравенства $v(t,\sigma) \leqslant z^*(t,\sigma)$ следует неравенство $\operatorname{freq}^*(\varphi) \geqslant \varkappa^*(\sigma)$, и так как $\varphi(t,\sigma,x)$ является произвольным решением включения (10.2) с начальным условием $\varphi(0,\sigma,x) = x \in X \subseteq M(\sigma)$, то имеют место неравенства (11.6).

Предположим теперь, что для всех $\sigma \in \Sigma$ выполнено равенство $\varkappa(\sigma) = \varkappa_*(\sigma) = 1$, тогда из неравенств (11.6) следует равенство

$$\operatorname{freq}(\sigma, M(\sigma)) = \operatorname{freq}_*(\sigma, M(\sigma)) = 1,$$

выполненное для всех $\sigma \in \Sigma$. Следовательно, множество M статистически инвариантно относительно системы (10.1). $\square$

Далее получены следствия из теоремы 11.1 для случая, когда при каждом $\sigma \in \Sigma$ множество $M(\sigma)$ компактно.

С л е д с т в и е 11.1. *Пусть для каждого $\sigma \in \Sigma$ множество $M(\sigma)$ компактно, существуют функция $V(\sigma,x)$ переменных $(\sigma,x) \in \Sigma \times \mathbb{R}^n$ и функция $w(\sigma,z)$ переменных $(\sigma,z) \in \Sigma \times \mathbb{R}$ такие, что:*

1) *функция $w(h^t\sigma, z)$ удовлетворяет условию* 8.1;

2) *функция $V(\sigma,x)$ является функцией Ляпунова относительно множества M и при всех $(\sigma,x) \in \Sigma \times \mathbb{R}^n$ выполнено неравенство*

$$V^o_{\max}(\sigma,x) \leqslant w\big(\sigma, V(\sigma,x)\big).$$

Тогда, если $\varkappa(\sigma) = 1$ для всех $\sigma \in \Sigma$, то множество M статистически инвариантно относительно системы (10.1).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим через $\varphi(t,\sigma,x)$ решение включения (10.2), удовлетворяющее начальному условию

$$\varphi(0,\sigma,x) = x \in X \subseteq M(\sigma), \tag{11.7}$$

и рассмотрим функцию $v(t,\sigma) = V\big(h^t\sigma, \varphi(t,\sigma,x)\big)$. Так же, как при доказательстве теоремы 11.1, получаем, что при каждом $t \geqslant 0$ выполнено неравенство $v(t,\sigma) \leqslant z^*(t,\sigma)$, из которого следует равенство

$$\operatorname{freq}(\varphi) = \varkappa(\sigma) = 1. \tag{11.8}$$

Далее, так как $\varphi(t,\sigma,x)$ является произвольным решением включения (10.2) с начальным условием (11.7), то $\operatorname{freq}\big(\sigma, M(\sigma)\big) = 1$. Последнее равенство означает, что множество достижимости

$A\big(t,\sigma,M(\sigma)\big)$ содержится в множестве M с относительной частотой, равной единице. Отсюда следует, что любое решение $\varphi(t,\sigma,x)$ включения (10.2) с начальным условием (11.7) продолжаемо на полуось $\mathbb{R}_+$. Действительно, пусть для некоторого решения $\varphi(t,\sigma,x)$ найдется момент времени $\tau>0$ такой, что $|\varphi(t,\sigma,x)|\to\infty$ при $t\to\tau$, $t<\tau$. Тогда для этого решения относительная частота $\operatorname{freq}(\varphi)=0$, следовательно, равенство (11.8) не выполнено.

С л е д с т в и е 11.2. *Пусть для каждого $\sigma\in\Sigma$ множество $M(\sigma)$ компактно, существуют функция $V(\sigma,x)$ переменных $(\sigma,x)\in\Sigma\times\mathbb{R}^n$ и функция $w(\sigma,z)$ переменных $(\sigma,z)\in\Sigma\times\mathbb{R}$ такие, что:*

1) *функция $w(h^t\sigma,z)$ удовлетворяет условию* 8.1;

2) *функция $V(\sigma,x)$ является функцией Ляпунова относительно множества M и при всех $(\sigma,x)\in\Sigma\times\mathbb{R}^n$ выполнено неравенство*

$$V^o_{\max}(\sigma,x)\leqslant w\big(\sigma,V(\sigma,x)\big).$$

Если для некоторого $\sigma\in\Sigma$ для всех $t\geqslant 0$ верхнее решение задачи Коши (11.2) *удовлетворяет неравенству $z^*(t,\sigma)\leqslant 0$, то любое решение $\varphi(t,\sigma,x)$ включения* (10.2) *с начальным условием* (11.7) *продолжаемо на полуось $\mathbb{R}_+$ и множество достижимости $A(t,\sigma,X)$ поглощается множеством M при каждом $t\geqslant 0$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\varphi(t,\sigma,x)$ — решение включения (10.2), удовлетворяющее начальному условию (11.7). Рассмотрим функцию

$$v(t,\sigma)=V\big(h^t\sigma,\varphi(t,\sigma,x)\big).$$

Из доказательства теоремы 11.1 следует, что при каждом $t\geqslant 0$ выполнено неравенство $v(t,\sigma)\leqslant z^*(t,\sigma)$, из которого следует неравенство $v(t,\sigma)\leqslant 0$, которое означает, что решение $\varphi(0,\sigma,x)$ содержится в множестве M для всех $t\geqslant 0$. Поскольку это верно для произвольного решения включения (10.2) с начальным условием (11.7), то множество достижимости $A(t,\sigma,X)$ поглощается множеством M при каждом $t\geqslant 0$.

Из условия $A(t,\sigma,X)\subseteq M$ следует, что любое решение $\varphi(t,\sigma,x)$ включения (10.2), удовлетворяющее начальному условию (11.7), продолжаемо на полуось $\mathbb{R}_+$. Действительно, пусть для некоторого решения $\varphi(t,\sigma,x)$ найдется момент времени $\tau>0$ такой, что $|\varphi(t,\sigma,x)|\to\infty$ при $t\to\tau$, $t<\tau$. Тогда сечение $A(\tau,\sigma,x)$ в момент времени τ интегральной воронки включения (10.2) является неограниченным, а это противоречит тому, что $A(\tau,\sigma,x)$ содержится в компактном множестве $M(h^\tau\sigma)$. □

Свойство множества достижимости $A(t,\sigma,X)$ поглощаться множеством M при каждом $t\geqslant 0$ в другой терминологии называется *положительной инвариантностью* (при каждом фиксированном σ) множества M относительно решений включения (10.2).

§ 12. Исследование статистически инвариантных множеств линейной управляемой системы

В этом параграфе рассмотрены примеры применения теоремы 11.1 и ее следствий для исследования положительной инвариантности и статистической инвариантности заданных множеств относительно управляемой системы.

Предполагаем, что заданы топологическая динамическая система (Σ,h^t) и линейная управляемая система

$$\dot x=A(h^t\sigma)x+B(h^t\sigma)u,\quad (t,\sigma,x,u)\in\mathbb{R}\times\Sigma\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m. \tag{12.1}$$

Системе (12.1) поставим в соответствие дифференциальное включение

$$\dot x\in F(h^t\sigma,x), \tag{12.2}$$

где $F(\sigma, x)$ — множество всех предельных значений функции

$$A(\sigma)x + B(\sigma)U(\sigma, x) \quad \text{при} \ (\sigma_i, x_i) \to (\sigma, x).$$

Динамическую систему (Σ, h^t) построим следующим образом. Пусть фазовое пространство Σ является окружностью радиуса $T/2\pi$, которую будем отождествлять с полуинтервалом $[0, T)$, поток $h^t : \Sigma \to \Sigma$ задается равенством $h^t\sigma = t + \sigma \pmod T$. Предположим, что задано конечное множество чисел

$$\Theta = \{\theta_1, \dots, \theta_\ell\}, \quad \ell \geqslant 2, \quad \theta_k \in (0, T), \quad \theta_1 + \ldots + \theta_\ell = T$$

и множество матричных пар $\Psi = \{\psi_1, \dots, \psi_\ell\}$, $\psi_i \doteq (A_i, B_i)$, где A_i и B_i — матрицы размеров $(n \times n)$ и $(n \times m)$ соответственно.

Рассмотрим конечную последовательность $\{\tau_k\}_{k=0}^{\ell}$, где $\tau_0 = 0$, $\tau_k = \sum\limits_{i=1}^{k} \theta_i$ и множества $\Sigma^i = [\tau_{i-1}, \tau_i)$, $i = 1, \dots, \ell$.

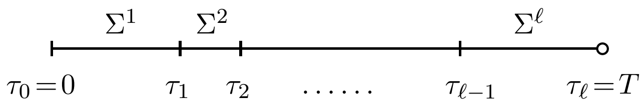

Рис. 10. Фазовое пространство $\Sigma = [0, T)$ является объединением множеств $\Sigma^1, \dots, \Sigma^\ell$

Представим фазовое пространство Σ в виде объединения непересекающихся множеств

$$\Sigma = \Sigma^1 \cup \Sigma^2 \cup \ldots \cup \Sigma^\ell$$

и рассмотрим функцию

$$f(h^t\sigma, x, u) = A(h^t\sigma)x + B(h^t\sigma)u, \quad \text{где}$$
$$\big(A(\sigma), B(\sigma)\big) = \psi_i, \quad \text{если} \ \ \sigma \in \Sigma^i, \ \ i = 1, \dots, \ell.$$

Отметим, что функция $f(h^t\sigma, x, u)$ удовлетворяет условию 7.1 и в дальнейшем управляемую систему (12.1) будем отождествлять с данной функцией.

Вместе с топологической динамической системой (Σ, h^t) будем рассматривать динамическую систему $(\widehat{\Sigma}, h^t)$, которая отличается от исходной системы тем, что множество Ψ (будем обозначать его теперь $\widehat{\Psi}$) содержит числовые пары $\big\{\widehat{\psi}_1, \dots, \widehat{\psi}_\ell\big\}$, где $\widehat{\psi}_i = (a_i, b_i)$. Определим функцию

$$w(\sigma, z) = a(\sigma)z + b(\sigma), \quad \text{где}$$
$$(a(\sigma), b(\sigma)) = \widehat{\psi}_i, \quad \text{если} \ \ \sigma \in \Sigma^i, \ \ i = 1, \dots, \ell$$

и поставим ей в соответствие задачу Коши

$$\dot z = a(h^t\sigma)z + b(h^t\sigma), \quad (t, \sigma, z) \in \mathbb{R} \times \widehat{\Sigma} \times \mathbb{R}, \quad z(0, \sigma) = 0. \tag{12.3}$$

Из построения динамической системы $(\widehat{\Sigma}, h^t)$ следует, что для каждой точки $\sigma \in \widehat{\Sigma}$ функции $t \to a(h^t\sigma)$ и $t \to b(h^t\sigma)$ кусочно-постоянные и периодические с общим периодом T.

О п р е д е л е н и е 12.1. Точку $\tau \in (0, \infty)$ назовем *точкой выхода траектории решения* $z(t, \sigma)$ *из множества* $(-\infty, 0]$, если $z(\tau, \sigma) = 0$ и для всякого $\delta > 0$ найдутся такие моменты времени $\tau_1 \in (\tau - \delta, \tau)$ и $\tau_2 \in (\tau, \tau + \delta)$, что

$$z(\tau_1, \sigma) \leqslant 0, \quad z(\tau_2, \sigma) > 0.$$

Точку $s \in (0,\infty)$ назовем *точкой входа траектории решения* $z(t,\sigma)$ *в множество* $(-\infty,0]$, если эта точка не является точкой выхода из множества $(-\infty,0]$, $z(s,\sigma)=0$ и для любого $\delta>0$ найдутся такие моменты времени $s_1 \in (s-\delta,s)$ и $s_2 \in (s,s+\delta)$, что $z(s_1,\sigma)>0$, $z(s_2,\sigma)\leqslant 0$.

Далее, точку $\vartheta \in (0,\infty)$ назовем *моментом переключения движения* $t \to h^t\sigma$, если любая окрестность этой точки содержит как точки множества $\Sigma^i=[\tau_{i-1},\tau_i)$, так и точки множества $\Sigma^j \neq \Sigma^i$.

Отметим, что моменты переключения движения $t \to h^t\sigma$, определяемого динамической системой (Σ,h^t) (или системой $(\widehat{\Sigma},h^t)$), изолированы и для любых моментов переключения ϑ_k, ϑ_{k+1} выполнены неравенства

$$|\vartheta_{k+1}-\vartheta_k| \geqslant \theta_{\min} > 0, \quad \text{где} \quad \theta_{\min} \doteq \min\{\theta_1,\ldots,\theta_\ell\}.$$

Пусть $z(t,\sigma)$ — решение задачи (12.3). В следующем утверждении получены условия существования предела

$$\varkappa(\sigma) \doteq \lim_{\vartheta\to\infty} \frac{\operatorname{mes}\{t\in[0,\vartheta]:\, z(t,\sigma)\leqslant 0\}}{\vartheta}$$

и равенства $\varkappa(\sigma)=1$. Эти условия необходимы для исследования статистической инвариантности заданного множества M относительно управляемой системы (12.1).

Л е м м а 12.1. *Пусть* $\widehat{\Sigma}=[0,T)$, $h^t\sigma = t+\sigma \pmod T$, *множество*

$$\widehat{\Psi} = \{\widehat{\psi}_1,\ldots,\widehat{\psi}_\ell\}, \quad \text{где} \quad \widehat{\psi}_k=(a_k,b_k)$$

и $b_k \neq 0$ *для всех* $k=1,\ldots,\ell$. *Если для некоторого* $\sigma\in\widehat{\Sigma}$ *для решения* $z(t,\sigma)$ *задачи* (12.3) *выполнены неравенства*

$$\varlimsup_{t\to\infty} z(t,\sigma)\leqslant 0, \qquad \varliminf_{t\to\infty} z(t,\sigma)<0,$$

то предел $\varkappa(\sigma)$ *существует и равен единице.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если верхний предел $\varlimsup\limits_{t\to\infty} z(t,\sigma)<0$, то найдется такой момент времени $\tau>0$, что для всех $t>\tau$ выполнено неравенство $z(t,\sigma)<0$, следовательно, $\varkappa(\sigma)=1$.

Далее рассматриваем случай, когда

$$\varlimsup_{t\to\infty} z(t,\sigma)=0, \qquad \varliminf_{t\to\infty} z(t,\sigma)<0.$$

Очевидно, что если $z(t,\sigma)\leqslant 0$ для всех $t\geqslant 0$, то $\varkappa(\sigma)=1$. Предположим теперь, что существует конечное число точек выхода траектории решения $z(t,\sigma)$ из множества $(-\infty,0]$, пусть это будут точки $t_1,\ldots,t_k$. Если нижний предел $\varliminf\limits_{t\to\infty} z(t,\sigma)=\alpha<0$, то найдется момент времени $\vartheta>t_k$ такой, что $z(\vartheta,\sigma)<\dfrac{\alpha}{2}<0$, следовательно, для всех $t>\vartheta$ выполнено неравенство $z(t,\sigma)\leqslant 0$, в этом случае $\varkappa(\sigma)=1$.

Предположим теперь, что $\varlimsup\limits_{t\to\infty} z(t,\sigma)=0$, $\varliminf\limits_{t\to\infty} z(t,\sigma)<0$ и число точек выхода траектории решения $z(t,\sigma)$ из множества $(-\infty,0]$ бесконечно. Каждой точке выхода t_i поставим в соответствие точку s_i входа траектории решения $z(t,\sigma)$ в $(-\infty,0]$ такую, что $t_i<s_i<t_{i+1}$. Таким образом,

$$z(t,\sigma)\geqslant 0 \quad \text{при} \quad t\in[t_i,s_i], \qquad z(t_i,\sigma)=z(s_i,\sigma)=0$$

и $z(t,\sigma)$ может обращаться в нуль в некоторых точках интервала (t_i,s_i).

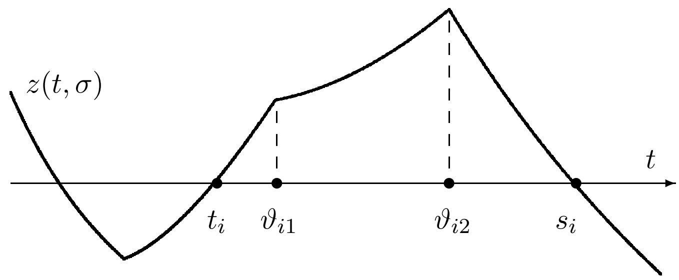

Рис. 11. Моменты переключения движения ϑ_{i1} и ϑ_{i2}

Докажем, что если верхний предел решения $z(t,\sigma)$ задачи (12.3) $\overline{\lim\limits_{t\to\infty}}\, z(t,\sigma) = 0$, то для достаточно больших t каждый отрезок $[t_i, s_i]$ содержит только один момент переключения движения $t \to h^t\sigma$. Предположим, что это не так, то есть для любого $\tau > 0$ найдется такой момент времени $t_i > \tau$, что отрезок $[t_i, s_i]$ содержит по крайней мере два момента переключения движения, которые обозначим ϑ_{i1} и ϑ_{i2}, $\vartheta_{i1} < \vartheta_{i2}$ (см. рис. 10). Отметим, что для любого натурального i выполнено неравенство

$$\vartheta_{i2} - \vartheta_{i1} \geqslant \theta_{\min} = \min\{\theta_1, \ldots, \theta_\ell\} > 0. \tag{12.4}$$

Предположим, что на промежутке $[\vartheta_{i1}, \vartheta_{i2})$ система находится в состоянии $\widehat{\psi}_k$, то есть имеет место равенство

$$\big(a(h^t\sigma), b(h^t\sigma)\big) = \widehat{\psi}_k = (a_k, b_k), \ \text{ где } \ k \in \{1, \ldots, \ell\},$$

тогда

$$z(\vartheta_{i2},\sigma) = \begin{cases} \dfrac{b_k}{a_k}\big(e^{a_k(\vartheta_{i2}-\vartheta_{i1})} - 1\big) + z(\vartheta_{i1},\sigma)e^{a_k(\vartheta_{i2}-\vartheta_{i1})} & \text{при } \ a_k \neq 0, \\ b_k(\vartheta_{i2}-\vartheta_{i1}) + z(\vartheta_{i2},\sigma) \quad \text{при} \quad a_k = 0. \end{cases} \tag{12.5}$$

Таким образом, поскольку $b_k \neq 0$, соотношения (12.4) и (12.5) противоречат условию $\overline{\lim\limits_{t\to\infty}}\, z(t,\sigma) = 0$. Следовательно, для достаточно больших t каждый отрезок $[t_i, s_i]$ содержит только один момент переключения движения $t \to h^t\sigma$, который обозначим ϑ_i.

Далее, из равенства $z(t_i,\sigma) = 0$ следует, что

$$z(\vartheta_i,\sigma) = \begin{cases} \dfrac{b_k}{a_k}\big(e^{a_k(\vartheta_i - t_i)} - 1\big), & \text{если} \quad a_k \neq 0, \\ b_k(\vartheta_i - t_i), & \text{если} \quad a_k = 0, \end{cases}$$

поэтому из условий $b_k \neq 0$ и $z(\vartheta_i,\sigma) \to 0$ при $i \to \infty$ получаем $\vartheta_i - t_i \to 0$ при $i \to \infty$. Аналогично можно показать, что из этих условий следует, что $s_i - \vartheta_i \to 0$ при $i \to \infty$, поэтому если $b_k \neq 0$ и $\lim\limits_{i\to\infty} z(\vartheta_i,\sigma) = 0$, то $s_i - t_i \to 0$ при $i \to \infty$.

Пусть $\beta(\vartheta_0,\vartheta,\sigma) \doteq \{t \in [\vartheta_0,\vartheta] : z(t,\sigma) \leqslant 0\}$. Из условия $\theta_{\min} > 0$ следует, что число точек выхода решения $z(t,\sigma)$ из множества $(-\infty, 0]$ на любом отрезке фиксированной длины конечно, тогда для любого $k \in \mathbb{N}$

$$\operatorname{mes}\beta\big(kT,(k+1)T,\sigma\big) \to T \quad \text{ при } \quad k \to \infty,$$

следовательно,

$$\varkappa(\sigma) = \lim_{N\to\infty} \frac{\sum\limits_{k=0}^{N-1} \operatorname{mes}\beta\big(kT,(k+1)T,\sigma\big)}{NT} = 1.$$

П р и м е р 12.1. Пусть заданы топологическая динамическая система $(\widehat{\Sigma}, h^t)$ и задача

$$\dot z = b(h^t\sigma), \quad (t,\sigma,z) \in \mathbb{R}\times\widehat{\Sigma}\times\mathbb{R}, \quad z(0,\sigma) = 0. \tag{12.6}$$

Рассмотрим следующую задачу: каким условиям должна удовлетворять функция $b(h^t\sigma)$ и динамическая система $(\widehat{\Sigma}, h^t)$, чтобы для всех $\sigma \in \Sigma$ выполнялось равенство $\varkappa(\sigma) = 1$.

Предполагаем, что динамическая система $(\widehat{\Sigma}, h^t)$ построена следующим образом. Фазовое пространство $\widehat{\Sigma}$ является окружностью радиуса $T/2\pi$, которую будем отождествлять с полуинтервалом $[0, T)$, поток $h^t : \Sigma \to \Sigma$ задается равенством $h^t\sigma = t + \sigma \pmod T$. Пусть, далее, задано конечное множество чисел

$$\Theta = \{\theta_1, \ldots, \theta_\ell\}, \quad \ell \geqslant 2, \quad \theta_k \in (0, T), \quad \theta_1 + \ldots + \theta_\ell = T$$

и множество $\widehat{\Psi} = \{\widehat{\psi}_1, \ldots, \widehat{\psi}_\ell\}$, где $\widehat{\psi}_i = b_i$. Введем последовательность $\{\tau_k\}_{k=0}^{\ell}$, где $\tau_0 = 0$, $\tau_k = \sum\limits_{i=1}^{k} \theta_i$ и предположим, что $b(\sigma) = \widehat{\psi}_i$, если $\sigma \in \Sigma^i = [\tau_{i-1}, \tau_i),\ i = 1, \ldots, \ell$.

Несложно найти, что для каждого натурального k при $t = kT$ решение $z(t, \sigma)$ задачи (12.6) не зависит от σ и удовлетворяет равенству

$$z(kT, \sigma) = k \sum_{i=1}^{\ell} b_i\theta_i.$$

Отметим, что если сумма $\sum\limits_{i=1}^{\ell} b_i\theta_i < 0$, то найдется такое число $\tau > 0$, что при всех $t \geqslant \tau$ выполнено неравенство $z(t, \sigma) \leqslant 0$, следовательно, $\varkappa(\sigma) = 1$. Если $\sum\limits_{i=1}^{\ell} b_i\theta_i > 0$, то $\varkappa(\sigma) = 0$. Если $\sum\limits_{i=1}^{\ell} b_i\theta_i = 0$, то $z(kT, \sigma) = 0$ для всех $\sigma \in \Sigma$, функция $t \to z(t, \sigma)$ периодична по t с периодом T и

$$\varkappa(\sigma) = \frac{\operatorname{mes} \beta(0, T, \sigma)}{T},$$

где $\beta(0, T, \sigma) = \{t \in [0, T] : z(t, \sigma) \leqslant 0\}$ (см. замечание 11.1, с. 64).

З а м е ч а н и е 12.1. Рассмотрим задачу Коши (12.3) и динамическую систему $(\widehat{\Sigma}, h^t)$, где $\widehat{\Sigma}$ — окружность радиуса $T/2\pi$, которую будем отождествлять с полуинтервалом $[0, T)$,

$$h^t\sigma = t + \sigma \pmod T.$$

Предполагаем, что заданы множества

$$\Theta = \{\theta_1, \ldots, \theta_\ell\}, \quad \text{где} \quad \theta_k \in (0, T], \quad \theta_1 + \ldots + \theta_\ell = T,$$
$$\widehat{\Psi} = \{\widehat{\psi}_1, \ldots, \widehat{\psi}_\ell\}, \quad \text{где} \quad \widehat{\psi}_i = (a_i, b_i).$$

Покажем, что если $b_i \leqslant 0$ для всех $i = 1, \ldots, \ell$, то для всех $\sigma \in \widehat{\Sigma}$ и всех $t \geqslant 0$ выполнено неравенство $z(t, \sigma) \leqslant 0$.

Рассмотрим случай, когда $b_i \leqslant 0$ и $a_i \neq 0$, $i = 1, \ldots, \ell$. Пусть $\sigma \in \Sigma^i = [\tau_{i-1}, \tau_i), \quad i = 1, \ldots, \ell$, тогда на промежутке $[0, \tau_i - \sigma)$ имеет место равенство $\big(a(h^t\sigma), b(h^t\sigma)\big) = \widehat{\psi}_i = (a_i, b_i)$ и решение системы (12.3) задается уравнением

$$z(t, \sigma) = \frac{b_i}{a_i}\big(e^{a_i t} - 1\big),$$

где $b_i \leqslant 0$, $a_i \neq 0$. Следовательно, $z(t, \sigma) \leqslant 0$ при всех $t \in [0, \tau_i - \sigma]$.

Далее, если $i \neq \ell$, то при всех $t \in [\tau_i - \sigma, \tau_{i+1} - \sigma)$ выполнено равенство

$$\big(a(h^t\sigma), b(h^t\sigma)\big) = \widehat{\psi}_{i+1} = (a_{i+1}, b_{i+1}),$$

тогда решением системы является функция

$$z(t,\sigma)=\frac{b_{i+1}}{a_{i+1}}\left(e^{a_{i+1}(t-\tau_i+\sigma)}-1\right)+z(\tau_i-\sigma,\sigma)e^{a_{i+1}(t-\tau_i+\sigma)},$$

где $b_{i+1}\leqslant 0$. Здесь из неравенств $b_{i+1}\leqslant 0$, $z(\tau_i-\sigma,\sigma)\leqslant 0$ получаем, что $z(t,\sigma)\leqslant 0$ при всех $t\in[\tau_i-\sigma,\tau_{i+1}-\sigma]$. Если $i=\ell$, то $\big(a(h^t\sigma),b(h^t\sigma)\big)=\widehat{\psi}_1=(a_1,b_1)$ при всех $t\in[\tau_\ell-\sigma,\tau_\ell+\tau_1-\sigma)$ и неравенство $z(t,\sigma)\leqslant 0$ также выполнено. Продолжая подобные рассуждения, получаем, что в случае, когда $b_i\leqslant 0$ для всех $i=1,\ldots,\ell$, неравенство $z(t,\sigma)\leqslant 0$ выполнено при всех $\sigma\in\widehat{\Sigma}$ и всех $t\in[0,\infty)$.

Аналогично можно показать, что неравенство $z(t,\sigma)\leqslant 0$ выполнено для всех $t\geqslant 0$ и в случае, когда $b_i\leqslant 0$, $i=1,\ldots,\ell$ и среди значений a_i существуют равные нулю.

П р и м е р 12.2. Рассмотрим управляемую систему

$$\dot{x}=A(h^t\sigma)x+B(h^t\sigma)u,\quad (t,\sigma,x,u)\in\mathbb{R}\times\Sigma\times\mathbb{R}^2\times U,\tag{12.7}$$

параметризованную динамической системой (Σ,h^t), где Σ — окружность радиуса $1/\pi$, которую будем отождествлять с полуинтервалом $[0,2)$, $h^t\sigma=t+\sigma\ (\operatorname{mod}2)$. Пусть $U=[0,5;1]$ и множества Θ и Ψ содержат два состояния:

$$\Theta=\{\theta_1,\theta_2\},\quad \theta_1=\theta_2=1,$$
$$\Psi=\{\psi_1,\psi_2\},\ \ \psi_i=(A_i,B_i),\ \ i=1,2,\quad \text{где}$$

$$A_1=\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix},\ B_1=\begin{pmatrix}0\\-0,5\end{pmatrix},\quad A_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\ B_2=\begin{pmatrix}-0,5\\0,5\end{pmatrix}.$$

Рассмотрим следующую задачу: выяснить, при каких $r>0$ множество

$$M=\Sigma\times Q_r(0),\quad \text{где}\quad Q_r(0)\doteq\{x\in\mathbb{R}^n:|x|\geqslant r\}$$

является статистически инвариантным и при каких r это множество положительно инвариантно относительно управляемой системы (12.7).

Поставим в соответствие системе (12.7) дифференциальное включение

$$\dot{x}\in F(h^t\sigma,x),\tag{12.8}$$

где $F(\sigma,x)$ — множество всех предельных значений функции

$$A(\sigma)x+B(\sigma)U\quad\text{при}\ (\sigma_i,x_i)\to(\sigma,x).$$

Рассмотрим функцию Ляпунова

$$V(\sigma,x)=-x_1^2-x_2^2+r^2,\quad x=(x_1,x_2),$$

относительно множества M и найдем верхнюю производную данной функции в силу включения (12.8).

Представим множество $\Sigma=[0,2)$ в виде объединения множеств $\Sigma^1=[0,1)$ и $\Sigma^2=[1,2)$, тогда, если $\sigma\in\Sigma^1$, то

$$V^o_{\max}(\sigma,x)=\begin{cases}-2x_1^2-2x_2^2+x_2 & \text{при}\ \ x_2\geqslant 0,\\ -2x_1^2-2x_2^2+\dfrac{1}{2}x_2 & \text{при}\ \ x_2<0,\end{cases}$$

Если $\sigma\in\Sigma^2=[1,2)$, то

$$V^o_{\max}(\sigma,x)=\begin{cases}-2x_1^2-2x_2^2+x_1-x_2 & \text{при}\ \ x_1\geqslant x_2,\\ -2x_1^2-2x_2^2+\dfrac{1}{2}(x_1-x_2) & \text{при}\ \ x_1<x_2.\end{cases}$$

Функцию $w(\sigma,z)$ выберем таким образом, чтобы для всех $(\sigma,x)\in\Sigma\times\mathbb{R}^2$ выполнялось неравенство $V^o_{\max}(\sigma,x)\leqslant w\big(\sigma,V(\sigma,x)\big)$, тогда

$$w(\sigma,z)=\begin{cases} z+\dfrac{1}{4}-r^2, & \text{если} \quad \sigma\in\Sigma^1,\\ z+\dfrac{1}{2}-r^2, & \text{если} \quad \sigma\in\Sigma^2.\end{cases}$$

Следовательно, для получения условий инвариантности множества M нужно исследовать поведение решений задачи Коши:

$$\dot z=a(h^t\sigma)z+b(h^t\sigma),\quad (t,\sigma,z)\in\mathbb{R}\times\widehat{\Sigma}\times\mathbb{R},\quad z(0,\sigma)=0,$$

параметризованной динамической системой $(\widehat{\Sigma},h^t)$, которая отличается от исходной динамической системы (Σ,h^t) тем, что множество $\widehat{\Psi}=\big\{\widehat{\psi}_1,\widehat{\psi}_2\big\}$ содержит следующие состояния:

$$\widehat{\psi}_1=\Big(1,\,\frac{1}{4}-r^2\Big),\ \ \widehat{\psi}_2=\Big(1,\,\frac{1}{2}-r^2\Big).$$

Отметим сначала, что при $r\geqslant\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ выполнены неравенства

$$b_1=\frac{1}{4}-r^2\leqslant 0,\quad b_2=\frac{1}{2}-r^2\leqslant 0,$$

поэтому из замечания 12.1 следует, что для всех $\sigma\in\Sigma$ и всех $t\geqslant 0$ решение $z(t,\sigma)$ задачи Коши (12.3) удовлетворяет неравенству $z(t,\sigma)\leqslant 0$. В силу следствия 11.2 при $r\geqslant\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ множество $M=\Sigma\times Q_r(0)$ является положительно инвариантным относительно управляемой системы (12.7).

Для исследования статистической инвариантности множества M необходимо найти условия, при которых имеют место неравенства

$$\varlimsup_{t\to\infty} z(t,\sigma)\leqslant 0,\quad \varliminf_{t\to\infty} z(t,\sigma)<0.$$

Для каждого фиксированного $\sigma\in\widehat{\Sigma}$ рассмотрим последовательность $\{z_k\}_{k=1}^{\infty}$, где $z_k=z(\vartheta_k,\sigma)$, $\vartheta_k=\vartheta_k(\sigma)$ — точки переключения движения $t\to h^t\sigma$. Тогда, если $\sigma\in\Sigma^1$, то $\vartheta_k=1-\sigma,2-\sigma,\ldots$, если $\sigma\in\Sigma^2$, то $\vartheta_k=2-\sigma,3-\sigma,\ldots$ Отметим, что функция $z(t,\sigma)$ монотонна на каждом интервале $(\vartheta_k,\vartheta_{k+1})$, поэтому для нахождения верхнего и нижнего предела решения $z(t,\sigma)$ необходимо установить зависимость между значениями функции $z(t,\sigma)$ в точках переключения. Найдем

$$z_1=\begin{cases} z(1-\sigma,\sigma)=\Big(\dfrac{1}{4}-r^2\Big)(e^{1-\sigma}-1), & \text{если} \quad \sigma\in\Sigma^1,\\ z(2-\sigma,\sigma)=\Big(\dfrac{1}{2}-r^2\Big)(e^{2-\sigma}-1), & \text{если} \quad \sigma\in\Sigma^2.\end{cases}$$

Если $\sigma\in\Sigma^1$, то

$$z_2=\Big(\frac{1}{2}-r^2\Big)(e-1)+e\Big(\frac{1}{4}-r^2\Big)(e^{1-\sigma}-1)=r^2\Big(1-e^{2-\sigma}\Big)+\frac{e}{4}-\frac{1}{2}+\frac{e^{2-\sigma}}{4}.$$

Если $\sigma\in\Sigma^2$, то

$$z_2=r^2\Big(1-e^{3-\sigma}\Big)-\frac{e}{4}-\frac{1}{4}+\frac{e^{3-\sigma}}{2}.$$

Далее, для $\sigma\in\Sigma^1$ получаем

$$z_{2k+1}=\Big(\frac{1}{4}-r^2\Big)(e-1)+ez_{2k},\quad z_{2k+2}=\Big(\frac{1}{2}-r^2\Big)(e-1)+ez_{2k+1}.$$

Таким образом, между значениями функции $z(t,\sigma)$ в точках $t=\vartheta_2,\vartheta_4,\ldots$ имеем следующую рекуррентную зависимость:

$$\begin{aligned} z_{2k+2} &= \Big(\frac{1}{2}-r^2\Big)(e-1)+\Big(\frac{1}{4}-r^2\Big)(e^2-e)+e^2 z_{2k} = \\ &= \Big(\frac{1}{2}+\frac{e}{4}-r^2(e+1)\Big)(e-1)+e^2 z_{2k}, \quad k=1,2,\ldots \end{aligned} \tag{12.9}$$

Аналогично получаем равенство

$$z_{2k+1} = \Big(\frac{1}{4}+\frac{e}{2}-r^2(e+1)\Big)(e-1)+e^2 z_{2k-1}, \quad k=1,2,\ldots \tag{12.10}$$

Из (12.9) и (12.10) после некоторых вычислений можно получить, что если $\sigma\in\Sigma^1$ и выполнено неравенство

$$r>\frac{1}{2}\sqrt{\frac{e^{\sigma}+e+1}{e+1}},$$

то $\lim\limits_{k\to\infty} z_{2k}=\lim\limits_{k\to\infty} z_{2k+1}=-\infty$. Поэтому $\overline{\lim\limits_{t\to\infty}}\, z(t,\sigma)=-\infty$ и в силу леммы 12.1 имеет место равенство $\varkappa(\sigma)=1$.

Если $\sigma\in\Sigma^2=[1,2)$, то

$$\begin{aligned} z_{2k+2} &= \Big(\frac{1}{4}+\frac{e}{2}-r^2(e+1)\Big)(e-1)+e^2 z_{2k}, \quad k=1,2,\ldots, \\ z_{2k+1} &= \Big(\frac{1}{2}+\frac{e}{4}-r^2(e+1)\Big)(e-1)+e^2 z_{2k-1}, \quad k=1,2,\ldots, \end{aligned}$$

поэтому равенство $\varkappa(\sigma)=1$ выполнено при

$$r>\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2e+2-e^{\sigma-1}}{e+1}}\,.$$

Таким образом, при этих значениях r в силу теоремы 11.1 множество $M=\Sigma\times Q_r(0)$ статистически инвариантно относительно управляемой системы (12.7).

ГЛАВА IV. СТАТИСТИЧЕСКИ СЛАБО ИНВАРИАНТНЫЕ МНОЖЕСТВА УПРАВЛЯЕМОЙ СИСТЕМЫ

В данной главе исследуются *статистически слабо инвариантные* множества относительно управляемой системы

$$\dot{x}(t) = \int_{U(t)} f(h^t\sigma, x(t), u)\eta_t(du), \tag{IV.1}$$

параметризованной топологической динамической системой (Σ, h^t).

Множество $M = \{(\sigma, x) \in \Sigma \times \mathbb{R}^n : x \in M(\sigma)\}$ будем называть *статистически слабо инвариантным* относительно системы (IV.1), если для всех $\sigma \in \Sigma$ для любой точки $x \in M(\sigma)$ найдется такое решение $\varphi(t, \sigma, x)$ данной системы, продолжаемое на полуось $\mathbb{R}_+$ и удовлетворяющее начальному условию $\varphi(0, \sigma, x) = x$, что верхняя относительная частота попадания данного решения в множество M равна единице. Получены достаточные условия слабой инвариантности и статистически слабой инвариантности заданного множества M, выраженные в терминах функций А. М. Ляпунова, нижней производной в силу включения, соответствующего системе (IV.1), и характеристики

$$\varkappa^*(\sigma) \doteq \varlimsup_{\vartheta \to \infty} \frac{\operatorname{mes}\{t \in [0, \vartheta] : z^*(t, \sigma) \leqslant 0\}}{\vartheta},$$

которая является *верхней относительной частотой пребывания верхнего решения* $z^*(t, \sigma)$ скалярной задачи Коши (11.2) в множестве $(-\infty, 0]$.

В частности, рассматривается линейная задача Коши

$$\dot{z} = a(h^t\sigma)z + b(h^t\sigma), \quad z(0, \sigma) = 0, \quad t \geqslant 0, \tag{IV.2}$$

для которой при каждом фиксированном $\sigma \in \Sigma$ функции $t \to a(h^t\sigma)$ и $t \to b(h^t\sigma)$ почти периодические в смысле Бора и удовлетворяет некоторым дополнительным условиям. Показано, что если для решения $z(t, \sigma)$ задачи (IV.2) выполнены неравенства

$$\varlimsup_{t \to \infty} z(t, \sigma) \leqslant 0, \quad \varliminf_{t \to \infty} z(t, \sigma) < 0,$$

то предел $\varkappa(\sigma) \doteq \lim\limits_{\vartheta \to \infty} \dfrac{\operatorname{mes}\{t \in [0, \vartheta] : z(t, \sigma) \leqslant 0\}}{\vartheta}$ существует и равен единице. Также получены условия равенства $\varkappa(\sigma) = 1$ для задачи Коши (IV.2) с периодическими функциями $t \to a(h^t\sigma)$ и $t \to b(h^t\sigma)$, имеющими общий период.

Рассмотрены конкретные примеры применения полученных утверждений для исследования статистически слабо инвариантных и слабо инвариантных множеств управляемых систем, в частности, инвариантных множеств линейной системы

$$\dot{x} = A(h^t\sigma)x + B(h^t\sigma)u, \quad (t, \sigma, x, u) \in \mathbb{R} \times \Sigma \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m,$$

параметризованной динамической системой (Σ, h^t).

В последнем параграфе главы приводятся определения неблуждающего множества достижимости $A(t, \omega)$ системы (IV.1) и минимального центра притяжения движения

$$t \to g^t\omega = \big(h^t\sigma, A(t, \omega)\big).$$

Найдены условия неблуждаемости множества достижимости управляемой системы и условия существования минимального центра притяжения, дополняющие результаты работы [105, гл. 5, § 6].

Многие из полученных результатов опубликованы в работах [133, 137].

§ 13. Условия статистически слабой инвариантности заданного множества относительно управляемой системы

Рассмотрим топологическую динамическую систему (Σ, h^t), функцию $f(\sigma, x, u)$ переменных $(\sigma, x, u) \in \Sigma \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ и функцию $U(\sigma, x)$ переменных $(\sigma, x) \in \Sigma \times \mathbb{R}^n$, принимающую значения в пространстве $\operatorname{clcv}(\mathbb{R}^m)$. Предполагаем, что выполнено условие 7.1.

У с л о в и е 7.1. 1) Для каждой точки (t, σ) функция $(x, u) \to f(h^t\sigma, x, u)$ непрерывна;

2) для каждой точки (σ, x, u) функция $t \to f(h^t\sigma, x, u)$ кусочно-непрерывна;

3) функция $(\sigma, x) \to U(\sigma, x)$ полунепрерывна сверху в метрике Хаусдорфа–Бебутова (см. определение 3.1, с. 33).

По функциям f и U построим управляемую систему

$$\dot{x}(t) = \int_{U(t)} f(h^t\sigma, x(t), u)\eta_t(du), \quad t \in [0, \tau) \tag{13.1}$$

и дифференциальное включение

$$\dot{x} \in F(h^t\sigma, x), \quad F(\sigma, x) = \operatorname{co} H(\sigma, x), \tag{13.2}$$

где $[0, \tau)$ — правый максимальный интервал существования решения φ системы (13.1), $H(\sigma, x)$ — множество всех предельных значений функции

$$f\big(\sigma, x, U(\sigma, x)\big) \quad \text{при} \quad (\sigma_i, x_i) \to (\sigma, x),$$

$\operatorname{co} H(\sigma, x)$ — замыкание выпуклой оболочки множества $H(\sigma, x)$.

Напомним также, что мы рассматриваем пространство $\Omega \doteq \Sigma \times \operatorname{clcv}(\mathbb{R}^n)$ и его подмножество $M = \{(\sigma, x) \in \Sigma \times \mathbb{R}^n : x \in M(\sigma)\}$ и предполагаем, что функция $\sigma \to M(\sigma)$ непрерывна в метрике Хаусдорфа–Бебутова. Далее, обозначим через

$$M^r(\sigma) = M(\sigma) + O_r(0), \quad N_+^r(\sigma) = M^r(\sigma) \setminus M(\sigma)$$

замкнутую окрестность множества $M(\sigma)$ в $\mathbb{R}^n$ и внешнюю r-окрестность границы множества $M(\sigma)$ соответственно. Рассматривается также множество $N_+^r = \{(\sigma, x) \in \Sigma \times \mathbb{R}^n : x \in N_+^r(\sigma)\}$.

Будем пользоваться определениями, введенными в работе [133].

О п р е д е л е н и е 13.1. Множество M будем называть *статистически слабо инвариантным* относительно управляемой системы (13.1), если для любой точки $(\sigma, x) \in M$ найдется хотя бы одно решение $\varphi(t, \sigma, x)$ включения (13.2), определенное при всех $t \geqslant 0$, удовлетворяющее начальному условию $\varphi(0, \sigma, x) = x$ и равенству

$$\operatorname{freq}^*(\varphi) \doteq \varlimsup_{\vartheta \to \infty} \frac{\operatorname{mes}\{t \in [0, \vartheta] : \varphi(t, \sigma, x) \in M(h^t\sigma)\}}{\vartheta} = 1.$$

Напомним, что характеристику $\operatorname{freq}^*(\varphi)$ мы называем *верхней относительной частотой попадания решения* $\varphi(t, \sigma, x)$ *в множество* M.

О п р е д е л е н и е 13.2. Множество M будем называть *слабо инвариантным* относительно системы (13.1), если для любой точки $(\sigma, x) \in M$ найдется хотя бы одно решение $\varphi(t, \sigma, x)$ включения (13.2) с начальным условием $\varphi(0, \sigma, x) = x$, определенное и удовлетворяющее включению

$$\varphi(t, \sigma, x) \in M(h^t\sigma) \quad \text{при всех} \quad t \geqslant 0.$$

У с л о в и е 13.1. Для всех $\sigma \in \Sigma$ *множество достижимости* $A(t, \sigma, X)$ *управляемой системы* (13.1) *существует при всех* $t \geqslant 0$. Это означает, что для каждой точки $x \in X$ *существует решение* $\varphi(t, \sigma, x)$ включения (13.2), удовлетворяющее начальному условию $\varphi(0, \sigma, x) = x$ и продолжаемое на полуось $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$.

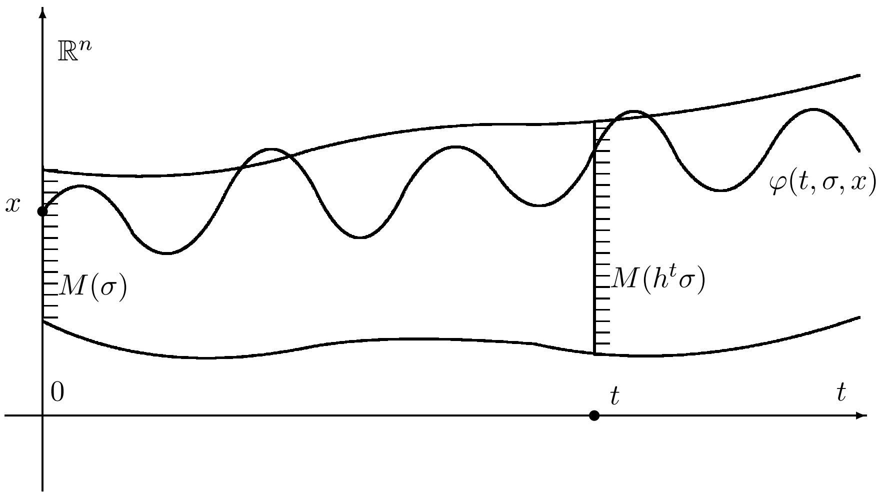

Рис. 12. Если $\mathrm{freq}^*(\varphi) = 1$ для любой точки $(\sigma, x) \in M$, то множество M статистически слабо инвариантно относительно системы (13.1)

Напомним, что через $z^*(t, \sigma)$ мы обозначаем верхнее решение скалярной задачи Коши

$$\dot{z} = w(h^t\sigma, z), \quad z(0, \sigma) = 0, \quad t \geqslant 0. \tag{13.3}$$

Условия существования верхнего решения получены в параграфе 8.

Следущая теорема доказана в работах [133, 137] для случая, когда при всех фиксированных $\sigma \in \Sigma$ функция $(t, x, u) \to f(h^t\sigma, x, u)$ непрерывна. При этом в [133] предполагается, что множество U компактно в $\mathbb{R}^m$, а в работе [137] рассматривается функция $U(\sigma, x)$ переменных $(\sigma, x) \in \Sigma \times \mathbb{R}^n$, принимающая значения в пространстве $\mathrm{clcv}(\mathbb{R}^m)$ и полунепрерывная сверху в метрике Хаусдорфа–Бебутова.

Т е о р е м а 13.1. *Пусть выполнено условие* 13.1, *для каждого* $\sigma \in \Sigma$ *существуют функция* $V(\sigma, x)$ *переменных* $(\sigma, x) \in \Sigma \times \mathbb{R}^n$ *и функция* $w(\sigma, z)$ *переменных* $(\sigma, z) \in \Sigma \times \mathbb{R}$ *такие, что:*

1) *верхнее решение* $z^*(t, \sigma)$ *задачи* (13.3) *определено при всех* $t \geqslant 0$ *и удовлетворяет равенству*

$$\varlimsup_{\vartheta \to \infty} \frac{\mathrm{mes}\{t \in [0, \vartheta] : z^*(t, \sigma) \leqslant 0\}}{\vartheta} = 1; \tag{13.4}$$

2) *функция* $V(\sigma, x)$ *является функцией Ляпунова относительно множества* M *и при всех* $(\sigma, x) \in \Sigma \times \mathbb{R}^n$ *выполнено неравенство*

$$V^o_{\min}(\sigma, x) \leqslant w\big(\sigma, V(\sigma, x)\big). \tag{13.5}$$

Тогда множество M *статистически слабо инвариантно относительно управляемой системы* (13.1).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для всех $(\sigma,x)\in\Sigma\times\mathbb{R}^n$ определим множество $\widehat{U}(\sigma,x)$ равенством

$$\widehat{U}(\sigma,x)\doteq\big\{\,u\in U(\sigma,x):\,V^o\big(\sigma,x;f(\sigma,x,u)\big)\leqslant w\big(\sigma,V(\sigma,x)\big)\big\}.$$

Обозначим через $\widehat{u}_0(\sigma,x)$ ближайшую к нулю пространства $\mathbb{R}^m$ точку множества $\widehat{U}(\sigma,x)$, через $O_r\big(\widehat{u}_0(\sigma,x)\big)$ — замкнутый шар радиуса r с центром в точке $\widehat{u}_0(\sigma,x)$, далее для каждого $(\sigma,x)\in\Sigma\times\mathbb{R}^n$ определим множество

$$\widehat{U}_r(\sigma,x)\doteq\widehat{U}(\sigma,x)\bigcap O_r\big(\widehat{u}_0(\sigma,x)\big)$$

и множество $\widehat{H}_r(\sigma,x)$, состоящее из всех предельных значений функции $f\big(\sigma,x,\widehat{U}_r(\sigma,x)\big)$ при $(\sigma_i,x_i)\to(\sigma,x)$. Из второго условия теоремы следует, что множество $\widehat{U}(\sigma,x)$ непусто, тогда множество $\widehat{H}_r(\sigma,x)$ при фиксированных $(\sigma,x)\in\Sigma\times S_\varrho$ также непусто, замкнуто и, кроме того, компактно. Поставим в соответствие множеству $\widehat{U}_r$ управляемую систему

$$\dot{x}=\int_{\widehat{U}_r(h^t\sigma,x)}f(h^t\sigma,x,u)\,\eta_t(du)\tag{13.6}$$

и дифференциальное включение

$$\dot{x}\in\widehat{F}_r(h^t\sigma,x),\quad \widehat{F}_r(\sigma,x)=\mathrm{co}\widehat{H}_r(\sigma,x).\tag{13.7}$$

Пусть $\varphi(t,\sigma,x)$ — решение включения (13.7), удовлетворяющее начальному условию $\varphi(0,\sigma,x)=x\in M(\sigma)$ и продолжаемое на полуось $\mathbb{R}_+$. Рассмотрим функцию

$$v(t,\sigma)=V\big(h^t\sigma,\varphi(t,\sigma,x)\big).$$

Так же, как при доказательстве теоремы 11.1, можно показать, что в точках дифференцируемости функции $v(t,\sigma)$ выполнено неравенство

$$\dot{v}(t,\sigma)\leqslant w\big(h^t\sigma,v(t,\sigma)\big),$$

а из условия $x\in M(\sigma)$ следует, что $v(0,\sigma)\leqslant 0$. В силу теоремы 8.1 из этого неравенства при всех $t\geqslant 0$ следует неравенство $v(t,\sigma)\leqslant z^*(t,\sigma)$, из которого, в силу условия (13.4), следует, что

$$\overline{\lim_{\vartheta\to\infty}}\frac{\mathrm{mes}\{t\in[0,\vartheta]:v(t,\sigma)\leqslant 0\}}{\vartheta}\geqslant\overline{\lim_{\vartheta\to\infty}}\frac{\mathrm{mes}\{t\in[0,\vartheta]:z^*(t,\sigma)\leqslant 0\}}{\vartheta}=1.$$

Таким образом,

$$\mathrm{freq}^*(\varphi)\doteq\overline{\lim_{\vartheta\to\infty}}\frac{\mathrm{mes}\{t\in[0,\vartheta]:\varphi(t,\sigma,x)\in M(h^t\sigma)\}}{\vartheta}=1,$$

то есть множество M статистически слабо инвариантно.

С л е д с т в и е 13.1. *Пусть выполнено условие* 13.1, *для каждого* $\sigma\in\Sigma$ *существуют функция* $V(\sigma,x)$ *переменных* $(\sigma,x)\in\Sigma\times\mathbb{R}^n$ *и функция* $w(\sigma,z)$ *переменных* $(\sigma,z)\in\Sigma\times\mathbb{R}$ *такие, что:*

1) *верхнее решение* $z^*(t,\sigma)$ *задачи* (13.3) *при всех* $t\geqslant 0$ *определено и удовлетворяет неравенству* $z^*(t,\sigma)\leqslant 0$;

2) *функция* $V(\sigma,x)$ *является функцией Ляпунова относительно множества* M *и при всех* $(\sigma,x)\in\Sigma\times\mathbb{R}^n$ *выполнено неравенство*

$$V^o_{\min}(\sigma,x)\leqslant w\big(\sigma,V(\sigma,x)\big).$$

Тогда множество M *является слабо инвариантным относительно управляемой системы* (13.1).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\varphi(t,\sigma,x)$ — решение включения (13.2), удовлетворяющее начальному условию $\varphi(0,\sigma,x)=x\in M(\sigma)$ и продолжаемое на полуось $\mathbb{R}_+$. Рассмотрим функцию $v(t,\sigma)=V\big(h^t\sigma,\varphi(t,\sigma,x)\big)$. Предположим, что для каждого $\sigma\in\Sigma$ верхнее решение $z^*(t,\sigma)$ задачи (13.3) при всех $t\geqslant 0$ определено и удовлетворяет неравенству $z^*(t,\sigma)\leqslant 0$. В этом случае из неравенства $v(t,\sigma)\leqslant z^*(t,\sigma)$ следует неравенство $v(t,\sigma)\leqslant 0$, выполненное при всех $t\geqslant 0$, которое означает, что для любой точки $(\sigma,x)\in M$ найдется решение $\varphi(t,\sigma,x)$ включения (13.2) такое, что $\varphi(0,\sigma,x)=x$ и $\varphi(t,\sigma,x)\in M$ при всех $t\geqslant 0$. Следовательно, множество M является слабо инвариантным.

П р и м е р 13.1. Этот пример является продолжением примера 12.2, в котором исследовались условия статистической инвариантности и положительной инвариантности множества

$$M=\Sigma\times Q_r(0),\quad \text{где}\quad Q_r(0)\doteq\{x\in\mathbb{R}^n:|x|\geqslant r\}$$

относительно управляемой системы

$$\dot{x}=A(h^t\sigma)x+B(h^t\sigma)u,\quad (t,\sigma,x,u)\in\mathbb{R}\times\Sigma\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m. \tag{13.8}$$

Здесь рассматривается следующая задача: выяснить, при каких $r>0$ множество M статистически слабо инвариантно и при каких значениях r это множество слабо инвариантно относительно данной системы.

Предполагаем, что система (13.8) параметризована динамической системой (Σ,h^t), где Σ — окружность радиуса $1/\pi$, которую будем отождествлять с полуинтервалом $[0,2)$,

$$h^t\sigma=t+\sigma\ (\mathrm{mod}\,2),$$

множества Θ и Ψ содержат два состояния:

$$\Theta=\{\theta_1,\theta_2\},\ \ \theta_1=\theta_2=1,\ \ \Psi=\{\psi_1,\psi_2\},\ \ \psi_i=(A_i,B_i),\ i=1,2,\quad\text{где}$$

$$A_1=\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix},\ B_1=\begin{pmatrix}0\\-0,5\end{pmatrix},\quad A_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\ B_2=\begin{pmatrix}-0,5\\0,5\end{pmatrix}.$$

Рассмотрим функцию Ляпунова

$$V(\sigma,x)=-x_1^2-x_2^2+r^2,\quad x=(x_1,x_2)$$

относительно множества M и найдем нижние производные данной функции в силу дифференциального включения (12.2), соответствующего системе (13.8). Отметим, что фазовое пространство $\Sigma=[0,2)$ представимо в виде объединения непересекающихся множеств

$$\Sigma=\Sigma^1\cup\Sigma^2,\quad\text{где}\quad \Sigma^1=[0,1),\ \ \Sigma^2=[1,2),$$

причем, если $\sigma\in\Sigma^1$, то

$$V^o_{\min}(\sigma,x)=\begin{cases}-2x_1^2-2x_2^2+\dfrac{1}{2}x_2 & \text{при}\ \ x_2\geqslant 0,\\ -2x_1^2-2x_2^2+x_2 & \text{при}\ \ x_2<0.\end{cases}$$

Далее, если $\sigma\in\Sigma^2$, то

$$V^o_{\min}(\sigma,x)=\begin{cases}-2x_1^2-2x_2^2+\dfrac{1}{2}(x_1-x_2) & \text{при}\ \ x_1\geqslant x_2,\\ -2x_1^2-2x_2^2+x_1-x_2 & \text{при}\ \ x_1<x_2.\end{cases}$$

Несложно проверить, что для функции $V(\sigma,x)$ и функции

$$w(\sigma,z)=\begin{cases}z+\dfrac{1}{16}-r^2, & \text{если}\ \ \sigma\in\Sigma^1,\\ z+\dfrac{1}{8}-r^2, & \text{если}\ \ \sigma\in\Sigma^2\end{cases}$$

для всех $(\sigma, x) \in \Sigma \times \mathbb{R}^2$ выполнено неравенство

$$V^o_{\min}(\sigma, x) \leqslant w\big(\sigma, V(\sigma, x)\big).$$

Следовательно, для получения условий слабой инвариантности множества M нужно исследовать поведение решений задачи Коши

$$\dot{z} = a(h^t\sigma)z + b(h^t\sigma), \quad z(0,\sigma) = 0, \quad t \geqslant 0, \tag{13.9}$$

параметризованной динамической системой $(\widehat{\Sigma}, h^t)$, для которой множества Θ и $\widehat{\Psi}$ содержат два состояния:

$$\Theta = \{\theta_1, \theta_2\}, \quad \theta_1 = \theta_2 = 1,$$

$$\widehat{\Psi} = \big\{\widehat{\psi}_1, \widehat{\psi}_2\big\}, \;\; \widehat{\psi}_1 = \Big(1, \, \frac{1}{16} - r^2\Big), \;\; \widehat{\psi}_2 = \Big(1, \, \frac{1}{8} - r^2\Big).$$

Отметим сначала, что при $r \geqslant \dfrac{\sqrt{2}}{4}$ выполнены неравенства

$$b_1 = \frac{1}{16} - r^2 \leqslant 0, \quad b_2 = \frac{1}{8} - r^2 \leqslant 0,$$

поэтому из замечания 12.1 следует, что для всех $\sigma \in \widehat{\Sigma}$ и всех $t \geqslant 0$ решение $z(t,\sigma)$ задачи Коши (13.9) удовлетворяет неравенству $z(t,\sigma) \leqslant 0$. В силу следствия 13.1 при $r \geqslant \dfrac{\sqrt{2}}{4}$ множество $M = \Sigma \times Q_r(0)$ является слабо инвариантным относительно управляемой системы (13.8).

Для исследования статистически слабой инвариантности множества M необходимо найти условия, при которых

$$\varlimsup_{t\to\infty} z(t,\sigma) \leqslant 0, \quad \varliminf_{t\to\infty} z(t,\sigma) < 0.$$

Также, как и в примере 12.2, для каждого фиксированного $\sigma \in \widehat{\Sigma}$ рассмотрим последовательность $\{z_k\}_{k=1}^{\infty}$, где $z_k = z(\vartheta_k, \sigma)$, $\vartheta_k = \vartheta_k(\sigma)$ — точки переключения движения $t \to h^t\sigma$: если $\sigma \in \Sigma^1$, то $\vartheta_k = 1-\sigma, 2-\sigma, \ldots$, если $\sigma \in \Sigma^2$, то $\vartheta_k = 2-\sigma, 3-\sigma, \ldots$ Найдем

$$z_1 = \begin{cases} z(1-\sigma,\sigma) = \Big(\dfrac{1}{16} - r^2\Big)(e^{1-\sigma} - 1), & \text{если} \quad \sigma \in \Sigma^1, \\[2ex] z(2-\sigma,\sigma) = \Big(\dfrac{1}{8} - r^2\Big)(e^{2-\sigma} - 1), & \text{если} \quad \sigma \in \Sigma^2, \end{cases}$$

$$z_2 = \begin{cases} r^2\Big(1 - e^{2-\sigma}\Big) + \dfrac{e}{16} - \dfrac{1}{8} + \dfrac{e^{2-\sigma}}{16}, & \text{если} \quad \sigma \in \Sigma^1, \\[2ex] r^2\Big(1 - e^{3-\sigma}\Big) - \dfrac{e}{16} - \dfrac{1}{16} + \dfrac{e^{3-\sigma}}{8}, & \text{если} \quad \sigma \in \Sigma^2. \end{cases}$$

Аналогично примеру 12.2 получаем следующую рекуррентную зависимость между значениями функции $z(t,\sigma)$:

$$z_{2k+2} = \Big(\frac{1}{8} + \frac{e}{16} - r^2(e+1)\Big)(e-1) + e^2 z_{2k}, \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{13.10}$$

$$z_{2k+1} = \Big(\frac{1}{16} + \frac{e}{8} - r^2(e+1)\Big)(e-1) + e^2 z_{2k-1}, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{13.11}$$

Из (13.10) и (13.11) следует, что если $\sigma \in \Sigma^1$ и выполнено неравенство

$$r > \frac{1}{4}\sqrt{\frac{e^{\sigma} + e + 1}{e + 1}},$$

то $\lim\limits_{k\to\infty} z_{2k} = \lim\limits_{k\to\infty} z_{2k+1} = -\infty$. Поэтому $\varlimsup\limits_{t\to\infty} z(t,\sigma) = -\infty$ и в силу леммы 12.1 имеет место равенство $\varkappa(\sigma) = 1$.

Если $\sigma \in \Sigma^2$, то равенство $\varkappa(\sigma) = 1$ выполнено при $r > \dfrac{1}{4}\sqrt{\dfrac{2e+2-e^{\sigma-1}}{e+1}}$.

Обозначим $r_1 = r_1(\sigma)$, где

$$r_1 = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{e^{\sigma}+e+1}{e+1}}, \quad \text{если} \quad \sigma \in \Sigma^1,$$

$$r_1 = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{2e+2-e^{\sigma-1}}{e+1}}, \quad \text{если} \quad \sigma \in \Sigma^2$$

и пусть $r_2 \doteq 2r_1$.

Используя результаты примера 12.2, получаем, что при всех

$$r \in \left(r_1, \frac{\sqrt{2}}{4}\right)$$

множество $M = \Sigma \times Q_r(0)$ статистически слабо инвариантно относительно системы (13.8), а при $r \in \left[\dfrac{\sqrt{2}}{4}, r_2\right]$ это множество слабо инвариантно относительно данной системы. Далее, при $r \in \left(r_2, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ множество M статистически инвариантно и при $r \geqslant \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ данное множество положительно инвариантно относительно системы (13.8).

З а м е ч а н и е 13.1. Отметим, что любое слабо инвариантное множество является статистически слабо инвариантным, статистически инвариантное множество является статистически слабо инвариантным, и если множество положительно инвариантно, то оно слабо инвариантно и статистически инвариантно. Это следует из определения соответствующих множеств и хорошо видно для данного примера.

§ 14. Условия существования предела $\varkappa(\sigma)$ для периодического движения

Пусть задана топологическая динамическая система (Σ, h^t) и функции $a(\sigma)$, $b(\sigma)$, непрерывные на множестве Σ. Для каждого $\sigma \in \Sigma$ обозначим через $z(t,\sigma)$ решение задачи Коши

$$\dot{z} = a(h^t\sigma)z + b(h^t\sigma), \quad z(0,\sigma) = 0, \quad t \geqslant 0, \tag{14.1}$$

тогда данное решение имеет вид

$$z(t,\sigma) = \exp\Big(\int_0^t a(h^\tau\sigma)d\tau\Big)\int_0^t b(h^s\sigma)\exp\Big(-\int_0^s a(h^\tau\sigma)d\tau\Big)ds. \tag{14.2}$$

Обозначим $I_-(\vartheta_0,\vartheta,\sigma) \doteq \{t \in [\vartheta_0,\vartheta] : z(t,\sigma) \leqslant 0\}$, где $0 \leqslant \vartheta_0 < \vartheta < +\infty$. Введем в рассмотрение характеристику

$$\varkappa(\sigma) \doteq \lim_{\vartheta\to\infty}\frac{\operatorname{mes} I_-(0,\vartheta,\sigma)}{\vartheta} = \lim_{\vartheta\to\infty}\frac{\operatorname{mes}\{t \in [0,\vartheta] : z(t,\sigma) \leqslant 0\}}{\vartheta},$$

которая является относительной частотой попадания траектории решения $z(t,\sigma)$ в множество $(-\infty, 0]$.

Для эффективного применения теорем 11.1 и 13.1 необходимо найти условия, при которых предел $\varkappa(\sigma)$ существует и равен единице. В этом параграфе данные условия получены для задачи Коши (14.1) в предположении, что σ является периодической точкой потока $h^t : \Sigma \to \Sigma$, допускающей период T и функции $a(\sigma)$, $b(\sigma)$ непрерывны на множестве Σ.

Напомним, что σ называется *периодической точкой* потока $h^t : \Sigma \to \Sigma$, допускающей период T, если для любого $t \in \mathbb{R}_+$ выполнено условие $h^{t+T}\sigma = h^t\sigma$. Наименьшее положительное число T, удовлетворяющее данному условию, называется *периодом движения* $t \to h^t\sigma$. Если у периодического движения такого наименьшего периода не существует, то данное движение сводится к покою, когда для всех $t \in \mathbb{R}_+$ выполнено равенство $h^t\sigma = \sigma$.

Введем следующие обозначения:

$$z_0(t,\sigma) = \int_0^t b(h^s\sigma)\exp\Big(-\int_0^s a(h^\tau\sigma)d\tau\Big)ds, \quad \beta(t,\sigma) = \exp\Big(\int_0^t a(h^\tau\sigma)d\tau\Big),$$

тогда $z(t,\sigma) = \beta(t,\sigma)z_0(t,\sigma)$ для всех $t \geqslant 0$.

Л е м м а 14.1 (см. [137]). *Имеют место следующие утверждения.*

1. *Пусть σ является периодической точкой потока $h^t : \Sigma \to \Sigma$, допускающей период T. Если выполнены неравенства*

$$z_0(T,\sigma) < 0, \quad \beta = \beta(T,\sigma) \geqslant 1, \tag{14.3}$$

то предел $\varkappa(\sigma)$ существует и равен единице.

2. *Если найдется периодическая точка σ_0 потока h^t такая, что $\beta(T,\sigma_0) = 1$, $z_0(T,\sigma_0) \neq 0$, то $\varkappa(\sigma) = \varkappa$ для всех $\sigma \in \operatorname{orb}_+(\sigma_0)$. Далее, если $\beta(T,\sigma_0) = 1$, $z_0(T,\sigma_0) < 0$, то $\varkappa(\sigma) = 1$ для всех $\sigma \in \operatorname{orb}_+(\sigma_0)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для доказательства первого утверждение леммы найдем зависимость решения $z(t,\sigma)$ от $z_0(T,\sigma)$ и $\beta = \beta(T,\sigma)$ для различных значений переменного t.

Пусть $t \in [T, 2T)$, тогда, используя условие периодичности функций $t \to a(h^t\sigma)$ и $t \to b(h^t\sigma)$, получаем:

$$\begin{aligned}
z(t,\sigma) &= \beta\exp\Big(\int_T^t a(h^\tau\sigma)d\tau\Big)\Big(z_0(T,\sigma) + \int_T^t b(h^s\sigma)\exp\Big(-\int_0^s a(h^\tau\sigma)d\tau\Big)ds\Big) = \\
&= \beta\exp\Big(\int_0^{t-T} a(h^\tau\sigma)d\tau\Big)\Big(z_0(T,\sigma) + \int_0^{t-T} b(h^s\sigma)\exp\Big(-\int_0^{s+T} a(h^\tau\sigma)d\tau\Big)ds\Big) = \\
&= \beta(T,\sigma)\beta(t-T,\sigma)\Big(z_0(T,\sigma) + \int_0^{t-T} b(h^s\sigma)\exp\Big(-\int_0^T a(h^\tau\sigma)d\tau\Big)\exp\Big(-\int_T^{s+T} a(h^\tau\sigma)d\tau\Big)ds\Big) = \\
&= \beta(T,\sigma)\beta(t-T,\sigma)z_0(T,\sigma) + \beta(t-T,\sigma)\int_0^{t-T} b(h^s\sigma)\exp\Big(-\int_0^s a(h^\tau\sigma)d\tau\Big)ds = \\
&= \beta(T,\sigma)\beta(t-T,\sigma)z_0(T,\sigma) + \beta(t-T,\sigma)z_0(t-T,\sigma).
\end{aligned}$$

Пусть теперь $t \in [kT, (k+1)T)$, $k \in \mathbb{N}$. Проводя аналогичные вычисления, получаем следующую формулу:

$$z(t,\sigma) = z_0(T,\sigma)\beta(t-kT,\sigma)\big(\beta + \beta^2 + \ldots + \beta^k\big) + \beta(t-kT,\sigma)z_0(t-kT,\sigma). \tag{14.4}$$

Отметим, что функции $\beta(t-kT,\sigma)$, $z_0(t-kT,\sigma)$ ограничены при $t-kT \in [0,T)$ и имеет место неравенство $\beta(t-kT,\sigma) > 0$. Поэтому, если выполнены неравенства (14.3), то предел $\lim\limits_{t\to\infty} z(t,\sigma) = -\infty$. Следовательно, найдется такой момент времени $t_0 > 0$, что для всех $t > t_0$ выполнено неравенство $z(t,\sigma) < 0$, в этом случае $\varkappa(\sigma) = 1$.

Докажем второе утверждение леммы. Пусть $\sigma_0 \in \Sigma$ является периодической точкой потока $h^t : \Sigma \to \Sigma$, допускающей период T. Если $\sigma \in \operatorname{orb}_+(\sigma_0)$, то найдется такой момент времени $t_1 \in [0,T)$, что $\sigma = h^{t_1}\sigma_0$. Далее, из условия $\beta(T,\sigma_0) = 1$ следует, что $\displaystyle\int_0^T a(h^\tau\sigma_0)d\tau = 0$, поэтому

$$
\begin{aligned}
z_0(T,\sigma) = \int_0^T b(h^{t_1+s}\sigma_0)\exp\Big(-\int_0^s a(h^{t_1+\tau}\sigma_0)d\tau\Big)ds = \\
= \int_0^T b(h^{t_1+s}\sigma_0)\exp\Big(-\int_{t_1}^{s+t_1} a(h^{\tau}\sigma_0)d\tau\Big)ds = \\
= \int_{t_1}^T b(h^{s}\sigma_0)\exp\Big(-\int_{t_1}^{s} a(h^{\tau}\sigma_0)d\tau\Big)ds + \int_{T}^{t_1+T} b(h^{s}\sigma_0)\exp\Big(-\int_{t_1}^{s} a(h^{\tau}\sigma_0)d\tau\Big)ds = \\
= \int_{t_1}^T b(h^{s}\sigma_0)\exp\Big(-\int_{t_1}^{s} a(h^{\tau}\sigma_0)d\tau\Big)ds + \\
+ \exp\Big(-\int_0^T a(h^{\tau}\sigma_0)d\tau\Big)\int_0^{t_1} b(h^{s}\sigma_0)\exp\Big(-\int_{t_1}^{s} a(h^{\tau}\sigma_0)d\tau\Big)ds = \\
= \exp\Big(\int_0^{t_1} a(h^{\tau}\sigma_0)d\tau\Big)\int_0^T b(h^{s}\sigma_0)\exp\Big(-\int_0^{s} a(h^{\tau}\sigma_0)d\tau\Big)ds = \exp\Big(\int_0^{t_1} a(h^{\tau}\sigma_0)d\tau\Big)z_0(T,\sigma_0).
\end{aligned}
$$

Следовательно, если для некоторого $\sigma_0 \in \Sigma$ выполнено неравенство $z_0(T,\sigma_0) < 0$, то $z_0(T,\sigma) < 0$ для всех $\sigma \in \operatorname{orb}_+(\sigma_0)$. Кроме того, из периодичности функции $t \to a(h^t\sigma)$ следует, что

$$
\begin{aligned}
\beta(T,\sigma) = \exp\Big(\int_0^T a(h^{\tau}\sigma)d\tau\Big) = \exp\Big(\int_0^T a(h^{\tau+t_1}\sigma_0)d\tau\Big) = \\
= \exp\Big(\int_{t_1}^{T+t_1} a(h^{s}\sigma_0)ds\Big) = \exp\Big(\int_0^{T} a(h^{s}\sigma_0)ds\Big) = \beta(T,\sigma_0) = 1.
\end{aligned}
$$

Таким образом, на основании формулы (14.4) получаем, что $\lim\limits_{t\to\infty} z(t,\sigma) = -\infty$, поэтому $\varkappa(\sigma) = 1$ для всех $\sigma \in \operatorname{orb}_+(\sigma_0)$. Аналогично, если $z_0(T,\sigma_0) > 0$ для некоторого $\sigma_0 \in \Sigma$, то $\lim\limits_{t\to\infty} z(t,\sigma) = +\infty$, следовательно, $\varkappa(\sigma) = 0$ для всех $\sigma \in \operatorname{orb}_+(\sigma_0)$.

§ 15. Условия существования предела $\varkappa(\sigma)$ для почти периодического движения

Пусть задана топологическая динамическая система (Σ, h^t) в полном метрическом пространстве Σ с метрикой ρ_{Σ}.

О п р е д е л е н и е 15.1 (см., например, [45, с. 367–368], [49]). Числовое множество называется *относительно плотным* на действительной оси $\mathbb{R}$, если существует число $\ell > 0$ такое, что каждый отрезок $[a, a+\ell]$ длины ℓ содержит хотя бы один элемент данного множества.

Движение $t \to h^t\sigma$ называется *почти периодическим в смысле Бора,* если для любого $\varepsilon > 0$ множество

$$\theta(\varepsilon) \doteq \big\{\tau \in \mathbb{R} : \sup_{t\in\mathbb{R}} \rho_{\Sigma}(h^{t+\tau}\sigma, h^t\sigma) \leqslant \varepsilon\big\}$$

ε-почти периодов относительно плотно на $\mathbb{R}$.

Функция $t \to \varphi(h^t\sigma)$ называется *почти периодической в смысле Бора,* если она непрерывна и для всякого $\varepsilon > 0$ множество

$$\Theta(\varepsilon) \doteq \big\{\tau \in \mathbb{R} : \sup_{t\in\mathbb{R}} |\varphi(h^{t+\tau}\sigma) - \varphi(h^t\sigma)| \leqslant \varepsilon\big\}$$

относительно плотно на $\mathbb{R}$.

Л е м м а 15.1 (см. [137]). *Предположим, что для каждого $\sigma \in \Sigma$ функция*

$$t \to A(t,\sigma) \doteq \int_0^t a(h^\tau \sigma)d\tau$$

ограничена на $\mathbb{R}_+$, функции $t \to a(h^t\sigma)$, $t \to b(h^t\sigma)$ почти периодические в смысле Бора. Если

$$\lim_{t\to\infty} \frac{z_0(t,\sigma)}{t} \doteq \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t b(h^s\sigma)\exp\Big(-\int_0^s a(h^\tau\sigma)d\tau\Big)ds < 0, \tag{15.1}$$

то предел $\varkappa(\sigma)$ существует и равен единице.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку функция $t \to A(t,\sigma)$ ограничена, то для каждого $\sigma \in \Sigma$ интеграл $A(t,\sigma)$ от почти периодической функции $a(h^t\sigma)$ является функцией почти периодической. Далее, функции $\exp\big(-A(s,\sigma)\big)$ и $b(h^s\sigma)\exp\big(-A(s,\sigma)\big)$ — почти периодические, поэтому существует конечное среднее значение $\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{z_0(t,\sigma)}{t}$ (см. [45, с. 369–382], [91, с. 79–80]). Из неравенства (15.1) следует, что найдется такой момент времени $t_0 > 0$, что $\dfrac{z_0(t,\sigma)}{t} < 0$ при всех $t > t_0$. Отсюда получаем, что при всех $t > t_0$ выполнено неравенство

$$z(t,\sigma) = \exp\Big(\int_0^t a(h^\tau\sigma)d\tau\Big)z_0(t,\sigma) < 0,$$

из которого следует, что $\varkappa(\sigma) = 1$. □

З а м е ч а н и е 15.1. Отметим, что характеристика $\varkappa(\sigma)$ является относительной частотой попадания решения $z(t,\sigma)$ задачи Коши (14.1) в множество $(-\infty, 0]$ и ее можно рассматривать как меру данного множества. Для изучения свойств этой характеристики для любого борелевского множества $B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$ определим следующую функцию множеств:

$$\mu(B) \doteq \lim_{\vartheta\to\infty} \frac{\operatorname{mes}\{t \in [0,\vartheta] : z(t,\sigma) \in B\}}{\vartheta}.$$

Если функция $z(t,\sigma)$ — периодическая с периодом T, то

$$\mu(B) = \frac{\operatorname{mes}\{t \in [0,T] : z(t,\sigma) \in B\}}{T};$$

поэтому из свойств меры Лебега следует, что функция множеств μ является счетно аддитивной вероятностной мерой. Однако существуют функции $z(t,\sigma)$, для которых мера $\mu(B)$ только конечно аддитивная. Например, рассмотрим функцию $z(t,\sigma) = e^{-t}$ и множества

$$B_i = \Big[\frac{1}{i+1}, \frac{1}{i}\Big), \quad i = 1, 2, \ldots,$$

для каждого из которых $\mu(B_i) = 0$, а

$$\mu\Big(\sum_{i=1}^{\infty} B_i\Big) = \mu\big((0,1)\big) = \lim_{\vartheta\to\infty}\frac{\operatorname{mes}\{t \in [0,\vartheta] : e^{-t} \in (0,1)\}}{\vartheta} = 1,$$

то есть свойство счетной аддитивности не выполнено. В связи с этим примером возникает естественный вопрос: является ли μ счетно аддитивной мерой, если функция $z(t,\sigma)$ почти периодическая в смысле Бора?

Л е м м а 15.2. *Если функция $z(t,\sigma)$ почти периодическая в смысле Бора, то функция множеств*

$$\mu(B)=\lim_{\vartheta\to\infty}\frac{\operatorname{mes}\{t\in[0,\vartheta]: z(t,\sigma)\in B\}}{\vartheta}$$

является счетно аддитивной вероятностной мерой на измеримом пространстве $(\mathbb{R},\mathfrak{B}(\mathbb{R}))$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Воспользуемся теоремой Никодима (см. [43, с. 177], [40]): *Пусть $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность счетно аддитивных скалярных функций, определенных на сигма-алгебре $\mathfrak{B}$. Если $\mu(B)=\lim\limits_{n\to\infty}\mu_n(B)$ существует для каждого $B\in\mathfrak{B}$, то μ счетно аддитивна на сигма-алгебре $\mathfrak{B}$.* Для каждого натурального n рассмотрим счетно аддитивные функции множеств

$$\mu_n(B)\doteq\frac{\operatorname{mes}\{t\in[0,n]: z(t,\sigma)\in B\}}{n}.$$

Если функция $z(t,\sigma)$ почти периодическая в смысле Бора, то предел $\mu(B)=\lim\limits_{n\to\infty}\mu_n(B)$ существует для каждого $B\in\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ (см. [45, с. 379]), откуда в силу теоремы Никодима получаем, что $\mu(B)$ счетно аддитивна на $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$. Очевидно, что $\mu(\mathbb{R})=1$, поэтому $\mu(B)$ является вероятностной мерой. □

Будем говорить, что *движение $t\to h^t\sigma$ удовлетворяет условию Липшица,* если найдется постоянная $k_1>0$ такая, что неравенство

$$\rho_\Sigma(h^{t+\tau}\sigma,h^t\sigma)\leqslant k_1|\tau|$$

выполнено для любых $t\in\mathbb{R}$. Пусть также существует постоянная $k_2>0$ такая, что для всех $\sigma_1,\sigma_2\in\Sigma$ выполнено неравенство

$$|\varphi(\sigma_1)-\varphi(\sigma_2)|\leqslant k_2\rho_\Sigma(\sigma_1,\sigma_2),$$

тогда *функция $t\to\varphi(h^t\sigma)$ удовлетворяет условию Липшица* с постоянной $k_\sigma=k_1k_2$, то есть для всех $t\in\mathbb{R}$ имеет место неравенство

$$\left|\varphi(h^{t+\tau}\sigma)-\varphi(h^t\sigma)\right|\leqslant k_\sigma|\tau|.$$

Напомним, что точку $\tau\in(0,\infty)$ мы называем *точкой выхода траектории решения $z(t,\sigma)$ из множества* $(-\infty,0]$, если $z(\tau,\sigma)=0$ и для всякого $\delta>0$ найдутся такие моменты времени $\tau_1\in(\tau-\delta,\tau)$ и $\tau_2\in(\tau,\tau+\delta)$, что

$$z(\tau_1,\sigma)\leqslant 0,\quad z(\tau_2,\sigma)>0.$$

Далее, точка $s\in(0,\infty)$ называется *точкой входа траектории решения $z(t,\sigma)$ в множество* $(-\infty,0]$, если эта точка не является точкой выхода из множества $(-\infty,0]$, $z(s,\sigma)=0$ и для любого $\delta>0$ найдутся такие моменты времени $s_1\in(s-\delta,s)$ и $s_2\in(s,s+\delta)$, что $z(s_1,\sigma)>0$, $z(s_2,\sigma)\leqslant 0$.

Для каждого $\sigma\in\Sigma$ рассмотрим множество

$$B(\sigma)\doteq\{t\in[0,\infty):\, b(h^t\sigma)=0\},$$

и обозначим через $\nu\big(B(\sigma)\big)$ относительную частоту попадания движения $t\to h^t\sigma$ в данное множество, тогда

$$\nu\big(B(\sigma)\big)\doteq\lim_{\vartheta\to\infty}\frac{\operatorname{mes}\{t\in[0,\vartheta]: b(h^t\sigma)=0\}}{\vartheta}=\lim_{\vartheta\to\infty}\frac{1}{\vartheta}\int_0^{\vartheta}I_{B(\sigma)}(t)dt,$$

где $I_B(t)$ — характеристическая функция множества B.

Т е о р е м а 15.1 (см. [137]). *Предположим, что для каждого* $\sigma \in \Sigma$ *имеет место равенство* $\nu\big(B(\sigma)\big) = 0$, *функция* $t \to a(h^t\sigma)$ *ограничена на* $\mathbb{R}_+$, *функция* $t \to b(h^t\sigma)$ *почти периодическая в смысле Бора и удовлетворяет условию Липшица. Если для решения* $z(t,\sigma)$ *задачи* (14.1) *выполнены неравенства*

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\, z(t,\sigma) \leqslant 0, \quad \underline{\lim_{t\to\infty}}\, z(t,\sigma) < 0,$$

то предел $\varkappa(\sigma)$ *существует и равен единице.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Сначала рассмотрим случай, когда $b(h^t\sigma) \leqslant 0$ для всех $t \geqslant 0$. Из равенства (14.2) получаем, что $z(t,\sigma) \leqslant 0$ при всех $t \geqslant 0$, следовательно, $\overline{\lim\limits_{t\to\infty}}\, z(t,\sigma) \leqslant 0$, $\underline{\lim\limits_{t\to\infty}}\, z(t,\sigma) \leqslant 0$ и $\varkappa(\sigma) = 1$. Если $b(h^t\sigma) \geqslant 0$ для всех $t \geqslant 0$, то имеют место неравенства

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\, z(t,\sigma) \geqslant 0, \quad \underline{\lim_{t\to\infty}}\, z(t,\sigma) \geqslant 0,$$

которые не удовлетворяют условию теоремы.

Далее будем предполагать, что выполнено условие $\inf\limits_{t\in\mathbb{R}_+} b(h^t\sigma) < 0$, $\sup\limits_{t\in\mathbb{R}_+} b(h^t\sigma) > 0$. В этом случае почти периодическая функция $t \to b(h^t\sigma)$ имеет относительно плотное множество нулей (см. [45, с. 442]); следовательно, существует число $L > 0$ такое, что для любых соседних нулей t_1 и t_2 данной функции выполнено неравенство $|t_2 - t_1| \leqslant L$.

Предположим сначала, что существует конечное число точек выхода траектории решения $z(t,\sigma)$ из множества $(-\infty, 0]$, пусть это будут точки $\tau_1, \ldots, \tau_k$. Пусть нижний предел $\underline{\lim\limits_{t\to\infty}}\, z(t,\sigma) = \alpha < 0$, тогда найдется момент времени $\vartheta > \tau_k$ такой, что $z(\vartheta,\sigma) < \dfrac{\alpha}{2} < 0$, следовательно, для всех $t > \vartheta$ выполнено неравенство $z(t,\sigma) \leqslant 0$, в этом случае $\varkappa(\sigma) = 1$. Отметим, что если верхний предел $\overline{\lim\limits_{t\to\infty}}\, z(t,\sigma)$ отрицательный, то найдется такой момент времени $\tau > 0$, что для всех $t > \tau$ выполнено неравенство $z(t,\sigma) < 0$, следовательно, $\varkappa(\sigma) = 1$.

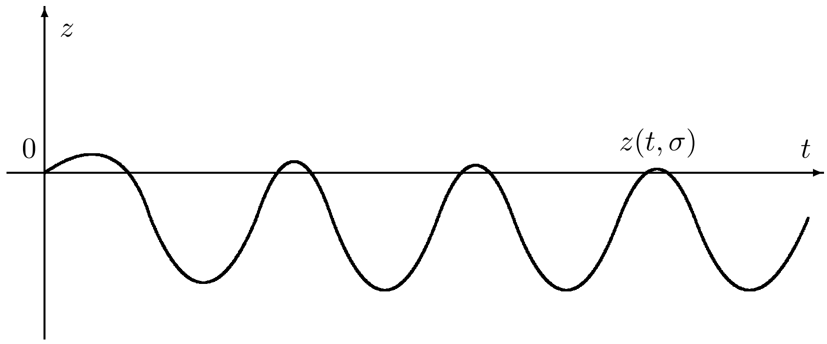

Рис. 13. Для функции $z(t,\sigma)$, удовлетворяющей условию теоремы, относительная частота попадания в множество $(-\infty, 0]$ равна единице

Пусть теперь $\overline{\lim\limits_{t\to\infty}}\, z(t,\sigma) = 0$, $\underline{\lim\limits_{t\to\infty}}\, z(t,\sigma) < 0$ и число точек выхода траектории решения $z(t,\sigma)$ из множества $(-\infty, 0]$ бесконечно. Каждой точке выхода τ_i поставим в соответствие точку s_i входа траектории решения $z(t,\sigma)$ в $(-\infty, 0]$ такую, что $\tau_i < s_i < \tau_{i+1}$. Таким образом,

$$z(t,\sigma) \geqslant 0 \quad \text{при} \quad t \in [\tau_i, s_i], \quad z(\tau_i,\sigma) = z(s_i,\sigma) = 0$$

и $z(t,\sigma)$ может обращаться в нуль в некоторых точках интервала (τ_i, s_i), которые являются точками касания графика функции $z(t,\sigma)$ и оси Ot.

Обозначим через b_i наибольшее значение функции $|b(h^t\sigma)|$ на отрезке $[\tau_i, s_i]$, пусть $b_i = |b(h^{\theta_i}\sigma)|$ для некоторого $\theta_i \in [\tau_i, s_i]$. Докажем, что если верхний предел решения $z(t,\sigma)$ задачи (14.1)

$$\varlimsup_{t\to\infty} z(t,\sigma) = 0, \quad \text{то} \quad \lim_{i\to\infty} b_i = 0.$$

Для этого сначала нужно показать, что отрезок $[\tau_i, s_i]$ содержит хотя бы одну точку, в которой функция $b(h^t\sigma)$ обращается в нуль. Действительно, из непрерывности функции $a(h^t\sigma)z+b(h^t\sigma)$ по переменным t и z следует, что решение $z(t,\sigma)$ задачи (14.1) имеет непрерывные производные при всех $t \in \mathbb{R}_+$. Отметим, что

$$\dot z(\tau_i,\sigma) = b(h^{\tau_i}\sigma) \geqslant 0, \quad \dot z(s_i,\sigma) = b(h^{s_i}\sigma) \leqslant 0,$$

следовательно, отрезок $[\tau_i, s_i]$ содержит хотя бы одну точку, в которой выполнено равенство $b(h^t\sigma) = 0$. Далее, из непрерывности функции $|b(h^t\sigma)|$ следует, что на отрезке $[\tau_i, s_i]$ найдется хотя бы одна точка, в которой значение данной функции равно $b_i/2$. Выберем точку $t_i \in [\tau_i, s_i]$ таким образом, чтобы $|b(h^{t_i}\sigma)| = b_i/2$ и для всех точек отрезка с концами t_i и θ_i выполнялось неравенство $|b(h^t\sigma)| \geqslant b_i/2$ (см. рис. 13). Пусть функция $t \to b(h^t\sigma)$ удовлетворяет условию Липшица с некоторой постоянной $k_\sigma > 0$, тогда

$$\frac{b_i}{2} = |\, b(h^{\theta_i}\sigma) - b(h^{t_i}\sigma)| \leqslant k_\sigma|\theta_i - t_i|,$$

следовательно, $|\theta_i - t_i| \geqslant b_i/2k_\sigma$.

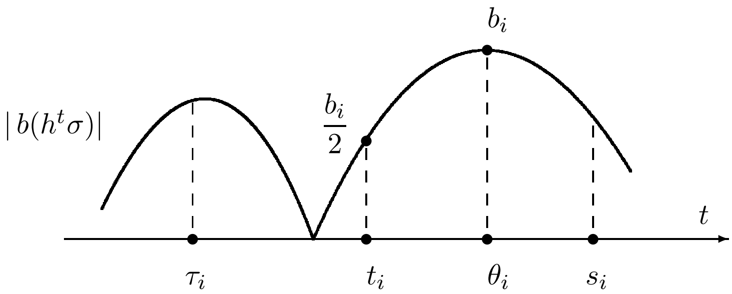

Рис. 14. Для всех $t \in [t_i, \theta_i]$ выполнено неравенство $|b(h^t\sigma)| \geqslant \dfrac{b_i}{2}$, где $b_i = \max\limits_{t\in[\tau_i,s_i]} |b(h^t\sigma)|$

Предположим, что $t_i < \theta_i$ для некоторого $i \in \mathbb{N}$ и обозначим через A постоянную, ограничивающую функцию $|a(h^t\sigma)|$. Из непрерывности функции $b(h^t\sigma)$ следует, что эта функция на отрезке $[t_i, \theta_i]$ сохраняет постоянный знак, тогда имеют место следующие соотношения:

$$\begin{aligned}
&|z(\theta_i,\sigma)| + |z(t_i,\sigma)|\exp(AL) \geqslant |z(\theta_i,\sigma)| + |z(t_i,\sigma)|\exp\bigl(A(\theta_i - t_i)\bigr) \geqslant \\
&\geqslant |z(\theta_i,\sigma)| + |z(t_i,\sigma)|\exp\left(\int_{t_i}^{\theta_i} a(h^\tau\sigma)d\tau\right) \geqslant \left| z(\theta_i,\sigma) - z(t_i,\sigma)\exp\left(\int_{t_i}^{\theta_i} a(h^\tau\sigma)d\tau\right)\right| = \\
&= \left|\int_{t_i}^{\theta_i} b(h^s\sigma)\exp\left(\int_s^{\theta_i} a(h^\tau\sigma)d\tau\right)ds\right| = \int_{t_i}^{\theta_i} \bigl|b(h^s\sigma)\bigr|\exp\left(\int_s^{\theta_i} a(h^\tau\sigma)d\tau\right)ds \geqslant \\
&\geqslant \exp\bigl(-A(\theta_i - t_i)\bigr)\int_{t_i}^{\theta_i} |b(h^s\sigma)|ds \geqslant \exp(-AL)\int_{t_i}^{\theta_i} |b(h^s\sigma)|ds \geqslant \\
&\geqslant \frac{b_i}{2}(\theta_i - t_i)\cdot\exp(-AL) \geqslant \frac{b_i^2}{4k_\sigma}\cdot\exp(-AL).
\end{aligned}$$

Аналогично можно показать, что в случае, когда $t_i > \theta_i$, справедливо неравенство

$$|z(t_i, \sigma)| + |z(\theta_i, \sigma)| \exp(AL) \geqslant \frac{b_i^2}{4k_\sigma} \cdot \exp(-AL).$$

Обозначим $I_+(\sigma) \doteq \{t \in [0, \infty) : z(t, \sigma) \geqslant 0\}$, тогда из условия $\overline{\lim\limits_{t\to\infty}}\, z(t, \sigma) = 0$ следует, что $\lim\limits_{t\to\infty} z(t, \sigma) = 0$ при $t \in I_+(\sigma)$. Значит, найдется момент времени ϑ_n такой, что $z(t, \sigma) \leqslant 1/n$ для всех $t \geqslant \vartheta_n$, $t \in I_+(\sigma)$; тогда для всех $\theta_i \geqslant \vartheta_n$ выполнено неравенство

$$\frac{b^2(h^{\theta_i}\sigma)}{4k_\sigma} \cdot e^{-AL} = \frac{b_i^2}{4k_\sigma} \cdot e^{-AL} \leqslant \frac{1}{n}\bigl(1 + e^{AL}\bigr). \tag{15.2}$$

Пусть $C \doteq 2\sqrt{k_\sigma\bigl(e^{2AL} + e^{AL}\bigr)}$, тогда из (15.2) для всех $t \geqslant \vartheta_n$, $t \in I_+(\sigma)$ получаем оценку

$$|b(h^t\sigma)| \leqslant b_i \leqslant 2\sqrt{\frac{k_\sigma}{n}\bigl(e^{2AL} + e^{AL}\bigr)} = \frac{C}{\sqrt{n}}. \tag{15.3}$$

Для $0 \leqslant \vartheta_0 < \vartheta \leqslant +\infty$ рассмотрим следующие множества:

$$B(\vartheta_0, \vartheta, \sigma) \doteq \{t \in [\vartheta_0, \vartheta] : \ |b(h^t\sigma)| = 0\},$$

$$B_n(\vartheta_0, \vartheta, \sigma) \doteq \Bigl\{t \in [\vartheta_0, \vartheta] : \bigl|b(h^t\sigma)\bigr| \leqslant \frac{C}{\sqrt{n}}\Bigr\}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Отметим, что $B_{n+1}(0, \vartheta, \sigma) \subseteq B_n(0, \vartheta, \sigma)$ и $B_n(0, \vartheta, \sigma) \to B(0, \vartheta, \sigma)$ при $n \to \infty$. Поскольку функция $b(h^t\sigma)$ является почти периодической, то $I_{B_n(0,\infty,\sigma)}(t)$ также почти периодическая (разрывная) функция (подобное утверждение приводится в качестве упражнения в [45, с. 442]); поэтому следующий предел

$$\nu\bigl(B_n(0, \infty, \sigma)\bigr) \doteq \lim_{\vartheta\to\infty} \frac{\operatorname{mes} B_n(0, \vartheta, \sigma)}{\vartheta} = \lim_{\vartheta\to\infty} \frac{1}{\vartheta} \int_0^\vartheta I_{B_n(0,\infty,\sigma)}(t)\,dt$$

существует и равен среднему значению данной функции (см. [45, с. 379], [91, с. 27–29]). Определенная таким образом функция множеств ν обладает всеми свойствами меры, в том числе свойствами счетной аддитивности и непрерывности (см. лемму 15.2), следовательно, в силу условия 15.1 выполнены равенства

$$\lim_{n\to\infty} \nu\bigl(B_n(0, \infty, \sigma)\bigr) = \nu\bigl(B(0, \infty, \sigma)\bigr) \doteq \nu\bigl(B(\sigma)\bigr) = 0.$$

Далее, введем в рассмотрение множества

$$I_0(\vartheta_0, \vartheta, \sigma) \doteq \{t \in [\vartheta_0, \vartheta] : z(t, \sigma) \geqslant 0\},$$

$$I_n(\vartheta_0, \vartheta, \sigma) \doteq \{t \in [\vartheta_0, \vartheta] : z(t, \sigma) \in [0, 1/n]\}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Поскольку $z(t, \sigma) \leqslant 1/n$ для всех $t \geqslant \vartheta_n$, $t \in I_+(\sigma)$, то для любого $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \nu\bigl(I_n(0, \infty, \sigma)\bigr) &= \nu\bigl(I_n(0, \vartheta_n, \sigma)\bigr) + \nu\bigl(I_n(\vartheta_n, \infty, \sigma)\bigr) = 0 + \nu\bigl(I_0(\vartheta_n, \infty, \sigma)\bigr) = \\ &= \nu\bigl(I_0(0, \vartheta_n, \sigma)\bigr) + \nu\bigl(I_0(\vartheta_n, \infty, \sigma)\bigr) = \nu\bigl(I_0(0, \infty, \sigma)\bigr). \end{aligned}$$

Неравенство (15.3) выполнено для всех $t \geqslant \vartheta_n$, $t \in I_+(\sigma)$, для которых $z(t, \sigma) \in [0, 1/n]$, поэтому для всех $\vartheta \geqslant \vartheta_n$ имеет место включение $I_n(\vartheta_n, \vartheta, \sigma) \subseteq B_n(\vartheta_n, \vartheta, \sigma)$, из которого следуют неравенства

$$\operatorname{mes} I_n(\vartheta_n, \vartheta, \sigma) \leqslant \operatorname{mes} B_n(\vartheta_n, \vartheta, \sigma),$$

$$\begin{aligned} \nu\bigl(I_n(0, \infty, \sigma)\bigr) = \nu\bigl(I_n(\vartheta_n, \infty, \sigma)\bigr) &= \lim_{\vartheta\to\infty} \frac{\operatorname{mes} I_n(\vartheta_n, \vartheta, \sigma)}{\vartheta} \leqslant \\ &\leqslant \lim_{\vartheta\to\infty} \frac{\operatorname{mes} B_n(\vartheta_n, \vartheta, \sigma)}{\vartheta} = \nu\bigl(B_n(0, \infty, \sigma)\bigr). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$0 \leqslant \nu\big(I_0(0,\infty,\sigma)\big) = \nu\big(I_n(0,\infty,\sigma)\big) = \lim_{n\to\infty} \nu\big(I_n(0,\infty,\sigma)\big) \leqslant \lim_{n\to\infty} \nu\big(B_n(0,\infty,\sigma)\big) = 0,$$

поэтому множества $I_n(0,\infty,\sigma)$, $n = 0, 1\ldots$ измеримы в смысле меры ν и выполнено равенство $\nu\big(I_0(0,\infty,\sigma)\big) = 0$. Таким образом,

$$\varkappa(\sigma) \geqslant \lim_{\vartheta\to\infty} \frac{\operatorname{mes}\{t \in [0,\vartheta] : z(t,\sigma) < 0\}}{\vartheta} = 1 - \nu\big(I_0(0,\infty,\sigma)\big) = 1.$$

П р и м е р 15.1. Пусть задана динамическая система (Σ, h^t), где Σ — окружность радиуса единица, σ — угловая координата,

$$h^t\sigma = t + \sigma \pmod{2\pi}.$$

Рассмотрим управляемую систему

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 - x_2 + \cos^2(t+\sigma) + \Big(\dfrac{3\sqrt{2}}{2} + u_1\Big)\cos(t+\sigma), \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_2 + \sin(t+\sigma)\cos(t+\sigma) + \Big(\dfrac{3\sqrt{2}}{2} + u_2\Big)\sin(t+\sigma), \end{cases} \tag{15.4}$$

где $u_1, u_2 \in [0,\infty)$. Покажем, что множество

$$M = \Sigma \times M(\sigma), \quad \text{где} \quad M(\sigma) = \big\{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 \leqslant 8\big\}$$

статистически слабо инвариантно относительно управляемой системы (15.4).

Рассмотрим функцию

$$V(\sigma, x_1, x_2) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} - 2\sqrt{2},$$

которая удовлетворяет условию Липшица и является бесконечно большой функцией Ляпунова относительно множества M. Найдем производную функции $V(\sigma, x_1, x_2)$ по направлению $q = (q_1, q_2) \in F(\sigma, x)$:

$$V^o(\sigma, x; q) = \frac{x_1 q_1 + x_2 q_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} = -\sqrt{x_1^2 + x_2^2} + \Big(\frac{3\sqrt{2}}{2} + \cos\sigma\Big)\frac{x_1\cos\sigma + x_2\sin\sigma}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} + \\ + \frac{u_1 x_1 \cos\sigma + u_2 x_2 \sin\sigma}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}.$$

Отметим, что для всех $(\sigma, x_1, x_2) \in \Sigma \times \mathbb{R}^2$ выполнено неравенство

$$x_1\cos\sigma + x_2\sin\sigma \leqslant \sqrt{x_1^2 + x_2^2},$$

поэтому нижняя производная в силу включения, соответствующего системе (15.4), удовлетворяет неравенству

$$V^o_{\min}(\sigma, x) \leqslant -\sqrt{x_1^2 + x_2^2} + \frac{3\sqrt{2}}{2} + \cos\sigma = -V(\sigma, x) + \cos\sigma - \frac{\sqrt{2}}{2}. \tag{15.5}$$

В силу теоремы 13.1 нужно найти такую функцию $w(\sigma, z)$ переменных $(\sigma, z) \in \Sigma \times \mathbb{R}$, для которой для каждого σ верхнее решение $z^*(t,\sigma)$ задачи (13.3) определено при всех $t \geqslant 0$, выполнено равенство (13.4) и неравенство

$$V^o_{\min}(\sigma, x) \leqslant w\big(\sigma, V(\sigma, x)\big).$$

Из неравенства (15.5) следует, что в качестве функции $w(\sigma,z)$ мы можем взять функцию $w(\sigma,z) = -z + \cos\sigma - \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ и исследовать поведение решений $z(t,\sigma)$ задачи Коши

$$\dot{z} = -z + \cos(t+\sigma) - \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad z(0,\sigma) = 0, \quad t \geqslant 0.$$

Отметим, что для функции $V(\sigma,x)$ выполнены все условиям теоремы 10.1, поэтому при каждом $\sigma \in \Sigma$ для каждой точки $x_0 \in M(\sigma)$ существует решение включения, соответствующего системе (15.4), удовлетворяющее начальному условию $\varphi(0,\sigma,x_0) = x_0$ и продолжаемое на полуось $\mathbb{R}_+$. Функция $t \to b(h^t\sigma) = \cos(h^t\sigma) - \sqrt{2}/2$ периодическая и удовлетворяет условию 15.1, поэтому, согласно теореме 15.1, если $\varlimsup\limits_{t\to\infty} z(t,\sigma) \leqslant 0$ и $\varliminf\limits_{t\to\infty} z(t,\sigma) < 0$, то $\varkappa(\sigma) = 1$. Найдем

$$z(t,\sigma) = \frac{1}{2}\cos(t+\sigma) + \frac{1}{2}\sin(t+\sigma) - \frac{\sqrt{2}}{2} + \Big(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}\cos\sigma - \frac{1}{2}\sin\sigma\Big)e^{-t}.$$

Поскольку максимальное значение функции $f(\sigma) = \cos\sigma + \sin\sigma$ на $[0,\infty)$ равно $\sqrt{2}$ и минимальное значение равно $-\sqrt{2}$, то верхний и нижний пределы решения $z(t,\sigma)$ равны

$$\varlimsup_{t\to\infty} z(t,\sigma) = 0, \quad \varliminf_{t\to\infty} z(t,\sigma) = -\sqrt{2} < 0,$$

следовательно, предел $\varkappa(\sigma)$ существует и равен единице. Таким образом, мы показали, что множество M статистически слабо инвариантно относительно управляемой системы (15.4).

Аналогично можно показать, что множество $M = \Sigma \times M(\sigma)$, где

$$M(\sigma) = \big\{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 \leqslant r^2\big\}, \quad r > 2\sqrt{2}.$$

статистически слабо инвариантно относительно управляемой системы (15.4). В отличие от случая $r = 2\sqrt{2}$, при $r > 2\sqrt{2}$ верхний предел решения $z(t,\sigma)$ соответствующей задачи Коши отрицательный, поэтому для любой точки $(\sigma,x) \in M$ существует решение $\varphi(t,\sigma,x)$ системы (15.4) с начальным условием $\varphi(0,\sigma,x) = x$, которое содержится в множестве M при всех $t > T(\sigma,x)$ для некоторого $T(\sigma,x) \geqslant 0$.

§ 16. Неблуждающее множество достижимости и минимальный центр притяжения

Пусть заданы топологическая динамическая система (Σ, h^t), функция $f(\sigma,x,u)$ переменных $(\sigma,x,u) \in \Sigma \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ и функция $U(\sigma,x)$ переменных $(\sigma,x) \in \Sigma \times \mathbb{R}^n$, принимающая значения в пространстве $\mathrm{comp}(\mathbb{R}^m)$.

У с л о в и е 16.1. Имеют место следующие свойства: 1) фазовое пространство Σ динамической системы (Σ, h^t) компактно;

2) для каждого $\sigma \in \Sigma$ функция $(t,x,u) \to f(h^t\sigma,x,u)$ непрерывна;

3) функция $(\sigma,x) \to U(\sigma,x)$ полунепрерывна сверху в метрике Хаусдорфа.

По заданой топологической динамической системе (Σ, h^t) и управляемой системе

$$\dot{x} = f(h^t\sigma,x,u), \quad (t,\sigma,x,u) \in \mathbb{R} \times \Sigma \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \tag{16.1}$$

построим топологическую динамическую систему (Ω_0, g^t), служащую расширением исходной динамической системы (Σ, h^t). С этой целью будем предполагать, что выполнено следующее условие.

У с л о в и е 16.2. Найдется непрерывная функция $\sigma \to M(\sigma)$ со значениями в пространстве $\operatorname{comp}(\mathbb{R}^n)$ такая, что множество $\Omega_0 = \Sigma \times M(\sigma)$ положительно инвариантно относительно потока $g^t\omega = \big(h^t\sigma, A(t,\sigma,X)\big)$, где $A(t,\sigma,X)$ — множество достижимости системы (16.1).

Напомним, что множество Ω_0 называется *положительно инвариантным* относительно потока $g^t\omega$, если для всех $\omega \in \Omega_0$ и всех $t \geqslant 0$ имеет место включение $g^t\omega \in \Omega_0$. В этом случае будем говорить также, что множество Ω_0 положительно инвариантно относительно системы (16.1). Поскольку фазовое пространство Σ динамической системы (Σ, h^t) компактно, то сужение потока g^t на Ω_0 образует топологическую динамическую систему (Ω_0, g^t) с компактным фазовым пространством Ω_0.

О п р е д е л е н и е 16.1 (см. [12, гл. 7, § 2], [105, гл. 5, § 5]). Точка σ фазового пространства Σ называется *неблуждающей* (nonwandering point) относительно потока h^t, если для любого $\varepsilon > 0$ и любого $\vartheta > 0$ найдутся такой момент времени $t \geqslant \vartheta$ и такая точка σ_0, что имеют место неравенства
$$\rho_\Sigma(\sigma_0,\sigma) < \varepsilon \quad \text{и} \quad \rho_\Sigma(h^t\sigma_0,\sigma) < \varepsilon.$$

В [105, гл. 5, § 5] показано, что *если пространство Σ компактно, то множество Σ_{nw} неблуждающих точек непусто, компактно и инвариантно* относительно потока h^t.

О п р е д е л е н и е 16.2 (см. [133]). Пусть $\omega = (\sigma, X) \in \Sigma_{nw} \times \operatorname{comp}(M(\sigma))$. *Множество достижимости* $A(t,\omega)$ системы (16.1) будем называть *неблуждающим*, если для любых $\varepsilon > 0$ и $\vartheta > 0$ найдутся точка $\omega_0 = (\sigma_0, X_0)$, удовлетворяющая условиям $\rho_\Sigma(\sigma_0,\sigma) < \varepsilon$, $\operatorname{dist}(X_0, X) < \varepsilon$, и момент времени $t \geqslant \vartheta$ такие, что $\operatorname{dist}(A(t,\omega_0), X) < \varepsilon$.

Будем говорить также, что точка ω является *неблуждающей* и совокупность всех неблуждающих точек обозначим Ω_{nw}.

Формулируемые ниже утверждения получены в работе [133].

Т е о р е м а 16.1. *Если выполнены условия* 16.1 *и* 16.2, *то множество Ω_{nw} неблуждающих точек, содержащихся в Ω_0, непусто. Оно компактно и инвариантно относительно потока g^t. Следовательно, для каждого $\sigma \in \Sigma_{nw}$ найдется компактное подмножество $\mathfrak{X}_{nw}(\sigma)$ пространства* $\operatorname{comp}\big(M(\sigma)\big)$ *такое, что всякому $X \in \mathfrak{X}_{nw}(\sigma)$ отвечает неблуждающее множество достижимости $A(t,\omega)$ системы* (16.1).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из определения 16.2 следует, что при каждом фиксированном $\omega \in \Omega_0$ множество достижимости $A(t,\omega)$ будет неблуждающим в том и только в том случае, если точка ω является неблуждающей относительно потока g^t, определенного равенством $g^t\omega = \big(h^t\sigma, A(t,\omega)\big)$. Поскольку Ω_0 компактно, то, как доказано в [105, гл. 5, § 5], множество Ω_{nw} неблуждающих точек динамической системы (Ω_0, g^t) непусто, компактно и инвариантно относительно потока g^t. Отметим, что всякое подмножество Ω_1 множества Ω_0 представимо в виде
$$\Omega_1 = \big\{(\sigma, X) \in \Omega_0 : \, \sigma \in \Sigma_1, \, X \in \mathfrak{X}_1(\sigma)\big\},$$
тогда множество Ω_{nw} имеет ту же структуру: $\Omega_{nw} = \big\{(\sigma, X) \in \Omega_0 : \, \sigma \in \Sigma_{nw}, \, X \in \mathfrak{X}_{nw}(\sigma)\big\}$, где Σ_{nw} — подмножество неблуждающих точек потока h^t (оно компактно). Далее, в силу компактности Ω_{nw}, подмножество $\mathfrak{X}_{nw}(\sigma)$ пространства $\operatorname{comp}\big(M(\sigma)\big)$ также компактно при каждом σ. $\square$

П р и м е р 16.1. Пусть Σ — окружность радиуса единица, σ — угловая координата, поток h^t задан равенством $h^t\sigma = t + \sigma \pmod{2\pi}$. Рассмотрим управляемую систему
$$\dot{x} = -x + (\cos(t+\sigma) + 1)u, \quad (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}, \quad u \in U = [-1, 1]. \tag{16.2}$$

По динамической системе (Σ, h^t) и системе (16.2) построим топологическую динамическую систему (Ω_0, g^t), служащую расширением системы (Σ, h^t). Несложно проверить, что для функции $M(\sigma) = m(\sigma)U$, где

$$m(\sigma) = \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\Big(\sigma + \frac{\pi}{4}\Big)+1,$$

выполнено условие 16.2, то есть множество

$$\Omega_0 = \big\{\omega = (\sigma, X) : \sigma \in \Sigma,\ X \in \mathrm{comp}\big(M(\sigma)\big)\big\}$$

положительно инвариантно относительно потока $g^t\omega = \big(h^t\sigma, A(t,\omega)\big)$, где множество достижимости $A(t,\omega)$ системы (16.2) имеет вид

$$A(t,\omega) = e^{-t}X + \frac{\sqrt{2}}{2}\Big\{\Big(\sin\big(t+\sigma+\frac{\pi}{4}\big) + \sqrt{2}\Big)u - e^{-t}\Big(\sin\big(\sigma+\frac{\pi}{4}\big) + \sqrt{2}\Big)u, u \in U\Big\}.$$

На рисунке 15 изображена функция $t \to A(t,\omega) = A(t,0,X)$, где $A(t,0,X)$ — множество достижимости системы (16.2) из начального множества X при $\sigma = 0$.

Поскольку $h^{2\pi}\sigma = \sigma$ для любого $\sigma \in \Sigma$, то все точки множества Σ являются неблуждающими относительно потока h^t. Покажем, что множество неблуждающих точек Ω_{nw} содержит все множества вида $\Sigma \times [-a,a]$, где a — любое число, принадлежащее отрезку $\Big[1 - \frac{\sqrt{2}}{2}, 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\Big]$. Действительно, для $\omega = (\sigma, X)$, где $X = [-a,a]$ для любых $\varepsilon > 0$ и $\vartheta > 0$ возьмем точку $\omega_0 = \omega$ и момент времени $t_0 \geqslant \vartheta$,

$$t_0 = \arcsin\big(\sqrt{2}(a-1)\big) - \sigma - \frac{\pi}{4} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{N}$$

и найдем множество достижимости в момент t_0 из множества X :

$$A(t_0,\sigma,X) = e^{-t_0}X + \Big\{au - \frac{e^{-t_0}}{\sqrt{2}}\Big(\sin\big(\sigma+\frac{\pi}{4}\big) + \sqrt{2}\Big)u, u \in U\Big\}. \tag{16.3}$$

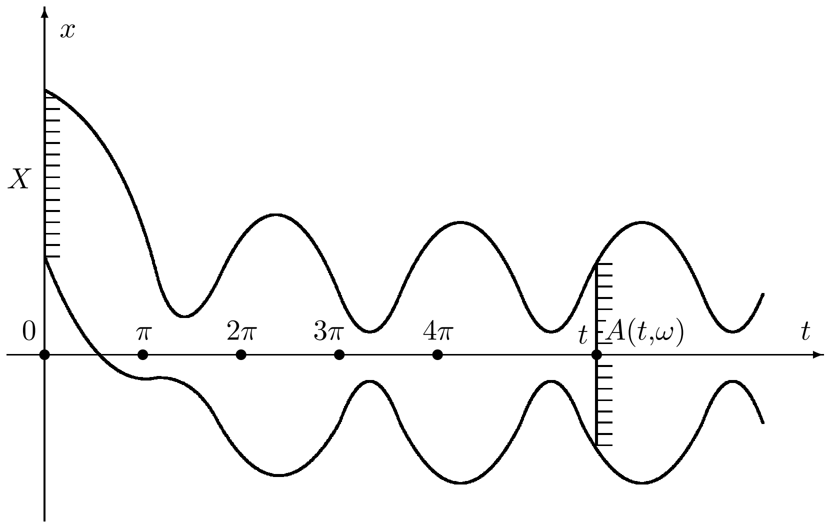

Рис. 15. Множество достижимости $A(t,\omega)$

Из равенства (16.3) следует, что для любых $\varepsilon > 0$ и $\vartheta > 0$ можно выбрать такое значение $k \in \mathbb{N}$, что $t_0 \geqslant \vartheta$ и выполнено неравенство $\mathrm{dist}\big(A(t_0,\sigma,X), X\big) < \varepsilon$. Поэтому (см. определение 16.2) любая точка вида

$$\omega = (\sigma, X), \quad \text{где} \quad X = [-a,a], \quad a \in \Big[1 - \frac{\sqrt{2}}{2}, 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\Big]$$

является неблуждающей точкой динамической системы (Ω_0, g^t).

Обозначим через $\Omega_w \doteq \Omega_0 \setminus \Omega_{nw}$ множество *блуждающих точек* динамической системы (Ω_0, g^t). Точка ω является блуждающей, если существуют такие $\varepsilon > 0$ и $\vartheta > 0$, что для любой точки $\omega_0 = (\sigma_0, X_0)$, удовлетворяющей условиям $\rho_{\Sigma}(\sigma_0, \sigma) < \varepsilon$, $\operatorname{dist}(X_0, X) < \varepsilon$, и для любого $t \geqslant \vartheta$ выполнено по крайней мере одно из неравенств

$$\rho_{\Sigma}(h^t\sigma_0, \sigma) \geqslant \varepsilon, \quad \operatorname{dist}\big(A(t, \omega_0), X\big) \geqslant \varepsilon.$$

Например, точка $\omega = (0, X)$, изображенная на рис. 14 — блуждающая точка динамической системы (Ω_0, g^t), построенной в примере 16.1.

Обозначим через $\mathfrak{X}_{nw}$ объединение компактных подмножеств $\mathfrak{X}_{nw}(\sigma) \in \operatorname{comp}\big(M(\sigma)\big)$ по всем $\sigma \in \Sigma$. Введем расстояния

$$\varrho\,(X, \mathfrak{X}_{nw}) = \min_{X_0 \in \mathfrak{X}_{nw}} \operatorname{dist}(X, X_0), \quad \varrho(\sigma, \Sigma_{nw}) = \min_{\sigma_0 \in \Sigma_{nw}} \rho_{\Sigma}(\sigma, \sigma_0),$$
$$\varrho(\omega, \Omega_{nw}) = \max\big\{\varrho(\sigma, \Sigma_{nw}),\ \varrho(X, \mathfrak{X}_{nw})\big\}$$

и обозначим через $\Omega^{\varepsilon}_{nw}$ открытую ε-окрестность множества Ω_{nw} :

$$\Omega^{\varepsilon}_{nw} = \big\{\omega \in \Omega_0 : \varrho(\omega, \Omega_{nw}) < \varepsilon\big\}.$$

В работе [105, с. 374] показано, что если выполнено условие 16.2, то для любого $\varepsilon > 0$ и всякой точки $\omega \in \Omega_0$ каждое блуждающее движение $t \to g^t\omega$ протекает только конечное время вне множества $\Omega^{\varepsilon}_{nw}$. Следовательно, относительная частота пребывания движения $t \to g^t\omega$ в множестве $\Omega^{\varepsilon}_{nw}$ равна единице:

$$\operatorname{freq}(\omega, \Omega^{\varepsilon}_{nw}) \doteq \lim_{\vartheta \to \infty} \frac{1}{\vartheta} \int_0^{\vartheta} I_{\Omega^{\varepsilon}_{nw}}(g^t\omega)\, dt = 1,$$

где I_E — характеристическая функция множества E.

Т е о р е м а 16.2. *Пусть выполнены условия* 16.1 *и* 16.2. *Тогда для любого* $\varepsilon > 0$ *и всякой точки* $\omega \in \Omega_0$ *найдется* $\vartheta > 0$ *такое, что для всех* $t \geqslant \vartheta$ *выполнено неравенство*

$$\varrho\big(A(t, \omega), \mathfrak{X}_{nw}\big) < \varepsilon.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для любого $\varepsilon > 0$ и всякого $\omega \in \Omega_0$ найдется $\vartheta > 0$ такое, что каждое блуждающее движение

$$t \to g^t\omega = \big(h^t\sigma, A(t, \omega)\big)$$

протекает только конечное время, не превышающее ϑ, вне множества $\Omega^{\varepsilon}_{nw}$; поэтому при всех $t \geqslant \vartheta$ траектория движения $t \to g^t\omega$ содержится в множестве $\Omega^{\varepsilon}_{nw}$. Тогда для данного движения выполнено неравенство $\varrho(g^t\omega, \Omega_{nw}) < \varepsilon$, следовательно, $\varrho\big(A(t, \omega), \mathfrak{X}_{nw}\big) < \varepsilon$ при всех $t \geqslant \vartheta$. $\square$

О п р е д е л е н и е 16.3 (см. [105, гл. 5]). Положительно инвариантное замкнутое множество $\Omega_c(\omega)$ называется *центром притяжения* движения $t \to g^t\omega$ при $t \to +\infty$, если для любого $\varepsilon > 0$ относительная частота пребывания движения $t \to g^t\omega$ в открытой ε-окрестности

$$\Omega^{\varepsilon}_{c}(\omega) = \big\{\omega \in \Omega_0 : \varrho(\omega, \Omega_c) < \varepsilon\big\}$$

этого множества равна единице.

Если множество $\Omega_c(\omega)$ не содержит собственного подмножества, также являющегося центром притяжения, то $\Omega_c(\omega)$ называется *минимальным центром притяжения* движения $t \to g^t\omega$ и обозначается $\Omega_{mc}(\omega)$.

Обозначим через $\mathrm{freq}\big(\omega, \Omega^{\varepsilon}_{mc}(\omega)\big)$ относительную частоту попадания движения $t \to g^t\omega$ в множество $\Omega^{\varepsilon}_{mc}(\omega)$, тогда

$$\mathrm{freq}\big(\omega, \Omega^{\varepsilon}_{mc}(\omega)\big) \doteq \lim_{\vartheta\to\infty} \frac{1}{\vartheta}\int_0^{\vartheta} I_{\Omega^{\varepsilon}_{mc}}(g^t\omega)\,dt = \lim_{\vartheta\to\infty} \frac{\mathrm{mes}\big\{t \in [0,\vartheta] : g^t\omega \in \Omega^{\varepsilon}_{mc}(\omega)\big\}}{\vartheta} = 1.$$

В следующей теореме получены условия существования минимального центра притяжения, дополняющие результаты работы [105, гл. 5, § 6].

Т е о р е м а 16.3. *Если выполнены условия* 16.1 *и* 16.2, *то для каждого* $\omega = (\sigma, X) \in \Omega_0$ *существует минимальный центр притяжения* $\Omega_{mc}(\omega)$ *движения* $t \to g^t\omega$ *при* $t \to +\infty$. *Следовательно, для любого* $\varepsilon > 0$ *и всякой точки* $\omega \in \Omega_0$ *существует множество* $\mathfrak{X}_{mc}(\omega) \in \mathrm{comp}(M(\sigma))$ *такое, что*

$$\mathrm{freq}(\omega, \varepsilon) \doteq \lim_{\vartheta\to\infty} \frac{\mathrm{mes}\big\{t \in [0,\vartheta] :\, \mathrm{dist}\big(A(t,\omega), \mathfrak{X}_{mc}(\omega)\big) < \varepsilon\big\}}{\vartheta} = 1.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\mathcal{O}^{\varepsilon}(\omega) \doteq \{\omega_0 \in \Omega_0 :\, \rho_{\Omega}(\omega_0, \omega) < 1\}$ — открытая окрестность радиуса ε точки $\omega \in \Omega_0$. Поскольку для каждого $\omega \in \Omega_0$ относительная частота $\mathrm{freq}(\omega, \Omega_0)$ пребывания движения $t \to g^t\omega$ в множестве Ω_0 равна единице, то существуют окрестности единичного радиуса, для которых относительная частота пребывания движения $g^t\omega$ положительная. Пространство Ω_0, в силу компактности, можно покрыть конечным числом таких окрестностей $\mathcal{O}^1(\omega_1), \ldots, \mathcal{O}^1(\omega_k)$. Для фиксированного $\omega \in \Omega_0$ обозначим через $S_1(\omega)$ объединение этих окрестностей и построим замыкание $\overline{S_1(\omega)}$ множества $S_1(\omega)$, тогда для относительной частоты пребывания движения $g^t\omega$ в множестве $\overline{S_1(\omega)}$ выполнено равенство $\mathrm{freq}\big(\overline{S_1(\omega)}\big) = 1$.

Компактное множество $\overline{S_1(\omega)}$ можно покрыть конечным числом открытых окрестностей радиуса $1/2$ и среди них отобрать те, для которых относительная частота пребывания движения $g^t\omega$ не равна нулю. Пусть $S_2(\omega)$ — объединение этих окрестностей, тогда $\mathrm{freq}\big(\overline{S_2(\omega)}\big) = 1$. Аналогично определяем множества $S_k(\omega)$ как объединение конечного числа окрестностей радиуса $1/2^{k-1}$, для которых относительная частота пребывания движения $g^t\omega$ положительная, следовательно,

$$\mathrm{freq}\big(\overline{S_k(\omega)}\big) = 1.$$

Таким образом, мы построили последовательность вложенных компактных множеств:

$$\overline{S_1(\omega)} \subseteq \Omega_0, \quad \overline{S_{k+1}(\omega)} \subseteq \overline{S_k(\omega)}, \quad k = 1, 2\ldots$$

Докажем, что пересечение данных множеств (которое не пусто и компактно) является минимальным центром притяжения, то есть

$$\Omega_{mc}(\omega) = \bigcap_{k=1}^{\infty} \overline{S_k(\omega)}.$$

Отметим, что для заданного $\varepsilon > 0$ найдется номер k такой, что $\overline{S_k(\omega)} \subseteq \Omega^{\varepsilon}_{mc}(\omega)$, поэтому выполнено неравенство

$$\mathrm{freq}\big(\omega, \Omega^{\varepsilon}_{mc}(\omega)\big) \geqslant \mathrm{freq}\big(\overline{S_k(\omega)}\big) = 1.$$

В работе [105, гл. 5, § 6] показано, что множество $\Omega_{mc}(\omega)$ можно определить как множество таких точек $\omega_0 \in \Omega_0$, что для любого $\varepsilon > 0$ верхняя относительная частота попадания движения $t \to g^t\omega$ в открытую ε-окрестность точки ω_0 положительна, то есть

$$\mathrm{freq}^*\big(\omega, \mathcal{O}^{\varepsilon}(\omega_0)\big) \doteq \varlimsup_{t\to\infty} \frac{\mathrm{mes}\big\{t \in [0,\vartheta] :\, g^t\omega \in \mathcal{O}^{\varepsilon}(\omega_0)\big\}}{\vartheta} > 0\,; \tag{16.4}$$

следовательно, множество $\Omega_{mc}(\omega)$ не зависит от выбора построенной системы окрестностей.

Пусть $\omega_0 \in \Omega_{mc}(\omega)$. Чтобы доказать, что множество $\Omega_{mc}(\omega)$ положительно инвариантно, покажем, что для любого $t_0 > 0$ точка $g^{t_0}\omega_0$ также содержится в этом множестве. Действительно, по свойству непрерывной зависимости движения $g^t\omega$ от начальной точки для фиксированных t_0 и $\varepsilon > 0$ можно найти такое $\delta > 0$, что $g^{t_0}\big(\mathcal{O}^\delta(\omega_0)\big) \subset \mathcal{O}^\varepsilon(g^{t_0}\omega_0)$, следовательно,

$$\mathrm{mes}\big\{t \in [0,\vartheta] : g^t\omega \in \mathcal{O}^\varepsilon(g^{t_0}\omega_0)\big\} \geqslant \mathrm{mes}\big\{t \in [0,\vartheta] : g^t\omega \in g^{t_0}\big(\mathcal{O}^\delta(\omega_0)\big)\big\}.$$

Далее, если $g^t\omega \in \mathcal{O}^\delta(\omega_0)$, то $g^{t+t_0}\omega \in g^{t_0}\big(\mathcal{O}^\delta(\omega_0)\big)$, поэтому

$$\mathrm{mes}\big\{t \in [0,\vartheta] : g^t\omega \in g^{t_0}\big(\mathcal{O}^\delta(\omega_0)\big)\big\} \geqslant \mathrm{mes}\big\{t \in [0,\vartheta] : g^t\omega \in \mathcal{O}^\delta(\omega_0)\big\} - t_0.$$

Неравенство (16.4) означает, что для любой точки $\omega_0 \in \Omega_{mc}(\omega)$ выполнено свойство $\mathrm{freq}^*\big(\omega, \mathcal{O}^\delta(\omega_0)\big) > 0$. Таким образом, получаем

$$\mathrm{freq}^*\big(\omega, \mathcal{O}^\varepsilon(g^{t_0}\omega_0)\big) \doteq \varlimsup_{t\to\infty} \frac{\mathrm{mes}\big\{t \in [0,\vartheta] : g^t\omega \in \mathcal{O}^\varepsilon(g^{t_0}\omega_0)\big\}}{\vartheta} \geqslant$$
$$\geqslant \varlimsup_{t\to\infty} \frac{\mathrm{mes}\big\{t \in [0,\vartheta] : g^t\omega \in \mathcal{O}^\delta(\omega_0)\big\} - t_0}{\vartheta} > 0,$$

то есть точка $g^{t_0}\omega_0$ удовлетворяет условию (16.4) и поэтому является неблуждающей.

Покажем, что $\Omega_{mc}(\omega)$ является минимальным центром притяжения движения. Допустим, что существует компактное собственное подмножество $\widetilde{\Omega}_{mc}(\omega)$ множества $\Omega_{mc}(\omega)$, являющееся центром притяжения движения. Тогда множество $\Omega_{mc}(\omega) \setminus \widetilde{\Omega}_{mc}(\omega)$ не пусто и, если точка ω_0 принадлежит $\Omega_{mc}(\omega) \setminus \widetilde{\Omega}_{mc}(\omega)$, то расстояние

$$\varrho(\omega_0, \widetilde{\Omega}_{mc}(\omega)) = \alpha > 0.$$

Выберем $\varepsilon < \alpha/2$, тогда множества $\widetilde{\Omega}^\varepsilon_{mc}(\omega)$ и $\overline{\mathcal{O}^\varepsilon(\omega_0)}$ имеют пустое пересечение, а это противоречит неравенству (16.4) и определению минимального центра притяжения.

Пусть $\Sigma_{mc}(\sigma)$ является минимальным центром притяжения движения $t \to h^t\sigma$, тогда множество $\Omega_{mc}(\omega)$ имеет структуру

$$\Omega_{mc}(\omega) = \{\omega_0 \in \Omega_0 : \sigma_0 \in \Sigma_{mc}(\sigma),\ X_0 = \mathfrak{X}_{mc}(\omega)\},$$

где $\mathfrak{X}_{mc}(\omega)$ — некоторое подмножество пространства $\mathrm{comp}(M(\sigma))$. Поскольку из неравенства $\varrho(g^t\omega, \Omega_{mc}(\omega)) < \varepsilon$ следует неравенство $\mathrm{dist}(A(t,\omega), \mathfrak{X}_{mc}(\omega)) < \varepsilon$ и $\Omega_{mc}(\omega)$ — минимальный центр притяжения движения $t \to g^t\omega$, то

$$\mathrm{freq}(\omega, \varepsilon) \geqslant \mathrm{freq}\big(\omega, \Omega^\varepsilon_{mc}(\omega)\big) = 1,$$

откуда получаем последнее утверждение теоремы.

П р и м е р 16.2. Рассмотрим динамическую систему (Σ, h^t), где Σ — окружность радиуса единица, σ — угловая координата, $h^t\sigma = t + \sigma \pmod{2\pi}$ и управляемую систему

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2 - \dfrac{x_1 - \cos(t+\sigma)}{2} + \dfrac{x_1 - \cos(t+\sigma)}{2}\,u, \\ \dot{x}_2 = x_1 - \dfrac{x_2 - \sin(t+\sigma)}{2} + \dfrac{x_2 - \sin(t+\sigma)}{2}\,u, \end{cases} \tag{16.5}$$

где $u \in U = [-1, 1]$. По системе (Σ, h^t) и системе (16.5) построим топологическую динамическую систему (Ω_0, g^t), служащую расширением системы (Σ, h^t). Пусть $M = O_2(0) \subset \mathbb{R}^2$ — замкнутый круг радиуса 2 с центром в начале координат,

$$\Omega_0 = \Sigma \times \mathrm{comp}(M), \quad g^t\omega = (h^t\sigma, A(t,\omega)).$$

Отметим, что при $u = 1$ все интегральные кривые системы (16.5) являются окружностями; при $u = -1$ множество интегральных кривых состоит из окружности $|x| = 1$ и спиралей, которые при $t \to +\infty$ наматываются на предельный цикл $|x| = 1$.

Для компактного множества X, содержащегося в M, обозначим

$$d_1(X) = \min_{x \in X} |x|, \quad d_2(X) = \max_{x \in X} |x|$$

и построим минимальные центры притяжения $\Omega_{mc}(\omega)$ движения $t \to g^t \omega$ для различных значений $\omega = (\sigma, X) \in \Omega_0$.

Пусть множество $X_1 \in \operatorname{comp}(M)$ такое, что $d_1(X_1) > 1$, тогда минимальным центром притяжения движения $t \to g^t \omega$ является множество $\Omega_{mc}(\omega) = \Sigma \times M_1$, где

$$M_1 = \big\{ x \in M : 1 \leqslant |x| \leqslant d_2(X_1) \big\} \quad \text{(см. рис. 16).}$$

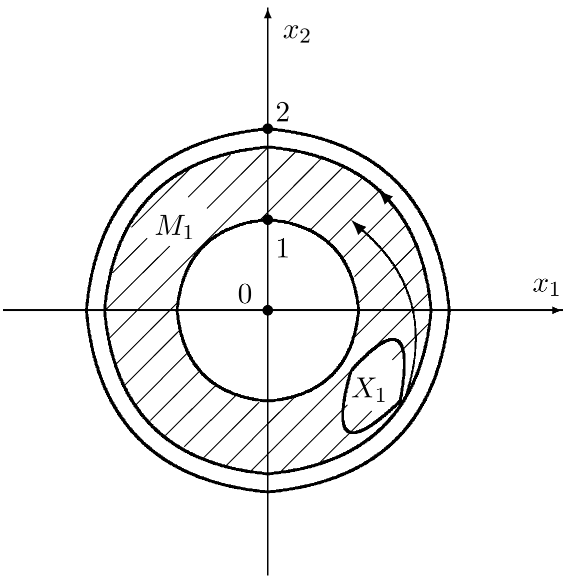

Рис. 16. Множество $\Omega_{mc}(\omega) = \Sigma \times M_1$ является минимальным центром притяжения движения для $\omega = (\sigma, X_1)$

Если для компактного множества $X_2 \subseteq M$ выполнены неравенства $d_1(X_2) \leqslant 1$, $d_2(X_2) > 1$, то $\Omega_{mc}(\omega) = \Sigma \times M_2$, где $M_2 = \big\{ x \in M : d_1(X_2) \leqslant |x| \leqslant d_2(X_2) \big\}$. Далее, если множество X_3 таково, что $d_2(X_3) \leqslant 1$, то $\Omega_{mc}(\omega) = \Sigma \times M_3$, где $M_3 = \big\{ x \in M : d_1(X_3) \leqslant |x| \leqslant 1 \big\}$.

ГЛАВА V. СТАТИСТИЧЕСКИ ИНВАРИАНТНЫЕ МНОЖЕСТВА УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ СО СЛУЧАЙНЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Целью данной главы является определение и исследование статистически инвариантных и статистически слабо инвариантных с вероятностью единица множеств управляемой системы

$$\dot{x} = f(h^t\sigma, x, u), \quad (t, \sigma, x, u) \in \mathbb{R} \times \Sigma \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m, \tag{V.1}$$

параметризованной метрической динамической системой $(\Sigma, \mathfrak{A}, \nu, h^t)$.

Пусть $\Omega \doteq \Sigma \times \operatorname{comp}(\mathbb{R}^n)$ и множество $A(t, \omega)$, где $\omega = (\sigma, X)$, является множеством достижимости системы (V.1) в момент времени t из начального множества X. На пространстве Ω введем поток $g^t\omega = \big(h^t\sigma, A(t, \omega)\big)$ и определим множество $M = \{(\sigma, x) \in \Sigma \times \mathbb{R}^n : x \in M(\sigma)\}$, заданное функцией $\sigma \to M(\sigma)$ со значениями в пространстве $\operatorname{comp}(\mathbb{R}^n)$. Рассмотрим движение

$$t \to g^t\omega, \quad \text{где} \quad \omega = (\sigma, M(\sigma)).$$

В отличие от детерминированных управляемых систем, для систем со случайными параметрами часто возникает ситуация, когда движение $t \to g^t\omega$ находится в множестве M с относительной частотой, равной единице, причем это происходит не для всех, а для почти всех значений $\sigma \in \Sigma$, относительно вероятностной меры ν. Поэтому для таких систем естественно рассматривать свойства статистической инвариантности и статистически слабой инвариантности, выполненные с вероятностью единица.

В данной главе исследуются условия инвариантности (в указанном выше смысле) заданного множества M, выраженные в терминах функций А. М. Ляпунова, метрической динамической системы $(\Sigma, \mathfrak{A}, \nu, h^t)$ и характеристики

$$\varkappa(\sigma) = \lim_{\vartheta \to \infty} \frac{\operatorname{mes}\{t \in [0, \vartheta] : z(t, \sigma) \leqslant 0\}}{\vartheta},$$

которая является относительной частотой попадания траектории решения $z(t, \sigma)$ задачи Коши

$$\dot{z} = a(h^t\sigma)z + b(h^t\sigma), \quad z(0, \sigma) = 0, \quad t \geqslant 0 \tag{V.2}$$

в множество $(-\infty, 0]$. Получены достаточные условия, при которых для задачи (V.2) равенство $\varkappa(\sigma) = 1$ выполнено с вероятностью единица. Здесь также рассмотрены примеры статистически инвариантных и статистически слабо инвариантных с вероятностью единица множеств для линейной и билинейной управляемых систем со случайными параметрами.

§ 17. Метрические динамические системы и статистически инвариантные с вероятностью единица множества

Напомним, что *метрической динамической системой* называется четверка $(\Sigma, \mathfrak{A}, \nu, h^t)$, где Σ — фазовое пространство динамической системы; $\mathfrak{A}$ — некоторая сигма-алгебра подмножеств Σ; h^t — *однопараметрическая группа измеримых преобразований* фазового пространства Σ в себя (измеримость означает, что $h^tA \in \mathfrak{A}$ для каждого $A \in \mathfrak{A}$ и для любого $t \in \mathbb{R}$). Далее, ν — вероятностная мера с носителем на пространстве Σ, инвариантная относительно потока h^t, то есть $\nu(h^tA) = \nu(A)$ для всех $A \in \mathfrak{A}$ и любого $t \in \mathbb{R}$ (см., например, [4, с. 156], [72, с. 12]).

Пусть заданы функция $f(\sigma, x, u)$ переменных $(\sigma, x, u) \in \Sigma \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ и функция $U(\sigma, x)$ переменных $(\sigma, x) \in \Sigma \times \mathbb{R}^n$, удовлетворяющие следующему условию.

У с л о в и е 17.1. Существует множество $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$ такое, что $\nu(\Sigma_0) = 1$ и имеют место следующие свойства:

1) для каждой точки $(t, \sigma) \in \mathbb{R} \times \Sigma_0$ функция $(x, u) \to f(h^t\sigma, x, u)$ непрерывна;

2) для каждой точки $(\sigma, x, u) \in \Sigma_0 \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ функция $t \to f(h^t\sigma, x, u)$ кусочно-непрерывна;

3) для каждого $\sigma \in \Sigma_0$ функция $(t, x) \to U(h^t\sigma, x)$ принимает значения в пространстве $\operatorname{comp}(\mathbb{R}^m)$ и полунепрерывна сверху в метрике Хаусдорфа для всех $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$.

В этой главе исследуются статистически инвариантные с вероятностью единица множества управляемой системы

$$\dot{x} = f(h^t\sigma, x, u), \quad (t, \sigma, x, u) \in \mathbb{R} \times \Sigma \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m, \tag{17.1}$$

порожденной динамической системой $(\Sigma, \mathfrak{A}, \nu, h^t)$ и функциями f и U. Следуя А. Ф. Филиппову, поставим в соответствие системе (17.1) дифференциальное включение

$$\dot{x} \in F(h^t\sigma, x), \quad F(\sigma, x) = \operatorname{co} H(\sigma, x), \tag{17.2}$$

где для каждой фиксированной точки $(\sigma, x) \in \Sigma \times \mathbb{R}^n$ множество $H(\sigma, x)$ состоит из всех предельных значений функции

$$(t, x) \to f\big(h^t\sigma, x, U(h^t\sigma, x)\big) \quad \text{при} \quad (t_i, x_i) \to (0, x).$$

Далее, как всегда, запись $\operatorname{co} H(\sigma, x)$ означает замыкание выпуклой оболочки множества $H(\sigma, x)$.

В данной главе будем рассматривать только такую ситуацию, когда дифференциальное включение (17.2) имеет компактные образы, то есть будем предполагать, что при фиксированных (σ, x) множество $F(\sigma, x)$ выпукло и компактно.

Каждому значению $\sigma \in \Sigma$, множеству $X \in \operatorname{comp}(\mathbb{R}^n)$ и моменту времени $t \geqslant 0$ поставим в соответствие множество $A(t, \sigma, X)$, состоящее из всех значений в момент времени t решений $t \to \varphi(t, \sigma, x)$ включения (17.2), когда начальное условие $\varphi(0, \sigma, x) = x$ пробегает все множество X. Множество $A(t, \sigma, X)$ является сечением в момент времени $t \geqslant 0$ *интегральной воронки* включения (17.2). Напомним, что оно называется *множеством достижимости* управляемой системы (17.1) в момент t из начального множества X.

Пусть $\Omega \doteq \Sigma \times \operatorname{comp}(\mathbb{R}^n)$ и задано подмножество $M = \{(\sigma, x) \in \Sigma \times \mathbb{R}^n : x \in M(\sigma)\}$ пространства Ω, где для каждого $\sigma \in \Sigma$ функция $t \to M(h^t\sigma)$ непрерывна в метрике Хаусдорфа и принимает значения в пространстве $\operatorname{comp}(\mathbb{R}^n)$. Построим замкнутую окрестность

$$M^r(\sigma) = M(\sigma) + O_r(0)$$

множества $M(\sigma)$ в $\mathbb{R}^n$ и внешнюю r-окрестность $N_+^r(\sigma) = M^r(\sigma) \setminus M(\sigma)$ границы множества $M(\sigma)$. Определим множество $N_+^r = \{(\sigma, x) \in \Sigma \times \mathbb{R}^n : x \in N_+^r(\sigma)\}$.

В предположении, что для заданного множества $X \in \operatorname{comp}(\mathbb{R}^n)$ множество достижимости $A\big(t, \sigma, X\big)$ системы (17.1) существует при всех $t \geqslant 0$, рассмотрим подмножество числовой прямой

$$\alpha(\vartheta, \omega) = \alpha(\vartheta, \sigma, X) \doteq \big\{t \in [0, \vartheta] : A\big(t, \sigma, X\big) \subseteq M(h^t\sigma)\big\}.$$

В третьей главе (см. лемму 7.2, с. 52) показано, что если $X \subseteq M(\sigma)$, то множество $\alpha(\vartheta, \omega)$ непусто и измеримо по Лебегу при каждом $\vartheta \geqslant 0$.

Напомним, что мы пользуемся следующими обозначениями:

$$\operatorname{freq}(\omega) \doteq \lim_{\vartheta \to \infty} \frac{\operatorname{mes} \alpha(\vartheta, \omega)}{\vartheta} = \lim_{\vartheta \to \infty} \frac{\operatorname{mes}\big\{t \in [0, \vartheta] : A\big(t, \omega\big) \subseteq M(h^t\sigma)\big\}}{\vartheta}, \tag{17.3}$$

где $\omega = (\sigma, X)$, mes — мера Лебега на числовой прямой. Если указанный предел существует, характеристику $\operatorname{freq}(\omega)$ будем называть *относительной частотой поглощения* множества достижимости $A\big(t, \sigma, X\big)$ системы (17.1) заданным множеством M. Далее, если предел (17.3) не существует, то характеристики

$$\operatorname{freq}^*(\omega) \doteq \varlimsup_{\vartheta \to \infty} \frac{\operatorname{mes} \alpha(\vartheta, \omega)}{\vartheta}, \quad \operatorname{freq}_*(\omega) \doteq \varliminf_{\vartheta \to \infty} \frac{\operatorname{mes} \alpha(\vartheta, \omega)}{\vartheta}$$

будем называть, соответственно, *верхней и нижней относительными частотами поглощения* множества достижимости $A\big(t, \sigma, X\big)$ системы (17.1) заданным множеством M.

Следующие определения возникли в результате обсуждений ряда задач управления с Е. Л. Тонковым и В. Н. Ушаковым.

О п р е д е л е н и е 17.1 (см. [129]). Множество M будем называть *статистически инвариантным с вероятностью единица* относительно управляемой системы (17.1), если для почти всех $\sigma \in \Sigma$ выполнено равенство $\operatorname{freq}\bigl(\sigma, M(\sigma)\bigr) = 1$, то есть

$$\nu\bigl\{\sigma \in \Sigma: \operatorname{freq}\bigl(\sigma, M(\sigma)\bigr) = 1\bigr\} = 1.$$

О п р е д е л е н и е 17.2 (см. [129]). Множество M называется *положительно инвариантным с вероятностью единица* относительно управляемой системы (17.1), если для любого $t \geqslant 0$ выполнено равенство

$$\nu\bigl\{\sigma \in \Sigma: A\bigl(t, \sigma, M(\sigma)\bigr) \subseteq M(h^t\sigma)\bigr\} = 1.$$

Отметим, что в данной главе, в частности, исследуются статистически инвариантные и статистически слабо инвариантные множества управляемой линейной системы

$$\dot{x} = A(h^t\sigma)x + B(h^t\sigma)u, \quad (t, \sigma, x, u) \in \mathbb{R} \times \Sigma \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m, \tag{17.4}$$

а также билинейной системы

$$\dot{x} = \bigl(A(h^t\sigma) + uB(h^t\sigma)\bigr)x, \quad (t, \sigma, x, u) \in \mathbb{R} \times \Sigma \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}. \tag{17.5}$$

Покажем, что рассматриваемые системы можно отождествлять со *стационарным в узком смысле* случайным процессом

$$\xi(h^t\sigma) \doteq \bigl(A(h^t\sigma), B(h^t\sigma)\bigr).$$

Для этого опишем *метрическую динамическую систему* $(\Sigma, \mathfrak{A}, \nu, h^t)$, которая параметризует системы (17.4), (17.5), и, таким образом, эти системы превращаются в системы со случайными параметрами.

Определим вероятностное пространство $(\Sigma, \mathfrak{A}, \nu)$, которое является прямым произведением двух вероятностных пространств: $(\Sigma, \mathfrak{A}, \nu) = \bigl(\Sigma_1 \times \Sigma_2, \mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2, \nu_1 \times \nu_2\bigr)$. Здесь пространство Σ_1 означает множество числовых последовательностей $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_k, \dots)$, где $\theta_k \in (0, \infty)$, $\mathfrak{A}_1$ является наименьшей сигма-алгеброй, порожденной цилиндрическими множествами

$$C_k \doteq C(I_1, \dots, I_k) = \{\theta \in \Sigma_1 : \theta_1 \in I_1, \dots, \theta_k \in I_k\},$$

где $I_i \doteq (t_i, s_i]$, а вероятностная мера ν_1 определена следующим образом. Для каждого полуинтервала I_i определим вероятностную меру $\widetilde{\nu}_1(I_i) = F_i(s_i) - F_i(t_i)$ с помощью функций распределения $F_i(t)$, $t \in (0, \infty)$ (последняя запись означает, что функция распределения $F_i(t) = 0$ при $t \in (-\infty, 0]$). На алгебре цилиндрических множеств построим меру

$$\widetilde{\nu}_1(C_k) = \widetilde{\nu}_1(I_1)\widetilde{\nu}_1(I_2) \dots \widetilde{\nu}_1(I_k).$$

Тогда в силу теоремы А. Н. Колмогорова (см., например, [179, с. 176]) *на измеримом пространстве* $(\Sigma_1, \mathfrak{A}_1)$ *существует единственная вероятностная мера* ν_1, *которая является продолжением меры* $\widetilde{\nu}_1$ *на сигма-алгебру* $\mathfrak{A}_1$.

Далее, обозначим через Σ_2 множество последовательностей

$$\Sigma_2 \doteq \{\varphi : \varphi = (\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_k, \dots),\ \varphi_k \in \Psi\},$$

где $\Psi = \{\psi_i\}_{i=1}^{\ell}$ — конечное множество матричных пар $\psi_i \doteq (A_i, B_i)$, A_i и B_i — матрицы размеров $(n \times n)$ и $(n \times m)$ соответственно (для динамической системы $(\Sigma, \mathfrak{A}, \nu, h^t)$, задающей билинейную систему (17.5), A_i и B_i являются матрицами размера $(n \times n)$). Система множеств $\mathfrak{A}_2$ определяется как наименьшая сигма-алгеброй, порожденная цилиндрическими множествами $G_k = G(\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_k)$, где G_k — совокупность всех последовательностей из Σ_2, у которых фиксированы $k + 1$ первых координат.

Пусть заданы неотрицательные функции $\pi_i = p_0(\psi_i)$, $p_{ij} = p\,(\psi_i, \psi_j)$ такие, что $\sum\limits_{i=1}^{\ell} \pi_i = 1$ и $\sum\limits_{j=1}^{\ell} p_{ij} = 1$ для всех $j = 1, \ldots, \ell$. Предполагаем также, что числа $\pi_1, \ldots, \pi_\ell$ удовлетворяют системе уравнений

$$\pi_j = \sum_{i=1}^{\ell} \pi_i p_{ij}, \quad j = 1, \ldots, \ell. \tag{17.6}$$

Всякое неотрицательное решение данной системы, удовлетворяющее условию $\sum\limits_{i=1}^{\ell} \pi_i = 1$, принято называть *стационарным или инвариантным* распределением вероятностей цепи Маркова. Меру цилиндрического множества G_k определим равенством

$$\widetilde{\nu}_2(G_k) = p_0(\varphi_0) p\,(\varphi_0, \varphi_1) \ldots p\,(\varphi_{k-1}, \varphi_k)$$

и обозначим через ν_2 продолжение меры $\widetilde{\nu}_2$ с алгебры цилиндрических множеств на сигма-алгебру $\mathfrak{A}_2$.

На пространстве $(\Sigma_2, \mathfrak{A}_2, \nu_2)$ введем последовательность случайных величин $\zeta = (\zeta_0, \zeta_1, \ldots)$, где $\zeta_k(\varphi) = \varphi_k$, $\varphi_k \in \Psi$. Отметим, что если выполнены равенства (17.6), то последовательность ζ образует однородную цепь Маркова, которая является *стационарной в узком смысле,* то есть для любых $k \geqslant 1$ и $\Psi_0, \Psi_1, \ldots \in \mathfrak{I}$ выполнено равенство

$$\nu_2\bigl(\zeta_0 \in \Psi_0, \zeta_1 \in \Psi_1, \ldots\bigr) = \nu_2\bigl(\zeta_k \in \Psi_0, \zeta_{k+1} \in \Psi_1, \ldots\bigr),$$

где $\mathfrak{I}$ — сигма-алгебра подмножеств Ψ (см. [179, с. 131]).

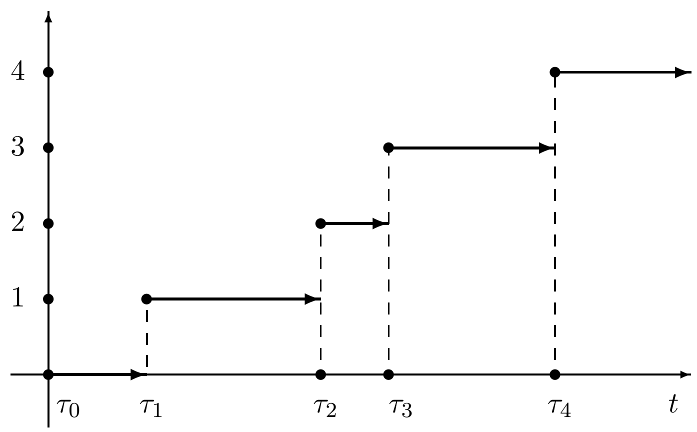

Рис. 17. Функция $t \to z(t, \theta)$

Введем последовательность $\{\tau_k\}_{k=0}^{\infty}$ следующим образом:

$$\tau_0 = 0, \ \ \tau_k(\theta) = \sum_{i=1}^{k} \theta_i, \quad \text{где} \quad \theta \in \Sigma_1.$$

Предполагаем, что $\theta_i \in (0, \infty)$, $i = 1, 2, \ldots$ являются независимыми случайными величинами, причем $\theta_2, \theta_3, \ldots$ имеют одинаковое распределение с функцией распределения $F(t)$ и математическим ожиданием m_θ. Обозначим через $z = z(t, \theta)$ число точек последовательности $\{\tau_k\}$, расположенных левее t, тогда

$$z = z(t, \theta) = \max\bigl\{k : \tau_k \leqslant t\bigr\}, \quad t \geqslant 0.$$

Величина $z(t,\theta)$ называется *процессом восстановления*. Предполагаем, что распределение случайной величины θ_1 определяется следующим равенством:

$$F_1(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{m_\theta}\displaystyle\int_0^t \bigl(1 - F(s)\bigr)ds, & t > 0, \\ 0, \quad t \leqslant 0, \end{cases} \tag{17.7}$$

тогда $z(t,\theta)$ является *стационарным процессом восстановления* (см. [73, с. 145–147]). Это означает, что данный процесс имеет постоянную скорость восстановления, то есть функция восстановления

$$N(t) \doteq Mz(t,\theta) + 1$$

линейна по $t : N(t) = at + 1$. Здесь через $Mz(t,\theta)$ обозначено математическое ожидание случайной функции $z(t,\theta)$.

На вероятностном пространстве $(\Sigma_1, \mathfrak{A}_1, \nu_1)$ определим преобразование сдвига

$$h_1^t\theta = \bigl(\tau_{z+1} - t, \theta_{z+2}, \theta_{z+3}, \dots\bigr), \quad t > 0.$$

Поскольку $z(t,\theta)$ — стационарный процесс восстановления, преобразование h_1^t сохраняет меру ν_1, то есть для любого множества $G \in \mathfrak{A}_1$ и всех $t \geqslant 0$ выполнено равенство $\nu_1(h_1^t G) = \nu_1(G)$. На пространстве $(\Sigma_2, \mathfrak{A}_2, \nu_2)$ при каждом $\theta \in \Sigma_1$ определим преобразование сдвига равенством

$$h_2^t(\theta)\varphi = (\varphi_z, \varphi_{z+1}, \dots).$$

Из стационарности цепи Маркова следует, что преобразование h_2^t сохраняет меру ν_2. На пространстве $(\Sigma, \mathfrak{A}, \nu)$ также определим преобразование сдвига

$$h^t\sigma = h^t(\theta, \varphi) = \bigl(h_1^t\theta, h_2^t(\theta)\varphi\bigr). \tag{17.8}$$

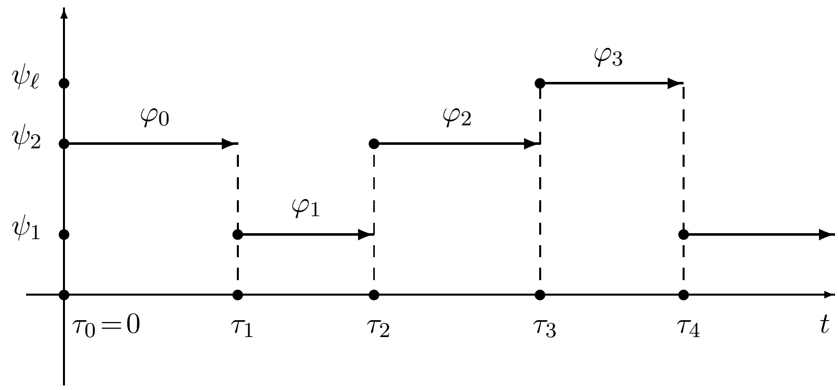

Рис. 18. Функция $t \to \xi(h^t\sigma)$ — одна из возможных реализаций случайного процесса $\xi(h^t\sigma)$

Построенная динамическая система $(\Sigma, \mathfrak{A}, \nu, h^t)$ называется косым произведением динамических систем $(\Sigma_1, \mathfrak{A}_1, \nu_1, h_1^t)$ и $(\Sigma_2, \mathfrak{A}_2, \nu_2, h_2^t(\theta))$, а *преобразование $h^t\sigma$ сохраняет меру* $\nu = \nu_1 \times \nu_2$ (см. [72, с. 190], [111]), которая является прямым произведением вероятностных мер ν_1 и ν_2. Это означает, что

$$\nu_1 \times \nu_2(A \times B) = \nu_1(A)\nu_2(B), \quad A \in \mathfrak{A}_1, \ B \in \mathfrak{A}_2.$$

Пусть $\xi(\sigma) = \zeta_0(\sigma)$ — случайная величина на вероятностном пространстве $(\Sigma, \mathfrak{A}, \nu)$. Определим случайный процесс

$$\xi(h^t\sigma) \doteq \bigl(A(h^t\sigma), B(h^t\sigma)\bigr),$$

порождаемый потоком $h^t\sigma$. Тогда для каждого фиксированного $\sigma \in \Sigma$ функция $t \to \xi(h^t\sigma)$ (которая называется выборочной функцией или реализацией случайного процесса $\xi(h^t\sigma)$) кусочно-постоянная и принимает значения в множестве Ψ. На рисунке 18 изображена одна из возможных реализаций данного процесса.

Отметим, что функция $\xi(t,\sigma) = \xi(h^t\sigma)$ является *стационарным в узком смысле* случайным процессом. Это означает, что все конечномерные распределения данного процесса инвариантны относительно сдвига по параметру t, то есть равенство

$$\nu\bigl\{\xi(t_1+t) \in B_1, \ldots, \xi(t_k+t) \in B_k\bigr\} = \nu\bigl\{\xi(t_1) \in B_1, \ldots, \xi(t_k) \in B_k\bigr\}$$

выполнено для любого $k \in \mathbb{N}$, произвольных моментов времени $t, t_1, \ldots, t_k$ и любых борелевских множеств $B_1, \ldots, B_k$ (см., например, [72, с. 167], [179, с. 433]).

§ 18. Условия статистической инвариантности и статистически слабой инвариантности с вероятностью единица

Пусть задана метрическая динамическая система $(\Sigma, \mathfrak{A}, \nu, h^t)$ и скалярная задача Коши

$$\dot z = w(h^t\sigma, z), \quad z(0) = z_0, \quad t \geqslant 0, \tag{18.1}$$

относительно которых предполагаем, что выполнено следующее условие.

У с л о в и е 18.1. Существует множество $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$ такое, что $\nu(\Sigma_0) = 1$ и выполнены следующие свойства:

1) для каждого $\sigma \in \Sigma_0$ существует (конечная или бесконечная) последовательность изолированных точек числовой оси $\{\tau_k\}_{k=0}^{\infty}$, $t_0 = \tau_0 < \tau_1 < \tau_2 < \ldots$ такая, что функция $(t,z) \to w(h^t\sigma, z)$ непрерывна в каждой из областей

$$G_i \doteq \{(t,z) : \ t \in [\tau_{i-1}, \tau_i), \ z \in \mathbb{R}\}$$

и имеет предел слева при $t \to \tau_i$, $i = 1, 2, \ldots$;

2) для каждой точки $(t,\sigma) \in \mathbb{R} \times \Sigma_0$ выполнено неравенство

$$\varlimsup_{|z|\to\infty} \frac{|w(h^t\sigma, z)|}{|z|} < \infty\,. \tag{18.2}$$

Следующее утверждение доказывается аналогично теореме 8.1.

Т е о р е м а 18.1. *Пусть выполнено условие* 18.1 *и для каждого $\sigma \in \Sigma_0$ существует функция $v(t,\sigma)$, непрерывная на $[t_0,\infty)$, дифференцируемая для почти всех $t \in [t_0,\infty)$ и удовлетворяющая неравенствам (в тех точках $[t_0,\infty)$, в которых $v(t,\sigma)$ дифференцируема)*

$$\dot v(t,\sigma) \leqslant w\bigl(h^t\sigma, v(t,\sigma)\bigr), \quad v(t_0,\sigma) \leqslant z_0. \tag{18.3}$$

Тогда для каждого $\sigma \in \Sigma_0$ существует верхнее решение $z^*(t,\sigma)$ задачи Коши (18.1)*, определенное для всех $t \in [t_0,\infty)$ и имеет место неравенство $v(t,\sigma) \leqslant z^*(t,\sigma)$.*

Напомним, что мы рассматриваем характеристику

$$\varkappa(\sigma) \doteq \lim_{\vartheta\to\infty} \frac{\operatorname{mes}\{t \in [0,\vartheta] : \ z^*(t,\sigma) \leqslant 0\}}{\vartheta}.$$

Если указанный предел существует, то $\varkappa(\sigma)$ является относительной частотой попадания траектории решения $z^*(t,\sigma)$ в множество $(-\infty, 0]$. Если предел $\varkappa(\sigma)$ не существует, то рассматриваются характеристики

$$\begin{aligned} \varkappa^*(\sigma) &\doteq \varlimsup_{\vartheta\to\infty} \frac{\operatorname{mes}\{t \in [0,\vartheta] : \ z^*(t,\sigma) \leqslant 0\}}{\vartheta}, \\ \varkappa_*(\sigma) &\doteq \varliminf_{\vartheta\to\infty} \frac{\operatorname{mes}\{t \in [0,\vartheta] : \ z^*(t,\sigma) \leqslant 0\}}{\vartheta}, \end{aligned} \tag{18.4}$$

которые являются верхней и нижней относительными частотами попадания траектории решения $z^*(t,\sigma)$ в множество $(-\infty,0]$.

Формулируемые ниже утверждения получены в работе [129].

Т е о р е м а 18.2. *Пусть выполнено условие* 18.1 *и существует множество* $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$ *такое, что* $\nu(\Sigma_0)=1$ *и для всех* $\sigma\in\Sigma_0$ *для каждой точки* $x\in M(\sigma)$ *все решения включения* (17.2) *с начальным условием* $\varphi(0,\sigma,x)=x$ *продолжаемы на полуось* $\mathbb{R}_+$.

Предположим, что существуют функция $V(\sigma,x)$ *переменных* $(\sigma,x)\in\Sigma\times\mathbb{R}^n$ *и функция* $w(\sigma,z)$ *переменных* $(\sigma,z)\in\Sigma\times\mathbb{R}$ *такие, что функция* $V(\sigma,x)$ *является функцией Ляпунова относительно множества* M *и для всех* $(\sigma,x)\in\Sigma_0\times\mathbb{R}^n$ *выполнено неравенство*

$$V^o_{\max}(\sigma,x)\leqslant w\bigl(\sigma,V(\sigma,x)\bigr). \tag{18.5}$$

Тогда, если $\varkappa(\sigma)=1$ *для всех* $\sigma\in\Sigma_0$, *то множество* M *статистически инвариантно с вероятностью единица относительно управляемой системы* (17.1).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для каждого $\sigma\in\Sigma_0$ и для каждого x из множества $M(\sigma)$ обозначим через $\varphi(t,\sigma,x)$ некоторое решение включения (17.2), удовлетворяющее начальному условию $\varphi(0,\sigma,x)=x\in M(\sigma)$. Рассмотрим функцию $v(t,\sigma)=V\bigl(h^t\sigma,\varphi(t,\sigma,x)\bigr)$, которая дифференцируема при почти всех $t\geqslant 0$, и поскольку выполнено условие $\varphi(0,\sigma,x)\in M(\sigma)$, то $v(0,\sigma)\leqslant 0$. Далее, из неравенств (9.3) и (18.5) имеем при всех $t\geqslant 0$ неравенство

$$\dot v(t,\sigma)\leqslant w\bigl(h^t\sigma,v(t,\sigma)\bigr).$$

Из последнего неравенства и неравенства $v(0,\sigma)\leqslant 0$, в силу теоремы 18.1, следует, что для всех $\sigma\in\Sigma_0$ верхнее решение $z^*(t,\sigma)$ задачи (18.1) определено и удовлетворяет неравенству $v(t,\sigma)\leqslant z^*(t,\sigma)$ при всех $t\geqslant 0$. Обозначим через $\operatorname{freq}_*(\varphi)$ нижнюю относительную частоту попадания решения $\varphi(t,\sigma,x)$ в множество M, тогда

$$\operatorname{freq}_*(\varphi)\doteq\varliminf_{\vartheta\to\infty}\frac{\operatorname{mes}\bigl\{t\in[0,\vartheta]:\ \varphi(t,\sigma,x)\in M(h^t\sigma)\bigr\}}{\vartheta}=\varliminf_{\vartheta\to\infty}\frac{\operatorname{mes}\bigl\{t\in[0,\vartheta]:\ v(t,\sigma)\leqslant 0\bigr\}}{\vartheta}.$$

Далее, в силу (18.4) из неравенства $v(t,\sigma)\leqslant z^*(t,\sigma)$ следует неравенство $\operatorname{freq}_*(\varphi)\geqslant\varkappa_*(\sigma)$, и так как $\varphi(t,\sigma,x)$ является произвольным решением включения (17.2) с начальным условием $\varphi(0,\sigma,x)=x\in M(\sigma)$, то имеет место неравенство

$$\operatorname{freq}_*\bigl(\sigma,M(\sigma)\bigr)\geqslant\varkappa_*(\sigma). \tag{18.6}$$

Поскольку для всех $\sigma\in\Sigma_0$ выполнено равенство $\varkappa(\sigma)=\varkappa_*(\sigma)=1$, то из (18.6) следует равенство

$$\operatorname{freq}\bigl(\sigma,M(\sigma)\bigr)=\operatorname{freq}_*\bigl(\sigma,M(\sigma)\bigr)=1,$$

выполненное для всех $\sigma\in\Sigma_0$. Таким образом,

$$\nu\bigl\{\sigma\in\Sigma:\ \operatorname{freq}\bigl(\sigma,M(\sigma)\bigr)=1\bigr\}=\nu(\Sigma_0)=1,$$

то есть множество M статистически инвариантно с вероятностью единица.

О п р е д е л е н и е 18.1. Множество M называется *статистически слабо инвариантным с вероятностью единица* относительно управляемой системы (17.1), если для почти всех $\sigma\in\Sigma$ для любой точки $x\in M(\sigma)$ найдется решение $\varphi(t,\sigma,x)$ включения (17.2) с начальным условием $\varphi(0,\sigma,x)=x$, продолжаемое на полуось $\mathbb{R}_+$, такое, что для этого решения верхняя относительная частота попадания в множество M равна единице:

$$\operatorname{freq}^*(\varphi)\doteq\varlimsup_{\vartheta\to\infty}\frac{\operatorname{mes}\bigl\{t\in[0,\vartheta]:\ \varphi(t,\sigma,x)\in M(h^t\sigma)\bigr\}}{\vartheta}=1.$$

Далее, множество M называется *слабо инвариантным с вероятностью единица* относительно управляемой системы (17.1), если для почти всех $\sigma\in\Sigma$ для некоторого решения $\varphi(t,\sigma,x)$ с начальным условием $\varphi(0,\sigma,x)=x\in M(\sigma)$ включение $\varphi(t,\sigma,x)\in M(h^t\sigma)$ выполнено при всех $t\geqslant 0$.

З а м е ч а н и е 18.1. Отметим, что множество, слабо инвариантное с вероятностью единица, является также статистически слабо инвариантным с вероятностью единица. Кроме того, если множество статистически инвариантно с вероятностью единица, то оно статистически слабо инвариантно с вероятностью единица.

Т е о р е м а 18.3. *Пусть выполнено условие* 18.1 *и существует множество* $\Sigma_0\subseteq\Sigma$ *такое, что* $\nu(\Sigma_0)=1$ *и для всех* $\sigma\in\Sigma_0$ *для каждой точки* $x\in M(\sigma)$ *найдется решение включения* (17.2), *удовлетворяющее начальному условию* $\varphi(0,\sigma,x)=x$ *и продолжаемое на полуось* $\mathbb{R}_+$.

Предположим, что существуют функция $V(\sigma,x)$ *переменных* $(\sigma,x)\in\Sigma\times\mathbb{R}^n$ *и функция* $w(\sigma,z)$ *переменных* $(\sigma,z)\in\Sigma\times\mathbb{R}$, *удовлетворяющие следующим условиям:*

1) *для всех* $\sigma\in\Sigma_0$ *выполнено равенство*

$$\varlimsup_{\vartheta\to\infty}\frac{\operatorname{mes}\bigl\{t\in[0,\vartheta]:z^*(t,\sigma)\leqslant 0\bigr\}}{\vartheta}=1,\qquad(18.7)$$

где $z^*(t,\sigma)$ *— верхнее решение задачи Коши* (18.1)*;*

2) *функция* $V(\sigma,x)$ *является функцией Ляпунова относительно множества* M *и для всех* $(\sigma,x)\in\Sigma_0\times\mathbb{R}^n$ *выполнено неравенство*

$$V^o_{\min}(\sigma,x)\leqslant w\bigl(\sigma,V(\sigma,x)\bigr).\qquad(18.8)$$

Тогда множество M *статистически слабо инвариантно с вероятностью единица относительно управляемой системы* (17.1).

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу теоремы 18.1 для всех $\sigma\in\Sigma_0$ верхнее решение $z^*(t,\sigma)$ задачи (18.1) определено при всех $t\geqslant 0$. Из теоремы 13.1 следует, что для каждого $\sigma\in\Sigma_0$ для любой точки $x\in M(\sigma)$ найдется решение $\varphi(t,\sigma,x)$ включения (17.2), удовлетворяющее начальному условию $\varphi(0,\sigma,x)=x$, для которого верхняя относительная частота $\operatorname{freq}^*(\varphi)=1$. Поскольку $\nu(\Sigma_0)=1$, это и означает, что множество M статистически слабо инвариантно с вероятностью единица.

§ 19. Условия равенства $\varkappa(\sigma)=1$, связанные со сходимостью последовательности случайных величин с вероятностью единица

Напомним, что в данной главе рассматривается следующая задача: определить условия существования статистически инвариантных и статистически слабо инвариантных множеств управляемых систем, в частности, линейной системы вида

$$\dot x=A(h^t\sigma)x+B(h^t\sigma)u,\quad (t,\sigma,x,u)\in\mathbb{R}\times\Sigma\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m,\qquad(19.1)$$

а также управляемой билинейной системы

$$\dot x=\bigl(A(h^t\sigma)+B(h^t\sigma)u\bigr)x,\quad (t,\sigma,x,u)\in\mathbb{R}\times\Sigma\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m.\qquad(19.2)$$

Рассматриваемые системы параметризованы метрической динамической системой $(\Sigma,\mathfrak{A},\nu,h^t)$, и поэтому их можно отождествить со случайным процессом $\xi(h^t\sigma)\doteq\bigl(A(h^t\sigma),B(h^t\sigma)\bigr)$.

Для эффективного применения теорем 18.2 и 18.3 к решению поставленной задачи нужно ответить на следующие вопросы. Во-первых, какими должны быть функции $V(\sigma, x)$ и $w(\sigma, z)$, чтобы они удовлетворяли неравенствам (18.5) или (18.8)? Во-вторых, как определить, что равенство $\varkappa(\sigma) = 1$ выполнено с вероятностью единица?

Оказывается, что для проверки инвариантности заданного множества M относительно системы (19.1) или (19.2) удобно рассматривать функцию

$$w(\sigma, z) = a(\sigma)z + b(\sigma)$$

и предполагать, что для каждого $\sigma \in \Sigma$ функции $t \to a(h^t\sigma)$ и $t \to b(h^t\sigma)$ являются кусочно-постоянными и имеют точки разрыва, совпадающие с точками разрыва выборочных функций случайного процесса $\xi(h^t\sigma) = \big(A(h^t\sigma), B(h^t\sigma)\big)$.

Таким образом, нужно исследовать поведение решения $z(t, \sigma)$ задачи Коши

$$\dot z = a(h^t\sigma)z + b(h^t\sigma), \quad z(0, \sigma) = 0, \quad t \geqslant 0 \tag{19.3}$$

и найти условия, при которых для почти всех $\sigma \in \Sigma$ предел

$$\varkappa(\sigma) = \lim_{\vartheta \to \infty} \frac{\operatorname{mes}\big\{t \in [0, \vartheta] : z(t, \sigma) \leqslant 0\big\}}{\vartheta}$$

существует и равен единице.

Для параметризации задачи (19.3) выбираем динамическую систему $(\widehat\Sigma, \mathfrak{A}, \nu, h^t)$, которая отличается от системы, построенной в параграфе 17, только тем, что для пространства

$$\Sigma_2 \doteq \big\{\varphi : \varphi = (\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_k, \ldots),\ \varphi_k \in \widehat\Psi\big\}$$

множество $\widehat\Psi = \big\{\widehat\psi_1, \ldots, \widehat\psi_\ell\big\}$ содержит пары чисел $\widehat\psi_i \doteq (a_i, b_i)$. Напомним также, что пространство Σ_1 является множеством числовых последовательностей $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_k, \ldots)$, где $\theta_k \in (0, \infty)$, а последовательность $\{\tau_k\}_{k=0}^{\infty}$ определена следующим образом:

$$\tau_0 = 0, \ \ \tau_k(\theta) = \sum_{i=1}^{k} \theta_i, \quad \text{где} \quad \theta \in \Sigma_1.$$

Каждому состоянию $\widehat\psi_i$ поставим в соответствие линейное уравнение

$$\dot z = a_i z + b_i, \quad i = 1, \ldots, \ell.$$

Определим случайный процесс $\eta(h^t\sigma) \doteq \big(a(h^t\sigma), b(h^t\sigma)\big)$, порождаемый потоком $h^t\sigma$ (см. (17.8)), и отметим, что при каждом $\sigma \in \widehat\Sigma$ функция $t \to \eta(h^t\sigma)$ кусочно-постоянная и $\eta(h^t\sigma) = \varphi_k$ при всех $t \in [\tau_k, \tau_{k+1})$, где $\varphi_k = (a_k, b_k) \in \widehat\Psi$. Точки $\tau_1, \tau_2, \ldots$ разрыва реализаций случайного процесса $\eta(h^t\sigma)$ будем называть моментами переключения данного процесса. Предполагаем, что случайный процесс $\eta(h^t\sigma)$ (или, что равносильно, процесс $\xi(h^t\sigma)$) удовлетворяет следующему условию.

У с л о в и е 19.1. Найдется множество $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$ такое, что $\nu(\Sigma_0) = 1$ и для любого $\sigma \in \Sigma_0$ моменты переключения случайного процесса изолированы и число этих моментов бесконечно.

З а м е ч а н и е 19.1. Отметим, что если для некоторого случайного процесса $\xi(h^t\sigma)$ существуют постоянные $c_1 > 0$ и $c_2 < \infty$ такие, что $\theta_k \in [c_1, c_2]$ для всех $k \geqslant 2$, то условие 19.1 выполнено для всех $\sigma \in \Sigma$, то есть $\Sigma_0 = \Sigma$.

Если множество Σ_0 не совпадает с Σ, но $\nu(\Sigma_0) = 1$, будем говорить, что условие 19.1 выполнено для почти всех $\sigma \in \Sigma$. Например, для случайного процесса с показательным распределением длин интервалов θ_k между моментами переключения условие 19.1 выполнено для почти всех σ (см. [20, с. 15]).

В следующем утверждении сформулированы условия, которым должна удовлетворять функция распределения $F(t)$ и математическое ожидание m_θ длин интервалов $\theta_2, \theta_3, \dots$, чтобы условие 19.1 выполнялось для почти всех $\sigma \in \Sigma$.

Л е м м а 19.1. *Пусть* $m_\theta \neq +\infty$. *Если найдутся такие постоянные* $a > 0$, $C \geqslant 0$ *и* $\delta > 0$, *что для функции распределения* $F(t)$ *случайных величин* $\theta_2, \theta_3, \dots$ *имеет место неравенство*

$$F(t) \leqslant C\, t^a \quad \text{при} \quad t \in (0, \delta), \tag{19.4}$$

то условие 19.1 *выполнено для почти всех* $\sigma \in \Sigma$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Покажем сначала, что из неравенства (19.4) следует неравенство $m_\theta > 0$. Действительно, в силу (19.4) найдется такое $\delta_1 \in (0, \delta)$, что $F(\delta_1) < 1$. Поэтому для всех $k = 2, 3, \dots$

$$\nu(\theta_k > \delta_1) = 1 - F(\delta_1) > 0.$$

Далее, поскольку $\theta_k > 0$, то $m_\theta > \delta_1 \cdot \nu(\theta_k > \delta_1) > 0$.

Напомним, что процессом восстановления называется функция $z = z(t, \theta)$, которая определяется как число точек последовательности $\{\tau_k\}$, расположенных левее t, тогда (см. также рис. 17)

$$z = z(t, \theta) = \max\big\{k : \tau_k \leqslant t\big\}, \quad t \geqslant 0.$$

Докажем, что если выполнено неравенство (19.4), то почти все траектории процесса восстановления $z(t, \theta)$ — неубывающие целочисленные функции, возрастающие только скачками величины 1. Для этого рассмотрим событие A_N, состоящее в том, что для всех целых i от 0 до $z(N, \theta)$ существует двоично-рациональное $t \in [0, N]$ такое, что $z(t, \theta) = i$ и докажем, что вероятность $\nu(A_N) = 1$ для любого натурального N.

Пусть $z = z\big(k/2^n, \theta\big)$, тогда преобразование сдвига для последовательности $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots)$ определяется равенством

$$h_1^{k/2^n}\theta = \Big(\tau_{z+1} - \frac{k}{2^n}, \theta_{z+2}, \theta_{z+3}, \dots\Big).$$

Отметим, что разность $\tau_{z+1} - k/2^n$ равна длине интервала между моментом времени $k/2^n$ и следующим за ним моментом переключения τ_{z+1}, $\theta_{z+2} = \tau_{z+2} - \tau_{z+1}$ — длина следующего интервала между моментами переключения процесса. Неравенство

$$\tau_{z+1} - \frac{k}{2^n} + \theta_{z+2} > \frac{1}{2^n}$$

означает, что на промежутке $\Big[\dfrac{k}{2^n}, \dfrac{k+1}{2^n}\Big)$ произошло не более одного переключения процесса $\xi(h^t\sigma)$, то есть разность

$$z\Big(\frac{k+1}{2^n}, \theta\Big) - z\Big(\frac{k}{2^n}, \theta\Big)$$

равна нулю или единице. Таким образом, учитывая инвариантность меры ν, найдем вероятность

$$\nu\Big\{z\Big(\frac{k+1}{2^n}, \theta\Big) - z\Big(\frac{k}{2^n}, \theta\Big) = 0 \text{ или } 1\Big\} = \nu\Big\{\tau_{z+1} - \frac{k}{2^n} + \theta_{z+2} > \frac{1}{2^n}\Big\} =$$

$$= \nu\Big\{\theta_1 + \theta_2 > \frac{1}{2^n}\Big\} = 1 - F_{\theta_1+\theta_2}\Big(\frac{1}{2^n}\Big).$$

Для нахождения функции распределения $F_{\theta_1+\theta_2}(t)$ суммы независимых случайных величин θ_1 и θ_2 с функциями распределения $F_1(t)$ и $F(t)$ воспользуемся формулой свертки (см., например, [73, с. 90]):

$$F_{\theta_1+\theta_2}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F\big(t-s\big)dF_1(s). \tag{19.5}$$

Напомним, что функция распределения случайной величины θ_1 определяется формулой

$$F_1(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{m_\theta}\displaystyle\int_0^t \big(1-F(s)\big)ds, & t > 0, \\ 0, \quad t \leqslant 0, \end{cases} \tag{19.6}$$

поэтому из (19.4), (19.5) и (19.6) для тех n, которые удовлетворяют неравенству $1/2^n < \delta$, получаем следующую оценку

$$\begin{aligned} F_{\theta_1+\theta_2}(1/2^n) &= \int_0^{1/2^n} F\big(1/2^n - s\big)dF_1(s) = \\ &= \frac{1}{m_\theta}\int_0^{1/2^n} F\big(1/2^n - s\big)\big(1-F(s)\big)ds \leqslant \frac{1}{m_\theta}\int_0^{1/2^n} F\big(1/2^n - s\big)ds \leqslant \\ &\leqslant \frac{C}{m_\theta}\int_0^{1/2^n} \big(1/2^n - s\big)^a ds = \frac{C\cdot 2^{-n(a+1)}}{m_\theta(a+1)}\,. \end{aligned}$$

Таким образом, для вероятности события A_N имеем

$$\nu(A_N) \geqslant \prod_{k=0}^{2^nN-1} \nu\Big\{z\Big(\frac{k+1}{2^n}\Big) - z\Big(\frac{k}{2^n}\Big) = 0 \text{ или } 1\Big\} \geqslant \left(1 - \frac{C\cdot 2^{-n(a+1)}}{m_\theta(a+1)}\right)^{2^nN}.$$

Следовательно, $\nu(A_N) \to 1$ при $n \to \infty$, поэтому $\nu(A_N) = 1$.

Покажем теперь, что для любой функции распределения $F(t)$ для почти всех $\sigma \in \Sigma$ число моментов переключения случайного процесса $\eta(h^t\sigma)$ бесконечно. Предположим, что это не так, тогда найдется такой номер k, что $\theta_k = +\infty$. Найдем вероятность этого события:

$$\nu(\theta_k = +\infty) = \lim_{T\to+\infty} \nu(\theta_k > T) = \lim_{T\to+\infty}\big(1 - F(T)\big) = 0.$$

Таким образом, мы показали, что если $m_\theta \neq +\infty$ и для функции распределения $F(t)$ выполнено неравенство (19.4), то условие 19.1 выполнено для почти всех $\sigma \in \Sigma$. $\square$

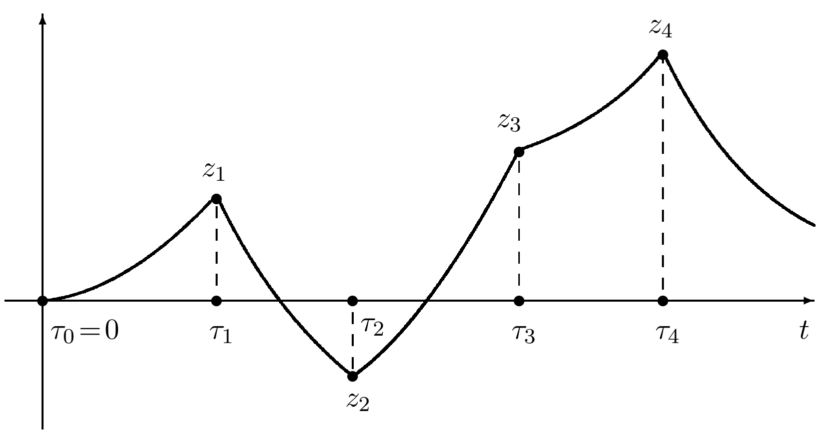

Рис. 19. График решения $z(t,\sigma)$ задачи (19.3)

Функцию $z(t,\sigma)$ — решение задачи (19.3) будем рассматривать как случайный процесс, определенный на вероятностном пространстве $(\widehat{\Sigma},\mathfrak{A},\nu)$. На рисунке 19 изображена одна из возможных реализаций этого случайного процесса. Определим случайную последовательность $\{z_k\}_{k=1}^{\infty}$, где $z_k \doteq z(\tau_k,\sigma)$ совпадает со значениями функции $z(t,\sigma)$ в точках переключения случайного процесса $\eta(h^t\sigma)$. Обозначим через Mz_k математическое ожидание случайной величины z_k и для тех $k\in\mathbb{N}$, для которых $Mz_k\neq 0$, рассмотрим случайные величины $\zeta_k \doteq \dfrac{z_k}{Mz_k}$.

О п р е д е л е н и е 19.1 (см., например, [179, с. 270]). Последовательность случайных величин $\{\zeta_k\}_{k=1}^{\infty}$ называется *сходящейся с вероятностью единица* (почти наверное) к случайной величине ζ, если выполнено равенство

$$\nu\{\sigma:\,\zeta_k\not\to\zeta\}=0,$$

то есть если множество тех исходов σ, для которых $\zeta_k(\sigma)$ не сходятся к $\zeta(\sigma)$, имеет нулевую вероятность.

Следующие утверждения получены в работе [129].

Л е м м а 19.2. *Пусть выполнено условие* 19.1, $\lim\limits_{k\to\infty} Mz_k<0$ *и последовательность случайных величин* $\{\zeta_k\}_{k=1}^{\infty}$, *где* $\zeta_k\doteq\dfrac{z_k}{Mz_k}$, *сходится к единице почти наверное. Тогда* $\varkappa(\sigma)=1$ *с вероятностью единица.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\lim\limits_{k\to\infty} Mz_k=\alpha<0$ и $\alpha\neq-\infty$, тогда найдется такое число k_1, что для всех $k\geqslant k_1$ математическое ожидание $Mz_k<\dfrac{\alpha}{2}<0$. Обозначим через Σ_0 множество тех σ, для которых выполнено условие 19.1 и $\lim\limits_{k\to\infty}\zeta_k=1$, тогда $\nu(\Sigma_0)=1$. Пусть $\sigma\in\Sigma_0$ фиксировано, тогда найдется такое число $k_2=k_2(\sigma)$, что

$$\Big|\frac{z(\tau_k,\sigma)}{Mz_k}-1\Big|\leqslant\frac{1}{2}\quad\text{для всех}\quad k\geqslant k_2.$$

Следовательно, для всех $k\geqslant k_0=\max(k_1,k_2)$ выполнены неравенства

$$z(\tau_k,\sigma)\leqslant\frac{Mz_k}{2}<\frac{\alpha}{4}<0,$$

то есть случайный процесс $z(t,\sigma)$ принимает отрицательные значения в точках переключения τ_k, $k\geqslant k_0$. Покажем, что $z(t,\sigma)<0$ при всех $t\geqslant\tau_{k_0}$. Действительно, пусть $\eta(h^t\sigma)=\varphi_k=(a_k,b_k)\in\widehat{\Psi}$ при $t\in[\tau_k,\tau_{k+1})$, тогда функция $z(t,\sigma)$ является решением задачи Коши

$$\dot z=a_kz+b_k,\quad z(\tau_k,\sigma)=z_k$$

при $t\in[\tau_k,\tau_{k+1}]$. Следовательно, если $a_k\neq0$, то функция $z(t,\sigma)$ задается равенством

$$z(t,\sigma)=-\frac{b_k}{a_k}+\Big(z_k+\frac{b_k}{a_k}\Big)\exp\big(a_k(t-\tau_k)\big)$$

для всех $t\in[\tau_k,\tau_{k+1}]$ и поэтому достигает наибольшего значения на концах данного отрезка (это также верно и в случае, когда $a_k=0$). Таким образом, поскольку $z(\tau_k,\sigma)<0$ для всех $k\geqslant k_0$, то $z(t,\sigma)<0$ при всех $t\geqslant\tau_{k_0}$. Отметим также, что из условия 19.1 следует, что $\tau_{k_0}<\infty$, поэтому для всех $\sigma\in\Sigma_0$ выполнено равенство $\varkappa(\sigma)=1$.

Если $\lim\limits_{k\to\infty} Mz_k=-\infty$ и $\sigma\in\Sigma_0$, то найдутся такие числа k_1,k_2, что для всех $k\geqslant k_1$ выполнено неравенство $Mz_k\leqslant-2$ и для всех $k\geqslant k_2$ — неравенство

$$\Big|\frac{z(\tau_k,\sigma)}{Mz_k}-1\Big|\leqslant\frac{1}{2}.$$

Тогда $z(\tau_k,\sigma) \leqslant \dfrac{Mz_k}{2} \leqslant -1$ для всех $k \geqslant k_0 = \max(k_1,k_2)$. Аналогично доказанному выше в этом случае также выполнено равенство $\varkappa(\sigma) = 1$. $\square$

Напомним, что через Mz_k обозначено математическое ожидание случайной величины z_k и обозначим через $Dz_k \doteq M(z_k - Mz_k)^2$ дисперсию этой случайной величины.

Л е м м а 19.3. *Пусть выполнено условие* 19.1, $\lim\limits_{k\to\infty} Mz_k < 0$ *и ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{Dz_k}{(Mz_k)^2}$ *сходится. Тогда* $\varkappa(\sigma) = 1$ *с вероятностью единица.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\zeta_k \doteq \dfrac{z_k}{Mz_k}$, $k = 1,2\ldots$ — последовательность случайных величин, заданных на вероятностном пространстве $(\Sigma,\mathfrak{A},\nu)$. Обозначим через ζ случайную величину, заданную на $(\Sigma,\mathfrak{A},\nu)$ и принимающую постоянное значение $\zeta = 1$. Отметим, что если для каждого $\varepsilon > 0$ выполнено условие

$$\sum_{k=1}^{\infty} \nu\Big(\Big|\frac{z_k}{Mz_k} - \zeta\Big| \geqslant \varepsilon\Big) = \sum_{k=1}^{\infty} \nu\big(|\zeta_k - 1| \geqslant \varepsilon\big) < \infty, \tag{19.7}$$

то последовательность случайных величин $\{\zeta_k\}_{k=1}^{\infty}$ сходится к случайной величине $\zeta = 1$ почти наверное (см. [179, с. 272]). Из определения ζ_k следует, что математическое ожидание этих случайных величин $M\zeta_k = 1$, поэтому, в силу *неравенства Чебышева* (см., например, [179, с. 58]), для любого фиксированного $\varepsilon > 0$ справедлива оценка

$$\nu\big(|\zeta_k - M\zeta_k| \geqslant \varepsilon\big) = \nu\big((\zeta_k - 1)^2 \geqslant \varepsilon^2\big) \leqslant \frac{D\zeta_k}{\varepsilon^2} = \frac{1}{\varepsilon^2}\cdot\frac{Dz_k}{(Mz_k)^2}.$$

Таким образом, из сходимости ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{Dz_k}{(Mz_k)^2}$ следует, что выполнено условие (19.7) и последовательность случайных величин $\{\zeta_k\}_{k=1}^{\infty}$ сходится к случайной величине $\zeta = 1$ почти наверное. В силу леммы 19.2 равенство $\varkappa(\sigma) = 1$ выполнено с вероятностью единица.

З а м е ч а н и е 19.2. Если для каждого $k \in \mathbb{N}$ случайная величина z_k является суммой *независимых одинаково распределенных* случайных величин $\eta_1,\ldots,\eta_k$ с математическим ожиданием $M|\eta_1| < \infty$, то можно существенно ослабить предположения, сделанные в лемме 19.3, для сходимости последовательности $\{\zeta_k\}_{k=1}^{\infty}$ почти наверное. В этом случае, в силу *теоремы Колмогорова* (см. [179, с. 418]), *если* $M|\eta_1| < \infty$, *то* $\dfrac{z_k}{k} \to M\eta_1$ *почти наверное.* Поэтому, поскольку $Mz_k = kM\eta_1$, то, в предположении, что $M\eta_1 \neq 0$, случайная величина $\zeta_k \doteq \dfrac{z_k}{Mz_k} \to 1$ почти наверное.

§ 20. Достаточные условия равенства $\varkappa(\sigma) = 1$ с вероятностью единица для линейной системы со случайными параметрами

Вернемся к рассмотрению задачи Коши

$$\dot z = a(h^t\sigma)z + b(h^t\sigma), \quad z(0,\sigma) = 0, \quad t \geqslant 0, \tag{20.1}$$

параметризованной метрической динамической системой $(\widehat\Sigma,\mathfrak{A},\nu,h^t)$, построенной в § 19.

Напомним, что вероятностное пространство $(\widehat\Sigma,\mathfrak{A},\nu)$ является прямым произведением вероятностных пространств:

$$(\widehat\Sigma,\mathfrak{A},\nu) = (\Sigma_1\times\Sigma_2,\mathfrak{A}_1\times\mathfrak{A}_2,\nu_1\times\nu_2),$$

где Σ_1 — пространство числовых последовательностей $\theta = (\theta_1,\ldots,\theta_k,\ldots)$. Предполагаем, что положительные случайные величины $\theta_1,\theta_2,\ldots$ независимы и $\theta_2,\theta_3,\ldots$ имеют функцию распределения $F(t)$. Далее, пространство

$$\Sigma_2 = \{\varphi : \varphi = (\varphi_0,\varphi_1,\ldots\varphi_k,\ldots),\varphi_k \in \widehat\Psi\},$$

где $\widehat{\Psi} = \{\widehat{\psi}_1, \dots, \widehat{\psi}_\ell\}$, и если система

$$\dot{z} = a(h^t\sigma)z + b(h^t\sigma), \quad (t, \sigma, z) \in \mathbb{R} \times \Sigma \times \mathbb{R} \tag{20.2}$$

находится в состоянии $\widehat{\psi}_i = (a_i, b_i)$, то эта система совпадает с линейным уравнением

$$\dot{z} = a_i z + b_i, \quad i = 1, \dots, \ell.$$

Пусть $C_i \doteq \dfrac{b_i}{a_i}$ и $a_i \neq 0$ для всех $i = 1, \dots, \ell$. Предполагаем также, что из любого состояния $\widehat{\psi}_1, \dots, \widehat{\psi}_\ell$, $\ell \geqslant 2$, система (20.2) переходит в состояние $\widehat{\psi}_i$ с вероятностью $p_i > 0$, $p_1 + \ldots + p_\ell = 1$ и задано начальное распределение $\pi = (p_1, \dots, p_\ell)$.

В следующем примере для задачи (20.1) в случае, когда $C_1 = \ldots = C_\ell$, получены условия равенства $\varkappa(\sigma) = 1$, выполненные с вероятностью единица. Эти результаты нужны для получения более общего утверждения.

П р и м е р 20.1. Рассмотрим задачу Коши (20.1) и предположим, что $C_1 = \ldots = C_\ell \doteq C$. Обозначим через $z_1 = z(\tau_1, \sigma)$ случайную величину на вероятностном пространстве $(\widehat{\Sigma}, \mathfrak{A}, \nu)$, которая совпадает с решением задачи (20.1) в момент времени $t = \tau_1$. Отметим, что $\tau_1 = \theta_1$ также является случайной величиной с функцией распределения $F_1(t)$, а случайная величина z_1 принимает значения $C(e^{a_i\theta_1} - 1)$ с вероятностями p_i, $i = 1, \dots, \ell$.

Найдем математическое ожидание и дисперсию z_1, используя свойства условного математического ожидания. Обозначим через $M(z_1 |\, \theta_1 = t)$ *условное математическое ожидание* случайной величины z_1 относительно события $\theta_1 = t$, тогда

$$M(z_1 |\, \theta_1 = t) = C \sum_{i=1}^{\ell} (e^{a_i t} - 1)p_i = C \sum_{i=1}^{\ell} e^{a_i t} p_i - C.$$

Поскольку случайная величина θ_1 имеет функцию распределения $F_1(t)$, по формуле полного математического ожидания найдем

$$Mz_1 = M\{M(z_1 |\, \theta_1 = t)\} = C \sum_{i=1}^{\ell} \Big(p_i \int_0^\infty e^{a_i t} dF_1(t)\Big) - C. \tag{20.3}$$

Выполняя аналогичные вычисления, найдем дисперсию случайной величины z_1 :

$$Dz_1 = C^2 \sum_{i=1}^{\ell} \Big(p_i \int_0^\infty e^{2a_i t} dF_1(t)\Big) - C^2 \left(\sum_{i=1}^{\ell} \Big(p_i \int_0^\infty e^{a_i t} dF_1(t)\Big)\right)^2. \tag{20.4}$$

Введем следующие обозначения:

$$\alpha_1 \doteq \sum_{i=1}^{\ell} \Big(p_i \int_0^\infty e^{a_i t} dF_1(t)\Big), \quad \beta_1 \doteq \sum_{i=1}^{\ell} \Big(p_i \int_0^\infty e^{2a_i t} dF_1(t)\Big),$$

тогда $Mz_1 = C(\alpha_1 - 1)$, $Dz_1 = C^2(\beta_1 - \alpha_1^2)$.

Рассмотрим последовательность случайных величин ζ_k, $k = 2, 3, \dots$, каждая из которых принимает значения $e^{a_i\theta_k}$ с вероятностями p_i, $i = 1, \dots, \ell$. Напомним, что θ_k являются независимыми случайными величинами с функцией распределения $F(t)$, тогда случайные величины ζ_k также независимы и одинаково распределены. Введем обозначения

$$\alpha \doteq \sum_{i=1}^{\ell} \Big(p_i \int_0^\infty e^{a_i t} dF(t)\Big), \quad \beta \doteq \sum_{i=1}^{\ell} \Big(p_i \int_0^\infty e^{2a_i t} dF(t)\Big)$$

и аналогично изложенному выше найдем математическое ожидание и дисперсию:

$$M\zeta_k = \alpha, \quad D\zeta_k = \beta - \alpha^2.$$

Напомним, что через $z_k = z(\tau_k, \sigma)$ мы обозначаем случайную величину на вероятностном пространстве $(\widehat{\Sigma}, \mathfrak{A}, \nu)$, которая совпадает с решением задачи (20.1) в момент времени $t = \tau_k = \theta_1 + \ldots + \theta_k$. Поскольку z_{k-1} зависит только от величин $\theta_1, \ldots, \theta_{k-1}$, а ζ_k зависит только от θ_k, из независимости случайных величин θ_k, $k \geqslant 1$, следует, что z_{k-1} и ζ_k также независимы. Кроме того, справедливо равенство

$$z_k = \zeta_k \cdot z_{k-1} + C(\zeta_k - 1), \quad k \geqslant 2. \tag{20.5}$$

Найдем зависимость между Mz_k и Mz_{k-1} :

$$Mz_k = M\zeta_k \cdot Mz_{k-1} + C(M\zeta_k - 1) = \alpha \cdot Mz_{k-1} + C(\alpha - 1), \quad k \geqslant 2.$$

Применяя последовательно предыдущую формулу и равенство (20.3), найдем математическое ожидание

$$\begin{aligned} Mz_k = \alpha^{k-1} Mz_1 + C(\alpha - 1)(\alpha^{k-2} + \ldots + \alpha^2 + \alpha + 1) = \\ = \alpha^{k-1}(Mz_1 + C) - C = C(\alpha^{k-1}\alpha_1 - 1). \end{aligned} \tag{20.6}$$

Следующая задача — выразить дисперсию Dz_k через Dz_{k-1}, $k \geqslant 2$. Сначала, используя равенство (20.5) и свойство дисперсии суммы, найдем

$$Dz_k = D(\zeta_k z_{k-1}) + 2C \cdot \mathrm{Cov}(\zeta_k z_{k-1}, \zeta_k - 1) + C^2 D(\zeta_k - 1),$$

где $\mathrm{Cov}(\xi, \eta) \doteq M(\xi - M\xi)(\eta - M\eta) = M(\xi\eta) - M\xi \cdot M\eta$ — ковариация случайных величин ξ и η. Поскольку случайные величины z_{k-1} и ζ_k независимы, то дисперсия произведения этих случайных величин равна

$$\begin{aligned} D(\zeta_k z_{k-1}) = M(\zeta_k z_{k-1})^2 - \big(M(\zeta_k z_{k-1})\big)^2 = M\zeta_k^2 M z_{k-1}^2 - (M\zeta_k)^2 (Mz_{k-1})^2 = \\ = M\zeta_k^2 Dz_{k-1} + M\zeta_k^2 (Mz_{k-1})^2 - (M\zeta_k)^2 (Mz_{k-1})^2 = M\zeta_k^2 Dz_{k-1} + (Mz_{k-1})^2 D\zeta_k. \end{aligned}$$

Найдем ковариацию $\zeta_k z_{k-1}$ и $\zeta_k - 1$:

$$\begin{aligned} \mathrm{Cov}(\zeta_k z_{k-1}, \zeta_k - 1) = M(\zeta_k z_{k-1}(\zeta_k - 1)) - M(\zeta_k z_{k-1}) \cdot M(\zeta_k - 1) = \\ = Mz_{k-1}\big(M(\zeta_k(\zeta_k - 1)) - M(\zeta_k) \cdot M(\zeta_k - 1)\big) = Mz_{k-1}\mathrm{Cov}(\zeta_k, \zeta_k - 1) = Mz_{k-1} D\zeta_k. \end{aligned}$$

Таким образом, дисперсия случайной величины z_k равна

$$\begin{aligned} Dz_k = M\zeta_k^2 Dz_{k-1} + (Mz_{k-1})^2 D\zeta_k + 2CMz_{k-1} D\zeta_k + C^2 D\zeta_k = \\ = M\zeta_k^2 Dz_{k-1} + (Mz_{k-1} + C)^2 D\zeta_k. \end{aligned} \tag{20.7}$$

Далее, из (20.4), (20.6) и (20.7) получаем

$$Dz_k = \beta^{k-1} Dz_1 + (Mz_1 + C)^2 (\beta^{k-1} - \alpha^{2(k-1)}) = C^2 \beta_1 \beta^{k-1} - C^2 \alpha_1^2 \alpha^{2(k-1)}.$$

Поскольку случайный процесс $\eta(h^t\sigma)$ удовлетворяет условию 19.1, то, согласно лемме 19.3, равенство $\varkappa(\sigma) = 1$ выполнено с вероятностью единица, если $\lim\limits_{k\to\infty} Mz_k < 0$ и сходится ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{Dz_k}{(Mz_k)^2}$. Из (20.6) следует, что $\lim\limits_{k\to\infty} Mz_k < 0$ в случае, когда $\alpha < 1$ и $C > 0$ (предел $\lim\limits_{k\to\infty} Mz_k < 0$ также и в некоторых других случаях, но там не будет сходимости ряда).

Покажем, что ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{Dz_k}{(Mz_k)^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta_1 \beta^{k-1} - \alpha_1^2 \alpha^{2(k-1)}}{(\alpha^{k-1}\alpha_1 - 1)^2}$$

сходится, если выполнено неравенство $\beta < 1$. Действительно, поскольку $D\zeta_k = \beta - \alpha^2 \geqslant 0$ и $\alpha > 0$, то из неравенства $\alpha^2 \leqslant \beta < 1$ следует неравенство $0 < \alpha < 1$. Следовательно,

$\lim\limits_{k\to\infty}\alpha^{k-1}=0$, поэтому найдется такое натуральное число k_0, что для всех $k\geqslant k_0$ выполнено неравенство $\alpha^{k-1}<\dfrac{1}{2\alpha_1}$ (из определения α_1 следует, что $\alpha_1>0$). Из последнего неравенства после некоторых преобразований получаем неравенство

$$\frac{1}{(\alpha^{k-1}\alpha_1-1)^2}<4,$$

из которого, в свою очередь, следует оценка для суммы ряда:

$$\sum_{k=k_0}^{\infty}\frac{Dz_k}{(Mz_k)^2}<4\sum_{k=k_0}^{\infty}\big(\beta_1\beta^{k-1}-\alpha_1^2\alpha^{2(k-1)}\big).$$

Последний ряд является разностью двух сходящихся рядов, поэтому исходный ряд сходится, если $\beta<1$. Таким образом, если

$$C=\frac{b_1}{a_1}=\ldots=\frac{b_\ell}{a_\ell}>0 \quad \text{и} \quad \sum_{i=1}^{\ell}\Big(p_i\int_0^\infty e^{2a_it}dF(t)\Big)<1,$$

то $\varkappa(\sigma)=\lim\limits_{\vartheta\to\infty}\dfrac{\operatorname{mes}\{t\in[0,\vartheta]:\,z(t,\sigma)\leqslant 0\}}{\vartheta}=1$ с вероятностью единица.

Т е о р е м а 20.1 (см. [129]). *Пусть выполнено условие* 19.1, $a_i\neq 0$ *для всех* $i=1,\ldots,\ell$, $\ell\geqslant 2$ *и найдется такое* $j\in\{1,\ldots,\ell\}$, *что* $a_j>0$. *Если имеют место неравенства*

$$\min_{\{i:\,a_i<0\}}\frac{b_i}{a_i}\geqslant\max_{\{i:\,a_i>0\}}\frac{b_i}{a_i},\qquad \min_{\{i:\,a_i<0\}}\frac{b_i}{a_i}>0, \tag{20.8}$$

$$\sum_{i=1}^{\ell}\Big(p_i\int_0^\infty e^{2a_it}dF(t)\Big)<1, \tag{20.9}$$

то для задачи Коши (20.1) *равенство* $\varkappa(\sigma)=1$ *имеет место с вероятностью единица.*

Далее, если $a_i<0$ *для всех* $i=1,\ldots,\ell$ *и* $\min\limits_{\{i=1,\ldots,\ell\}}\dfrac{b_i}{a_i}>0$, *то равенство* $\varkappa(\sigma)=1$ *выполнено для всех* $\sigma\in\widehat{\Sigma}$.

З а м е ч а н и е 20.1. Из неравенства (20.9) следует, что обязательно найдется такое число $j\in\{1,\ldots,\ell\}$, что $a_j<0$. Предположим, что это не так, то есть $a_i>0$ для всех $i=1,\ldots,\ell$, тогда

$$\sum_{i=1}^{\ell}\Big(p_i\int_0^\infty e^{2a_it}dF(t)\Big)>\sum_{i=1}^{\ell}\Big(p_i\int_0^\infty dF(t)\Big)=\sum_{i=1}^{\ell}p_i=1,$$

что противоречит (20.9).

Отметим также, что если случайные величины $\theta_2,\theta_3,\ldots$ имеют плотность $f(t)$, $t>0$, то неравенство (20.9) имеет вид

$$\sum_{i=1}^{\ell}\Big(p_i\int_0^\infty e^{2a_it}f(t)dt\Big)<1. \tag{20.10}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 20.1. Рассмотрим вспомогательный случайный процесс $\widetilde{\eta}(h^t\sigma)=\big(a(h^t\sigma),\widetilde{b}(h^t\sigma)\big)$ и соответствующую ему задачу Коши

$$\dot z=a(h^t\sigma)z+\widetilde{b}(h^t\sigma),\quad (t,\sigma,z)\in\mathbb{R}\times\widehat{\Sigma}\times\mathbb{R},\quad z(0,\sigma)=0. \tag{20.11}$$

Предполагаем, что случайный процесс $\widetilde{\eta}(h^t\sigma)$ определен на том же вероятностном пространстве $(\widehat{\Sigma}, \mathfrak{A}, \nu)$, что и процесс $\eta(h^t\sigma) = \big(a(h^t\sigma), b(h^t\sigma)\big)$ и отличается от данного процесса только постоянными $\widetilde{b}_1, \dots, \widetilde{b}_\ell$, которые удовлетворяют соотношениям

$$b_1 \leqslant \widetilde{b}_1, \, \dots, \, b_\ell \leqslant \widetilde{b}_\ell, \quad \frac{\widetilde{b}_1}{a_1} = \dots = \frac{\widetilde{b}_\ell}{a_\ell} > 0.$$

Покажем, что если выполнены неравенства (20.8), то такие постоянные $\widetilde{b}_1, \dots, \widetilde{b}_\ell$ существуют. Пусть $j \in \{1, \dots, \ell\}$ — такое число (или одно из таких чисел), что

$$\min_{\{i:\, a_i<0\}} \frac{b_i}{a_i} = \frac{b_j}{a_j} > 0,$$

тогда положим $\widetilde{b}_j = b_j$. Для всех $i \neq j$ определим $\widetilde{b}_i = \dfrac{a_i}{a_j}\widetilde{b}_j$, тогда для всех $a_i < 0$ выполнено неравенство $b_i \leqslant \dfrac{a_i}{a_j}\widetilde{b}_j$, то есть $b_i \leqslant \widetilde{b}_i$. Рассмотрим множество тех $i \in \{1, \dots, \ell\}$, для которых $a_i > 0$. Из неравенств (20.8) и определения $\widetilde{b}_j$ следует, что

$$\frac{b_i}{a_i} \leqslant \max_{\{i:\, a_i>0\}} \frac{b_i}{a_i} \leqslant \min_{\{i:\, a_i<0\}} \frac{b_i}{a_i} = \frac{b_j}{a_j} = \frac{\widetilde{b}_j}{a_j},$$

то есть $b_i \leqslant \dfrac{a_i}{a_j}\widetilde{b}_j = \widetilde{b}_i$. Отметим, что из неравенства $\dfrac{\widetilde{b}_j}{a_j} > 0$ и определения $\widetilde{b}_i$ для любых значений a_i следует соотношение

$$\frac{\widetilde{b}_1}{a_1} = \dots = \frac{\widetilde{b}_\ell}{a_\ell} > 0.$$

Пусть $\widetilde{z}(t,\sigma)$ — решение задачи Коши (20.11) при некотором фиксированном $\sigma \in \widehat{\Sigma}$, определим характеристику

$$\widetilde{\varkappa}(\sigma) \doteq \lim_{\vartheta\to\infty} \frac{\operatorname{mes}\{t \in [0,\vartheta] : \, \widetilde{z}(t,\sigma) \leqslant 0\}}{\vartheta}$$

— относительную частоту попадания траектории решения $\widetilde{z}(t,\sigma)$ в множество $(-\infty, 0]$. Обозначим через Σ_0 множество тех $\sigma \in \widehat{\Sigma}$, для которых выполнено условие 19.1 и одновременно равенство $\widetilde{\varkappa}(\sigma) = 1$. Из условий

$$\sum_{i=1}^{\ell} \Big(p_i \int_0^\infty e^{2a_i t} dF(t)\Big) < 1 \quad \text{ и } \quad \frac{\widetilde{b}_1}{a_1} = \dots = \frac{\widetilde{b}_\ell}{a_\ell} > 0$$

следует, что $\widetilde{\varkappa}(\sigma) = 1$ с вероятностью единица (см. пример 20.1, с. 109), тогда $\nu(\Sigma_0) = 1$. Пусть $z(t,\sigma)$ — решение задачи (20.1) при некотором фиксированном $\sigma \in \Sigma_0$, тогда из неравенств $b_1 \leqslant \widetilde{b}_1, \dots, b_\ell \leqslant \widetilde{b}_\ell$ следует, что в точках дифференцируемости функция $z(t,\sigma)$ удовлетворяет неравенству

$$\dot{z} \leqslant a(h^t\sigma)z + \widetilde{b}(h^t\sigma), \quad t \geqslant 0.$$

Поэтому в силу теоремы 18.1 для заданного $\sigma \in \Sigma_0$ для всех $t \geqslant 0$ имеет место неравенство $z(t,\sigma) \leqslant \widetilde{z}(t,\sigma)$, где $\widetilde{z}(t,\sigma)$ — решение задачи Коши (20.11) при том же значении $\sigma \in \Sigma_0$.

Далее, для каждого $\sigma \in \Sigma_0$ из неравенства $z(t,\sigma) \leqslant \widetilde{z}(t,\sigma)$ следует неравенство для относительных частот:

$$\varkappa(\sigma) \geqslant \widetilde{\varkappa}(\sigma) = 1.$$

Таким образом, $\varkappa(\sigma) = 1$ для всех $\sigma \in \Sigma_0$ и $\nu(\Sigma_0) = 1$, то есть равенство $\varkappa(\sigma) = 1$ выполнено с вероятностью единица.

Теперь рассмотрим случай, когда $a_i < 0$ для всех $i = 1, \dots, \ell$. Здесь из неравенства $\displaystyle\min_{\{i=1,\dots,\ell\}} \frac{b_i}{a_i} > 0$ следует, что $b_i < 0$ для всех $i = 1, \dots, \ell$, поэтому, так же как и в замечании 12.1, можно показать, что для всех $\sigma \in \widehat{\Sigma}$ и всех $t \geqslant 0$ выполнено неравенство $z(t,\sigma) \leqslant 0$. Следовательно, предел $\varkappa(\sigma)$ существует и $\varkappa(\sigma) = 1$ для всех $\sigma \in \widehat{\Sigma}$.

§ 21. Примеры управляемых систем, для которых $\varkappa(\sigma) = 1$ с вероятностью единица

П р и м е р 21.1. Исследуем, при каких условиях равенство $\varkappa(\sigma) = 1$ выполнено с вероятностью единица для следующей задачи

$$\dot{z} = b(h^t\sigma), \quad z(0,\sigma) = 0, \quad t \geqslant 0, \tag{21.1}$$

параметризованной динамической системой $(\widehat{\Sigma}, \mathfrak{A}, \nu, h^t)$. Здесь вероятностное пространство $(\widehat{\Sigma}, \mathfrak{A}, \nu)$ является прямым произведением двух вероятностных пространств $(\Sigma_1, \mathfrak{A}_1, \nu_1)$ и $(\Sigma_2, \mathfrak{A}_2, \nu_2)$, которые описаны в параграфе 17. Напомним, что Σ_1 является пространством числовых последовательностей $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_k, \ldots)$ и предположим, что положительные случайные величины $\theta_1, \theta_2, \ldots$ независимы, $\theta_2, \theta_3, \ldots$ имеют одинаковое распределение с математическим ожиданием $m_\theta < \infty$, математическое ожидание случайной величины θ_1 равно $m_1 < \infty$.

Пусть $\Sigma_2 = \{\varphi : \varphi = (\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_k, \ldots),\ \varphi_k \in \widehat{\Psi}\}$, где множество $\widehat{\Psi} = \{\widehat{\psi}_1, \ldots, \widehat{\psi}_\ell\}$, и если система (21.1) находится в состоянии $\widehat{\psi}_i$, то движение данной системы удовлетворяет уравнению

$$\dot{z} = b_i, \quad i = 1, \ldots, \ell.$$

Предположим, что из любого состояния $\widehat{\psi}_1, \ldots, \widehat{\psi}_\ell$ система переходит в состояние $\widehat{\psi}_i$ с вероятностью p_i, $p_1 + \ldots + p_\ell = 1$, независимо от предыдущего состояния, тогда случайные величины $b_1, b_2, \ldots$ независимы. Пусть задано начальное распределение $\pi = (p_1, \ldots, p_\ell)$, которое является решением системы (17.6), следовательно, является также и стационарным распределением вероятностей цепи Маркова.

Рассмотрим случайную величину $\eta(\sigma) = \varphi_0$, которая принимает значения $\widehat{\psi}_i = b_i$, если $\varphi_0 = \widehat{\psi}_i$, $i = 1, \ldots, \ell$. Обозначим через $\eta(h^t\sigma) \doteq b(h^t\sigma)$ стационарный случайный процесс, порождаемый потоком $h^t\sigma$, который будем отождествлять с задачей (21.1).

Функцию $z(t,\sigma)$ — решение задачи (21.1) будем рассматривать как случайный процесс, определенный на вероятностном пространстве $(\widehat{\Sigma}, \mathfrak{A}, \nu)$. На рисунке 20 изображена одна из возможных реализаций этого процесса. Введем в рассмотрение последовательность случайных величин $\{z_k\}_{k=1}^{\infty}$, где $z_k \doteq z(\tau_k, \sigma)$, совпадающую со значениями решения $z(t,\sigma)$ задачи (21.1) в точках $\tau_1, \tau_2, \ldots$, которые являются точками переключения процесса $\eta(h^t\sigma)$. Покажем, что для задачи (21.1) случайную величину z_k можно представить в виде суммы независимых одинаково распределенных случайных величин $\eta_1, \ldots, \eta_k$. Действительно, если $b(h^t\sigma) = \varphi_k = b_k$ при $t \in [\tau_k, \tau_{k+1})$, то

$$z_k = z(\tau_k, \sigma) = b_k\theta_k + z_{k-1}, \quad k = 1, 2, \ldots$$

тогда из независимости случайных величин $\theta_1, \theta_2, \ldots$ и $b_1, b_2, \ldots$ следует независимость величин $\eta_k \doteq z_k - z_{k-1} = b_k\theta_k$, $k = 1, 2, \ldots$

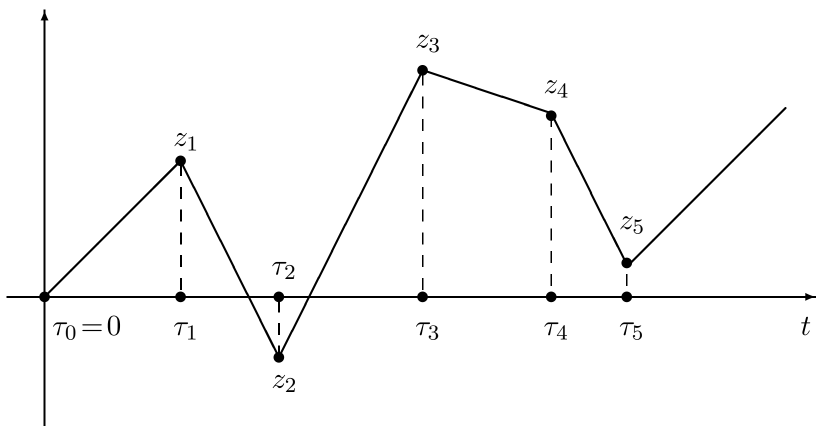

Рис. 20. График функции $t \to z(t,\sigma)$ и последовательность $\{z_k\}_{k=1}^{\infty}$, где $z_k \doteq z(\tau_k, \sigma)$

Поскольку распределение $\pi = (p_1, \dots, p_\ell)$ является стационарным распределением вероятностей, то для любого $k \in \mathbb{N}$ математическое ожидание $Mb_k = \sum\limits_{i=1}^{\ell} b_i p_i \doteq m_b$ и из независимости случайных величин θ_k и b_k следует, что

$$M\eta_1 = M(b_1\theta_1) = Mb_1 M\theta_1 = m_b m_1,$$
$$M\eta_k = M(b_k\theta_k) = Mb_k M\theta_k = m_b m_\theta, \quad k = 2, 3, \dots$$

Случайная величина z_k равна сумме $\eta_1 + \ldots + \eta_k$, следовательно,

$$Mz_k = \sum_{i=1}^{k} M\eta_i = m_b m_1 + (k-1) m_b m_\theta.$$

Отметим, что $\theta_i > 0$ для всех $i = 1, 2, \dots$, тогда $m_1 > 0$, $m_\theta > 0$ и если $m_b < 0$, то $Mz_k \to -\infty$ при $k \to \infty$.

Покажем, что последовательность случайных величин

$$\{\zeta_k\}_{k=1}^{\infty}, \quad \text{где} \quad \zeta_k \doteq \frac{z_k}{Mz_k}, \;\; Mz_k \neq 0,$$

сходится к единице почти наверное. Поскольку математические ожидания

$$m_1, \; m_\theta \;\; \text{и} \;\; M|b_k| = \sum_{i=1}^{\ell} |b_i| p_i$$

конечны, то $M|\eta_k| < \infty$ для всех $k \in \mathbb{N}$. Следовательно, в силу теоремы Колмогорова, последовательность случайных величин

$$\{\gamma_k\}_{k=2}^{\infty}, \quad \text{где} \quad \gamma_k = \frac{\eta_2 + \ldots + \eta_k}{k-1},$$

сходится к математическому ожиданию $M\eta_k = m_b m_\theta$ почти наверное. Рассмотрим случайные величины

$$\frac{z_k}{k} = \frac{\eta_1 + \ldots + \eta_k}{k-1} \cdot \frac{k-1}{k},$$

тогда последовательность $\{z_k/k\}_{k=1}^{\infty}$ также сходится к $m_b m_\theta$ почти наверное. Далее, если $m_b \neq 0$, то

$$\zeta_k = \frac{z_k}{Mz_k} = \frac{z_k}{m_b(m_1 + (k-1)m_\theta)} = \frac{z_k}{k m_b m_\theta} \cdot \frac{k m_\theta}{m_1 + (k-1)m_\theta},$$

поэтому последовательность $\{\zeta_k\}_{k=1}^{\infty}$ сходится к единице почти наверное. Таким образом, в силу леммы 19.2, если математическое ожидание $m_b = \sum\limits_{i=1}^{\ell} b_i p_i < 0$, то $\varkappa(\sigma) = 1$ с вероятностью единица.

П р и м е р 21.2. Рассмотрим управляемую систему

$$\dot{x} = A(h^t\sigma)x + B(h^t\sigma)u, \quad (t, \sigma, x, u) \in \mathbb{R} \times \Sigma \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}, \tag{21.2}$$

которую мы отождествляем со случайным процессом $\xi(h^t\sigma) \doteq \big(A(h^t\sigma), B(h^t\sigma)\big)$. Предполагаем, что система (21.2) параметризована метрической динамической системой $(\Sigma, \mathfrak{A}, \nu, h^t)$ (которая описана в параграфе 17), где $\Sigma = \Sigma_1 \times \Sigma_2$, множество Σ_1 является множеством числовых последовательностей $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_k, \dots)$, где $\theta_k \in (0, \infty)$. Далее,

$$\Sigma_2 \doteq \big\{\varphi : \varphi = (\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_k, \dots), \; \varphi_k \in \Psi\big\}$$

и множество Ψ содержит два состояния $\psi_i = (A_i, B_i)$, $i = 1, 2$, где

$$A_1 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \; B_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0,5 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \; B_2 = \begin{pmatrix} 0,5 \\ -0,5 \end{pmatrix}.$$

Системе (21.2) и множеству $U = [0,5; 1]$ поставим в соответствие дифференциальное включение

$$\dot{x} \in F(h^t\sigma, x), \tag{21.3}$$

где для каждой фиксированной точки $(\sigma, x) \in \Sigma \times \mathbb{R}^n$ множество $F(\sigma, x)$ состоит из всех предельных значений функции

$$(t, x) \to f\bigl(h^t\sigma, x, U\bigr) = A(h^t\sigma)x + B(h^t\sigma)U$$

при $(t_i, x_i) \to (0, x)$.

Обозначим через Σ_{1i}, $i = 1, 2$ подмножество Σ_1, которое является множеством последовательностей

$$\{\varphi : \varphi = (\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_k, \ldots), \, \varphi_0 = \psi_i, \varphi_k \in \Psi\}$$

с фиксированой первой координатой: $\varphi_0 = \psi_i = (A_i, B_i)$, $i = 1, 2$. Поскольку множество Ψ содержит два состояния ψ_1, ψ_2, то $\Sigma_1 = \Sigma_{11} \bigcup \Sigma_{12}$ и пространство Σ можно представить в виде суммы непересекающихся множеств

$$\Sigma = \Sigma^1 \cup \Sigma^2, \quad \text{где} \quad \Sigma^1 = \Sigma_{11} \times \Sigma_2, \;\; \Sigma^2 = \Sigma_{12} \times \Sigma_2.$$

Таким образом, если $\sigma \in \Sigma^i$, то $f(\sigma, x, u) = A_i x + B_i u$, $i = 1, 2$, поэтому данная функция удовлетворяет условию 17.1, с. 96.

Рассмотрим следующую задачу: выяснить, при каких $r > 0$ замкнутый шар $O_r(0)$ является статистически слабо инвариантным множеством с вероятностью единица относительно управляемой системы (21.2). Рассмотрим функцию Ляпунова

$$V(\sigma, x) = x_1^2 + x_2^2 - r^2, \quad x = (x_1, x_2),$$

относительно множества $O_r(0)$ и найдем нижние производные данной функции в силу включения (21.3). Если $\sigma \in \Sigma^1$, то

$$V^o_{\min}(\sigma, x) = \begin{cases} -2x_1^2 - 2x_2^2 + \dfrac{1}{2}\, x_2 \;\text{ при }\; x_2 \geqslant 0, \\ -2x_1^2 - 2x_2^2 + x_2 \quad \text{при} \quad x_2 < 0, \end{cases}$$

если $\sigma \in \Sigma^2$, то

$$V^o_{\min}(\sigma, x) = \begin{cases} -2x_1^2 - 2x_2^2 + \dfrac{1}{2}(x_1 - x_2) \;\text{ при }\; x_1 \geqslant x_2, \\ -2x_1^2 - 2x_2^2 + x_1 - x_2 \quad \text{при} \quad x_1 < x_2. \end{cases}$$

Несложно проверить, что для функции

$$w(\sigma, z) = \begin{cases} -2z + \dfrac{\sqrt{2}}{8} - 2r^2, \;\text{ если }\; \sigma \in \Sigma^1, \\ -2z + \dfrac{1}{2} - 2r^2, \quad \text{если} \quad \sigma \in \Sigma^2, \end{cases}$$

для всех $(\sigma, x) \in \Sigma \times \mathbb{R}^2$ выполнено неравенство

$$V^o_{\min}(\sigma, x) \leqslant w\bigl(\sigma, V(\sigma, x)\bigr).$$

Функция $V(\sigma, x)$ является бесконечно большой функцией Ляпунова относительно множества $O_r(0)$, поэтому из последнего неравенства и теоремы 10.1 следует, что для всех $\sigma \in \Sigma$ для каждой точки $x \in O_r(0)$ существует решение включения (21.3), удовлетворяющее начальному условию $\varphi(0,\sigma,x)=x$ и продолжаемое на полуось $\mathbb{R}_+$.

Далее, поскольку при $r \geqslant 1/2$ имеют место неравенства

$$b_1 = \frac{\sqrt{2}}{8} - 2r^2 \leqslant 0, \quad b_2 = \frac{1}{2} - 2r^2 \leqslant 0,$$

то (см. замечание 12.1, с. 70) равенство $\varkappa(\sigma)=1$ выполнено для всех $\sigma \in \Sigma$. Следовательно, в силу теоремы 18.3 множество $O_r(0)$, где $r \geqslant 1/2$, статистически слабо инвариантно с вероятностью единица относительно управляемой системы (21.2).

Проводя аналогичные рассуждения, можно показать, что при $r \geqslant \sqrt{2}/2$ множество $O_r(0)$ статистически инвариантно с вероятностью единица относительно системы (21.2).

П р и м е р 21.3. Рассмотрим билинейную управляемую систему

$$\dot{x} = \big(A(h^t\sigma) + B(h^t\sigma)u\big)x, \quad (t,\sigma,x,u) \in \mathbb{R} \times \Sigma \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}, \tag{21.4}$$

которая параметризована метрической динамической системой $(\Sigma, \mathfrak{A}, \nu, h^t)$, где $\Sigma = \Sigma_1 \times \Sigma_2$, Σ_1 — пространство числовых последовательностей $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_k, \ldots)$, $\theta_k \in (0,\infty)$. Предполагаем, что $\theta_1, \theta_2, \ldots$ являются независимыми случайными величинами, причем $\theta_2, \theta_3, \ldots$ имеют равномерное распределение на отрезке $[0, 1/2]$. Функция распределения случайной величины θ_1 определяется из равенства (17.7) (не будем ее выписывать, поскольку распределение θ_1 не влияет на результат задачи). Пространство

$$\Sigma_2 \doteq \big\{\varphi : \varphi = (\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_k, \ldots),\ \varphi_k \in \Psi\big\},$$

множество Ψ содержит два состояния $\psi_i = (A_i, B_i)$, $i=1,2$, где

$$A_1 = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},\ B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0,5 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Предположим, что из любого состояния ψ_1, ψ_2 система переходит в состояние ψ_1 с вероятностью $p_1 = 1 - e^{-5}$ или в состояние ψ_2 с вероятностью $p_2 = e^{-5}$, независимо от предыдущего состояния.

По системе (21.4) и множеству $U = [0,5; 1]$ построим дифференциальное включение

$$\dot{x} \in F(h^t\sigma, x), \tag{21.5}$$

где для каждой фиксированной точки $(\sigma, x) \in \Sigma \times \mathbb{R}^n$ множество $F(\sigma,x)$ состоит из всех предельных значений функции

$$(t,x) \to f\big(h^t\sigma, x, U\big) = \big(A(h^t\sigma) + B(h^t\sigma)U\big)x$$

при $(t_i, x_i) \to (0, x)$.

Множества Σ_{11}, Σ_{12} и Σ^1, Σ^2 определим так же, как в предыдущем примере. Отметим, что если $\sigma \in \Sigma^i$, то

$$f(\sigma,x,u) = \big(A_i + B_i u\big)x, \quad i=1,2,$$

следовательно, функция $f(\sigma,x,u)$ удовлетворяет условию 17.1.

Покажем, что при любых $r > 0$ замкнутый шар $O_r(0)$ является статистически инвариантным множеством с вероятностью единица относительно управляемой системы (21.4). Для функции Ляпунова

$$V(\sigma,x) = x_1^2 + x_2^2 - r^2, \quad x = (x_1, x_2),$$

относительно множества $O_r(0)$ найдем верхнюю производную в силу включения (21.5):

$$V^o_{\max}(\sigma,x) = \begin{cases} -2x_1^2 - x_2^2, & \text{если} \quad \sigma \in \Sigma^1, \\ 4x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_2^2, & \text{если} \ \ \sigma \in \Sigma^2. \end{cases}$$

Отметим, что функции $V^o_{\max}(\sigma,x)$ и

$$w(\sigma,z)=\begin{cases} -z-r^2, & \text{если} \quad \sigma\in\Sigma^1,\\ 5z+5r^2, & \text{если} \ \ \sigma\in\Sigma^2,\end{cases}$$

для всех $(\sigma,x)\in\Sigma\times\mathbb{R}^2$ удовлетворяют неравенству

$$V^o_{\max}(\sigma,x)\leqslant w\big(\sigma,V(\sigma,x)\big) \tag{21.6}$$

и функция $w(\sigma,z)$ удовлетворяет условию 18.1. Поскольку $V(\sigma,x)$ является бесконечно большой функцией Ляпунова, то из неравенства (21.6) в силу теоремы 10.2 следует, что для всех $\sigma\in\Sigma$ для каждой точки $x\in O_r(0)$ все решения включения (21.5), удовлетворяющие начальному условию $\varphi(0,\sigma,x)=x$, продолжаемы на полуось $\mathbb{R}_+$.

Теперь покажем, что для решения $z(t,\sigma)$ задачи Коши (19.3) равенство $\varkappa(\sigma)=1$ выполнено с вероятностью единица. Задача (19.3) параметризована динамической системой $(\widehat{\Sigma},\mathfrak{A},\nu,h^t)$, для которой множество $\widehat{\Psi}$ содержит два состояния $\widehat{\psi}_1=(-1,-r^2)$, $\widehat{\psi}_2=(5,5r^2)$. Следовательно,

$$\min_{\{i:\,a_i<0\}}\frac{b_i}{a_i}=\max_{\{i:\,a_i>0\}}\frac{b_i}{a_i}=r^2,\qquad \min_{\{i:\,a_i<0\}}\frac{b_i}{a_i}=r^2>0,$$

то есть выполнены неравенства (20.8). Отметим, что плотность $f(t)$ равномерного распределения на отрезке $[0,1/2]$ равна

$$f(t)=\begin{cases} 2, & \text{если} \ \ t\in[0,1/2],\\ 0, & \text{если} \ \ t\notin[0,1/2]\end{cases}$$

и проверим неравенство (20.10):

$$\sum_{i=1}^{2}\Big(p_i\int_0^\infty e^{2a_it}f(t)dt\Big)=2(1-e^{-5})\int_0^{1/2}e^{-2t}dt+2e^{-5}\int_0^{1/2}e^{10t}dt=$$
$$=(1-e^{-5})(1-e^{-1})+\frac{1}{5}(1-e^{-5})=(1-e^{-5})(1-e^{-1}+5^{-1})<1.$$

Отметим также, что функция $F(t)$ равномерного распределения на отрезке $[0,1/2]$ равна

$$F(t)=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad t\in(-\infty,0),\\ 2t & \text{при} \quad t\in[0,1/2],\\ 1 & \text{при} \quad t\in(1/2,\infty),\end{cases}$$

поэтому в силу леммы 19.1 условие 19.1 выполнено для почти всех $\sigma\in\Sigma$.

Таким образом, из теорем 18.2 и 20.1 следует, что для любых $r>0$ шар $O_r(0)$ является множеством, статистически инвариантным с вероятностью единица относительно системы (21.4).

ГЛАВА VI. УСЛОВИЯ ПОЛНОЙ УПРАВЛЯЕМОСТИ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ В КРИТИЧЕСКОМ СЛУЧАЕ

Изучению условий полной и локальной управляемости линейных систем посвящено немало работ, среди которых классические работы Р. Калмана [61, 62, 210, 211], Н. Н. Красовского [77, 80], Р. Габасова и Ф. М. Кирилловой [23–25], Э.М. Ли и Л. Маркуса [93]. В большинстве из приведенных выше работ исследуется так называемый невырожденный случай, когда для линейной системы S :

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \quad t \in \mathbb{R}, \ x \in \mathbb{R}^n, \ u \in \mathbb{R}^m$$

выполнено условие $\operatorname{rank} K(t,S) = n$. Здесь

$$K(t,S) = \big\{K_0(t,S), \dots, K_{n-1}(t,S)\big\},$$

$$K_0(t,S) = B(t), \dots, K_i(t) = A(t)K_{i-1}(t,S) - \dot{K}_{i-1}(t,S), \quad i = 1, \dots, n-1.$$

Н. Н. Красовским получено достаточное условие полной управляемости системы S, которое заключается в том, что *если на отрезке $I = [t_0, t_1]$ найдется точка t^* такая, что $\operatorname{rank} K(t^*, S) = n$, то система S вполне управляема на I* (см. [77, с. 148]). Известно, что это условие не является необходимым и существуют примеры вполне управляемых систем, для которых $\operatorname{rank} K(t,S) \leqslant n-1$ при всех $t \in I$ (см. [90, 104]). Условиям полной управляемости нестационарной линейной системы также посвящены работы белорусских математиков Л. Е. Забелло, А. А. Левакова и С. А. Минюка. В работах Л. Е. Забелло [51, 52] получены необходимые условия управляемости линейной системы $\widehat{S}$:

$$\dot{x} = A(t)x + b(t)u, \quad (t, x, u) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$$

с кусочно-постоянными матрицей $A(t)$ и вектором $b(t)$. А. А. Леваков [90] получил необходимые и достаточные условия, при которых пространство управляемости $L(\widehat{S}, I)$ является одномерным векторным подпространством $\mathbb{R}^n$, то есть условия, при которых $\dim L(\widehat{S}, I) = 1$. При $n = 2$ условие $\dim L(\widehat{S}, I) = 1$ равносильно неуправляемости системы S. С. А. Минюк [104] получил необходимые и достаточные условия полной управляемости системы $\widehat{S}$, но его условия очень громоздкие, поэтому они не приведены в данной работе.

Настоящая глава дополняет результаты работ [26, 51, 52, 90, 104] и посвящена исследованию условий, при которых система S в предположении, что $\operatorname{rank} K(t,S) \leqslant n-1$ для всех $t \in I$, вполне управляема на отрезке I либо не обладает этим свойством. Здесь получены утверждения о размерности и структуре пространства управляемости $L(S,I)$ системы S на отрезке I, выраженные в терминах матрицы $K(t,S)$. В частности, показано, что размерность пространства управляемости $L(S,I)$ удовлетворяет неравенству

$$\dim L(S,I) \geqslant \operatorname{rank} K(t,S) \quad \text{для всех} \quad t \in I.$$

Далее, если $\operatorname{rank} K(t,S) \equiv r$ для всех $t \in I = [t_0, t_1]$, то пространство управляемости системы S на отрезке I представимо в виде

$$L(S,I) = K(t_0, S)\,\mathbb{R}^{nm} \quad \text{и} \quad \dim L(S,I) = r.$$

В последнем параграфе главы получены необходимые и достаточные условия полной управляемости линейной системы S в предположении, что ранг матрицы $K(t,S)$ меньше n. Здесь рассматривается случай, когда $\operatorname{rank} K(t,S) \equiv r_1$ при всех $t \in \mathfrak{I}_1 \doteq (t_0, \tau)$ и $\operatorname{rank} K(t,S) \equiv r_2$ при всех $t \in \mathfrak{I}_2 \doteq (\tau, t_1)$. Рассмотрены примеры применения полученных утверждений.

§ 22. Структура пространства управляемости нестационарной линейной системы

Основным объектом исследования в этой главе является линейная нестационарная система

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \quad (t, x, u) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m, \tag{22.1}$$

где $A(\cdot) \in C^{n-1}(\mathbb{R}, M(n))$, $B(\cdot) \in C^{n-1}(\mathbb{R}, M(n,m))$. Будем отождествлять систему (22.1) с функцией

$$t \to S(t) \doteq \big(A(t), B(t)\big) \in M(n, n+m),$$

ее задающей. В качестве *допустимых управлений* $u(\cdot)$ системы S берутся всевозможные измеримые по Лебегу и ограниченные на своей области определения функции. *Допустимым решением* системы S с начальным условием $x(t_0) = x_0$ называется абсолютно непрерывная вектор-функция $x(t) = x(t, t_0, x_0)$, которая почти всюду на отрезке $I \doteq [t_0, t_1]$ удовлетворяет данной системе при некотором допустимом управлении $u(\cdot)$.

О п р е д е л е н и е 22.1 (Р. Калман, [210]). Состояние $x_0 \in \mathbb{R}^n$ системы S называется *управляемым в момент времени* t_0, если его можно перевести за конечное время $[t_0, t_1]$ в начало координат вдоль решения системы S, то есть если существуют $t_1 > t_0$ и управление $u : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}^m$ такие, что решение $x(\cdot)$ задачи Коши

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u(t), \quad x(t_0) = x_0 \tag{22.2}$$

удовлетворяет равенству $x(t_1) = 0$.

Система S называется *вполне управляемой в момент* t_0, если всякое состояние $x_0 \in \mathbb{R}^n$ управляемо в этот момент времени.

Обозначим через $X(t,s)$ матрицу Коши однородной системы

$$\dot{x} = A(t)x$$

и рассмотрим при каждом $t_0 \in \mathbb{R}$ симметричную $n \times n$ матрицу

$$W(S, I) = \int_{t_0}^{t_1} X(t_0, s)B(s)B^*(s)X^*(t_0, s)ds. \tag{22.3}$$

Матрицу $W(S, I)$ называют *матрицей управляемости (матрицей Калмана)* системы S на отрезке $I = [t_0, t_1]$. Одним из первых результатов в теории управляемости линейных систем, по-видимому, является следующий критерий.

Т е о р е м а 22.1 (Р. Калман, [61], [210]). *Состояние x_0 системы S управляемо в момент времени t_0 в том и только том случае, когда при некотором $t_1 > t_0$ точка x_0 принадлежит множеству значений линейного оператора $W(S, I)$.*

Достаточно ясно (Р. Калман, [62]), что функция $t \to \operatorname{rank} W(S, [t_0, t])$ неубывает на $[t_0, +\infty)$. Далее, поскольку эта функция принимает значения во множестве чисел $\{0, 1, \ldots, n\}$, то существует момент времени $t_1 > t_0$ такой, что

$$\operatorname{rank} W(S, [t_0, t_1]) = \max\big\{\operatorname{rank} W\big(S, [t_0, t]\big) : t \in [t_0, +\infty)\big\}.$$

Следовательно, если максимальный ранг матрицы $W(S, I)$ равен n (размерности системы), то всякое состояние системы S управляемо в нуль за время $[t_0, t_1]$. Поэтому можно ввести следующее определение.

О п р е д е л е н и е 22.2 (Р. Калман, [210]; Н. Н. Красовский, [77]). Система S называется *вполне управляемой на отрезке* $I \doteq [t_0, t_1]$, если для каждого $x_0 \in \mathbb{R}^n$ найдется управление $u : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}^m$ такое, что решение $x(\cdot)$ задачи Коши (22.2) удовлетворяет равенству $x(t_1) = 0$.

Далее, система S называется *вполне управляемой*, если для каждого момента времени $t_0 \in \mathbb{R}$ найдется значение $t_1 > t_0$ такое, что система S вполне управляема на отрезке $[t_0, t_1]$.

Если система S стационарна, то есть матрицы A и B не зависят от времени, то для полной управляемости данной системы необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\operatorname{rank}\{B, AB, \ldots, A^{n-1}B\} = n.$$

Этот результат был получен для системы с одним входом (то есть при $m = 1$) в работе [61] и в общем случае — в [216].

Напомним еще одно понятие, важное для дальнейших исследований.

О п р е д е л е н и е 22.3. Пространство $L(S) = L(S, I) \subseteq \mathbb{R}^n$ называется *пространством управляемости* системы S на отрезке $I = [t_0, t_1]$, если в него входят все точки $x_0 \in \mathbb{R}^n$, для каждой из которых существует такое допустимое управление $u : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}^m$, что соответствующее ему решение удовлетворяет условию $x(t_1, t_0, x_0) = 0$.

Пространство $L(S, I)$ является линейным подпространством $\mathbb{R}^n$. В случае, если $\dim L(S, I) = n$, система S является вполне управляемой на отрезке I.

Обозначим через $S_i = (A, b_i)$ линейную систему

$$\dot{x} = A(t)x + b_i(t)u_i,$$

где $b_i(t)$ — i-й столбец матрицы $B(t)$, $i = 1, \ldots, m$. Непосредственно из определения $L(S)$ следуют равенства

$$L(S) = \int_{t_0}^{t_1} X(t_0, t)B(t)\mathbb{R}^m dt \quad \text{и} \quad L(S) = L(S_1) + \ldots + L(S_m).$$

Нетрудно показать (см. [62]), что $L(S, I) = W(S, I)\mathbb{R}^n$ и поэтому размерность пространства управляемости $L(S, I)$ равна рангу матрицы Калмана $W(S, I)$. Следовательно, если $W(S, I)$ имеет максимальный ранг (равный n), то система S вполне управляема на отрезке I. Далее, из равенства

$$x_0^* W(S)x_0 = \int_{t_0}^{t_1} |x_0^* X(t_0, t)B(t)|^2 dt$$

следует, что $x_0 \in L(S, I)$ в том и только том случае, если $x_0 = 0$ или $x_0^* X(t_0, t)B(t) \not\equiv 0$.

О п р е д е л е н и е 22.4. Две системы $S = (A, B)$ и $\widehat{S} = (F, G)$ называются *подобными,* если существует матрица подобия $U(t)$, то есть непрерывно дифференцируемая функция $t \to U(t) \in M(n)$ такая, что $\det U(t) \neq 0$ для всех $t \in I$ и имеют место равенства

$$F(t) = U^{-1}(t)A(t)U(t) - U^{-1}(t)\dot{U}(t), \quad G(t) = U^{-1}(t)B(t). \tag{22.4}$$

Обозначим через $Y(t, s)$ матрицу Коши системы $\dot{y} = F(t)y$, тогда если системы S и $\widehat{S}$ подобны, то

$$X(t, s) = U(t)Y(t, s)U^{-1}(s).$$

Следовательно, матрицы Калмана и пространства управляемости подобных систем связаны равенствами

$$W(S, I) = U(t_0)W(\widehat{S}, I)U^*(t_0) \quad \text{и} \quad L(S, I) = U(t_0)L(\widehat{S}, I).$$

Л е м м а 22.1 (см. [122]). *Пусть фиксирована система* S *и размерность пространства управляемости* $\dim L(S,I) = r \leqslant n$. *Тогда во множестве всех систем, подобных системе* S, *существует канонический представитель, то есть система* $\widehat{S} = (F,G)$, *у которой* $F(t)$ — *верхняя треугольная матрица,* $G(t) = \operatorname{col}(G_0(t),0)$, *где* $G_0(t) \in M(r,m)$, *причем матрица подобия ортогональная:*

$$U(t)U^*(t) = E \quad \text{для всех} \quad t \in I.$$

Далее, если $\widehat{S}$ — *канонический представитель системы* S, *то пространство управляемости* $L(\widehat{S},I) = \operatorname{Lin}\{e_1,\ldots,e_r\}$ *и поэтому*

$$L(S,I) = U(t_0)\operatorname{Lin}\{e_1,\ldots,e_r\}.$$

Л е м м а 22.2 (см. [132]). *Пространство управляемости* $L(\widehat{S},I)$ *канонического представителя* $\widehat{S}$ *системы* S *сильно инвариантно. Это означает, что если* $y(t_0) \in L(\widehat{S},I)$, *то* $y(t) \in L(\widehat{S},I)$ *для любого допустимого решения* $y(t)$ *системы* $\widehat{S}$ *и всех* $t \in I$. *Поэтому множество*

$$\mathcal{L}(S) \doteq \big\{(t,x) \in \mathbb{R}^{1+n} : t \in I,\, x \in U(t)U^*(t_0)L(S,I)\big\}$$

сильно инвариантно относительно S : *если* $x(t_0) \in L(S,I)$, *то*

$$(t,x(t)) \in \mathcal{L}(S)$$

для любого допустимого решения $x(t)$ *системы* S *и всех* $t \in I$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\dim L(\widehat{S},I) = r$, $y = \operatorname{col}(y_1,y_2)$, где $y_1 \in \mathbb{R}^r$, $y_2 \in \mathbb{R}^{n-r}$, тогда в силу леммы 22.1 система $\widehat{S}$ имеет вид

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = F_{11}(t)y_1 + F_{12}(t)y_2 + G_0(t)u, \\ \dot{y}_2 = F_{22}(t)y_2. \end{cases}$$

Поэтому включение $y(t_0) \in L(\widehat{S},I)$ имеет место в том и только том случае, когда $y_2(t_0) = 0$. Следовательно, $y_2(t) \equiv 0$, что и доказывает первое утверждение леммы. Далее, из равенств

$$x(t) = U(t)y(t), \quad L(S,I) = U(t_0)L(\widehat{S},I)$$

и включения $y(t) \in L(\widehat{S},I)$ следует включение

$$x(t) \in U(t)L(\widehat{S},I) = U(t)U^*(t_0)L(S,I).$$

Л е м м а 22.3 (см. [132]). *Предположим, что существует разбиение отрезка* $I \doteq [t_0,t_1]$ *точками* $t_0 = \tau_0 < t_1 < \ldots < \tau_\ell = t_1$ *на интервалы* (τ_{k-1},τ_k), *и пусть* $L(S,I_k)$ — *пространство управляемости системы* S *для каждого из отрезков* $I_k \doteq [\tau_{k-1},\tau_k]$, $k = 1,\ldots,\ell$. *Тогда*

$$L(S,I) = \sum_{k=1}^{\ell} X(t_0,\tau_{k-1})L(S,I_k),$$

где $X(t,s)$ — *матрица Коши системы* $\dot{x} = A(t)x$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку для каждого отрезка I_k пространство

$$L(S,I_k) = \int_{\tau_{k-1}}^{\tau_k} X(\tau_{k-1},t)B(t)\mathbb{R}^m dt,$$

то пространство управляемости системы S на отрезке I

$$L(S,I) = \int_{t_0}^{t_1} X(t_0,t)B(t)\mathbb{R}^m dt =$$

$$= \sum_{k=1}^{\ell} \int_{\tau_{k-1}}^{\tau_k} X(t_0,\tau_{k-1})X(\tau_{k-1},t)B(t)\mathbb{R}^m dt = \sum_{k=1}^{\ell} X(t_0,\tau_{k-1})L(S,I_k).$$

§ 23. Пространство управляемости и матрица Красовского

Важным вкладом в исследование управляемости нестационарных линейных систем является монография Н. Н. Красовского [77]. Здесь получено достаточное условие полной управляемости для системы S

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \quad (t, x, u) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$$

в случае, когда элементы матриц $A(t)$ и $B(t)$ имеют непрерывные производные вплоть до $(n-1)$-го порядка, по крайней мере, в окрестности некоторой точки $t = t^*$ из отрезка $I = [t_0, t_1]$ (в точках $t = t_0$ или $t = t_1$ речь идет лишь о правых или левых производных соответственно).

Рассматриваются матрицы $K_i(t, S)$, определенные в окрестности точки t^* следующими рекуррентными соотношениями:

$$K_0(t, S) = B(t), \ldots, K_i(t, S) = A(t)K_{i-1}(t, S) - \dot{K}_{i-1}(t, S), \quad i = 1, \ldots, n-1. \tag{23.1}$$

Т е о р е м а 23.1 (Н. Н. Красовский, [77, с. 148]). *Пусть на отрезке $I = [t_0, t_1]$ можно указать точку $t = t^*$, в которой ранг матрицы*

$$K(t, S) = \big\{K_0(t, S), \ldots, K_{n-1}(t, S)\big\} \tag{23.2}$$

равен n. Тогда система S вполне управляема на отрезке I.

Известно, что достаточное условие полной управляемости, сформулированное в этой теореме, не является необходимым. Приведем простой пример, иллюстрирующий этот факт.

П р и м е р 23.1. Исследуем полную управляемость на отрезке $I = [0, 2]$ линейной системы S второго порядка:

$$\dot{x} = A(t)x + b(t)u, \quad (t, x, u) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}, \tag{23.3}$$

где $A(t)$ — единичная матрица,

$$b(t) = \begin{cases} \operatorname{col}\big((t-1)^2, 0\big) & \text{при} \quad t \in [0, 1], \\ \operatorname{col}\big(0, (t-1)^2\big) & \text{при} \quad t \in (1, 2\,]. \end{cases}$$

Несложно проверить, что для всех $t \in I$ выполнено равенство

$$\det K(t, S) = \begin{vmatrix} b_1(t) & b_1(t) - \dot{b}_1(t) \\ b_2(t) & b_2(t) - \dot{b}_2(t) \end{vmatrix} = \dot{b}_1(t)b_2(t) - b_1(t)\,\dot{b}_2(t) \equiv 0,$$

поэтому $\operatorname{rank} K(t, S) \leqslant 1$ для всех $t \in I$.

Поскольку размерность пространства управляемости $L(S, I)$ равна рангу матрицы Калмана $W(S, I)$, то система второго порядка S вполне управляема на отрезке I в том и только в том случае, если $\operatorname{rank} W(S, I) = 2$. Для системы (23.3) матрица $W(S, I)$ имеет следующий вид:

$$W(S, I) = \int_0^2 e^{-2s} \begin{pmatrix} b_1(s) \\ b_2(s) \end{pmatrix} (b_1(s), b_2(s))ds = \int_0^2 e^{-2s} \begin{pmatrix} b_1^2(s) & 0 \\ 0 & b_2^2(s) \end{pmatrix} ds.$$

Понятно, что ранг такой матрицы равен двум, то есть рассматриваемая система вполне управляема на отрезке $I = [0, 2]$.

В работе Чанга [190] показано, что если функция $t \to S(t)$ аналитическая на некотором открытом интервале, содержащем отрезок I, то условие $\operatorname{rank} K(t^*, S) = n$ не только достаточно, но и необходимо для полной управляемости системы S.

В связи с этими результатами Красовского и Чанга возникает следующая задача: если $\operatorname{rank} K(t, S) \leqslant n - 1$ при всех $t \in I$ и функция $t \to S(t)$ не является аналитической (но имеет достаточное число производных), то при каких дополнительных условиях система S вполне управляема на отрезке I либо не обладает этим свойством?

Формулируемые ниже утверждения получены в работе [132].

Л е м м а 23.1. *Если системы $S_1 = (A, B)$, $S_2 = (F, G)$ подобны и $U(t)$ — матрица подобия, то $K(t, S_1) = U(t)K(t, S_2)$ и, следовательно,*

$$\operatorname{rank} K(t, S_1) = \operatorname{rank} K(t, S_2).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из (22.4) следует равенство

$$K_0(t, S_2) = G(t) = U^{-1}(t)B(t) = U^{-1}(t)K_0(t, S_1).$$

Покажем, что $K_i(t, S_2) = U^{-1}(t)K_i(t, S_1)$ для всех $i = 0, \ldots, n-1$. Действительно, если это равенство верно для $k = i - 1$, то

$$\begin{aligned} K_i(t, S_2) &= F(t)K_{i-1}(t, S_2) - \dot{K}_{i-1}(t, S_2) = \\ &= F(t)U^{-1}(t)K_{i-1}(t, S_1) - \frac{d}{dt}\Big(U^{-1}(t)K_{i-1}(t, S_1)\Big) = \\ &= \Big(U^{-1}(t)A(t)U(t) - U^{-1}(t)\dot{U}(t)\Big)U^{-1}(t)K_{i-1}(t, S_1) + \\ &+ U^{-1}(t)\dot{U}(t)U^{-1}(t)K_{i-1}(t, S_1) - U^{-1}(t)\dot{K}_{i-1}(t, S_1) = \\ &= U^{-1}(t)A(t)K_{i-1}(t, S_1) - U^{-1}(t)\dot{K}_{i-1}(t, S_1) = U^{-1}(t)K_i(t, S_1). \end{aligned}$$

Следовательно, $K_i(t, S_1) = U(t)K_i(t, S_2)$ для всех $i = 0, \ldots, n-1$, поэтому

$$K(t, S_1) = U(t)K(t, S_2).$$

Т е о р е м а 23.2. *Пусть $\dim L(S, I) = r$, где $1 \leqslant r \leqslant n-1$, и $\widehat{S}$ — канонический представитель системы S. Тогда для любого $c \in \operatorname{Lin}\{e_{r+1}, \ldots, e_n\}$ имеет место тождество $c^* K(t, \widehat{S}) \equiv 0$ и поэтому $\dim L(S, I) \geqslant \operatorname{rank} K(t, S)$ для всех $t \in I$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $\dim L(S, I) = r$, то в силу леммы 22.1 последние $n - r$ строк матрицы $K_0(t, \widehat{S}) \doteq G(t)$ тождественно равны нулю на отрезке I. Так как $F(t)$ — верхняя треугольная матрица, то из (23.1) следует, что последние $n - r$ строк всех матриц $K_i(t, \widehat{S})$, образующих матрицу $K(t, \widehat{S})$, также тождественно равны нулю на I. Следовательно, если $c \in \operatorname{Lin}\{e_{r+1}, \ldots, e_n\}$, то $c^* K(t, \widehat{S}) \equiv 0$, и поэтому $\operatorname{rank} K(t, S) = \operatorname{rank} K(t, \widehat{S}) \leqslant r$ для всех $t \in I$. Таким образом, $\operatorname{rank} K(t, S) \leqslant \dim L(S, I)$.

Т е о р е м а 23.3. *Пусть целые числа m и r удовлетворяют неравенствам $1 \leqslant m \leqslant n-1$, $m \leqslant rm \leqslant n - m$ и для всех $t \in I$ имеют место равенства*

$$\operatorname{rank} K(t, S) = \operatorname{rank}\big(K_0(t, S), \ldots, K_{r-1}(t, S)\big) = rm. \tag{23.4}$$

Тогда $\dim L(S, I) = rm$ и, следовательно, система S не является вполне управляемой на отрезке I.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Достаточно показать, что найдется $n - rm$ линейно независимых решений $\psi_1(t), \ldots, \psi_{n-rm}(t)$ сопряженной системы

$$\dot{\psi} = -\psi A(t), \quad t \in I, \tag{23.5}$$

для которых $\psi_i(t)B(t) \equiv 0$, $i = 1, \ldots, n - rm$. Действительно, если эти тождества выполнены, то в силу равенств $\psi_i(t) = \xi_i X(t_0, t)$, где векторы $\xi_i = \psi_i(t_0)$ линейно независимы в $\mathbb{R}^n$, получим равенства $\xi_i W(S, I) = 0$. Следовательно, $\operatorname{rank} W(S, I) = rm$ и $\dim L(S, I) = rm$.

Пусть $A(t) \equiv 0$. Покажем тогда, что найдется $n - rm \geqslant m$ линейно независимых векторов $\xi_1, \ldots, \xi_{n-rm} \in \mathbb{R}^n$, удовлетворяющих равенствам $\xi_i B(t) = 0$ при всех $t \in I$.

В рассматриваемом случае матрица $K(t,S)$ с точностью до знаков и перестановок столбцов совпадает с матрицей
$$H(t) \doteq \big(B^{(n-1)}(t),\ldots,\dot B(t),B(t)\big).$$
Обозначим $H_r(t) \doteq \big(B^{(r)}(t),\ldots,\dot B(t),B(t)\big)$, тогда из условия (23.4) следуют равенства
$$\operatorname{rank} H_r(t) = \operatorname{rank} H_{r-1}(t) = rm, \quad t\in I.$$
Поэтому при каждом фиксированном $t\in I$ найдется ровно $n-rm$ линейно независимых векторов $c^1(t),\ldots,c^{n-rm}(t)\in\mathbb{R}^{(r+1)m}$ таких, что $H_r(t)\,c(t)\equiv 0$ для любого
$$c(t)\in L_c(t)\doteq \operatorname{Lin}\{c^1(t),\ldots,c^{n-rm}(t)\}.$$

Представим вектор $c(t)\in L_c(t)$ в виде $c(t)=\operatorname{col}(c_0(t),\ldots,c_r(t))$, где $c_i(t)\in\mathbb{R}^m$, тогда
$$H_r(t)\,c(t)\equiv B^{(r)}(t)c_0(t)+\ldots+B(t)c_r(t)\equiv 0.$$
При каждом $t\in I$ зафиксируем базис $c^i(t)=\operatorname{col}(c_0^i(t),\ldots,c_r^i(t))$, $i=1,\ldots,n-rm$, в $L_c(t)$ и построим $m\times(n-rm)$ -матрицы
$$C_j(t)=\operatorname{col}\big(c_j^1(t),\ldots,c_j^{n-rm}(t)\big), \quad j=0,\ldots,r$$
и $(r+1)m\times(n-rm)$-матрицу $C(t)=\operatorname{col}\big(C_0(t),\ldots,C_r(t)\big)$, столбцы которой $c^1(t),\ldots,c^{n-rm}(t)$ линейно независимы. Тогда имеет место матричное тождество
$$H_r(t)C(t)=B^{(r)}(t)C_0(t)+\ldots+B(t)C_r(t)\equiv 0. \tag{23.6}$$

Покажем, что столбцы матрицы $C_0(t)$ линейно независимы при каждом $t\in I$. Предположим, что это не так, тогда найдутся $\tau\in I$ и ненулевой вектор $q\in\mathbb{R}^{n-rm}$ такие, что $C_0(\tau)\,q=0$, следовательно, из (23.6) получаем
$$B^{(r-1)}(\tau)C_1(\tau)q+\ldots+B(\tau)C_r(\tau)q=0,$$
и в силу условия $\operatorname{rank} H_{r-1}(\tau)=rm$ имеют место равенства $C_i(\tau)q=0$, $i=0,\ldots,r$, противоречащие условию линейной независимости столбцов матрицы $C(\tau)$.

Умножив тождество (23.6) справа на матрицу $C_0^*(t)$ и слева на произвольный вектор $\xi\in\mathbb{R}^n$, получим тождество
$$\begin{gathered}\mu^{(r)}(t)D_0(t)+\ldots+\mu(t)D_r(t)\equiv 0, \quad \text{где}\\ \mu(t)=\xi B(t), \quad D_j(t)=C_j(t)C_0^*(t),\ \ j=0,\ldots,r\end{gathered}$$
— квадратные матрицы порядка m, причем $\det D_0(t)>0$ при всех $t\in I$. Таким образом, функция $t\to\mu(t)$ со значениями в $\mathbb{R}^m$ является решением системы m линейных дифференциальных уравнений
$$\mu^{(r)}D_0(t)+\ldots+\mu D_r(t)=0, \quad t\in[t_0,t_1]. \tag{23.7}$$

Из условия $\det D_0(t)>0$ при всех $t\in I$ следует, что система (23.7) имеет единственное решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям $\mu^{(i-1)}(t_0)=\mu_i$, $i=1,\ldots,r$. В частности, если $\mu^{(i-1)}(t_0)=0$, $i=1,\ldots,r$, то $\mu(t)\equiv 0$. Далее, из равенства $\operatorname{rank} H_{r-1}(t_0)=rm$ следует, что найдется $n-rm$ линейно независимых векторов $\xi_1,\ldots,\xi_{n-rm}\in\mathbb{R}^n$, обеспечивающих для каждого $\xi\in L_\xi\doteq\operatorname{Lin}\big\{\xi_1,\ldots,\xi_{n-rm}\big\}$ равенство $\xi H_{r-1}(t_0)=0$. Последнее равенство можно переписать в виде $\mu^{(i-1)}(t_0)=0$, $i=1,\ldots,r$. Следовательно, $\xi B(t)\equiv 0$ для всех $\xi\in L_\xi$.

Теперь рассмотрим случай, когда $A(t)\not\equiv 0$. Тогда невырожденное преобразование $x=X(t,t_0)z$ приводит систему S к виду
$$\dot z=\widehat B(t)u, \quad \text{где} \quad \widehat B(t)=X(t_0,t)B(t).$$

Далее, для каждого $\xi \in \mathbb{R}^n$ функция $\psi(t) = \xi X(t_0, t)$ является решением системы (23.5). Поэтому, применяя к системе $\dot{z} = \widehat{B}(t)u$ приведенные рассуждения, легко проверить, что при выполнении условия (23.4) найдется $n - rm$ линейно независимых решений $\psi_1(t), \ldots, \psi_{n-rm}(t)$ системы (23.5), удовлетворяющих равенствам $\psi_i(t)B(t) = 0$ при всех $t \in I$. □

Напомним, что запись $S_i = (A, b_i)$ обозначает систему

$$\dot{x} = A(t)x + b_i(t)u_i$$

с i-м управлением $u_i(t)$, где $b_i(t)$ — i-й столбец матрицы $B(t)$, $i = 1, \ldots, m$. Если $S_i(\cdot) \in C^{p-1}(\mathbb{R}, M(n, n+m))$, то обозначим через $K^p(t, S_i)$ матрицу, столбцы которой удовлетворяют равенствам (23.1) при $i = 0, \ldots, p-1$, и через $K(t, S_i)$ — матрицу $K^n(t, S_i)$.

Л е м м а 23.2. *Пусть $S_i(\cdot) \in C^{p-1}(\mathbb{R}, M(n, n+m))$ при некотором целом $p \geqslant n$ и $\operatorname{rank} K^p(t, S_i) \equiv r$ при $t \in I$, тогда $\operatorname{rank} K^r(t, S_i) = r$ для всех $t \in I$, за возможным исключением счетного числа точек $\{\tau_0, \tau_1, \ldots\} \in I$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для упрощения обозначений опустим в этом доказательстве индекс i у вектора $b_i(t)$ и координаты вектора $b(t)$ будем обозначать индексами снизу (таким образом, $b_i(t)$ означает теперь i-ю координату вектора $b(t)$). Кроме того, будем считать, что $A(t) \equiv 0$. Тогда матрица $K^p(t) \doteq K^p(t, S_i)$ с точностью до знаков и перестановки столбцов совпадает с матрицей $H^p(t) = (b^{(p-1)}(t), \ldots, b(t))$.

Покажем вначале, что если $\operatorname{rank} H^r(t) < r$ для всех $t \in \mathfrak{I}$, где $\mathfrak{I}$ — некоторый интервал, содержащийся в I, то для любого $\tau \in \mathfrak{I}$ найдутся окрестность $(\tau - \delta, \tau + \delta)$ и дифференцируемые скалярные функции $c_1(t), \ldots, c_r(t)$, одновременно не равные нулю и такие, что для всех $t \in (\tau - \delta, \tau + \delta)$ выполнено тождество

$$c_1(t)b^{(r-1)}(t) + \ldots + c_r(t)b(t) \equiv 0. \tag{23.8}$$

Докажем это для случая, когда $\operatorname{rank} H^r(t) = r - 1$ для всех $t \in I$. Тогда для любой фиксированной точки $\tau \in I$ существует отличный от нуля минор $\Delta_{r-1}(\tau)$ порядка $r-1$ матрицы $H^r(\tau)$. Следовательно, $\Delta_{r-1}(t) \neq 0$ в некоторой окрестности $(\tau - \delta, \tau + \delta)$.

Обозначим через $H_{r-1}(t)$ матрицу, отвечающую минору $\Delta_{r-1}(t)$. Пронумеруем строки матрицы $H_{r-1}(\tau)$ индексами $i_1, \ldots, i_{r-1}$ и построим вектор $g(t) = \operatorname{col}(b_{i_1}(t), \ldots, b_{i_{r-1}}(t))$. Построим далее $r \times r$-матрицу, добавив к $(r-1) \times r$-матрице, составленной из векторов $g^{(r-1)}(t), \ldots, g(t)$, в качестве r-й строки любую из строк матрицы $H^r(t)$. В результате такого построения получим набор квадратных матриц $M_1(t), \ldots, M_n(t)$ порядка r. Обозначим через $\delta_1(t), \ldots, \delta_r(t)$ миноры матриц $M_k(t)$, соответствующие элементам последней строки (эти миноры одинаковы для всех $M_k(t)$). Тогда из условий $\det M_k(t) \equiv 0, \quad k = 1, \ldots, n$, получаем тождество (23.8), где

$$c_j(t) = (-1)^{r+j}\delta_j(t), \quad j = 1, \ldots, r.$$

Поскольку один из миноров $\delta_j(t)$ совпадает с $\Delta_{r-1}(t)$, то функции $c_j(t)$ одновременно не равны нулю. Гладкость функций $c_j(t)$ следует из непрерывной дифференцируемости $b(t)$. Аналогично доказывается (23.8), если $\operatorname{rank} H^r(t) \leqslant r - 1$ при $t \in I$.

Дифференцируя (23.8) $p - r$ раз, получаем тождества

$$\begin{cases} c_1(t)b^{(r)}(t) + \sum\limits_{k=1}^{r-1}\big(c_{k+1}(t) + \dot{c}_k(t)\big)b^{(r-k)}(t) + \dot{c}_r(t)b(t) \equiv 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ c_1(t)b^{(p-1)}(t) + \big(c_2(t) + (p-r)\dot{c}_1(t)\big)b^{(p-2)}(t) + \ldots + c_r^{(p-r)}(t)b(t) \equiv 0. \end{cases} \tag{23.9}$$

Пусть $\mathfrak{I}_1 \doteq \{t \in (\tau - \delta, \tau + \delta) : c_1(t) \neq 0\}$. Тогда из (23.8) и (23.9) следует, что при всех $t \in \mathfrak{I}_1$ векторы $b^{(r-1)}(t), \ldots, b^{(p-1)}(t)$ являются линейной комбинацией векторов $b(t), \ldots, b^{(r-2)}(t)$. Следовательно, $\operatorname{rank} H^p(t) < r$ при всех $t \in \mathfrak{I}_1$. Обозначим

$$\mathfrak{I}_k \doteq \big\{t \in (\tau - \delta, \tau + \delta) : c_1(t) \equiv 0, \ldots, c_{k-1}(t) \equiv 0, c_k(t) \neq 0\big\}, \quad k = 2, \ldots, r,$$

и отметим, что для всех $t \in \mathfrak{I}_k$ имеет место тождество

$$c_k(t)b^{(r-k)}(t) + \ldots + c_r(t)b(t) \equiv 0. \tag{23.10}$$

Выполнив с (23.10) те же операции, что и с тождеством (23.8), получим неравенство $\operatorname{rank} H^p(t) < r - k + 1$ при всех $t \in \mathfrak{I}_k$. Поскольку функции $c_1(t), \ldots, c_r(t)$ одновременно не обращаются в нуль, то

$$[\tau - \delta, \tau + \delta] = \bigcup_{k=1}^{r} \mathrm{cl}\ \mathfrak{I}_k.$$

Поэтому $\operatorname{rank} H^p(t) = \operatorname{rank} K^p(t) < r$ для всех $t \in (\tau - \delta, \tau + \delta)$, что противоречит условию леммы. Следовательно, $\operatorname{rank} K^r(t)$ не может быть меньше r ни на каком интервале $\mathfrak{I} \subset I$. Поскольку множество непересекающихся интервалов, принадлежащих отрезку I, не более чем счетно, то множество граничных точек этих интервалов (в этих точках $\operatorname{rank} K^r(t)$ может быть меньше r) также не более чем счетно.

Л е м м а 23.3. *Пусть* $S_i(\cdot) \in C^{p-1}(\mathbb{R}, M(n, n+m))$ *при некотором целом* $p \geqslant n$ *и* $\operatorname{rank} K^p(t, S_i) \equiv r$ *при* $t \in I$, *тогда* $\dim L(S_i, I) = r$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из леммы 23.2 следует, что отрезок I можно представить в виде объединения не более чем счетного числа отрезков $[\tau_{k-1}, \tau_k]$, $k = 1, 2, \ldots$ таких, что на каждом интервале (τ_{k-1}, τ_k) выполнены равенства

$$\operatorname{rank} K^p(t, S_i) = \operatorname{rank} K^r(t, S_i) = r.$$

Следовательно, для каждого отрезка, содержащегося в (τ_{k-1}, τ_k), выполнены условия теоремы 23.3. Тогда на интервале (τ_{k-1}, τ_k) существует $n - r$ линейно независимых решений $\psi_1(t), \ldots, \psi_{n-r}(t)$ системы (23.5), удовлетворяющих равенствам $\psi_j(t)b_i(t) = 0$. Предположим, что на интервале (τ_k, τ_{k+1}) также существует $n - r$ линейно независимых решений $\varphi_1(t), \ldots, \varphi_{n-r}(t)$ системы (23.5), причем

$$\mathrm{Lin}\big(\psi_1(\tau_k), \ldots, \psi_{n-r}(\tau_k)\big) \neq \mathrm{Lin}\big(\varphi_1(\tau_k), \ldots, \varphi_{n-r}(\tau_k)\big).$$

Следовательно, в точке τ_k количество линейно независимых векторов из векторов $\psi_1(\tau_k), \ldots, \psi_{n-r}(\tau_k), \varphi_1(\tau_k), \ldots, \varphi_{n-r}(\tau_k)$ превосходит $n - r$ и для этих векторов выполнены равенства

$$\psi_j(\tau_k)b_i(\tau_k) = 0, \quad \varphi_j(\tau_k)b_i(\tau_k) = 0,$$

что противоречит условию $\operatorname{rank} K(t, S_i) = r$. Таким образом, векторы $\psi_1(t), \ldots, \psi_{n-r}(t)$ удовлетворяют условиям $\psi_j(t)b_i(t) = 0$ для всех $t \in [\tau_{k-1}, \tau_{k+1}]$, а также для всех $t \in I$, тогда, в силу теоремы 23.3, имеет место равенство $\dim L(S_i, I) = r$. □

Обозначим через $S_{1\ldots p}$ систему $(A, b_1, \ldots, b_p)$ с управлениями $u_1(t), \ldots, u_p(t)$, где $p < m$; через $S_{1\ldots p,i}$ обозначим систему $(A, b_1, \ldots, b_p, b_i)$ с управлениями $u_1(t), \ldots, u_p(t), u_i(t)$, где i — одно из чисел $p+1, \ldots, m$. Тогда для пространств управляемости этих систем и системы $S = S_{1\ldots m}$ имеют место включения $L(S_{1\ldots p}) \subseteq L(S_{1\ldots p,i}) \subseteq L(S)$. Пусть

$$K(t, S_{1\ldots p}) = \big(K_0(t, S_{1\ldots p}), \ldots, K_{n-1}(t, S_{1\ldots p})\big)$$

— матрица для системы $S_{1\ldots p}$, удовлетворяющая условиям (23.1).

Л е м м а 23.4. *Предположим, что выполнены следующие условия:*

1) $\operatorname{rank} K(t, S_1)$ *не зависит от* t *и для каждого* $i = 2, \ldots, m$ *имеет место неравенство* $r_1 \doteq \operatorname{rank} K(t, S_1) \leqslant \operatorname{rank} K(t, S_i)$, $t \in I$;

2) *для каждого* $p = 2, \ldots, m$ *и любого* $i \in \{p, \ldots, m\}$ $\operatorname{rank} K(t, S_{1\ldots p})$ *не зависит от* t *и* $\operatorname{rank} K(t, S_{1\ldots p}) \leqslant \operatorname{rank} K(t, S_{1\ldots p-1,i})$, $t \in I$.

Обозначим $r_p \doteq \operatorname{rank} K(t, S_{1\ldots p}) - r_1 - \ldots - r_{p-1}$, $p = 2, \ldots, m$, $r \doteq r_1 + \ldots + r_m \leqslant n$. *Тогда среди систем, подобных системе* S, *существует канонический представитель* S^0, *то есть такая система* $S^0 = (P, D)$, *что*

$$\begin{cases} \dot{y}^1 = P_{11}(t)y^1 + P_{12}(t)y^2 + \ldots + P_{1,m+1}(t)y^{m+1} + \sum\limits_{i=1}^{m} d_i^1(t)u_i, \\ \dot{y}^2 = P_{22}(t)y^2 + \ldots + P_{2,m+1}(t)y^{m+1} + \sum\limits_{i=2}^{m} d_i^2(t)u_i, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dot{y}^m = P_{mm}(t)y^m + P_{m,m+1}(t)y^{m+1} + d_m^m(t)u_m, \\ \dot{y}^{m+1} = P_{m+1,m+1}(t)y^{m+1}, \end{cases}$$

где $y^i \in \mathbb{R}^{r_i}$, $i = 1, \ldots, m$, $y^{m+1} \in \mathbb{R}^{n-r}$, *матрицы* $P_{ii}(t)$ — *верхние треугольные и каждая система*

$$\dot{y}^i = P_{ii}(t)y^i + d_i^i(t)u_i, \quad y^i \in \mathbb{R}^{r_i},$$

рассматриваемая в $\mathbb{R}^{r_i}$, *вполне управляема на любом отрезке, содержащемся в отрезке* I.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку $\operatorname{rank} K(t, S_1) \equiv r_1$, $t \in I$, то для системы $S_1 = (A, b_1)$ выполнены условия леммы 23.3. Тогда в силу леммы 22.1 существует ортогональное преобразование $U_1(t)$, приводящее S_1 к каноническому виду $\widehat{S}_1 = (P_1, d_1)$, где матрица

$$P_1(t) = \begin{pmatrix} P_{11}(t) & F_{12}(t) \\ 0 & F_{22}(t) \end{pmatrix},$$

а $P_{11}(t)$ и $F_{22}(t)$ являются верхними треугольными матрицами размера $r_1 \times r_1$ и $(n-r_1)\times(n-r_1)$ соответственно, $d_1(t) = \operatorname{col}(d_1^1(t), 0)$, $d_1^1 \in \mathbb{R}^{r_1}$. Обозначим через $s_1 \doteq (P_{11}, d_1^1)$ систему

$$\dot{y}^1 = P_{11}(t)y^1 + d_1^1(t)u_1,$$

рассматриваемую в $\mathbb{R}^{r_1}$. В силу леммы 23.2 $\operatorname{rank} K^r(t, s_1) = r_1$ для всех $t \in I$, за возможным исключением не более чем счетного числа точек. Следовательно, система s_1 вполне управляема на любом отрезке, содержащемся в отрезке I.

Применим преобразование $U_1(t)$ к системе S. Пусть $G_1(t) \doteq U_1^*(t)B(t)$. Представим матрицу $G_1(t) = (g_1(t), \ldots, g_m(t))$ в виде $G_1(t) = \operatorname{col}(D_1(t), H_1(t))$, где матрицы $D_1(t)$ и $H_1(t)$ имеют размеры $r_1 \times m$ и $(n-r_1) \times m$ соответственно, $D_1(t) = (d_1^1(t), \ldots, d_1^m(t))$, $H_1(t) = (h_1^1(t), \ldots, h_1^m(t))$. Отметим, что $h_1^1(t) \equiv 0$.

Рассмотрим системы $S_{12}^0 \doteq (P_1, g_1, g_2)$, $s_2 \doteq (F_{22}, h_1^2)$ и матрицу

$$K^n(t, s_2) = \big(K_0(t, s_2), \ldots, K_{n-1}(t, s_2)\big).$$

Заметим, что для всех $t \in I$ выполнено равенство

$$\operatorname{rank} K(t, S_{12}) = \operatorname{rank} K(t, S_{12}^0) = \operatorname{rank} K(t, \widehat{S}_1) + \operatorname{rank} K^n(t, s_2),$$

откуда следует, что $\operatorname{rank} K^n(t, s_2) = r_2$ для всех $t \in I$. Следовательно, для системы s_2 выполнены условия леммы 23.3, тогда найдется ортогональное преобразование $U_{22}^2(t)$, приводящее систему s_2 к каноническому виду (F_2, d_2), где

$$F_2(t) = \begin{pmatrix} P_{22}(t) & F_{23}(t) \\ 0 & F_{33}(t) \end{pmatrix},$$

$P_{22}(t)$ и $F_{33}(t)$ являются верхними треугольными матрицами размера $r_2 \times r_2$ и $(n - r_1 - r_2) \times (n - r_1 - r_2)$ соответственно, $d_2(t) = \operatorname{col}(d_2^2(t), 0)$, где $d_2^2 \in \mathbb{R}^{r_2}$. Далее, построим матрицу

$$U_2(t) = \begin{pmatrix} E_{r_1} & 0 \\ 0 & U_{22}^2(t) \end{pmatrix},$$

где через E_{r_1} обозначена единичная матрица порядка r_1. Понятно, что матрицы $U_2(t)$ и $U_1(t)U_2(t)$ — ортогональные. Применяя преобразование $U_1(t)U_2(t)$ к системе S_{12}, получаем систему $\widehat{S}_{12} = (P_2, d_1, d_2)$, где

$$P_2(t) = \begin{pmatrix} P_{11}(t) & P_{12}(t) & F_{13}(t) \\ 0 & P_{22}(t) & F_{23}(t) \\ 0 & 0 & F_{33}(t) \end{pmatrix},$$

вектор $d_1(t) = \mathrm{col}(d_1^1(t), 0)$, $d_2(t) = \mathrm{col}(d_1^2(t), d_2^2(t), 0)$.

Обозначим

$$G_k(t) = U_k^*(t) \dots U_1^*(t) B(t), \quad G_k(t) = \mathrm{col}\big(D_1(t), \dots, D_k(t), H_k(t)\big),$$

где матрицы $D_k(t)$ и $H_k(t)$ имеют размеры $r_k \times m$ и $(n - r_1 - \ldots - r_k) \times m$ соответственно, $k = 1, \ldots, m$, $H_k(t) = (h_k^1(t), \ldots, h_k^m(t))$. Применяя последовательно лемму 23.3 к системам $s_k \doteq (F_{kk}, h_{k-1}^k)$, $k = 2, \ldots, m$, строим ортогональные матрицы $U_{22}^k(t)$ и затем матрицы

$$U_k(t) = \begin{pmatrix} E_{r_1 + \ldots + r_{k-1}} & 0 \\ 0 & U_{22}^k(t) \end{pmatrix}.$$

Ортогональное преобразование $U_1(t) \dots U_m(t)$ приводит систему S к каноническому виду.

З а м е ч а н и е 23.1. Условия 1) и 2) леммы 23.4 не являются слишком обременительными, то есть в предположении постоянства рангов матриц $K(t, S_{i_1 \ldots i_p})$ (для любого набора индексов $i_1 \ldots i_p$) с помощью перенормировки управлений можно добиться выполнения этих условий.

Действительно, пусть $S_{i_1 \ldots i_p}$ — система $(A, b_{i_1}, \ldots, b_{i_p})$ с управлениями $u_{i_1}, \ldots, u_{i_p}$. Предположим, что ранги матриц $K(t, S_{i_1 \ldots i_p})$ не зависят от t для любого набора индексов $i_1, \ldots, i_p$. Рассмотрим системы $S_{i_1 \ldots i_m}$, которые получаются из системы S в результате всевозможных перестановок столбцов матрицы $B(t)$. Каждой системе $S_{i_1 \ldots i_m}$ поставим в соответствие числа $r_{i_1}, \ldots, r_{i_m}$, где

$$r_{i_1} \doteq \mathrm{rank}\, K(t, S_{i_1}), \quad r_{i_k} \doteq \mathrm{rank}\, K(t, S_{i_1 \ldots i_k}) - \mathrm{rank}\, K(t, S_{i_1 \ldots i_{k-1}}).$$

Обозначим через r_1 наименьшее из чисел r_{i_1}, $i_1 = 1, \ldots, m$ и выберем соответствующий столбец матрицы $B(t)$, который обозначим $b_1(t)$; при этом может получиться от одного до m вариантов для выбора $b_1(t)$, обозначим все такие столбцы через $b_1^1(t), \ldots, b_1^k(t)$. Далее, рассмотрим системы S_{i_1, i_2}, у которых первый столбец содержится в множестве $\{b_1^1(t), \ldots, b_1^k(t)\}$ (для таких систем $\mathrm{rank}\, K(t, S_{i_1, i_2}) = r_1 + r_{i_2}$) и выберем наименьшее из чисел r_{i_2}. Соответствующие вторые столбцы матрицы $B(t)$ обозначим $b_2^1(t), \ldots, b_2^s(t)$ и отметим, что число s может изменяться от единицы до $m - 1$, при этом количество первых столбцов, для которых сумма $r_1 + r_{i_2}$ минимальна, может уменьшиться. Продолжая аналогичным образом переставлять столбцы матрицы $B(t)$, получаем систему $S_{1 \ldots m}$, для которой выполняются неравенства

$$\begin{gathered} r_1 \doteq \mathrm{rank}\, K(t, S_1) \leqslant \mathrm{rank}\, K(t, S_i), \quad i = 2, \ldots, m, \\ r_1 + \ldots + r_p \doteq \mathrm{rank}\, K(t, S_{1 \ldots p}) \leqslant \mathrm{rank}\, K(t, S_{1 \ldots p-1, i}), \\ p = 2, \ldots, m-1, \;\; i = p+1, \ldots, m. \end{gathered}$$

Отметим, что если существует несколько перестановок, при которых ранги матриц $K(t, S_{i_1 \ldots i_p})$, $p = 1, \ldots, m$, удовлетворяют данным неравенствам, то эти ранги для всех перестановок одинаковы.

Т е о р е м а 23.4. *Пусть* $\mathrm{rank}\, K(t, S) \equiv r$ *для всех* $t \in I$. *Тогда пространство управляемости* $L(S, I)$ *системы* S *на отрезке* I *удовлетворяет следующим равенствам:*

$$L(S, I) = K(t_0, S)\mathbb{R}^{nm} \quad \text{и} \quad \dim L(S, I) = r.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Отметим, что при $r = n$ утверждение теоремы следует из достаточного условия Н. Н. Красовского о полной управляемости системы S.

Предположим, что $r \leqslant n-1$. Поскольку ранг матрицы $K(t, S_{i_1 \dots i_p})$ является кусочно-постоянной функцией, то отрезок I можно представить в виде объединения не более чем счетного числа отрезков I_k таких, что на каждом интервале $\mathfrak{I}_k$, где $I_k = \mathrm{cl}\ \mathfrak{I}_k$, ранг $K(t, S_{i_1 \dots i_p})$ не зависит от t для любого набора индексов $i_1, \dots, i_p$. Тогда на каждом интервале $\mathfrak{I}_k$ выполнены условия леммы 23.4. Следовательно, существуют ровно $n - r$ линейно независимых решений $\psi_1(t), \dots, \psi_{n-r}(t)$ системы (23.5), удовлетворяющих равенствам $\psi_j(t)B(t)$. Аналогично лемме 23.3 доказывается, что данные решения можно продолжить на весь отрезок I. Следовательно, существует преобразование, приводящее систему S к канонической системе $\widehat{S} = (P, D)$. Отметим, что матрица Коши $X(t_0, t)$ системы $\widehat{S}$ — верхняя треугольная, поэтому у матрицы $X(t_0, t)D(t)$ последние $n - r$ координат тождественно равны нулю. Тогда из равенства

$$L(\widehat{S}, I) = \int_{t_0}^{t_1} X(t_0, t)D(t)\mathbb{R}^m dt$$

получаем, что пространство $L(\widehat{S})$ содержится в линейной оболочке векторов $e_1, \dots, e_r$. В силу теоремы 23.2

$$\dim L(\widehat{S}, I) \geqslant \operatorname{rank} K(t, \widehat{S}) = \operatorname{rank} K(t, S) \equiv r,$$

поэтому пространство управляемости $L(\widehat{S}, I) = \operatorname{Lin}\{e_1, \dots, e_r\}$ и $\dim L(S, I) = \dim L(\widehat{S}, I) = r$.

У матрицы $K(t, \widehat{S})$ последние $n - r$ строк нулевые, поэтому все столбцы этой матрицы содержатся в пространстве $L(\widehat{S}, I)$, и поскольку $\operatorname{rank} K(t, \widehat{S}) \equiv r$, то пространство управляемости

$$L(\widehat{S}, I) = K(t, \widehat{S})\, \mathbb{R}^{nm}$$

для всех $t \in I$. В силу леммы 23.1 если $U(t)$ — матрица подобия, то $K(t, S) = U(t)K(t, \widehat{S})$, тогда

$$L(S, I) = U(t_0)L(\widehat{S}, I) = U(t_0)K(t_0, \widehat{S})\, \mathbb{R}^{nm} = K(t_0, S)\, \mathbb{R}^{nm}.$$

§ 24. Необходимые и достаточные условия полной управляемости линейной системы в критическом случае

Напомним некоторые определения и утверждения, необходимые для дальнейшего (см., например, [28, с. 233]).

О п р е д е л е н и е 24.1. Два ряда векторов $\{x_1, x_2, \dots\}$ и $\{y_1, y_2, \dots\}$, содержащих одинаковое конечное или оба бесконечное число векторов, называются *эквивалентными*, если для всех возможных $p = 1, 2, \dots$ имеет место тождество

$$\operatorname{Lin}\{x_1, x_2, \dots, x_p\} \equiv \operatorname{Lin}\{y_1, y_2, \dots, y_p\}.$$

Ряд векторов $\{x_1, x_2, \dots\}$ называется *невырожденным*, если при любом возможном p векторы $\{x_1, x_2, \dots, x_p\}$ линейно независимы. Ряд векторов называется *ортогональным*, если любые два вектора этого ряда взаимно ортогональны. Под *ортогонализацией* ряда векторов будем понимать замену этого ряда эквивалентным ортогональным рядом.

Имеет место следующее утверждение: *Всякий невырожденный ряд векторов можно проортогонализировать. Процесс ортогонализации приводит к векторам, определенным однозначно с точностью до скалярных множителей.*

Далее, если $\{y_1, y_2, \dots\}$ — ортогональные векторы, полученные из векторов $\{x_1, x_2, \dots\}$, то, полагая $z_p = \dfrac{y_p}{|y_p|}$, $p = 1, 2, \dots$, получим ортонормированный ряд, эквивалентный данному ряду $\{x_1, x_2, \dots\}$

Основные результаты данного параграфа получены в работе [132].

Л е м м а 24.1. *Пусть* $\operatorname{rank} K(t,S) \equiv r$ *для всех* $t \in \mathfrak{I} \doteq (t_0, t_1)$. *Тогда матрица* $K(t,S)$ *имеет* r *столбцов* $k_{i_1}(t), \ldots, k_{i_r}(t)$, *линейно независимых в* $\mathbb{R}^n$ *для каждого* $t \in \mathfrak{I}$, *за возможным исключением не более чем счетного числа точек* $\{\tau_1, \tau_2, \ldots\}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $\operatorname{rank} K(t,S) \equiv r$ для всех $t \in \mathfrak{I}$, то для любой фиксированной точки $\tau \in \mathfrak{I}$ найдутся линейно независимые векторы $k_{i_1}(\tau), \ldots, k_{i_r}(\tau)$. Из непрерывности столбцов $k_1(t), \ldots, k_{nm}(t)$ матрицы $K(t,S)$ следует, что векторы $k_{i_1}(t), \ldots, k_{i_r}(t)$ линейно независимы как векторы в $\mathbb{R}^n$ на некотором открытом множестве $\mathfrak{I}_0$, содержащем точку τ. Значит, на множестве $\mathfrak{I}_0$ (следовательно, и на границе $\operatorname{fr} \mathfrak{I}_0$ этого множества) все столбцы матрицы $K(t,S)$ являются линейной комбинацией векторов $k_{i_1}(t), \ldots, k_{i_r}(t)$.

Предположим, что векторы $k_{i_1}(t), \ldots, k_{i_r}(t)$ линейно зависимы на непустом множестве $I_1 \doteq \mathfrak{I} \setminus \mathfrak{I}_0$. Тогда на множестве $\operatorname{cl} I_1$ выполнено неравенство

$$\operatorname{rank}(k_{i_1}(t), \ldots, k_{i_r}(t)) < r.$$

Следовательно, если $\operatorname{cl} \mathfrak{I}_0 \neq I$, то существуют граничные точки множества $\mathfrak{I}_0$, принадлежащие $\mathfrak{I}$, для которых выполнено неравенство $\operatorname{rank} K(t,S) < r$. Таким образом, получили противоречие с условием

$$\operatorname{rank} K(t,S) \equiv r \quad \text{для всех} \quad t \in \mathfrak{I}.$$

Следовательно, векторы $k_{i_1}(t), \ldots, k_{i_r}(t)$ линейно независимы как векторы в $\mathbb{R}^n$ на таком открытом множестве $\mathfrak{I}_0$, что $\operatorname{cl} \mathfrak{I}_0 = I$, и поскольку $\mathfrak{I}_0$ является объединением не более чем счетного числа интервалов, то множество точек, в которых векторы $k_{i_1}(t), \ldots, k_{i_r}(t)$ линейно зависимы, также не более чем счетно.

Л е м м а 24.2. *Пусть* $\operatorname{rank} K(t,S) \equiv r$ *для всех* $t \in \mathfrak{I}$ *и существуют пределы*

$$\ell_i(t_0) \doteq \lim_{t \to t_0+0} \ell_i(t),$$

где ортонормированный ряд $\ell_1(t), \ldots, \ell_r(t)$ *получен из ряда векторов* $k_{i_1}(t), \ldots, k_{i_r}(t)$ *в результате применения процесса ортогонализации. Тогда пространство управляемости* $L(S,I)$ *удовлетворяет равенству*

$$L(S,I) = \operatorname{Lin}\big(\ell_1(t_0), \ldots, \ell_r(t_0)\big).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из равенства

$$L(\widehat{S}, I) = \int_{t_0}^{t_1} X(t_0,t) D(t) \mathbb{R}^m dt$$

аналогично теореме 23.4 получаем, что пространство управляемости канонического представителя $L(\widehat{S}, I) = \operatorname{Lin}\{e_1, \ldots, e_r\}$. Обозначим через $k_{i_1}(t), \ldots, k_{i_r}(t)$ столбцы матрицы $K(t,S)$, удовлетворяющие условию леммы 24.1, то есть эти векторы линейно независимы в $\mathbb{R}^n$ для каждого $t \in \mathfrak{I}$, за возможным исключением не более чем счетного числа точек. Через $q_{i_1}(t), \ldots, q_{i_r}(t)$ обозначим столбцы матрицы $K(t,\widehat{S})$ такие, что $k_j(t) = U(t) q_j(t)$, $j = i_1, \ldots, i_r$ и отметим, что $q_j(t)$ также удовлетворяют условию леммы 24.1.

Пусть $l_1(t), \ldots, l_r(t)$ и $\ell_1(t), \ldots, \ell_r(t)$ — ортонормированные векторы, полученные в результате процесса ортогонализации из векторов $q_{i_1}(t), \ldots, q_{i_r}(t)$ и $k_{i_1}(t), \ldots, k_{i_r}(t)$ соответственно. Поскольку последние $n-r$ координат векторов $l_1(t), \ldots, l_r(t)$ нулевые и эти векторы ортогональны, то такими же свойствами обладают векторы $l_1(t_0), \ldots, l_r(t_0)$, поэтому

$$L(\widehat{S}, I) = \operatorname{Lin}\{e_1, \ldots, e_r\} = \operatorname{Lin}\big(l_1(t_0), \ldots, l_r(t_0)\big).$$

В результате после проверки можно убедиться, что имеют место равенства $\ell_i(t) = U(t) l_i(t)$, $i = 1, \ldots, r$, тогда

$$L(S,I) = U(t_0) L(\widehat{S}, I) = U(t_0) \operatorname{Lin}\big(l_1(t_0), \ldots, l_r(t_0)\big) = \operatorname{Lin}\big(\ell_1(t_0), \ldots, \ell_r(t_0)\big).$$

З а м е ч а н и е 24.1. В случае, когда $\operatorname{rank} K(t,S) \equiv r$ при всех $t \in I$, равенство

$$L(S,I) = \operatorname{Lin}\bigl(\ell_1(t_0),\dots,\ell_r(t_0)\bigr)$$

также выполнено, но в этом случае для построения пространства управляемости достаточно найти линейную оболочку векторов $k_{i_1}(t_0),\dots,k_{i_r}(t_0)$.

Напомним, что через $\ell_1(t),\dots,\ell_r(t)$ обозначены ортонормированные векторы, полученные из векторов $k_{i_1}(t),\dots,k_{i_r}(t)$ в результате применения процесса ортогонализации и введем следующие обозначения:

$$\ell_i(\tau-0) \doteq \lim_{t\to\tau-0} \ell_i(t), \quad \ell_i(\tau+0) \doteq \lim_{t\to\tau+0} \ell_i(t).$$

Т е о р е м а 24.1. *Пусть* $\operatorname{rank} K(t,S) \equiv r_1$ *при всех* $t \in \mathfrak{I}_1 \doteq (t_0,\tau)$, *а также* $\operatorname{rank} K(t,S) \equiv r_2$ *при всех* $t \in \mathfrak{I}_2 \doteq (\tau,t_1)$ *и существуют пределы*

$$\ell_1(\tau-0),\dots,\ell_{r_1}(\tau-0),\ell_1(\tau+0),\dots,\ell_{r_2}(\tau+0).$$

Тогда условие $\operatorname{Lin}\bigl(\ell_1(\tau-0),\dots,\ell_{r_1}(\tau-0),\ell_1(\tau+0),\dots,\ell_{r_2}(\tau+0)\bigr) = \mathbb{R}^n$ *является необходимым и достаточным условием полной управляемости системы* S *на отрезке* I.

З а м е ч а н и е 24.2. Из теоремы 24.1 очевидно следует, что если сумма $r_1 + r_2 < n$, то $\dim L(S,I) < n$.

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 24.1. Поскольку $\operatorname{rank} K(t,S) \equiv r_1$ при всех $t \in \mathfrak{I}_1$, то в силу леммы 22.1 и леммы 24.1 существует ортогональное преобразование, приводящее систему S к каноническому виду $\widehat{S} = (P,D)$, причем у матрицы $D(t)$ при $t \in I_1 \doteq [t_0,\tau]$ последние $n-r_1$ строк нулевые. Поскольку матрица $P(t)$ — верхняя треугольная, то последние $n-r_1$ строк матрицы $K(t,\widehat{S})$ равны нулю. В силу леммы 24.1 у матрицы $K(t,\widehat{S})$ существуют r_1 столбцов $q_{i_1}(t),\dots,q_{i_{r_1}}(t)$, линейно независимых для всех $t \in \mathfrak{I}_1$, за возможным исключением счетного числа точек. Обозначим через $l_1(t),\dots,l_{r_1}(t)$ ортонормированные векторы, полученные в результате процесса ортогонализации из векторов $q_{i_1}(t),\dots,q_{i_{r_1}}(t)$. Заметим, что у векторов $l_1(t),\dots,l_{r_1}(t)$ последние $n-r_1$ координат нулевые, поэтому

$$L(\widehat{S},I_1) = \operatorname{Lin}\{e_1,\dots,e_{r_1}\} = \operatorname{Lin}\bigl(l_1(\tau-0),\dots,l_{r_1}(\tau-0)\bigr),$$

$$L(\widehat{S},I_1) = \operatorname{Lin}\bigl(l_1(t_0),\dots,l_{r_1}(t_0)\bigr) = \operatorname{Lin} Y(\tau,t_0)\bigl(l_1(t_0),\dots,l_{r_1}(t_0)\bigr) = Y(\tau,t_0)L(\widehat{S},I_1),$$

где $Y(t,s)$ — матрица Коши системы $\dot{y} = P(t)y$. В силу леммы 22.3 условие полной управляемости системы $\widehat{S}$ на отрезке I равносильно условию

$$L(\widehat{S},I) = L(\widehat{S},I_1) + Y(t_0,\tau)L(\widehat{S},I_2) = \mathbb{R}^n,$$

а также, в силу невырожденности $Y(t_0,\tau)$, условию

$$L(\widehat{S},I_1) + L(\widehat{S},I_2) = Y(\tau,t_0)L(\widehat{S},I_1) + L(\widehat{S},I_2) = \mathbb{R}^n. \qquad (24.1)$$

Из (24.1) следует, что система $\widehat{S}$ вполне управляема на I тогда и только тогда, когда выполнено равенство

$$\operatorname{Lin}\bigl(l_1(\tau-0),\dots,l_{r_1}(\tau-0),l_1(\tau+0),\dots,l_{r_2}(\tau+0)\bigr) = \mathbb{R}^n.$$

Далее, поскольку $L(S,I) = U(t_0)L(\widehat{S},I)$ и преобразование $U(t_0)$ ортогональное, то размерности пространств управляемости $L(S,I)$ и $L(\widehat{S},I)$ совпадают. Отметим также, что преобразование $U(t_0)$ не меняет угла между векторами и сохраняет свойство линейной независимости векторов. Из леммы 23.1 следует, что столбцы $k_i(t)$ и $q_i(t)$ матриц $K(t,S)$ и $K(t,\widehat{S})$ связаны равенством $k_i(t) = U(t)q_i(t)$, $i = 1,\ldots,mn$. Тогда после проверки можно убедиться, что

$$\ell_i(t) = U(t)l_i(t), \quad i = 1,\ldots,r_1.$$

Следовательно, размерности линейных оболочек векторов

$$\ell_1(\tau-0),\ldots,\ell_{r_2}(\tau-0) \quad \text{и} \quad l_1(\tau-0),\ldots,l_{r_2}(\tau+0)$$

совпадают. □

Пусть $\operatorname{rank} K(t,S) \equiv r_k$, $r_k \leqslant n-1$, для всех $t \in \mathfrak{I}_k \doteq (\tau_{k-1},\tau_k)$, $k = 1,\ldots,s+1$. Покажем, что для каждого фиксированного $t \in (\tau_{k-1},\tau_k)$ найдутся линейно независимые единичные векторы $p_1(t),\ldots,p_{n-r_k}(t)$, ортогональные столбцам матрицы $K(t,S)$. Если $\widehat{S}$ — каноническая система, тогда в качестве таких векторов возьмем $p_i(t) = e_{i+r_k}$, $i = 1,\ldots,n-r_k$, данные векторы не содержатся в пространстве $L(\widehat{S},I_k) = \{e_1,\ldots,e_{r_k}\}$ и образуют базис в множестве векторов, ортогональных столбцам $K(t,\widehat{S})$. Тогда для системы S векторы $p_i(t) = U(t)e_{i+r_k}$ ортогональны столбцам $K(t,S)$. Ясно, что при таком выборе $p_i(t)$ при каждом фиксированном i векторы

$$p_i(\tau_{k-1}+0) \doteq \lim_{t\to\tau_{k-1}+0} p_i(t), \quad i = 1,\ldots,n-r_k,$$

также линейно независимы, ортогональны столбцам $K(\tau_{k-1},S)$ и не принадлежат пространству $L(S,I_k)$. Векторы

$$p_i(\tau_k-0) \doteq \lim_{t\to\tau_k-0} p_i(t), \quad i = 1,\ldots,n-r_k,$$

линейно независимы и ортогональны столбцам матрицы $K(\tau_k,S)$.

Т е о р е м а 24.2. *Пусть* $\operatorname{rank} K(t,S) \equiv r_1$ *при всех* $t \in \mathfrak{I}_1 \doteq (t_0,\tau)$ *и* $\operatorname{rank} K(t,S) \equiv r_2$ *при всех* $t \in \mathfrak{I}_2 \doteq (\tau,t_1)$, *тогда условие линейной независимости векторов*

$$p_1(\tau-0),\ldots,p_{n-r_1}(\tau-0),p_1(\tau+0),\ldots,p_{n-r_2}(\tau+0)$$

является необходимым и достаточным условием полной управляемости системы S *на отрезке* I.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть система S не является вполне управляемой на I, то есть $\dim L(S,I) \leqslant n-1$. Тогда в силу леммы 22.1 существует ортогональное преобразование $U(t)$, приводящее S к системе $\widehat{S} = (F,G)$, у которой матрица $F(t)$ верхняя треугольная, а матрица $G(t)$ имеет по крайней мере одну последнюю нулевую строку. Для системы $\widehat{S}$ вектор e_n ортогонален столбцам $K(t,S)$ для всех $t \in I$, следовательно,

$$e_n = \sum_{i=1}^{n-r_1} c_i p_i(\tau-0) = \sum_{i=1}^{n-r_2} d_i p_i(\tau+0).$$

Поскольку постоянные c_i и d_i одновременно не равны нулю, то из последнего равенства следует линейная зависимость векторов

$$p_1(\tau-0),\ldots,p_{n-r_1}(\tau-0),p_1(\tau+0),\ldots,p_{n-r_2}(\tau+0).$$

Предположим, что система S вполне управляема на I. Поскольку $\operatorname{rank} K(t,S) \equiv r_1$ при всех $t \in \mathfrak{I}_1 \doteq (t_0,\tau)$, то существует ортогональное преобразование $U(t)$, приводящее систему S к канонической системе $\widehat{S}$ при $t \in \mathfrak{I}_1$. Применим $U(t)$ к системе S для всех $t \in (t_0,t_1)$. Тогда система $\widehat{S}$ вполне управляема на отрезке I и выполнено равенство

$$Y(\tau,t_0)L(\widehat{S},I_1) + L(\widehat{S},I_2) = \mathbb{R}^n.$$

Поскольку $Y(\tau, t_0)$ — верхняя треугольная матрица, то

$$Y(\tau, t_0)L(\widehat{S}, I_1) = \mathrm{Lin}\{e_1, \ldots, e_{r_1}\}.$$

Пусть $L(\widehat{S}, I_2) = \mathrm{Lin}\{\ell_1, \ldots, \ell_{r_2}\}$, где $\ell_1, \ldots, \ell_{r_2}$ — некоторые линейно независимые векторы. Обозначим

$$p_1(\tau) \doteq \sum_{i=1}^{n-r_1} \alpha_i p_i(\tau - 0), \quad p_2(\tau) \doteq \sum_{i=1}^{n-r_2} \beta_i p_i(\tau + 0),$$

где α_i, β_i — произвольные постоянные, одновременно не равные нулю. Поскольку из векторов $e_1, \ldots, e_{r_1} \ell_1, \ldots, \ell_{r_2}$ можно выбрать n линейно независимых, вектор $p_1(\tau)$ можно представить в виде

$$p_1(\tau) = \sum_{i=1}^{r_1} c_i e_i + \sum_{i=1}^{r_2} d_i \ell_i,$$

причем вектор $d(\tau) \doteq \sum\limits_{i=1}^{r_2} d_i \ell_i$ ненулевой. Умножив последнее равенство на $p_1(\tau)$, получим, что $\langle p_1(\tau), d(\tau)\rangle \neq 0$. С другой стороны, $\langle p_2(\tau), d(\tau)\rangle = 0$, тогда $\langle (p_1(\tau) - p_2(\tau)), d(\tau)\rangle \neq 0$; следовательно, $p_1(\tau) \neq p_2(\tau)$. Последнее неравенство равносильно условию линейной независимости векторов $p_1(\tau - 0), \ldots, p_{n-r_1}(\tau - 0), p_1(\tau + 0), \ldots, p_{n-r_2}(\tau + 0)$.

Отметим, что теорема также верна для системы S, поскольку $\dim L(S, I) = \dim L(\widehat{S}, I)$ и ортогональное преобразование $U(t)$ сохраняет свойство линейной независимости векторов.

С л е д с т в и е 24.1. *Пусть отрезок $I = [t_0, t_1]$ допускает разбиение точками $t_0 = \tau_0 < \ldots < \tau_{s+1} = t_1$ на конечное число интервалов $\mathfrak{I}_k \doteq (\tau_k, \tau_{k+1})$, на каждом из которых* $\mathrm{rank}\, K(t, S) \equiv r_k$. *Если найдется такая точка $\tau_j \in \{\tau_1, \ldots, \tau_s\}$, в которой существуют пределы $\ell_1(\tau_j - 0), \ldots, \ell_{r_j}(\tau_j - 0), \ell_1(\tau_j + 0), \ldots, \ell_{r_{j+1}}(\tau_j + 0)$ и*

$$\mathrm{Lin}\Big(\ell_1(\tau_j - 0), \ldots, \ell_{r_j}(\tau_j - 0), \ell_1(\tau_j + 0), \ldots, \ell_{r_{j+1}}(\tau_j + 0)\Big) = \mathbb{R}^n,$$

то система S вполне управляема на отрезке I.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу теоремы 24.1 система S вполне управляема на отрезке $[\tau_{j-1}, \tau_{j+1}]$, следовательно, она вполне управляема и на всем отрезке I.

С л е д с т в и е 24.2. *Пусть отрезок $I = [t_0, t_1]$ допускает разбиение точками $t_0 = \tau_0 < \ldots < \tau_{s+1} = t_1$ на конечное число интервалов $\mathfrak{I}_k$, на каждом из которых* $\mathrm{rank}\, K(t, S) \equiv r_k$, $r_k \leqslant n - 1$. *Если существует точка $\tau_j \in \{\tau_1, \ldots, \tau_s\}$ такая, что векторы*

$$p_1(\tau_j - 0), \ldots, p_{n-r_j}(\tau_j - 0), p_1(\tau_j + 0), \ldots, p_{n-r_{j+1}}(\tau_j + 0)$$

линейно независимы, то система S вполне управляема на отрезке I.

П р и м е р 24.1. Исследуем полную управляемость на отрезке $[-1, 1]$ линейной системы S :

$$\dot{y} = A(t)y + b(t)u, \quad y \in \mathbb{R}^3, \tag{24.2}$$

где

$$A(t) = \begin{pmatrix} 2 - 2t & 0 & -t \\ 2e^{-t} - 8t & 1 & e^{-t} - 4t - 2 \\ 4t & 0 & 2t + 2 \end{pmatrix},$$

$$b(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ t^3 \\ 0 \end{pmatrix}, \ t \in [-1, 0], \quad b(t) = \begin{pmatrix} t^3 \\ 3t^3 \\ -2t^3 \end{pmatrix}, \ t \in (0, 1].$$

Из равенств (23.1) и (23.2) найдем матрицу

$$K(t,S)=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ t^3 & t^3-3t^2 & t^3-6t^2+6t\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \quad \text{при} \quad t\in[-1,0],$$

$$K(t,S)=\begin{pmatrix}t^3 & 2t^3-3t^2 & 4t^3-12t^2+6t\\ 3t^3 & 7t^3-9t^2 & 15t^3-42t^2+18t\\ -2t^3 & -4t^3+6t^2 & -8t^3+24t^2-12t\end{pmatrix} \quad \text{при} \quad t\in(0,1].$$

Отметим, что $\operatorname{rank} K(t,S)\equiv 1$ при $t\in[-1,0)$ и $\operatorname{rank} K(t,S)\equiv 2$ при $t\in(0,1]$, поэтому для проверки полной управляемости данной системы необходимо построить векторы $\ell_1(0-0)$, $\ell_1(0+0)$ и $\ell_2(0+0)$. Сначала найдем вектор

$$\ell_1(0-0)=\frac{b(0-0)}{|b(0-0)|}=(0,1,0).$$

Для нахождения векторов $\ell_1(0+0)$ и $\ell_2(0+0)$ применим к векторам

$$k_1(t)\doteq b(t) \quad \text{и} \quad k_2(t)=(2t^3-3t^2, 7t^3-9t^2, -4t^3+6t^2), \quad t\in(0,1],$$

процесс ортогонализации, тогда равенства

$$y_1(t)=k_1(t), \quad y_2(t)=\begin{vmatrix}\langle k_1(t),k_1(t)\rangle & k_1(t)\\ \langle k_2(t),k_1(t)\rangle & k_2(t)\end{vmatrix}=(-3t^9,5t^9,6t^9)$$

определяют такие ортогональные векторы $y_1(t)$ и $y_2(t)$, что

$$\operatorname{Lin}(y_1(t),y_2(t))=\operatorname{Lin}(k_1(t),k_2(t)) \quad \text{для всех} \quad t\in(0,1].$$

Далее, найдем ортонормированные векторы

$$\ell_i(0+0)=\lim_{t\to 0+0}\frac{y_i(t)}{|y_i(t)|}, \quad i=1,2:$$

$$\ell_1(0+0)=\left(\frac{1}{\sqrt{14}},\frac{3}{\sqrt{14}},\frac{-2}{\sqrt{14}}\right), \quad \ell_2(0+0)=\left(\frac{-3}{\sqrt{70}},\frac{5}{\sqrt{70}},\frac{6}{\sqrt{70}}\right).$$

Отметим, что линейная оболочка векторов $\ell_1(0-0)$, $\ell_1(0+0)$ и $\ell_2(0+0)$ не совпадает с $\mathbb{R}^3$, поэтому в силу теоремы 24.1 система (24.2) не является вполне управляемой на отрезке $[-1,1]$.

П р и м е р 24.2. Исследуем полную управляемость на отрезке $[-1,1]$ линейной системы S:

$$\dot y=A(t)y+b(t)u, \quad y\in\mathbb{R}^3, \tag{24.3}$$

где

$$A(t)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 2 & e^t\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}, \ b(t)=\begin{pmatrix}t^3e^t\\ t^4e^t\\ t^3\end{pmatrix}, \ t\in[-1,0], \ b(t)=\begin{pmatrix}t^3\\ t^3\\ 0\end{pmatrix}, \ t\in(0,1].$$

Найдем матрицу $K(t,S)$ для системы (24.3):

$$K(t,S)=\begin{pmatrix}t^3e^t & t^3-3t^2e^t & 2t^3-6t^2+6te^t\\ t^4e^t & (t^4-3t^3)e^t & (t^4-6t^3+6t^2)e^t\\ t^3 & t^3-3t^2 & t^3-6t^2+6t\end{pmatrix} \quad \text{при} \quad t\in[-1,0],$$

$$K(t,S)=\begin{pmatrix}t^3 & t^3-3t^2 & t^3-6t^2+6t\\ t^3 & 2t^3-3t^2 & 4t^3-12t^2+6t\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \quad \text{при} \quad t\in(0,1].$$

Несложно посчитать, что $\operatorname{rank} K(t,S) \equiv 2$ для всех $t \in [-1,0) \cup (0,1]$. Построим единичный вектор

$$p_1(t) = \left(0, \frac{1}{\sqrt{1+t^2e^{2t}}}, \frac{-te^t}{\sqrt{1+t^2e^{2t}}}\right),$$

ортогональный векторам

$$k_1(t) = b(t) = (t^3e^t, t^4e^t, t^3), \quad k_2(t) = \left(t^3 - 3t^2e^t, (t^4 - 3t^3)e^t, t^3 - 3t^2\right)$$

при $t \in [-1,0)$, тогда $p_1(0-0) \doteq \lim\limits_{t\to 0-0} p_1(t) = (0,1,0)$. При $t \in (0,1]$ вектор $p_1(t) = (0,0,1)$ ортогонален векторам $k_1(t) = b(t) = (t^3, t^3, 0)$ и $k_2(t) = (t^3 - 3t^2, 2t^3 - 3t^2, 0)$. Поскольку векторы $p_1(0-0) = (0,1,0)$ и $p_1(0+0) = (0,0,1)$ линейно независимы, то в силу теоремы 24.2 система (24.3) вполне управляема на отрезке $[-1,1]$.

ГЛАВА VII. ИНВАРИАНТНЫЕ МНОЖЕСТВА И ЛОКАЛЬНАЯ УПРАВЛЯЕМОСТЬ СИСТЕМ СО СЛУЧАЙНЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Исследуется задача о существовании неупреждающего управления для линейной нестационарной системы

$$\dot{x} = A(h^t\sigma)x + B(h^t\sigma)u, \quad (t, \sigma, x, u) \in \mathbb{R} \times \Sigma \times \mathbb{R}^n \times U, \tag{VII.1}$$

параметризованной метрической динамической системой $(\Sigma, \mathfrak{A}, \nu, h^t)$. Систему (VII.1) в дальнейшем будем отождествлять со стационарным в узком смысле случайным процессом

$$\xi = \xi(h^t\sigma) \doteq \big(A(h^t\sigma), B(h^t\sigma)\big)$$

и называть системой ξ. Предполагаем, что для каждого $\sigma \in \Sigma$ функция $t \to \xi(h^t\sigma)$ переменного t кусочно-постоянная и принимает значения в множестве $\Psi = \{\psi_i\}_{i=1}^{\ell}$ — конечном множестве матричных пар $\psi_i \doteq (A_i, B_i)$, которые будем называть состояниями системы.

Отметим, что вопросам управляемости и устойчивости систем со случайными параметрами посвящено множество работ (см., например, [8,31,81,123,146,150,172,174,193,197,209,212,230]). В данной главе рассматривается задача о существовании *неупреждающего управления* для систем вида (VII.1), содержащих случайные параметры. Термин «неупреждающее управление», по-видимому, введен свердловской школой по теории управления (см., например, [78, 80, 151, 176, 177]), задача построения управления данного типа для детерминированных систем исследовалась также в [106, 107]. Управление $u(t, x)$ называется *неупреждающим,* если для его построения в момент времени $t = \tau$ используется информация о поведении системы только при $t \leqslant \tau$.

Одна из особенностей построения неупреждающего управления для системы ξ состоит в том, что нам неизвестны моменты переключения и состояния данной системы, которые появляются при $t > \tau$. Поэтому возникает следующая задача: нужно научиться управлять таким образом, чтобы траектория системы оставалась как угодно долго в некоторой окрестности начала координат до появления нужного состояния системы. При появлении определенной последовательности состояний $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$ множества Ψ, которую будем называть словом w, нужно строить такие управления, которые удерживают данную траекторию в некоторых подпространствах и одновременно не дают ей уйти далеко от начала координат. Таким образом, задача о построении неупреждающего управления связана с задачей о существовании *слабо инвариантных множеств,* в которых должна находиться траектория системы при некоторых допустимых управлениях.

В этой главе на основании результатов работ [95–101, 124–126, 219] получены новые достаточные условия существования неупреждающего управления для системы ξ, а также оценка снизу вероятности того, что система локально управляема на фиксированном отрезке времени. Отметим, что в работах [97] и [99] рассматривались условия полной управляемости данной системы, то есть не предполагалось никаких ограничений на управление $u \in \mathbb{R}^m$. В остальных работах исследовалась локальная управляемость и предполагалось, что множество допустимых управлений $U \subset \mathbb{R}^m$ выпукло, компактно и содержит нуль в своей внутренности.

Разработан общий алгоритм построения неупреждающего управления, при этом отдельно рассматривается ситуация, когда допускается произвольное (конечное) число состояний $\psi_1, \ldots, \psi_\ell$ системы ξ, и случай, когда множество Ψ содержит только два состояния. Показано, что в последнем случае можно значительно ослабить требования, которым должна удовлетворять система для существования неупреждающего управления.

§ 25. Построение неупреждающего управления для систем со случайными параметрами

В данной главе рассмативается следующая задача: требуется определить условия существования неупреждающего управления для нестационарной линейной системы

$$\dot{x} = A(h^t\sigma)x + B(h^t\sigma)u, \quad (t, \sigma, x, u) \in \mathbb{R} \times \Sigma \times \mathbb{R}^n \times U \tag{25.1}$$

в предположении, что выполнено следующее условие.

У с л о в и е 25.1. Множество $U \subset \mathbb{R}^m$ выпукло, компактно и содержит нуль в своей внутренности (относительно $\mathbb{R}^m$).

Здесь, как и ранее, система (25.1) параметризована метрической динамической системой $(\Sigma, \mathfrak{A}, \nu, h^t)$, построенной в § 17, и поэтому ее будем отождествлять со стационарным в узком смысле случайным процессом $\xi(h^t\sigma) \doteq \big(A(h^t\sigma), B(h^t\sigma)\big)$ и в дальнейшем называть системой дифференциальных уравнений $\xi = \xi(\sigma)$.

Напомним, что *метрической динамической системой* называется четверка $(\Sigma, \mathfrak{A}, \nu, h^t)$, где Σ — фазовое пространство динамической системы; $\mathfrak{A}$ — некоторая сигма-алгебра подмножеств Σ; h^t — *однопараметрическая группа измеримых преобразований* фазового пространства Σ в себя (измеримость означает, что $h^t A \in \mathfrak{A}$ для каждого $A \in \mathfrak{A}$ и для любого $t \in \mathbb{R}$). Далее, ν — вероятностная мера, инвариантная относительно потока h^t, то есть $\nu(h^t A) = \nu(A)$ для всех $A \in \mathfrak{A}$ и любого $t \in \mathbb{R}$.

Вероятностное пространство $(\Sigma, \mathfrak{A}, \nu)$, на котором определена динамическая система, является прямым произведением двух вероятностных пространств:

$$(\Sigma, \mathfrak{A}, \nu) = (\Sigma_1 \times \Sigma_2, \mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2, \nu_1 \times \nu_2),$$

где Σ_1 — пространство числовых последовательностей $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_k, \ldots)$ (см. параграф 17). Предполагаем, что положительные случайные величины $\theta_1, \theta_2, \ldots$ независимы и величины $\theta_2, \theta_3, \ldots$ имеют функцию распределения $F(t)$. Функция распределения случайной величины θ_1 в общем случае отличается от $F(t)$ и определяется равенством (17.7).

Далее, пусть задано конечное множество пар

$$\Psi = \{\psi_1, \ldots, \psi_\ell\}, \quad \text{где} \quad \psi_i = (A_i, B_i),$$

A_i и B_i — матрицы размеров $(n \times n)$ и $(n \times m)$ соответственно. Пространство Σ_2 определяется как множество последовательностей $\varphi = (\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_k, \ldots)$, где φ_k принимают значения в множестве Ψ.

Из построения динамической системы $(\Sigma, \mathfrak{A}, \nu, h^t)$ следует, что для каждого $\sigma \in \Sigma$ функция $t \to \xi(h^t\sigma)$ (которая называется выборочной функцией случайного процесса $\xi(h^t\sigma)$) кусочно-постоянная и принимает значения в множестве Ψ. Будем говорить, что система ξ находится в состоянии φ_i на промежутке времени $[t_0, t_1)$ при некотором $\sigma \in \Sigma$, если $\xi(h^t\sigma) = (A_i, B_i)$ при $t \in [t_0, t_1)$, то есть управляемая система ξ на промежутке $[t_0, t_1)$ совпадает с детерминированной управляемой системой

$$\dot{x} = A_i x + B_i u, \quad (x, u) \in \mathbb{R}^n \times U,$$

которую будем называть системой φ_i.

Напомним, что для системы ξ вероятности нахождения в состояниях $\psi_1, \ldots, \psi_\ell$ задаются вектором $\pi = (\pi_1, \ldots, \pi_\ell)$, а условные вероятности p_{ij} перехода из состояния ψ_i в состояние ψ_j образуют матрицу $P = (p_{ij})_{i,j=1\ldots\ell}$, которая является матрицей переходных вероятностей некоторой однородной цепи Маркова ζ. Предполагается, что числа π_i, p_{ij} неотрицательные, удовлетворяют условиям

$$\sum_{i=1}^{\ell} \pi_i = 1 \;\text{ и }\; \sum_{j=1}^{\ell} p_{ij} = 1, \;\; i = 1, \ldots, \ell,$$

а также системе уравнений

$$\pi_j = \sum_{i=1}^{\ell} \pi_i p_{ij}, \quad j = 1, \ldots, \ell; \tag{25.2}$$

тогда вектор π является стационарным или инвариантным распределением вероятностей цепи Маркова.

Рассмотрим числовую последовательность

$$\{\tau_k\}_{k=0}^{\infty}, \quad \text{где} \quad \tau_0 = 0, \;\; \tau_k(\theta) = \sum_{i=1}^{k} \theta_i.$$

Напомним, что $\theta_i \in (0, \infty)$, поэтому $0 < \tau_1 < \tau_2 < \ldots$ Точки $\tau_1, \tau_2, \ldots$ будем называть *моментами переключения* случайного процесса $\xi = \xi(h^t\sigma)$ или моментами переключения системы ξ.

З а м е ч а н и е 25.1. Мы не предполагаем, что в моменты времени $t = \tau_k$ обязательно поменяются состояния системы

$$\dot{x} = A(h^t\sigma)x + B(h^t\sigma)u, \quad (t, \sigma, x, u) \in \mathbb{R} \times \Sigma \times \mathbb{R}^n \times U.$$

Если же в момент τ_k происходит реальная смена состояний системы (то есть состояние φ_i поменяется на состояние φ_j, $j \neq i$), то такой момент переключения будем называть эффективным. Легко понять, что все моменты переключения будут эффективными, если переходные вероятности $p_{ii} = 0$ для любого $i = 1, \ldots, \ell$; однако для общности не будем считать, что $p_{ii} = 0$.

Предполагаем, что длины интервалов $\theta_2, \theta_3, \ldots$ между моментами переключения процесса $\xi(h^t\sigma)$ удовлетворяют следующему условию.

У с л о в и е 25.2. Существуют постоянные $0 < \alpha < \beta < \infty$ такие, что $\theta_k \in [\alpha, \beta]$ для всех $k = 2, 3\ldots$

Из этого условия следует, что для каждого $\sigma \in \Sigma$ моменты переключения случайного процесса $\xi(h^t\sigma)$ изолированы и для любых τ_i, τ_j (таких, что $\tau_i \neq \tau_j \neq 0$) выполнено неравенство $|\tau_i - \tau_j| \geqslant \alpha > 0$.

Опишем различные известные типы управлений, которые применяются для построения неупреждающего управления. Отметим, что при каждом фиксированном $\sigma \in \Sigma$ функция $\xi(\sigma)$ задает линейную детерминированную систему. Предположим, что в начальный момент времени t_0 известно начальное состояние $x_0 = x(t_0)$ детерминированной системы $\xi(\sigma)$ и задана цель управления, кроме того, в процессе управления не поступает какой-либо дополнительной информации о реализующемся движении. В этом случае естественно полагать, что управление $u_\sigma(t, t_0, x_0)$ выбирается в начальный момент времени t_0 сразу на весь промежуток; управление такого типа, не зависящее явно от фазовых координат x управляемой системы, называется *программным управлением,* отвечающим точке (t_0, x_0).

Наряду с программными будем рассматривать позиционные управления. *Позиционным управлением* называется всякая измеримая по Лебегу функция $u_\sigma : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \to U \subset \mathbb{R}^m$. Решения системы $\xi(\sigma)$, соответствующие управлению $u_\sigma(t, x)$, будем понимать в смысле А. Ф. Филиппова (см. [166], [170, с. 39–45]).

На практике часто возникает ситуация, когда на различных участках времени выбирается либо программное, либо позиционное управление. Ниже будет показано, что таким образом можно построить неупреждающее управление для управляемой системы со случайными параметрами ξ.

О п р е д е л е н и е 25.1 (см., например, [107]). Позиционное управление $u_\sigma(t, x)$ называется *неупреждающим* на отрезке $I \doteq [t_0, t_1]$, если для построения этого управления в точке (τ, x), $\tau \in I$ используется информация о матрицах $A(h^t\sigma)$ и $B(h^t\sigma)$ только при $t \leqslant \tau$ (и не используется информация об этих матрицах при $t > \tau$, то есть информация о поведении системы «в будущем»).

О п р е д е л е н и е 25.2. Состояние $x_0 \in \mathbb{R}^n$ системы $\xi(\sigma)$ называется *управляемым* на отрезке $I = [t_0, t_1]$ при заданном $\sigma \in \Sigma$, если существует такое программное управление $u_\sigma(t, t_0, x_0)$, $t \in I$, что соответствующее ему решение $x(t, \sigma, x_0)$ (то есть решение с начальным условием $x(t_0, \sigma, x_0) = x_0$) удовлетворяет условию $x(t_1, \sigma, x_0) = 0$.

Состояние $x_0 \in \mathbb{R}^n$ системы $\xi(\sigma)$ называется *неупреждающе управляемым* на отрезке I при заданном $\sigma \in \Sigma$, если существует такое неупреждающее управление $u_\sigma(t, x)$, $t \in I$, что соответствующее ему решение $x(t, \sigma, x_0)$ удовлетворяет условию $x(t_1, \sigma, x_0) = 0$.

Обозначим через $D_I\big(\xi(\sigma)\big)$ *множество управляемости системы* $\xi(\sigma)$ на отрезке $I = [t_0, t_1]$ при фиксированом $\sigma \in \Sigma$, то есть множество всех точек, которые можно перевести в нуль на данном отрезке при $\sigma \in \Sigma$. Напомним, что система $\xi(\sigma)$ называется *локально управляемой* на отрезке I при заданном $\sigma \in \Sigma$, если $\{0\} \in \operatorname{int} D_I\big(\xi(\sigma)\big)$. Здесь и далее через $\operatorname{int} D$ обозначается внутренность множества $D \subset \mathbb{R}^n$ относительно $\mathbb{R}^n$.

О п р е д е л е н и е 25.3 (подобное определение приведено в [8]). Система ξ называется *локально управляемой с вероятностью* ν_0 на отрезке I, если

$$\nu\big\{\sigma : \{0\} \in \operatorname{int} D_I\big(\xi(\sigma)\big)\big\} = \nu_0.$$

О п р е д е л е н и е 25.4. Систему ξ будем называть *неупреждающе локально управляемой с вероятностью* ν_0 на отрезке I, если существует множество $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$ такое, что $\nu(\Sigma_0) = \nu_0$ и для каждого $\sigma \in \Sigma_0$ система $\xi(\sigma)$ локально управляема при помощи неупреждающего управления на заданном отрезке.

Рассмотрим стационарную линейную систему φ_i, $i = 1, \ldots, \ell$:

$$\dot{x} = A_i x + B_i u, \quad (x, u) \in \mathbb{R}^n \times U.$$

Пусть $X_i(t, s) = X_i(t-s)$ — матрица Коши данной системы, $D_I(\varphi_i)$ — множество управляемости системы φ_i на отрезке $I = [t_0, t_1]$, тогда

$$D_I(\varphi_i) = -\int_{t_0}^{t_1} X_i^{-1}(s) B_i U ds.$$

Далее, пусть задано множество $D \subset \mathbb{R}^n$. Тогда множество точек, которые система φ_i переводит в D на отрезке $I = [t_0, t_1]$, мы обозначим $D_I\big(\varphi_i, D\big)$. Множество $D_I\big(\varphi_i, D\big)$ называется *множеством управляемости системы* φ_i *в множество* D на отрезке I и является множеством точек $x_0 \in \mathbb{R}^n$, для каждой из которых существует допустимое программное управление $u : [t_0, t_1] \to U$ такое, что соответствующее ему решение удовлетворяет условию $x(t_1, t_0, x_0) = x_1 \in D$, поэтому

$$D_I\big(\varphi_i, D\big) = D_I(\varphi_i) + X_i^{-1}(t_1 - t_0) D. \tag{25.3}$$

Назовем конечную последовательность

$$w = (\varphi_1, \ldots, \varphi_k), \quad k \leqslant \ell$$

состояний φ_i множества $\Psi = \{\psi_1, \ldots, \psi_\ell\}$ *словом* w, а состояния $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$ будем называть буквами данного слова. Слову w поставим в соответствие нестационарную линейную систему S, которая на промежутке $[0, \alpha)$ совпадает с системой φ_1, на $[\alpha, 2\alpha)$ совпадает с φ_2 и так далее, на отрезке $[(k-1)\alpha, k\alpha]$ совпадает с φ_k. Отметим, что детерминированную систему S можно рассматривать как систему ξ при фиксированном значении $\sigma = \sigma_0 = (\theta, \varphi)$, у которого k первых координат равны $(\alpha, \varphi_1), \ldots, (\alpha, \varphi_k)$. Поэтому для множества управляемости $D_I\big(\xi(\sigma_0)\big)$

системы $\xi(\sigma_0)$ на отрезке $I=[0,k\alpha]$ и множества управляемости $D_I(S)$ системы S на данном отрезке справедливо равенство

$$D_I\big(\xi(\sigma_0)\big)=D_I(S).$$

В следующем утверждении получена зависимость между множеством $D_I(S)$ и множествами управляемости $D_{[0,\alpha]}(\varphi_1),\ldots,D_{[0,\alpha]}(\varphi_k)$.

Л е м м а 25.1. *Пусть $S=\varphi_j$ при $t\in[(j-1)\alpha,j\alpha)$, $j=1,\ldots,k$. Тогда для множества управляемости системы S на отрезке $I=[0,k\alpha]$ справедливо равенство*

$$D_I(S)=D_{[0,\alpha]}(\varphi_1)+X_1^{-1}(\alpha)D_{[0,\alpha]}(\varphi_2)+\\ +X_1^{-1}(\alpha)X_2^{-1}(\alpha)D_{[0,\alpha]}(\varphi_3)+\ldots+X_1^{-1}(\alpha)\cdot\ldots\cdot X_{k-1}^{-1}(\alpha)D_{[0,\alpha]}(\varphi_k).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о следует из равенства (25.3).

Системе S поставим в соответствие множества $D_1,\ldots,D_k$, определенные следующим образом. Пусть $L_k\doteq\operatorname{Lin}D_{[0,\alpha]}(\varphi_k)$ — пространство управляемости системы φ_k. Поскольку множество $U\subset\mathbb{R}^m$ содержит нуль в своей внутренности относительно $\mathbb{R}^m$, то множество $D_{[0,\alpha]}(\varphi_k)$ содержит нуль в своей внутренности относительно содержащего его пространства управляемости L_k. Следовательно, существует окрестность начала координат $O_{r_k}(0)$ радиуса r_k такая, что имеет место включение

$$L_k\cap O_{r_k}(0)\subseteq D_{[0,\alpha]}(\varphi_k).$$

Определим множество

$$D_k\doteq D_{[0,\alpha]}(\varphi_k)\cap O_{r_k}(0),$$

которое содержится в множестве управляемости $D_{[0,\alpha]}(\varphi_k)$.

Далее, построим множество $D_{[0,\alpha]}(\varphi_{k-1},D_k)$ — множество управляемости системы φ_{k-1} в множество D_k на отрезке $[0,\alpha]$, подпространство $L_{k-1}\doteq\operatorname{Lin}D_{[0,\alpha]}(\varphi_{k-1},D_k)$ и множество

$$D_{k-1}\doteq D_{[0,\alpha]}(\varphi_{k-1},D_k)\cap O_{r_{k-1}}(0),$$

где радиус r_{k-1} выбирается таким образом, чтобы имело место включение

$$L_{k-1}\cap O_{r_{k-1}}(0)\subseteq D_{[0,\alpha]}(\varphi_{k-1},D_k).$$

Отметим, что $D_{k-1}\subseteq D_{[0,\alpha]}(\varphi_{k-1},D_k)$, поэтому из любой точки множества D_{k-1} можно попасть в множество D_k за время α, а из любой точки D_k можно попасть в нуль также за время α. Аналогично определяем множества $D_1,\ldots,D_{k-2}$. Если выполнено условие 25.1 и система S, соответствующая слову w, локально управляема на отрезке $I=[0,k\alpha]$, то $\{0\}\in\operatorname{int}D_{[0,\alpha]}(\varphi_1,D_2)$ и множество D_1 является окрестностью начала координат $O_{r_1}(0)$.

Из построения множеств $D_1,\ldots,D_k$ следует, что любую начальную точку x_1 системы $\xi(\sigma_0)$ из множества $D_1=O_{r_1}(0)$ можно перевести в точку x_2 множества D_2 за время α, затем точку x_2 перевести в точку x_3 множества D_3. Продолжая далее этот процесс, получим точку x_k множества D_k, которую можно перевести в нуль также за время α. Кроме того, чтобы для системы $\xi(\sigma)$ (при $\sigma\neq\sigma_0$) существовало неупреждающее управление, для множеств $D_1,\ldots,D_k$ должны существовать позиционные управления, которые удерживают траекторию решения системы, выходящую из точек $D_1,\ldots,D_k$ в этом же множестве до следующего момента переключения системы, в каком бы состоянии из множества Ψ не находилась данная система (см. рис. 19).

Отметим, что множества $D_1,\ldots,D_k$, обладающие указанным выше свойством, являются *слабо инвариантными* относительно управляемой системы ξ. Таким образом, задача о построении неупреждающего управления связана с задачей существования слабо инвариантных множеств для данной системы.

О п р е д е л е н и е 25.5. Слово $w = (\varphi_1, \ldots, \varphi_k)$ назовем *допустимым словом для системы* ξ, если выполнены следующие свойства:

1) детерминированная система S, соответствующая слову w, локально управляема на отрезке $I = [0, k\alpha]$, то есть $\{0\} \in \operatorname{int} D_I(S)$;

2) существуют позиционные управления

$$u_{ij}(x) \in U, \;\; i = 1, \ldots, \ell, \;\; j = 1, \ldots, k$$

такие, что для всех $x \in D_j$ имеет место включение

$$A_i x + B_i u_{ij}(x) \in D_j. \tag{25.4}$$

Напомним, что состояние ψ_j цепи Маркова называется *достижимым из состояния* ψ_i, если существует такое целое число $l \geqslant 0$, что вероятность перехода из состояния ψ_i в ψ_j за l шагов $p_{ij}^{(l)} > 0$. Состояния ψ_i и ψ_j называются *сообщающимися,* если ψ_j достижимо из ψ_i и ψ_i достижимо из состояния ψ_j (см., например, [179, с. 598]).

В параграфах 25 и 26 будем предполагать, что выполнено следующее условие.

У с л о в и е 25.3. Пусть система ξ обладает следующими свойствами:

1) цепь Маркова ζ является *неразложимой,* то есть все ее состояния образуют один класс сообщающихся состояний;

2) для системы ξ существует допустимое слово $w = (\varphi_1, \ldots, \varphi_k)$.

Отметим, что вместо условия 25.3 можно предполагать, что множество всех состояний цепи Маркова разбивается на непересекающиеся классы сообщающихся состояний $E_1, \ldots, E_K$ и для каждого класса E_i должно существовать допустимое слово w_i, $i = 1, \ldots, K$. Мы не будем рассматривать эту ситуацию, потому что она сводится к предыдущему случаю.

В этой главе исследуется следующая задача: в предположении, что выполнено условие 25.3, найти вероятность $\nu(T)$ (или оценку снизу для этой вероятности) того, что система ξ локально управляема при помощи неупреждающего управления на фиксированном отрезке времени $[0, T]$. Из сказанного выше следует, что вероятность $\nu(T)$ равна вероятности появления на отрезке $[0, T]$ допустимого слова w.

З а м е ч а н и е 25.2. Из условия 25.2 не следует, что для промежутка времени $\theta_1 = \tau_1$ до первого переключения системы выполнено включение $\theta_1 \in [\alpha, \beta]$. Это связано с тем, что случайная величина θ_1 имеет функцию распределения $F_1(t)$, которая отлична от функции распределения $F(t)$ для промежутков $\theta_2, \theta_3, \ldots$ Напомним, что эти функции связаны равенством

$$F_1(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{m_\theta} \displaystyle\int_0^t \big(1 - F(s)\big) ds, & t > 0, \\ 0, \quad t \leqslant 0, & \end{cases}$$

из которого следует, что $\theta_1 \in [0, \beta]$ (см. [73, с. 145–147]).

Введем следующие обозначения. Пусть

$$f_{ij}^{(l)} = \nu\big\{\zeta_l = \varphi_j \mid \zeta_0 = \varphi_i, \, \zeta_h \neq \varphi_j, \, 1 \leqslant h < l\big\}$$

— условная вероятность *первого попадания* системы ξ (или цепи Маркова $\zeta = (\zeta_0, \zeta_1, \ldots)$) из состояния φ_i в состояние φ_j за l шагов;

$$f_{ij}(N) = \sum_{l=1}^{N} f_{ij}^{(l)}, \quad N \geqslant 1$$

— условная вероятность первого попадания данной системы из состояния φ_i в φ_j не более чем за N шагов. Введем также вероятность $Q(N) \doteq \sum_{i=1}^{\ell} \pi_i f_{i1}(N)$ того, что из любого начального состояния система ξ попадает в состояние φ_1 не более чем за N шагов.

Для каждого слова $w = (\varphi_1, \ldots, \varphi_k)$ и фиксированного отрезка времени $[0, T]$, $T \geqslant k(\alpha+\beta)$, определим произведение вероятностей

$$\nu_w(k, N) \doteq Q(N) f_{12}(N) f_{23}(N) \ldots f_{k-1,k}(N),$$

где число N равно целой части $\dfrac{T - k\alpha}{k\beta}$ (если $T \geqslant k(\alpha+\beta)$, то $N \geqslant 1$.) Таким образом, мы подготовили почву для построения алгоритма неупреждающего управления, которое переводит любую начальную точку системы ξ в нуль на заданном отрезке $[0, T]$ с вероятностью $\nu(T)$.

Один из алгоритмов построения неупреждающего управления

Отметим, что, кроме изложенного в этом параграфе, можно рассмотреть другие алгоритмы построения неупреждающего управления. Например, в работах [97–101, 124–126, 219] предложен алгоритм, при котором требуется, чтобы между состояниями $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$, образующими слово w, не появлялись другие состояния управляемой системы ξ. Недостатком этого способа является относительно небольшая вероятность $\nu(T)$ появления слова w на отрезке $[0, T]$. Можно предложить также следующий алгоритм: в зависимости от того, какое состояние $\varphi_i \in \Psi$ появится в момент времени $t = 0$, будем выбирать допустимое слово w_i с первой буквой φ_i. В этой ситуации для каждого слова w_i придется строить отдельный набор слабо инвариантных множеств, хотя вероятность $\nu(T)$ будет немного больше, чем в рассмотренном ниже алгоритме.

1. Пусть задан отрезок $[0, T]$, фиксированы натуральное число ℓ и постоянные α и β такие, что $0 < \alpha < \beta$. Из конечного числа всевозможных слов различной длины $k \leqslant \ell$ выберем все допустимые слова. Для каждого допустимого слова $w = (\varphi_1, \ldots, \varphi_k)$ находим натуральное число $N = \left[\dfrac{T - k\alpha}{k\beta}\right]$ и вычисляем вероятность

$$\nu_w(k, N) = Q(N) f_{12}(N) f_{23}(N) \ldots f_{k-1,k}(N).$$

Далее, выбираем такое слово w, для которого вероятность $\nu_w(k, N)$ максимальна по сравнению с другими допустимыми словами. Слову w поставим в соответствие детерминированную систему S, которая на промежутке $[0, \alpha)$ совпадает с системой φ_1, на $[\alpha, 2\alpha)$ совпадает с φ_2, и так далее, на отрезке $[(k-1)\alpha, k\alpha]$ совпадает с φ_k. Для системы S рассмотрим множества $D_1, \ldots, D_k$, построенные выше.

2. Обозначим через s_1 такой момент переключения системы ξ, когда впервые появится состояние φ_1. Предполагаем, что $s_1 \geqslant \tau_1$, где τ_1 — момент первого переключения системы. Такое предположение связано с тем, что если состояние φ_1 появится в начальный момент времени $t = 0$ и окажется, что $\tau_1 < \alpha$, то на промежутке $[0, \tau_1)$ можно не успеть перевести начальную точку системы ξ из множества $D_1 = O_{r_1}(0)$ в множество D_2 при помощи программного управления (см. замечание 25.2, с. 141). При $t \in [0, s_1)$ строим позиционное управление $u_{i1}(x) \in U$, $i = 1, \ldots, \ell$, удерживающее траекторию данной системы, выходящую из точек множества D_1, в этом же множестве, то есть такое управление, что для всех $x \in D_1$ имеет место включение

$$A_i x + B_i u_{i1}(x) \in D_1.$$

При появлении состояния φ_1 в момент s_1 любую точку $x \in D_1$ переводим в некоторую точку множества D_2 за время α при помощи соответствующего программного управления.

3. Пусть $s_2 \geqslant s_1$ — такой момент переключения системы ξ, когда впервые после s_1 появится состояние φ_2. При $t \in [s_1 + \alpha, s_2)$, когда могут появиться любые состояния ψ_i данной системы, не совпадающие с φ_2, находим позиционные управления $u_{i2}(x) \in U$, $i = 1, \ldots, \ell$, под действием которых все точки из множества D_2 остаются в этом же множестве как угодно долго (до

момента переключения s_2). Для этих управлений и всех точек $x \in D_2$ должно быть выполнено включение

$$A_i x + B_i u_{i2}(x) \in D_2.$$

При появлении состояния φ_2 в момент s_2 любую точку $x \in D_2$ переводим в некоторую точку множества D_3 за время α при помощи соответствующего программного управления. Далее, обозначим через s_3 момент переключения системы ξ, когда впервые (после момента переключения s_2) появится состояние φ_3. При $t \in [s_2+\alpha, s_3)$ строим позиционные управления $u_{i3}(x) \in U$, $i = 1, \ldots, \ell$, под действием которых все точки из множества D_3 остаются в D_3 до момента переключения s_3, после чего переводим их в множество D_4. Продолжаем этот процесс до тех пор, пока не попадем в множество D_k в момент времени $s_{k-1}+\alpha$, далее остаемся в D_k до момента переключения s_k, когда впервые после момента s_{k-1} появляется состояние φ_k; при $t \in [s_k, s_k+\alpha]$ переводим траектории системы ξ из множества D_k в нуль за время α (см. рис. 21).

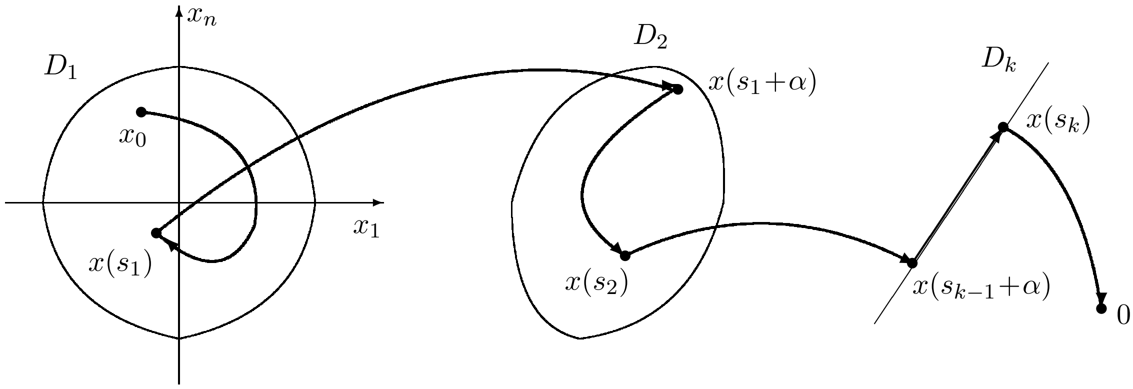

Рис. 21. Схема построения неупреждающего управления для системы ξ

§ 26. Построение оценки снизу для вероятности неупреждающей управляемости на заданном отрезке времени

В этом параграфе получены достаточные условия существования неупреждающего управления для системы ξ :

$$\dot{x} = A(h^t\sigma)x + B(h^t\sigma)u, \quad (t, \sigma, x, u) \in \mathbb{R} \times \Sigma \times \mathbb{R}^n \times U$$

и оценка снизу вероятности $\nu(T)$ того, что данная система неупреждающе локально управляема на фиксированном отрезке времени $[0, T]$. Из результатов предыдущего параграфа следует, что вероятность $\nu(T)$ равна вероятности появления на данном отрезке слова w. Напомним, что **словом** w мы называем конечную последовательность $w = (\varphi_1, \ldots, \varphi_k)$ состояний φ_i множества

$$\Psi = \{\psi_1, \ldots, \psi_\ell\}, \qquad \text{где} \qquad \psi_i = (A_i, B_i),$$

A_i и B_i — матрицы размеров $(n \times n)$ и $(n \times m)$ соответственно.

Слову $w = (\varphi_1, \ldots, \varphi_k)$ поставим в соответствие детерминированную линейную систему S, которая на промежутке $[0, \alpha)$ совпадает с системой φ_1, на $[\alpha, 2\alpha)$ совпадает с φ_2 и так далее, на отрезке $[(k-1)\alpha, k\alpha]$ совпадает с системой φ_k. Также для слова w построим множества $D_1, \ldots, D_k$, определенные в § 25.

Рассмотрим последовательность случайных величин $\zeta = (\zeta_0, \zeta_1, \ldots)$, образующих однородную *цепь Маркова*, которая однозначно определяется матрицей переходных вероятностей

$P = (p_{ij})_{i,j=1\ldots\ell}$ и начальным распределением $\pi = (\pi_i)_{i=1\ldots\ell}$. Предполагаем, что цепь Маркова ζ *стационарна в узком смысле* (см., например, [179, с. 432]) и является *неразложимой,* то есть все ее состояния образуют один класс сообщающихся состояний.

Напомним, что мы пользуемся следующими обозначениями:

$$f_{ij}^{(l)} = \nu\big\{\zeta_l = \varphi_j \mid \zeta_0 = \varphi_i, \zeta_h \neq \varphi_j, 1 \leqslant h < l\big\}$$

— условная вероятность *первого попадания* системы ξ (или цепи Маркова ζ) из состояния φ_i в состояние φ_j за l шагов; $f_{ij}(N) = \sum\limits_{l=1}^{N} f_{ij}^{(l)}$ — условная вероятность первого попадания данной системы из состояния φ_i в φ_j не более чем за N шагов; $Q(N) \doteq \sum\limits_{i=1}^{\ell} \pi_i f_{i1}(N)$ — вероятность того, что из любого начального состояния система ξ попадает в состояние φ_1 не более чем за N шагов.

Пусть задан отрезок $[0,T]$, фиксированы натуральное число ℓ и постоянные α и β, $0 < \alpha < \beta$. Для каждого допустимого слова $w = (\varphi_1, \ldots, \varphi_k)$ длины $k \leqslant \ell$ найдем натуральное число $N = \Big[\dfrac{T - k\alpha}{k\beta}\Big]$ и вероятность

$$\nu_w(k,N) = Q(N) f_{12}(N) f_{23}(N) \ldots f_{k-1,k}(N). \tag{26.1}$$

Из всех допустимых слов выберем такое слово w, для которого вероятность $\nu_w(k,N)$ максимальна по сравнению с другими допустимыми словами.

Т е о р е м а 26.1. *Пусть выполнены условия* 25.1 − 25.3 *и допустимое слово w длины k. Тогда система ξ неупреждающе локально управляема на отрезке* $[0,T]$ *с вероятностью* $\nu(T)$, *для которой при $T \geqslant k(\alpha+\beta)$ имеет место оценка*

$$\nu(T) \geqslant \nu_w(k,N), \tag{26.2}$$

где $\nu_w(k,N)$ определена равенством (26.1), $N = \Big[\dfrac{T - k\alpha}{k\beta}\Big]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть задан отрезок $[0,T]$, где $T \geqslant k(\alpha+\beta)$ и слово $w = (\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k)$ является допустимым словом для системы ξ (будем предполагать, что для слова w вероятность $\nu_w(k,N)$ максимальна по сравнению с другими допустимыми словами). Построим для этого слова множества $D_1, \ldots, D_k$. Далее, обозначим через $s_1 \geqslant \tau_1$ момент переключения системы ξ, когда впервые появится первая буква φ_1 выбранного слова w; через s_j обозначим такой момент переключения данной системы, когда впервые (после предыдущего момента s_{j-1}) появится j-я буква слова w, $j = 2, \ldots, k$.

Построение неупреждающего управления на отрезке $[0,T]$ проведем в несколько этапов. На промежутке $[0, s_1)$ строим позиционное управление $u_{i1}(x) \in U$, под действием которого траектории системы ψ_i, $i = 1, \ldots, \ell$, выходящие из множества D_1, остаются в этом же множестве как угодно долго (до момента переключения s_1). Существование таких управлений следует из включения (25.4).

При $t \in [s_1, s_1+\alpha)$ переводим любую точку множества D_1 в D_2 при помощи программного управления $u(t) \in U$. На промежутке времени $[s_1+\alpha, s_2)$ могут появиться любые состояния системы ξ (кроме φ_2), поэтому при появлении состояния $\psi_i \neq \varphi_2$ строим позиционное управление $u_{i2}(x) \in U$, под действием которого траектории системы ψ_i, $i = 1, \ldots, \ell$, выходящие из множества D_2, остаются в этом же множестве как угодно долго (до момента переключения s_2). При появлении состояния φ_2 в момент s_2 любую точку $x \in D_2$ можно перевести в некоторую точку множества D_3 за время α при помощи соответствующего программного управления. Продолжаем этот процесс до тех пор, пока не попадем в множество D_k в момент времени s_k, когда впервые после момента s_{k-1} появляется состояние φ_k, далее при $t \in [s_k, s_k+\alpha]$ переводим траектории системы из множества D_k в нуль за время α.

Докажем, что имеет место неравенство (26.2). Если $T \geqslant k(\alpha + N\beta)$, то на отрезке $[0, T]$ умещаются k интервалов длины $\alpha + N\beta$; поэтому $\nu_w(k, N)$ равна вероятности того, что на отрезке $[0, T]$ встретится слово w длины k и при этом переход из любого начального состояния системы ξ в состояние φ_1, затем из φ_1 в φ_2, а также из каждого состояния φ_j в φ_{j+1}, $j = 2, \ldots, k-1$ происходит не более, чем за N шагов. Отметим, что для каждого такого перехода необходимо время $\alpha + N\beta$; при этом время α отводится на программное управление, а на промежутках времени, не превосходящих $N\beta$, система ξ должна находиться в одном из множеств $D_1, \ldots, D_k$ (см. рис. 19).

Понятно, что слово w на отрезке $[0, T]$, где $T \geqslant k(\alpha + N\beta)$, может встретиться и в том случае, когда некоторые буквы этого слова появляются больше, чем через N шагов (после предыдущей буквы). Поэтому для вероятности $\nu(T)$ имеет место оценка (26.2).

Л е м м а 26.1. *Пусть слово $w = (\varphi_1, \ldots, \varphi_k)$ удовлетворяет следующим условиям:*

1) *детерминированная система S, соответствующая слову w, локально управляема на отрезке $I = [0, k\alpha]$;*

2) *существуют позиционные управления $u_{ij}(x) \in U$ такие, что*

$$A_i x + B_i u_{ij}(x) \in L_j \doteq \operatorname{Lin} D_j \quad \textit{и} \quad \big\langle A_i x + B_i u_{ij}(x), x \big\rangle \leqslant 0 \tag{26.3}$$

для всех $x \in D_j$, $i = 1, \ldots, \ell$, $j = 1, \ldots, k$.

Тогда слово w является допустимым словом для системы ξ.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу определения 25.5 необходимо доказать, что если выполнено условие 2) леммы, то существуют позиционные управления $u_{ij}(x) \in U$, $i = 1, \ldots, \ell$, $j = 1, \ldots, k$, такие, что для всех $x \in D_j$ имеет место включение

$$A_i x + B_i u_{ij}(x) \in D_j. \tag{26.4}$$

Действительно, представим множества

$$D_j \doteq D_{[0,\alpha]}(\varphi_j, D_{j+1}) \cap O_{r_j}(0), \quad j = 1, \ldots, k-1,$$

в виде $D_j = L_j \cap O_{r_j}(0)$, где $L_j = \operatorname{Lin} D_j = \operatorname{Lin} D_{[0,\alpha]}(\varphi_j, D_{j+1})$. Аналогично,

$$D_k = L_k \cap O_{r_k}(0), \quad \text{где} \quad L_k = \operatorname{Lin} D_k = \operatorname{Lin} D_{[0,\alpha]}(\varphi_k).$$

Включение $A_i x + B_i u_{ij}(x) \in L_j$ означает, что траектории системы ψ_i, выходящие из множества D_j под действием позиционного управления $u_{ij}(x) \in U$, остаются в подпространстве L_j. В свою очередь, из неравенства

$$\big\langle A_i x + B_i u_{ij}(x), x \big\rangle \leqslant 0$$

следует, что для всех $x \in D_j$ те же траектории всегда остаются внутри окрестности $O_{r_j}(0)$. Таким образом, если выполнено условие (26.3), то для всех $x \in D_j$, $j = 1, \ldots, k$ имеет место включение (26.4).

З а м е ч а н и е 26.1. Отметим, что если все состояния цепи Маркова ζ образуют один класс сообщающихся состояний, то вероятность $\nu(T) \to 1$ при $T \to \infty$. Действительно, поскольку цепь Маркова стационарна, все ее состояния существенны и, следовательно, возвратны. Кроме того, эти состояния сообщающиеся, откуда следует, что

$$f_{ij} \doteq \sum_{l=1}^{\infty} f_{ij}^{(l)} = 1$$

для любых $i, j \in \{1, \ldots, \ell\}$ (см. [179, с. 605–607]). Поэтому

$$f_{ij}(N) = \sum_{l=1}^{N} f_{ij}^{(l)} \to 1 \quad \text{и} \quad Q(N) = \sum_{i=1}^{\ell} \pi_i f_{i1}(N) \to 1 \quad \text{при} \quad N \to \infty,$$

откуда, учитывая оценку (26.2), получаем, что $\nu(T) \to 1$ при $T \to \infty$.

П р и м е р 26.1. Предположим, что для системы

$$\dot{x} = A(h^t\sigma)x + B(h^t\sigma)u, \quad (t,\sigma,x,u) \in \mathbb{R}\times\Sigma\times\mathbb{R}^3\times U,$$

которую будем называть системой ξ, множество Ψ содержит 3 состояния $\psi_i = (A_i, B_i)$, $i = 1,2,3$ и заданы матрицы

$$A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, B_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, B_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix},\ B_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Пусть также задано множество $U = [-1,1]$, матрица переходных вероятностей

$$P = (p_{ij})_{i,j=1,2,3} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

и начальное распределение $\pi = (1/3, 1/3, 1/3)$. Заметим, что начальные и переходные вероятности удовлетворяют системе уравнений (25.2), то есть распределение π является стационарным распределением некоторой однородной цепи Маркова ζ. Предположим, что длины интервалов между переключениями системы $\theta_k \in [1;2]$, $k = 2,3\ldots$, тогда из равенства (17.7) следует, что $\theta_1 \in [0;2]$.

Найдем оценку вероятности $\nu(28)$ того, что система ξ неупреждающе управляема на отрезке $[0,28]$.

Покажем сначала, что слово $w = (\psi_1, \psi_2, \psi_3)$ является допустимым словом для системы ξ. Отметим, что для этого можно не выписывать в явном виде множества D_1, D_2, D_3, а только найти подпространства L_1, L_2, L_3. Сначала найдем подпространство L_3, которое является пространством управляемости системы ψ_3 (см. (26)), поэтому

$$L_3 = L(\psi_3) = \operatorname{Lin}(B_3, A_3B_3, A_3^2B_3) = \operatorname{Lin}(0,0,1)^*.$$

Далее, найдем подпространство L_2 :

$$L_2 = \operatorname{Lin} D_{[0,1]}(\psi_2, D_3) = \operatorname{Lin}\big(D_{[0,1]}(\psi_2) + X_2^{-1}(\alpha)D_3)\big) = \\ = L(\psi_2) + X_2^{-1}(\alpha)L_3 = \operatorname{Lin}\big((1,1,0)^*, (0,0,1)^*\big).$$

Найдем $L(\psi_1) = \operatorname{Lin}(B_1, A_1B_1) = \operatorname{Lin}\big((1,-1,0)^*, (-1,2,0)^*\big)$, тогда

$$L_1 = \operatorname{Lin} D_{[0,1]}(\psi_1, D_2) = L(\psi_1) + X_1^{-1}(\alpha)L_2 = \mathbb{R}^3.$$

Для пространства $L_1 = \mathbb{R}^3$ проверим условие (26.3), которое означает существование позиционных управлений $u_{i1}(x) \in U$ таких, что $\big\langle A_ix + B_iu_{i1}(x), x\big\rangle \leqslant 0$ для всех $x \in D_1$, $i = 1,2,3$. Действительно, в качестве таких управлений можно, например, взять следующие: $u_{11}(x) = x_1$, $u_{21}(x) = 0$, $u_{31}(x) = 0$, тогда для всех $x \in D_1$ выполнены неравенства

$$\big\langle A_1x + B_1u_{11}(x), x\big\rangle = -x_2^2 - x_3^2 \leqslant 0,$$
$$\big\langle A_2x + B_2u_{21}(x), x\big\rangle = -(x_1 - x_2)^2 - 2x_3^2 \leqslant 0,$$
$$\big\langle A_3x + B_3u_{31}(x), x\big\rangle = -x_1^2 - x_2^2 - 2x_3^2 \leqslant 0.$$

Отметим, что подпространство L_2 задается в $\mathbb{R}^3$ уравнением $x_1 = x_2$, поэтому если положить $u_{12}(x) = x_1/2$, то для всех $x \in D_2$ для системы ψ_1 выполнено условие (26.3):

$$A_1x + B_1u_{12}(x) = \operatorname{col}\Big(-\frac{x_1}{2}, -\frac{x_1}{2}, -x_3\Big) \in L_2,$$
$$\big\langle A_1x + B_1u_{12}(x), x\big\rangle = -x_1^2 - x_3^2 \leqslant 0.$$

Нетрудно проверить, что условие (26.3) выполнено также для множества D_2 и системы ψ_3 при управлениях $u_{32}(x) = 0$. Далее, подпространство L_3 задается в $\mathbb{R}^3$ уравнениями $x_1 = 0$, $x_2 = 0$; поэтому для множества D_3 и систем ψ_1, ψ_2 условие (26.3) выполнено, если выбрать, например, управления $u_{13}(x) = u_{23}(x) = 0$.

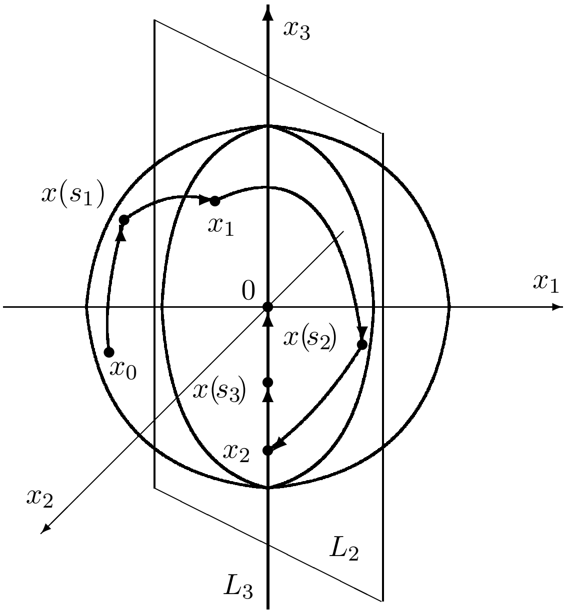

Рис. 22. Траектория решения системы ξ, выходящая из точки $x_0 \in D_1$

Таким образом, для слова $w = (\psi_1, \psi_2, \psi_3)$ существуют множества D_1, D_2, D_3 такие, что любую начальную точку x_0 системы ξ (когда она находится в состоянии ψ_1) из множества D_1 можно перевести в некоторую точку $x_1 = x(s_1 + \alpha)$ множества D_2, любую точку из D_2 перевести в точку $x_2 = x(s_2 + \alpha)$, содержащуюся в множестве D_3, и любую точку множества D_3 перевести в нуль. Кроме того, для множеств D_1, D_2, D_3 существуют управления, которые удерживают траекторию решения системы, выходящую из точек D_i, $i = 1, 2, 3$, в этом же множестве до следующего момента переключения системы (см. рис. 22).

Напомним, что через $s_1 \geqslant \tau_1$ мы обозначаем момент переключения системы ξ, при котором впервые появится состояние ψ_1. До появления этого момента переключения нужно строить управление таким образом, чтобы все траектории системы ξ, выходящие из множества D_1, оставались в этом же множестве при всех $t < s_1$. При появлении состояния ψ_1 в момент времени s_1 переводим данные траектории в множество D_2 за время $\alpha = 1$. Далее удерживаем траектории системы ξ в множестве D_2 до такого момента переключения s_2, когда впервые после s_1 появится состояние ψ_2. При $t \in [s_2, s_2 + \alpha]$ переводим траектории из множества D_2 в множество D_3 за время α, потом удерживаем их в этом множестве до момента переключения s_3, когда впервые после s_2 появится состояние ψ_3. Далее, после момента переключения s_3 переводим траектории системы ξ из множества D_3 в нуль за время α.

Найдем оценку вероятности $\nu(T)$ того, что данная система неупреждающе управляема на отрезке $[0, T]$. Поскольку

$$T = 28, \ \ k = 3, \ \ \alpha = 1, \ \ \beta = 2, \quad \text{то} \ \ N = \left[\frac{T - k\alpha}{k\beta}\right] = \left[\frac{25}{6}\right] = 4.$$

Сначала найдем вероятности $f_{11}^{(l)}$ первого возвращения системы ξ в состояние ψ_1 за l шагов. Поскольку $p_{11} = 0$, то за один шаг из состояние ψ_1 нельзя вернуться в это же состояние, поэтому

$f_{11}^{(1)} = p_{11} = 0$. За два шага вернуться в ψ_1 можно следующим образом: сначала за один шаг перейти из ψ_1 в ψ_2 с вероятностью p_{12}, потом обратно с вероятностью p_{21} либо сначала за один шаг перейти из ψ_1 в ψ_3 с вероятностью p_{13} и затем обратно с вероятностью p_{31}. Поэтому

$$f_{11}^{(2)} = p_{12}p_{21} + p_{13}p_{31} = \frac{1}{2}.$$

Аналогично находим вероятности

$$f_{11}^{(3)} = p_{12}p_{23}p_{31} + p_{13}p_{32}p_{21} = \frac{1}{4},$$
$$f_{11}^{(4)} = p_{12}p_{23}p_{32}p_{21} + p_{13}p_{32}p_{23}p_{31} = \frac{1}{8},$$

откуда получаем $f_{11}(4) = \sum\limits_{l=1}^{4} f_{11}^{(l)} = \frac{7}{8}$. Для вычисления $f_{21}(4) = \sum\limits_{l=1}^{4} f_{21}^{(l)}$ найдем вероятности $f_{21}^{(l)}$ первого попадания из состояния ψ_2 в состояние ψ_1 за l шагов:

$$f_{21}^{(1)} = p_{21} = \frac{1}{2}, \quad f_{21}^{(2)} = p_{23}p_{31} = \frac{1}{4},$$
$$f_{21}^{(3)} = p_{23}p_{32}p_{21} = \frac{1}{8}, \quad f_{21}^{(4)} = p_{23}p_{32}p_{23}p_{31} = \frac{1}{16},$$

поэтому $f_{21}(4) = \frac{15}{16}$. Аналогично находим $f_{31}(4) = \frac{15}{16}$, тогда

$$Q(4) = \sum_{i=1}^{3} \pi_i f_{i1}(4) = \frac{11}{12}.$$

Далее, поскольку $f_{12}(4) = f_{23}(4) = f_{21}(4) = \frac{15}{16}$, то для вероятности $\nu(28)$ того, что система ξ неупреждающе локально управляема на отрезке $[0, 28]$, справедлива оценка

$$\nu(28) \geqslant \nu_w(3,4) = Q(4) f_{12}(4) f_{23}(4) = \frac{11}{12} \cdot \left(\frac{15}{16}\right)^2 = \frac{825}{1024} \approx 0.806.$$

Отметим, что мы проверили только одно слово $w = (\psi_1, \psi_2, \psi_3)$, которое оказалось допустимым словом для системы ξ, и нашли для него оценку вероятности $\nu(28)$. Понятно, что аналогичные вычисления можно проделать для других пяти слов длины три и затем найти максимальную из оценок вероятностей $\nu(28)$ (для всех слов, которые окажутся допустимыми).

§ 27. Построение неупреждающего управления в случае, когда система имеет два состояния

Здесь исследуются условия существования неупреждающего управления для линейной системы вида

$$\dot{x} = A(h^t\sigma)x + B(h^t\sigma)u, \quad (t, \sigma, x, u) \in \mathbb{R} \times \Sigma \times \mathbb{R}^n \times U, \tag{27.1}$$

параметризованной метрической динамической системой $(\Sigma, \mathfrak{A}, \nu, h^t)$. Так же, как и раньше, систему (27.1) будем отождествлять со случайным процессом $\xi(h^t\sigma) \doteq \big(A(h^t\sigma), B(h^t\sigma)\big)$ и называть системой ξ.

В этом параграфе предполагаем, что множество Ψ содержит только два состояния ψ_1, ψ_2, вероятности нахождения в этих состояниях задаются вектором $\pi = (\pi_1, \pi_2)$, а условные вероятности p_{ij} перехода из состояния ψ_i в состояние ψ_j образуют матрицу $P = (p_{ij})_{i,j=1,2}$, которая является матрицей переходных вероятностей некоторой однородной цепи Маркова ζ. Напомним, что числа π_i, p_{ij}, $i, j = 1, 2$ неотрицательные, удовлетворяют условиям $\pi_1 + \pi_2 = 1$, $p_{11} + p_{12} = 1$, $p_{21} + p_{22} = 1$ и системе уравнений

$$\pi_1 = \pi_1 p_{11} + \pi_2 p_{21}, \quad \pi_2 = \pi_1 p_{12} + \pi_2 p_{22}, \tag{27.2}$$

тогда вектор π является стационарным или инвариантным распределением вероятностей цепи Маркова.

Рассмотрим слово $w = (\varphi_1, \varphi_2)$ и соответствующую ему детерминированную линейную систему S, которая определена на отрезке $[0, 2\alpha]$, причем на промежутке $[0, \alpha)$ система S совпадает с системой φ_1, а на отрезке $[\alpha, 2\alpha]$ совпадает с φ_2.

У с л о в и е 27.1. Пусть система ξ обладает следующими свойствами:

1) состояния ψ_1 и ψ_2 сообщающиеся;

2) для любого слова $w = (\varphi_1, \varphi_2)$ соответствующая ему детерминированная система S локально управляема на отрезке $I = [0, 2\alpha]$, то есть $\{0\} \in \operatorname{int} D_I(S)$.

Для слова $w = (\varphi_1, \varphi_2)$ построим множества D_1, D_2 следующим образом. Предположим, что существует подпространство $\mathcal{L}$ пространства управляемости $L(\varphi_2)$ системы φ_2, удовлетворяющее следующим условиям:

1) $\mathcal{L} \cap L(\varphi_1) = \{0\},\ L(\varphi_1) + \mathcal{L} = \mathbb{R}^n$;

2) $\operatorname{Lin} A_1 \mathcal{L} \subseteq \operatorname{Lin}(\mathcal{L}, B_1)$.

Рассмотрим множество $D_{[0,\alpha]}(\varphi_2)$ — множество управляемости системы φ_2 на отрезке $[0, \alpha]$. Из условия 25.1 следует, что данное множество содержит нуль в своей внутренности относительно содержащего его пространства $L(\varphi_2)$ (напомним, что $L(\varphi_2) = \operatorname{Lin} D_{[0,\alpha]}(\varphi_2)$.) Следовательно, существует окрестность начала координат $O_{r_2}(0)$ такая, что имеет место включение

$$\mathcal{L} \cap O_{r_2}(0) \subseteq D_{[0,\alpha]}(\varphi_2). \tag{27.3}$$

Далее будет показано, что при определенных условиях, которым должна удовлетворять система φ_1, для любого числа r_2, для которого выполнено включение (27.3), найдется такое $r_1 \in (0, r_2]$, что для множества

$$D_2 \doteq \mathcal{L} \cap O_{r_1}(0)$$

существует позиционное управление, которое удерживает траекторию решения системы φ_1, выходящую из точек множества D_2, в множестве $\mathcal{L} \cap O_{r_2}(0)$ до следующего момента переключения системы ξ, когда впервые появится состояние φ_2.

Напомним, что через $D_{[0,\alpha]}(\varphi_1, D_2)$ мы обозначаем множество управляемости системы φ_1 в множество D_2 на отрезке $[0, \alpha]$ и определим множество $D_1 = O_{r_0}(0)$, где радиус r_0 выбирается таким образом, чтобы имело место включение $O_{r_0}(0) \subseteq D_{[0,\alpha]}(\varphi_1, D_2)$ (существование такого числа r_0 будет следовать из теоремы 27.1).

Алгоритм построения неупреждающего управления для системы ξ, у которой множество Ψ содержит только два состояния.

1. Предположим сначала, что до момента времени $t = \alpha$ не произошло переключений системы ξ, то есть для первого момента переключения τ_1 выполнено неравенство $\tau_1 \geq \alpha$. Пусть в начальный момент времени система находится в состоянии $\varphi_1 \in \Psi$, тогда выберем слово $w = (\varphi_1, \varphi_2)$. Сначала при $t \in [0, \alpha]$ переводим любую начальную точку x_0 из множества $D_1 = O_{r_0}(0)$ в множество $D_2 = \mathcal{L} \cap O_{r_1}(0)$ при помощи программного управления $u(t) \in U$. Обозначим через τ_* такой момент переключения системы ξ, когда впервые появится состояние φ_2. На промежутке времени $[\alpha, \tau_*)$ строим позиционное управление $u(x) \in U$ для системы φ_1, под действием которого все точки из множества D_2 остаются в множестве $\mathcal{L} \cap O_{r_2}(0)$ как угодно долго (до момента переключения τ_*).

2. При появлении состояния φ_2 в момент τ_* любую точку множества $\mathcal{L} \cap O_{r_2}(0)$ переводим в нуль за время α при помощи соответствующего программного управления $u(t) \in U$.

3. Если первое переключение процесса произошло в момент времени $\tau_1 < \alpha$ и за это время начальная точка системы ξ не успела перейти в множество D_2, то после момента τ_1 начинаем процесс построения неупреждающего управления заново и обозначаем через φ_1 то состояние системы, которое появилось в момент τ_1.

Из сказанного выше следует, что если выбрано слово $w = (\varphi_1, \varphi_2)$, нужно построить подпространство $\mathcal{L}$, содержащееся в пространстве управляемости $L(\varphi_2)$, при этом для подпространства $\mathcal{L}$ должно существовать позиционное управление, удерживающее траекторию решения системы φ_1, выходящую из точек $\mathcal{L}$, в этом подпространстве до следующего момента переключения системы; то есть нужно построить подпространство $\mathcal{L} \subseteq L(\varphi_2)$, *слабо инвариантное* относительно системы φ_1. Кроме того, поскольку момент переключения τ_* заранее неизвестен, траектории системы φ_1 также не должны уходить из некоторой окрестности начала координат при всех $t \geqslant 0$, то есть они должны оставаться в множестве

$$\mathcal{L} \cap O_{r_2}(0) \subseteq D_{[0,\alpha]}(\varphi_2).$$

Обозначим через φ линейную систему

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad (x, u) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m, \tag{27.4}$$

$L(\varphi)$ — пространство управляемости данной системы.

В следующем утверждении получены условия слабой инвариантности подпространства $\mathcal{L} \subset \mathbb{R}^n$ относительно системы φ.

Л е м м а 27.1 (см. [98]). *Пусть $\mathcal{L}$ — подпространство $\mathbb{R}^n$ и L — матрица, составленная из векторов базиса $\mathcal{L}$. Если для системы* (27.4) *имеет место включение*

$$\operatorname{Lin} AL \subseteq \operatorname{Lin}(L, B),$$

то существует позиционное управление $u_L(x)$ такое, что для любой точки $x_0 \in \mathcal{L}$ траектория решения $x\big(t, t_0, x_0, u_L(\cdot)\big)$ содержится в подпространстве $\mathcal{L}$ при всех $t \geqslant t_0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть подпространство $\mathcal{L}$ образовано базисными векторами $x_1, \ldots, x_k$. Очевидно, что условия

$$\operatorname{Lin} AL \subseteq \operatorname{Lin}(L, B) \quad \text{и} \quad \operatorname{rank}(AL, L, B) = \operatorname{rank}(L, B)$$

эквивалентны. Для доказательства достаточно показать, что для каждого базисного вектора $x_i \in \mathcal{L}$ существует $u_i \in \mathbb{R}^m$ такое, что $Ax_i + Bu_i \in \mathcal{L}$. Это означает, что найдется такой вектор $c_i = \operatorname{col}(c_{1i}, \ldots, c_{ki})$, что уравнение $Ax_i + Bu_i = Lc_i$, а также как и равносильное ему

$$Lc_i - Bu_i = Ax_i$$

имеет решение. По теореме Кронекера–Капелли, разрешимость последнего уравнения эквивалентна условию

$$\operatorname{rank}(Ax_i, L, B) = \operatorname{rank}(L, B),$$

а это автоматически вытекает из условия $\operatorname{rank}(AL, L, B) = \operatorname{rank}(L, B)$.

Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ — собственные значения матрицы A, соответствующие различным клеткам Жордана (не обязательно различные между собой), m_k — размер клетки Жордана, соответствующей собственному значению λ_k.

Л е м м а 27.2 (см. [98]). *Пусть $\mathcal{L}$ — подпространство $\mathbb{R}^n$ и L — матрица, составленная из векторов базиса $\mathcal{L}$. Предположим, что для системы φ и подпространства $\mathcal{L}$ выполнены условия:*

1) $\mathcal{L} \cap L(\varphi) = \{0\}$;
2) $\operatorname{Lin} AL \subseteq \operatorname{Lin}(L, B)$;
3) *пространство управляемости $L(\varphi)$ содержит все корневые подпространства матрицы A, отвечающие собственным значениям λ_k, для которых $Re\lambda_k > 0$ либо $Re\lambda_k = 0$ и $m_k > 1$.*

Тогда существует позиционное управление $u_L(x) \in U$, для которого найдутся $\varepsilon > 0$ и $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такие, что для любой точки $x_0 \in \mathcal{L} \cap O_\delta(0)$ траектория решения $x(t, t_0, x_0, u_L(\cdot))$ содержится в множестве $\mathcal{L} \cap O_\varepsilon(0)$ при всех $t \geqslant t_0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. При помощи линейного преобразования $x = Cy$ приведем систему $\varphi = (A, B)$ к системе $\widetilde{\varphi} = (\widetilde{A}, \widetilde{B})$:

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = A_{11}y_1 + A_{12}y_2 + B_1 u, \\ \dot{y}_2 = A_{22}y_2, \end{cases}$$

где $y_1 \in \mathbb{R}^r$, $y_2 \in \mathbb{R}^{n-r}$. Введем в рассмотрение подпространство $\widetilde{\mathcal{L}} = C^{-1}\mathcal{L}$, тогда из условия $\mathcal{L} \cap L(\varphi) = \{0\}$ и равенства $L(\widetilde{\varphi}) = C^{-1}L(\varphi)$ следует, что $\widetilde{\mathcal{L}} \cap L(\widetilde{\varphi}) = \{0\}$. Условие 2) равносильно условию

$$\mathrm{Lin}\, C\widetilde{A}\widetilde{L} \subseteq \mathrm{Lin}\,(C\widetilde{L}, C\widetilde{B}),$$

откуда получаем, что $\mathrm{Lin}\, \widetilde{A}\widetilde{L} \subseteq \mathrm{Lin}\,(\widetilde{L}, \widetilde{B})$.

Отметим, что пространство $L(\widetilde{\varphi}) = \mathrm{Lin}\,(e_1, \ldots, e_r)$ содержит векторы $\widetilde{\ell}_i = \mathrm{col}\,(\ell_i^1, 0) \in \mathbb{R}^n$, где векторы $\ell_i^1 \in \mathbb{R}^r$, $i = 1, \ldots, r$ порождают корневое подпространство матрицы A_{11}. Матрица $\widetilde{A}$ также имеет корневые подпространства, порожденные векторами

$$\widetilde{\ell}_i = (\ell_i^1, \ell_i^2) \in \mathbb{R}^n, \quad i = r + 1, \ldots, n,$$

не входящими в $L(\widetilde{\varphi})$. Здесь $\ell_i^1 \in \mathbb{R}^r$, $\ell_i^2 \neq 0 \in \mathbb{R}^{n-r}$, причем векторы ℓ_i^2 образуют корневое подпространство матрицы A_{22} (ℓ_i и ℓ_i^2, $i = r+1, \ldots, n$ соответствуют одинаковым собственным значениям). В силу условия 3) это собственные значения, для которых $Re\lambda_k < 0$ либо $Re\lambda_k = 0$ и $m_k = 1$.

Из условий $L(\widetilde{\varphi}) = \mathrm{Lin}\,(e_1, \ldots, e_r)$ и $\widetilde{\mathcal{L}} \cap L(\widetilde{\varphi}) = \{0\}$ получаем, что подпространство $\widetilde{\mathcal{L}}$ не содержит единичные векторы $e_1, \ldots, e_r$. Поэтому его можно представить в виде

$$\widetilde{\mathcal{L}} = (\widetilde{\mathcal{L}}_1, \widetilde{\mathcal{L}}_2) = \mathrm{Lin}\,(h_1, \ldots, h_k), \quad k = 1, \ldots, n - r,$$

где $h_i = \mathrm{col}\,(h_i^1, h_i^2)$, векторы $h_i^1 \in \mathbb{R}^r$, h_i^2 — линейно независимые векторы в $\mathbb{R}^{n-r}$, $\widetilde{\mathcal{L}}_1 = \mathrm{Lin}\,(h_1^1, \ldots, h_k^1)$, $\widetilde{\mathcal{L}}_2 = \mathrm{Lin}\,(h_1^2, \ldots, h_k^2)$ — подпространства $\mathbb{R}^r$ и $\mathbb{R}^{n-r}$ соответственно.

Обозначим через

$$y\big(t, t_0, y_0, u_{\widetilde{L}}(\cdot)\big) = \mathrm{col}\,\big(y_1(t, t_0, y_0^1, u_{\widetilde{L}}(\cdot)), y_2(t, t_0, y_0^2)\big)$$

решение системы $\widetilde{S}$, соответствующее некоторому управлению $u_{\widetilde{L}}(y) \in U$, такое, что траектория этого решения, выходящая в момент t_0 из точки $y_0 = (y_0^1, y_0^2)$ подпространства $\widetilde{\mathcal{L}}$, содержится в этом подпространстве при всех $t \geqslant t_0$. Отметим, что из условия $\mathrm{Lin}\, \widetilde{A}\widetilde{L} \subseteq \mathrm{Lin}\,(\widetilde{L}, \widetilde{B})$ следует условие $\mathrm{Lin}\, A_{22}\widetilde{L}_2 \subseteq \mathrm{Lin}\, \widetilde{L}_2$, которое означает, что для любой точки $y_0^2 \in \widetilde{\mathcal{L}}_2$ траектория решения $y_2(t, t_0, y_0^2)$ содержится в множестве $\widetilde{\mathcal{L}}_2 = \mathrm{Lin}\,(h_1^2, \ldots, h_k^2)$ при всех $t \geqslant t_0$. Поэтому данное решение представимо в виде

$$y_2(t, t_0, y_0^2) = \alpha_1(t)h_1^2 + \ldots + \alpha_k(t)h_k^2, \quad \alpha_i(t) = \sum_{j=1}^{q} e^{\lambda_j t} Q_{ij}(t),$$

где $Q_{ij}(t)$ — многочлен степени, не превосходящей $m_j - 1$. Поскольку матрица A_{22} имеет собственные значения λ_k, для которых $Re\lambda_k < 0$ либо $Re\lambda_k = 0$ и $m_k = 1$, то решение $y_2(t, t_0, y_0^2)$ ограничено на полуоси $[t_0, \infty)$.

Из доказательства леммы 27.1 следует, что если $\mathrm{Lin}\, \widetilde{A}\widetilde{L} \subseteq \mathrm{Lin}\,(\widetilde{L}, \widetilde{B})$, то для каждого базисного вектора $h_i \in \widetilde{\mathcal{L}}$ существует управление $u_i \in \mathbb{R}^m$ такое, что $\widetilde{A}h_i + \widetilde{B}u_i \in \widetilde{\mathcal{L}}$. Это означает, что найдется вектор $c_i = (c_{1i}, \ldots, c_{ki})$ такой, что система $\widetilde{L}c_i - \widetilde{B}u_i = \widetilde{A}h_i$ имеет решение. Построим позиционное управление $u_{\widetilde{L}} = \sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_i(t)u_i$ и обозначим $c = \sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_i(t)c_i$. Пусть $y_0 \in \widetilde{\mathcal{L}}$ и

$$y = y\big(t, t_0, y_0, u_{\widetilde{L}}(\cdot)\big) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i(t)h_i$$

— решение системы $\widetilde{\varphi}$, траектория которого содержится в подпространстве $\widetilde{\mathcal{L}}$. Тогда вектор $\mathrm{col}\,(c, u_{\widetilde{L}}) \in \mathbb{R}^{k+m}$ является решением системы

$$\widetilde{L}\,c - \widetilde{B}u_{\widetilde{L}} = \widetilde{A}y, \quad y \in \widetilde{\mathcal{L}}. \tag{27.5}$$

Далее, из равенств

$$\widetilde{\mathcal{L}} = (\widetilde{\mathcal{L}}_1, \widetilde{\mathcal{L}}_2), \;\; \widetilde{B} = (\widetilde{B}_1, 0), \;\; \mathrm{rank}\,\widetilde{L}_2 = k, \;\; \mathrm{rank}\,\widetilde{B}_1 = m$$

и условия 2) следует равенство

$$\mathrm{rank}\,(\widetilde{L}, \widetilde{B}) = \mathrm{rank}\,(\widetilde{L}, \widetilde{B}, \widetilde{A}\widetilde{L}) = k + m.$$

Поэтому система (27.5) совместна и имеет единственное решение, причем управление $u_{\widetilde{L}}$ представимо в виде $u_{\widetilde{L}} = u_{\widetilde{L}}(y) = \widetilde{H}y$, где $\widetilde{H}$ — некоторая матрица размера $m \times n$. Выберем $\varepsilon > 0$ так, чтобы $u_{\widetilde{L}}(y) \in U$ при $|y| \leqslant \varepsilon$. Поскольку $\widetilde{A}y + \widetilde{B}u_{\widetilde{L}}(y) \in \widetilde{\mathcal{L}}$, то управление $u_{\widetilde{L}}(y)$ удерживает траекторию данного решения в подпространстве $\widetilde{\mathcal{L}}$.

Решение $y\big(t, t_0, y_0, u_{\widetilde{L}}(\cdot)\big) = \sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_i(t) h_i$ ограничено на полуоси $[t_0, \infty)$. Отсюда следует, что для каждого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon)$ такое, что

$$|y\big(t, t_0, y_0, u_{\widetilde{L}}(\cdot)\big)| \leqslant \varepsilon \quad \text{при} \quad t \in [t_0, \infty),$$

если только $|y_0| \leqslant \delta$. Таким образом, мы доказали, что фазовые траектории системы $\widetilde{\varphi}$, замкнутой управлением $u_{\widetilde{L}}(y) \in U$, выходящие из точек $y_0 \in \widetilde{\mathcal{L}} \cap O_\delta(0)$, содержатся в множестве $\widetilde{\mathcal{L}} \cap O_\varepsilon(0)$ при всех $t \geqslant t_0$. Если положить $u_L(x) = \widetilde{H}C^{-1}x$, то последнее условие равносильно следующему: траектории системы S, замкнутой управлением $u_L(x) \in U$, выходящие из точек $x_0 \in \mathcal{L} \cap O_\delta(0)$, содержатся в множестве $\mathcal{L} \cap O_\varepsilon(0)$ при всех $t \geqslant t_0$.

Т е о р е м а 27.1. *Пусть выполнены условия* 25.1, 25.2 *и* 27.1. *Предположим, что для любого слова* $w = (\varphi_1, \varphi_2)$ *существует подпространство* $\mathcal{L} \subseteq L(\varphi_2)$, *удовлетворяющее следующим условиям:*

1) $\mathcal{L} \cap L(\varphi_1) = \{0\}, \;\; L(\varphi_1) + \mathcal{L} = \mathbb{R}^n$;

2) $\mathrm{Lin}\,A_1\,\mathcal{L} \subseteq \mathrm{Lin}\,(\mathcal{L}, B_1)$.

Далее, пусть каждое пространство управляемости $L(\varphi_i)$ *содержит все корневые подпространства матрицы* A_i, $i = 1, 2$, *отвечающие собственным значениям* λ_k, *для которых* $Re\,\lambda_k > 0$ *либо* $Re\,\lambda_k = 0$ *и* $m_k > 1$.

Тогда система ξ *неупреждающе управляема на отрезке* $[0, T]$ *с вероятностью* $\nu(T)$, *для которой справедлива оценка*

$$\nu(T) \;\geqslant\; 1 - \pi_1 p_{11}^N - \pi_2 p_{22}^N, \quad \textit{где} \quad N = \Big[\frac{T - 2\alpha}{\beta}\Big]. \tag{27.6}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1. Напомним, что для множества $D_{[0,\alpha]}(\varphi_2)$ управляемости системы φ_2 на отрезке $[0, \alpha]$ и пространства управляемости $L(\varphi_2)$ данной системы справедливо равенство

$$L(\varphi_2) = \mathrm{Lin}\,D_{[0,\alpha]}(\varphi_2).$$

Отметим также, что из условия 25.1 следует, что нуль содержится во внутренности множества $D_{[0,\alpha]}(\varphi_2)$ (относительно $L(\varphi_2)$). Следовательно, поскольку $\mathcal{L} \subseteq L(\varphi_2)$, то найдется такое $r_2 > 0$, что имеет место включение

$$\mathcal{L} \cap O_{r_2}(0) \subseteq D_{[0,\alpha]}(\varphi_2).$$

В силу леммы 27.2 для $r_2 > 0$ существуют число $r_1 \in (0, r_2]$ и позиционное управление $u_L(x) \in U$ такие, что для любой точки $x_0 \in D_2 \doteq \mathcal{L} \cap O_{r_1}(0)$ траектория решения $x(t, t_0, x_0, u_L(\cdot))$ системы φ_1 содержится в множестве $\mathcal{L} \cap O_{r_2}(0) \subseteq D_{[0,\alpha]}(\varphi_2)$ при всех $t \geqslant t_0$.

Напомним, что через $D_{[0,\alpha]}(\varphi_1, D_2)$ мы обозначаем множество управляемости системы φ_1 в множество D_2 на отрезке $[0,\alpha]$. Из определения множества $D_{[0,\alpha]}(\varphi_1, D_2)$ следует равенство

$$D_{[0,\alpha]}(\varphi_1, D_2) = D_{[0,\alpha]}(\varphi_1) + X_1^{-1}(\alpha)D_2,$$

тогда

$$\operatorname{Lin} D_{[0,\alpha]}(\varphi_1, D_2) = \operatorname{Lin}\big(D_{[0,\alpha]}(\varphi_1) + X_1^{-1}(\alpha)D_2\big) = L(\varphi_1) + X_1^{-1}(\alpha)\mathcal{L}.$$

Далее, в силу (24.1) условия

$$L(\varphi_1) + X_1^{-1}(\alpha)\mathcal{L} = \mathbb{R}^n \quad \text{и} \quad L(\varphi_1) + \mathcal{L} = \mathbb{R}^n$$

эквивалентны, поэтому из условия 1) теоремы следует, что

$$\operatorname{Lin} D_{[0,\alpha]}(\varphi_1, D_2) = \mathbb{R}^n.$$

Поскольку $\{0\} \in \operatorname{int} U$, то $\{0\} \in \operatorname{int} D_{[0,\alpha]}(\varphi_1, D_2)$, следовательно, множество управляемости $D_{[0,\alpha]}(\varphi_1, D_2)$ содержит некоторую окрестность начала координат $O_{r_0}(0)$, все точки которой попадают в множество D_2 при помощи программного управления $u(t) \in U$ за время α.

2. Опишем построение неупреждающего управления для системы ξ, удовлетворяющей условиям теоремы. Рассмотрим случай, когда в начальный момент времени система находится в состоянии φ_1 и до момента времени $t = \alpha$ не произошло переключений системы, то есть $\tau_1 \geqslant \alpha$. Сначала переводим любую начальную точку x_0 из $O_{r_0}(0)$ в множество D_2 при помощи программного управления $u(t) \in U$ за время α. Поскольку для системы φ_1 и подпространства $\mathcal{L}$ выполнено условие 2) теоремы, то в силу леммы 27.2 существует позиционное управление $u_L(x) \in U$, удерживающее траекторию решения

$$x(t) = x(t, \alpha, x_\alpha, u_L(\cdot)), \quad \text{где} \quad x_\alpha = x(\alpha, 0, x_0)$$

в подпространстве $\mathcal{L}$ при всех $t \geqslant \alpha$. При этом для любого $|x_\alpha| \leqslant r_1$ при всех $t \geqslant \alpha$ выполнено неравенство $|x(t, \alpha, x_\alpha, u_L(\cdot))| \leqslant r_2$. Отметим, что множество $\mathcal{L} \cap O_{r_2}(0)$ содержится в множестве управляемости $D_{[0,\alpha]}(\varphi_2)$, поэтому если в момент переключения τ_1 появляется состояние φ_2, то любую точку $x \in \mathcal{L} \cap O_{r_2}(0)$ можно перевести в нуль за время α. Если в момент τ_1 и в следующие моменты переключения опять появляется состояние φ_1, то нужно удерживать траекторию решения $x(t)$ в множестве $\mathcal{L} \cap O_{r_2}(0)$ до того момента переключения τ_*, в который впервые появится состояние φ_2, после чего точку $x \in \mathcal{L} \cap O_{r_2}(0)$ нужно перевести в нуль за время α.

3. Отметим, что в начальный момент времени неизвестно, когда произойдет первое переключение системы ξ и успеем ли мы за это время перевести начальную точку системы на множество D_2. Поэтому при $t < \tau_1$ управление строим так же, как во втором пункте, в зависимости от состояния системы в начальный момент. Если первое переключение процесса произошло в момент времени $\tau_1 < \alpha$ и за это время мы не успели перейти на множество D_2, то после момента τ_1 начинаем процесс построения неупреждающего управления заново. Это можно сделать, поскольку $\theta_k \in [\alpha, \beta]$ при $k \geqslant 2$, следовательно, после момента τ_1 есть запас времени α, в течение которого не появится следующий момент переключения τ_2.

4. Найдем оценку вероятности $\nu(T)$ того, что система ξ неупреждающе управляема на отрезке $[0,T]$. Обозначим через $\nu_i(T)$, $i = 1, 2$ вероятности того, что система ξ неупреждающе управляема на отрезке $[0,T]$ и в начальный момент времени находится в состоянии ψ_1 или ψ_2 соответственно, тогда

$$\nu(T) = \nu_1(T) + \nu_2(T).$$

Пусть в момент $t = 0$ система ξ находится в состоянии ψ_1 (это происходит с вероятностью π_1). Если оказалось, что $\tau_1 \geq \alpha$, то любую начальную точку x_0 из окрестности $O_{r_0}(0)$ можно перевести в множество D_2 за время α. Далее, если в момент τ_1 появляется состояние ψ_2, то при $t \in [\tau_1, \tau_1 + \alpha]$ точки множества D_2 можно перевести в нуль. Вероятность появления ψ_2 при условии, что в момент $t = 0$ появилось состояние ψ_1, равна p_{12}. Если при $t = \tau_1$ (с условной вероятностью p_{11}) появляется состояние ψ_1, то состояние ψ_2 может появиться (впервые после ψ_1) в следующие моменты переключения $\tau_2, \ldots, \tau_N$. Из условия $\theta_k \in [\alpha, \beta]$ следует, что отрезок $[0, N\beta]$ обязательно содержит точку τ_N. Поэтому если начальным состоянием системы было состояние ψ_1 и $\tau_1 \geqslant \alpha$, то для вероятности $\nu_1(T)$ при $T \geqslant \alpha + N\beta$ справедлива оценка

$$\nu_1(T) \geqslant \pi_1 p_{12}\bigl(1 + p_{11} + \ldots + p_{11}^{N-1}\bigr) = \pi_1(1 - p_{11}^N).$$

Аналогичная оценка имеет место для $\nu_2(T)$ при $T \geqslant \alpha + N\beta$:

$$\nu_2(T) \geqslant \pi_2 p_{21}\bigl(1 + p_{22} + \ldots + p_{22}^{N-1}\bigr) = \pi_2(1 - p_{22}^N).$$

Следовательно,

$$\nu(T) = \nu_1(T) + \nu_2(T) \geqslant \pi_1(1 - p_{11}^N) + \pi_2(1 - p_{22}^N) = 1 - \pi_1 p_{11}^N - \pi_2 p_{22}^N.$$

В случае, когда первое переключение системы произошло в момент времени $\tau_1 < \alpha$, процесс построения неупреждающего управления начинается с момента времени τ_1, поэтому оценка (27.6) имеет место при $T \geqslant 2\alpha + N\beta$.

З а м е ч а н и е 27.1. Отметим, что если множество $\Psi = \{\psi_1, \psi_2\}$ и состояния ψ_1 и ψ_2 сообщающиеся, то вероятность $\nu(T) \to 1$ при $T \to \infty$. Действительно, если состояние ψ_1 достижимо из ψ_2, то вероятность перехода из ψ_2 в ψ_1, $p_{21} \neq 0$, следовательно, $p_{22} = 1 - p_{21} < 1$. Аналогично получаем, что если состояние ψ_2 достижимо из ψ_1, то $p_{11} < 1$. Поэтому из неравенства (27.6) следует, что $\nu(T) \to 1$ при $N \to \infty$. Далее, поскольку при $T \geqslant 2\alpha + N\beta$ на отрезке $[0, T]$ обязательно происходит не менее N переключений системы, то $\nu(T) \to 1$ при $T \to \infty$.

П р и м е р 27.1. Найдем оценку вероятности $\nu(T)$ того, что система

$$\dot{x} = A(h^t\sigma)x + B(h^t\sigma)u, \quad (t, \sigma, x, u) \in \mathbb{R} \times \Sigma \times \mathbb{R}^3 \times U,$$

которую будем называть системой ξ, неупреждающе локально управляема на отрезке $[0, T]$. Предполагаем, что для данной системы множество Ψ содержит два состояния $\psi_1 = (A_1, B_1)$, $\psi_2 = (A_2, B_2)$ и заданы матрицы

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \; B_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \; A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \; B_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Пусть также задано множество $U = [-1, 1]$, матрица переходных вероятностей

$$P = (p_{ij})_{i,j=1,2} = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,4 \\ 0,8 & 0,2 \end{pmatrix}$$

и начальное распределение $\pi = (2/3, 1/3)$, которое удовлетворяет системе (27.2), поэтому является стационарным распределением цепи Маркова. Поскольку $p_{12} = 0,4 \neq 0$ и $p_{21} = 0,8 \neq 0$, то состояния ψ_1 и ψ_2 — сообщающиеся. Предположим, что длины интервалов между переключениями системы $\theta_k \in [0,5; 1]$, $k = 2, 3 \ldots$, тогда $\theta_1 \in [0; 1]$.

Покажем, что для слова $w = (\varphi_1, \varphi_2)$ существует подпространство $\mathcal{L}_1 = L(\varphi_2)$, а для слова $w = (\varphi_2, \varphi_1)$ — подпространство $\mathcal{L}_2 = L(\varphi_1)$, удовлетворяющие условиям теоремы 27.1. Отметим, что для пространств управляемости систем φ_1 и φ_2 выполнены равенства

$$L(\varphi_1) = \operatorname{Lin}(B_1, A_1 B_1) = \operatorname{Lin}(e_1, e_2),$$
$$L(\varphi_2) = \operatorname{Lin} B_2 = \operatorname{Lin} e_3.$$

Поэтому условие 1) очевидно, а условие 2) следует из равенств

$$\operatorname{Lin} A_1 L_1 \subseteq \operatorname{Lin}(L_1, B_1) = \operatorname{Lin}(e_1, e_3),$$
$$\operatorname{Lin} A_2 L_2 \subseteq \operatorname{Lin}(L_2, B_2) = \mathbb{R}^3,$$

где L_1 и L_2 — матрицы, составленные из векторов базиса подпространств $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$ соответственно.

Кроме того, пространство управляемости $L(\varphi_1)$ содержит собственные векторы $v_1 = e_2$ и $v_2 = \operatorname{col}(1, 1, 0)$ матрицы A_1, отвечающие собственным значениям $\lambda_1 = 1$ и $\lambda_2 = 2$; последнее собственное значение $\lambda_3 = -1$. Пространство $L(\varphi_2)$ содержит собственный вектор $v = e_3$ матрицы A_2, отвечающий собственному значению $\lambda_1 = 4$; остальные собственные значения $\lambda_2 = \lambda_3 = -1$.

Таким образом, для системы ξ выполнены все условия теоремы 27.1, поэтому данная система неупреждающе управляема на отрезке $[0, T]$ с вероятностью $\nu(T)$, для которой справедлива оценка

$$\nu(T) \geqslant 1 - \frac{2}{3} \cdot 0,6^N - \frac{1}{3} \cdot 0,2^N \quad \text{где} \quad N = [T - 1].$$

Список литературы

1. Аграчев А.Ф., Сачков А.Л. Геометрическая теория управления. М.: Физматлит, 2005. 391 с.
2. Адомиан Дж. Стохастические системы М.: Мир, 1987. 376 с.
3. Андреев Н.И. Теория статистически оптимальных систем управления. М.: Наука, 1980. 415 с.
4. Аносов Д.В., Арансон С.Х., Бронштейн И.У., Гринес В.З. Динамические системы–1. Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т. 1. М.: ВИНИТИ, 1985. 244 с.
5. Арнольд В.И., Авец А. Эргодические проблемы классической механики. Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 1999. 284 с.
6. Аснис И.А., Дмитрук А.В., Осмоловский Н.П. Решение с помощью принципа максимума задачи об энергетически оптимальном управлении движением поезда // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1985. Т. 25. № 11. С. 1644–1655.
7. Астапов Ю.М., Медведев В.С. Статистическая теория систем автоматического регулирования и управления. М.: Наука, 1982. 304 с.
8. Баранова О.В. О равномерной глобальной управляемости линейной системы со стационарными случайными параметрами // Дифференциальные уравнения. 1991. Т. 27. № 11. С. 1843–1850.
9. Барбашин Е.А. Функции Ляпунова. М.: Наука, 1970. 240 с.
10. Бебутов М.В. О динамических системах в пространстве непрерывных функций // Бюллетень Механико-математического факультета МГУ. 1941. Т. 5. С. 1–52.
11. Биллингслей П. Эргодическая теория и информация. М.: Мир, 1969. 238 с.
12. Биркгоф Д. Динамические системы. Ижевск: Издательский дом «Удмуртский университет», 1999. 408 с.
13. Благодатских В.И., Филиппов А.Ф. Дифференциальные включения и оптимальное управление // Труды Математического института им. В.А. Стеклова АН СССР. 1985. Т. 169. С. 194–252.
14. Борисович Ю.Г., Гельман Б.Д., Мышкис А.Д., Обуховский В.В. Многозначные отображения. Итоги науки и техники. Математический анализ. Т. 19. М.: ВИНИТИ, 1982. С. 127–231.
15. Борисович Ю.Г., Гельман Б.Д., Мышкис А.Д., Обуховский В.В. Введение в теорию многозначных отображений и дифференциальных включений. М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2011. 224 с.
16. Борухов В.Т. К вопросу о необходимых условиях управляемости для линейных нестационарных динамических систем // Весцi АН БССР. Сер. фiз.-мат. навук. 1979. № 6. С. 27–30.
17. Бураго Д.Ю., Бураго Ю.Д., Иванов С.В. Курс метрической геометрии. М. – Ижевск: Ин-т компьютерных исследований, 2004. 496 с.
18. Валеев К.Г., Карелова О.Л., Горелов В.И. Оптимизация линейных систем со случайными коэффициентами. М.: Изд-во РУДН, 1996. 231 с.
19. Варга Дж. Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. М.: Наука, 1977. 623 с.
20. Вентцель А.Д. Курс теории случайных процессов. М.: Наука, 1975. 320 с.
21. Вершик А.М., Корнфельд И.П., Синай Я.Г. Общая эргодическая теория групп преобразований с инвариантной мерой. Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т. 2. М.: ВИНИТИ, 1985. С. 5–111.
22. Вершик А.М., Юзвинский С.Ф. Динамические системы с инвариантной мерой. Итоги науки и техники. Математический анализ. М.: ВИНИТИ, 1967. С. 133–187.
23. Габасов Р. К теории управляемости динамических систем // Дифференциальные уравнения. 1968. Т. 4. № 9. С. 1499–1507.
24. Габасов Р., Кириллова Ф.М. Качественная теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1971. 508 с.
25. Габасов Р., Кириллова Ф.М. Особые оптимальные управления. М.: Наука, 1973. 256 с.
26. Гайшун И.В. Введение в теорию линейных нестационарных систем. Минск: Институт математики НАН Беларуси, 1999. 408 с.
27. Гальперин Е.А., Красовский Н.Н. О стабилизации стационарных движений в нелинейных управляемых системах // Прикладная математика и механика. 1963. Т. 27. С. 1–24.
28. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М.: Наука, 1966. 576 с.
29. Гельман Б.Д. Об одном классе многозначных отображений с некомпактными образами // Вестник ВГУ, серия: физика, математика. 2008. № 1. С. 162–169.
30. Гельман Б.Д., Обуховский В.В. О новых результатах в теории многозначных отображений. II. Анализ и приложения. Итоги науки и техники. Математический анализ. Т. 29. М.: ВИНИТИ, 1991. С. 107–159.
31. Гихман И.И., Скороход А.В. Управление случайными процессами. Киев: Наукова думка, 1997. 252 с.
32. Глызин С.Д., Колесов А.Ю., Розов Н.Х. К вопросу о реализуемости сценария развития турбулентности по Ландау // Теоретическая и математическая физика. 2009. Т. 158. № 2. С. 292–311.

33. Гурман В.И., Сачков Ю.Л. Представление и реализация обобщенных решений управляемых систем с неограниченным годографом // Автоматика и телемеханика. 2008. № 4. С. 72–80.
34. Гурман В.И., Трушкова Е.А. Оценки множеств достижимости управляемых систем // Дифференциальные уравнения. 2009. Т. 45. № 11. С. 1601–1609.
35. Гусев М.И. Оценки погрешности для множеств достижимости управляемых систем с фазовыми ограничениями // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2006. Т. 12. № 2. С. 64–77.
36. Гусев М.И. О внешних оценках множеств достижимости нелинейных управляемых систем // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2011. Т. 17. № 1. С. 60–69.
37. Гусейнов Х.Г., Моисеев А.Н., Ушаков В.Н. Об аппроксимации областей достижимости систем управления // Прикладная математика и механика. 1998. № 2. С. 179–186.
38. Гусейнов Х.Г., Нигаль Эге. О свойствах позиционно слабо инвариантных множеств относительно управляемых систем, описываемых дифференциальными включениями // Дифференциальные уравнения. 2007. Т. 43. № 3. С. 291–302.
39. Гусейнов Х.Г., Ушаков В.Н. Сильно и слабо инвариантные множества относительно дифференциального включения, их производные и применение к задачам управления // Дифференциальные уравнения. 1990. Т. 26. № 11. С. 1888–1894.
40. Гусельников Н.С. Треугольные функции множества и теоремы Никодима, Брукса-Джеветта и Витали-Хана-Сакса о сходящихся последовательностях мер // Математический сборник. 2011. Т. 202. № 6. С. 29–50.
41. Давыдов А.А. Особенности границы достижимости в двумерных управляемых системах // Успехи математических наук. 1982. Т. 37. Вып. 3 (225). С. 183–184.
42. Давыдов А.А., Пастерс Р., Петренко И.А. Оптимальное распределение выброса загрязнения в одномерный поток // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16. № 5. С. 30–35.
43. Данфорд Н., Шварц Дж.Т. Линейные операторы. Общая теория. М.: Едиториал УРСС, 2004. 896 с.
44. Демьянов В.Ф., Рубинов А.М. Основы негладкого анализа и квазидифференциальное исчисление. М.: Наука, 1990. 432 с.
45. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967. 472 с.
46. Диментберг М.Ф. Случайные процессы в динамике систем с переменными параметрами. М.: Наука, 1989. 176 с.
47. Дмитрук А.В. Принцип максимума для общей задачи оптимального управления с фазовыми и регулярными смешанными ограничениями // В сб. «Оптимальность управляемых динамических систем» М.: ВНИИСИ, 1990. № 14. С. 26–42.
48. Евланов Л.Г., Константинов В.М. Системы со случайными параметрами. М.: Наука, 1976. 568 с.
49. Жиков В.В. К проблеме почти-периодичности для дифференциальных и операторных уравнений // Сборник научных трудов ВПИ. 1969. Т. 8. С. 94–188.
50. Жиков В.В., Пятницкий А.Л. Усреднение случайных сингулярных структур и случайных мер // Известия Российской академии наук. Серия математическая. 2006. Т. 70. № 1. С. 23–74.
51. Забелло Л.Е. Об управляемости линейных нестационарных систем // Автоматика и телемеханика. 1973. № 8. С. 13–19.
52. Забелло Л.Е. К теории управляемости нестационарных систем // Доклады АН БССР. 1980. Т. 24. № 6. С. 497–499.
53. Завьялова Т.В., Кац И.Я., Тимофеева Г.А. Об устойчивости движения стохастической системы со случайным условием скачка фазовой траектории // Автоматика и телемеханика. 2002. № 7. С. 33–46.
54. Иванов А.Г. Динамическая система сдвигов и существование решения задачи почти периодической оптимизации // Известия высших учебных заведений. Математика. 2005. № 10 (521). С. 29–46.
55. Иванов А.Г., Тонков Е.Л. Метрические свойства линейных управляемых систем // Успехи математических наук. 1991. Т. 46. № 6 (282). С. 187.
56. Иванов А.Г., Тонков Е.Л. О множестве управляемости линейной почти периодической системы // Дифференциальные уравнения. 1991. Т. 27. № 10. С. 1692–1699.
57. Иванов А.Г., Тонков Е.Л. О равномерной локальной управляемости линейной системы // Дифференциальные уравнения. 1992. Т. 28. № 9. С. 1499–1507.
58. Иванов А.Г., Тонков Е.Л., Шнейберг И.Я. О мере множества глобально управляемых систем // Нелинейные колебания и теория управления. Ижевск, 1981. № 3. С. 3–32.
59. Казаков И.Е. Статистическая теория систем управления в пространстве состояний. М.: Наука, 1975. 432.
60. Казаков И.Е., Доступов Б.Г. Статистическая динамика нелинейных автоматических систем. М.: Физматгиз, 1962. 332 с.

61. Калман Р.Е. Об общей теории систем управления // Труды I Международного конгресса ИФАК. Издательство АН СССР. 1961. Т. 2. С. 521–547.
62. Калман Р., Фалб П., Арбиб М. Очерки по математической теории систем. М.: Мир, 1971. 400 с.
63. Каменский М.И., Обуховский В.В. Об операторе сдвига по траекториям управляемых систем // Дифференциальные уравнения. 1996. Т. 32. № 6. С. 747–754.
64. Каток А.Б., Синай Я.Г., Степин А.М. Теория динамических систем и общих групп преобразований с инвариантной мерой. Итоги науки и техники. Математический анализ. Т. 13. М.: ВИНИТИ, 1975. С. 129–262.
65. Каток А.Б., Хасселблат Б. Введение в современную теорию динамических систем. М.: Факториал, 1999. 767 с.
66. Кац И.Я. Метод функций Ляпунова в задачах устойчивости и стабилизации систем случайной структуры. Екатеринбург: Изд-во Уральской гос. академии путей сообщения, 1998. 222 с.
67. Кац И.Я., Красовский Н.Н. Про устойчивость систем со случайными параметрами // Прикладная математика и механика. 1960. № 5. С. 809–823.
68. Кларк Ф. Оптимизация и негладкий анализ. М.: Наука, 1988. 300 с.
69. Колмогоров А.Н. Об энтропии на единицу времени как метрическом инварианте автоморфизмов // Доклады АН СССР. 1959. Т. 124. № 4. С. 754–755.
70. Корнев С.В., Обуховский В.В. О локализации метода направляющих функций в задаче о периодических решениях дифференциальных включений // Известия высших учебных заведений. Математика. 2009. № 5. С. 23–32.
71. Корнфельд И.П. Об инвариантных мерах минимальных динамических систем // Доклады АН СССР. 1972. Т. 202. № 2. С. 280–283.
72. Корнфельд И.П., Синай Я.Г., Фомин С.В. Эргодическая теория. М.: Наука, 1980. 384 с.
73. Королюк В.С., Портенко Н.И., Скороход А.В., Турбин А.Ф. Справочник по теории вероятностей и математической статистике. М.: Наука, 1985. 640 с.
74. Красовский А.А. Статистическая теория переходных процессов в системах управления. М.: Наука, 1968. 240 с.
75. Красовский А.А. Фазовое пространство и статистическая теория динамических систем. М.: Наука, 1974. 232 с.
76. Красовский А.Н., Красовский Н.Н., Третьяков В.Е. Стохастический программный синтез для детерминированной позиционной дифференциальной игры // Прикладная математика и механика. 1981. Т. 45. № 4. С. 579–586.
77. Красовский Н.Н. Теория управления движением. М.: Наука, 1968. 476 с.
78. Красовский Н.Н. Игровые задачи о встрече движений. М.: Наука, 1970. 420 с.
79. Красовский Н.Н. Стохастический программный синтез для детерминированной позиционной дифференциальной игры // Прикладная математика и механика. 1982. Т. 46. № 6. С. 885–892.
80. Красовский Н.Н. Управление динамической системой. М.: Наука, 1985. 520 с.
81. Красовский Н.Н., Лидский Э.А. Аналитическое конструирование регуляторов в стохастических системах при ограничениях на скорость изменения управляющего воздействия // Прикладная математика и механика. 1961. Т. 25. № 3. С. 420–432.
82. Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
83. Култышев С.Ю., Тонков Е.Л. Управляемость линейной нестационарной системы // Дифференциальные уравнения. 1975. Т. 11. № 7. С. 1210–1216.
84. Куржанский А.Б. Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М.: Наука, 1979. 392 с.
85. Куржанский А.Б., Варайя П. О проблеме достижимости при постоянно действующих возмущениях // Доклады РАН. 2000. Т. 372. № 4. С. 446–450.
86. Куржанский А.Б., Варайя П. Задачи динамики и управления в гибридных системах // Труды международного семинара «Теория управления и теория обобщенных решений уравнений Гамильтона–Якоби». Екатеринбург: Изд-во Уральского университета, 2005. С. 26–33.
87. Куржанский А.Б., Точилин П.А. Слабо инвариантные множества гибридных систем // Дифференциальные уравнения. 2008. Т. 44. № 11. С. 1523–1533.
88. Куржанский А.Б., Филиппова Т.Ф. Дифференциальные включения с фазовыми ограничениями. Метод возмущений // Оптимальное управление и дифференциальные уравнения. Труды МИ РАН. М. 1995. Т. 211. С. 304–315.
89. Куриленко А.М. Свойства линейных динамических систем со случайными параметрами // Известия АН СССР. ТК. 1984. № 4. С. 183–191.
90. Леваков А.А. К управляемости линейных нестационарных систем // Дифференциальные уравнения. 1987. Т. 23. № 5. С. 798–806.
91. Левитан Б.М., Жиков В.В. Почти-периодические функции и дифференциальные уравнения. М.: Издательство Московского университета, 1978. 205 с.

92. Лейхтвейс К. Выпуклые множества. М.: Наука, 1985. 335 с.
93. Ли Э.Б., Маркус Л. Основы теории оптимального управления. М.: Наука, 1972. 576 с.
94. Марчук Г.И. Математическое моделирование в проблеме окружающей среды. М.: Наука, 1982. 320 с.
95. Мастерков Ю.В., Родина Л.И. Достаточные и необходимые условия устойчивой управляемости нелинейной нестационарной системы на плоскости в критическом случае // Дифференциальные уравнения. 2003. Т. 39. № 2. С. 259–267.
96. Мастерков Ю.В., Родина Л.И. Достаточные условия устойчивой управляемости нестационарной системы в критическом случае // Дифференциальные уравнения. 2004. Т. 40. № 1. С. 68–75.
97. Мастерков Ю.В., Родина Л.И. О построении неупреждающего управления для систем со случайными параметрами // Вестник Удмуртского университета. Математика. 2005. Вып. 1. С. 101–114.
98. Мастерков Ю.В., Родина Л.И. Условия локальной управляемости систем со случайными параметрами // Вестник Удмуртского университета. Математика. 2006. Вып. 1. С. 81–94.
99. Мастерков Ю.В., Родина Л.И. Управляемость линейной динамической системы со случайными параметрами // Дифференциальные уравнения. 2007. Т. 43. № 4. С. 457–464.
100. Мастерков Ю.В., Родина Л.И. Функции Ляпунова управляемых систем со случайными параметрами // Дифференциальные уравнения. 2007. Т. 43. № 6. С. 858–859.
101. Мастерков Ю.В., Родина Л.И. Достаточные условия локальной управляемости систем со случайными параметрами для произвольного числа состояний системы // Известия высших учебных заведений. Математика. 2008. № 3 (550). С. 38–49.
102. Мильштейн Г.Н. Среднеквадратическая устойчивость линейных систем, находящихся под воздействием марковской цепи // Прикладная математика и механика. 1972. Т. 36. № 3. С. 537–545.
103. Мильштейн Г.Н., Репин Ю.М. О воздействии марковского процесса на систему дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения. 1969. Т. 5. № 8. С. 1371–1384.
104. Минюк С.А. К теории полной управляемости линейных нестационарных систем // Дифференциальные уравнения. 1990. Т. 26. № 3. С. 414–420.
105. Немыцкий В.В., Степанов В.В. Качественная теория дифференциальных уравнений. М.: ГИТТЛ, 1949. 550 с.
106. Николаев С.Ф., Тонков Е.Л. Дифференцируемость вектора быстродействия и позиционное управление линейной докритической системой // Дифференциальные уравнения. 2000. Т. 36. № 1. С. 76–84.
107. Николаев С.Ф., Тонков Е.Л. О некоторых задачах, связанных с существованием и построением неупреждающего управления для нестационарных управляемых систем // Вестник Удмуртского университета. Математика. Ижевск. 2000. Вып. 1. С. 11–32.
108. Никольский М.С. Об аппроксимации множества достижимости для дифференциального включения // Вестник Московского университета. Серия Вычислительная математика и кибернетика. 1987. Т. 4. С. 31–34.
109. Обуховский В.В. О топологической степени для одного класса некомпактных многозначных отображений // Функциональный анализ (Ульяновск). 1984. № 23. С. 82–93.
110. Овсеевич А.И., Черноусько Ф.Л. Некоторые свойства оптимальных эллипсоидов, аппроксимирующих множества достижимости // Доклады АН. 2003. Т. 388. № 4. С. 462–465.
111. Оселедец В.И. Марковские цепи, косые произведения и эргодические теоремы для «общих» динамических систем // Теория вероятностей и ее применения. 1965. Т. 10. № 3. С. 551–557.
112. Осипенко Г.С. К вопросу об аппроксимации инвариантных мер динамических систем // Эл. ж. Дифференциальные уравнения и процессы управления. 2008. № 2. С. 57–79. URL: `http://www.neva.ru/journal`
113. Осипенко Г.С., Крупин А.В., Безручко А.А., Петренко Е.И., Капитанов А.А. Построение инвариантных мер динамических систем // Эл. ж. Дифференциальные уравнения и процессы управления. 2007. № 4. С. 27–51. URL: `http://www.neva.ru/journal`
114. Панасенко Е.А., Родина Л.И., Тонков Е.Л. Поглощаемость, неблуждаемость и рекуррентность множества достижимости управляемой системы // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2008. Вып. 2. С. 97–104.
115. Панасенко Е.А., Родина Л.И., Тонков Е.Л. Асимптотически устойчивые статистически слабо инвариантные множества управляемых систем // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16. № 5. С. 135–142.
116. Панасенко Е.А., Родина Л.И., Тонков Е.Л. Пространство $\mathrm{clcv}(\mathbb{R}^n)$ с метрикой Хаусдорфа — Бебутова и дифференциальные включения // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2011. Т. 17. № 1. С. 162–177.
117. Панасенко Е.А., Тонков Е.Л. Функции Ляпунова и положительно инвариантные множества дифференциальных включений // Дифференциальные уравнения. 2007. Т. 43. № 6. С. 859–860.

118. Панасенко Е.А., Тонков Е.Л. Инвариантные и устойчиво инвариантные множества дифференциальных включений // Труды Математического института им. В.А. Стеклова. 2008. Т. 262. С. 202–221.
119. Панасенко Е.А., Тонков Е.Л. Распространение теорем Е.А. Барбашина и Н.Н. Красовского об устойчивости на управляемые динамические системы // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2009. Т. 15. № 3. С. 185–201.
120. Перов А.И. Несколько замечаний относительно дифференциальных неравенств // Известия высших учебных заведений. Математика. 1965. Т. 4 (47). С. 104–112.
121. Плотников В.А., Плотников А.В., Витюк А.Н. Дифференциальные уравнения с многозначной правой частью. Асимптотические методы. Одесса: АстроПринт, 1999. 355 с.
122. Попова С.Н., Тонков Е.Л. Согласованные системы и управление показателями Ляпунова // Дифференциальные уравнения. 1997. Т. 33. № 2. С. 226–235.
123. Пугачев В.С. Теория случайных функций и ее применение к задачам автоматического управления. М.: Физматгиз, 1962. 884 с.
124. Родина Л.И. О локальной управляемости систем со случайными параметрами // Четвертые Богдановские чтения по обыкновенным дифференциальным уравнениям. Тезисы докладов. Минск, 2005. С. 116–117.
125. Родина Л.И. О существовании неупреждающего управления для систем со случайными параметрами // Известия Института математики и информатики УдГУ. Ижевск, 2006. Вып. 2 (36). С. 95–98.
126. Родина Л.И. Условия существования неупреждающего управления для систем со случайными параметрами // Известия Института математики и информатики УдГУ. Ижевск, 2006. Вып. 3 (37). С. 131–132.
127. Родина Л.И. Об асимптотической устойчивости с вероятностью единица инвариантных множеств дифференциальных включений со случайными параметрами // Вестник Тамбовского Университета. 2007. Т. 12. № 4. С. 520–521.
128. Родина Л.И. Статистически инвариантные с вероятностью единица множества управляемых систем со случайными параметрами // Дифференциальные уравнения. 2011. Т. 47. № 6. С. 903–905.
129. Родина Л.И. Статистически инвариантные множества управляемых систем со случайными параметрами // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2011. Вып. 2. С. 68–87.
130. Родина Л.И. Функции Ляпунова и статистически инвариантные множества управляемых систем со случайными параметрами // Международная конференция «Дифференциальные уравнения и смежные вопросы», посвященная памяти И.Г. Петровского. Тезисы докладов. М.: Изд-во МГУ, 2011. С. 320–321.
131. Родина Л.И., Тонков Е.Л. Критерий полной управляемости линейной нестационарной системы в критическом случае // Известия Института математики и информатики УдГУ. Ижевск, 2002. Вып. 2 (25). С. 81–86.
132. Родина Л.И., Тонков Е.Л. Условия полной управляемости нестационарной линейной системы в критическом случае // Кибернетика и системный анализ. 2004. № 3. С. 87–100.
133. Родина Л.И., Тонков Е.Л. Статистические характеристики множества достижимости управляемой системы, неблуждаемость и минимальный центр притяжения // Нелинейная динамика. 2009. Т. 5. № 2. С. 265–288.
134. Родина Л.И., Тонков Е.Л. Статистически инвариантные множества управляемой системы // Вестник Тамбовского Университета. 2009. Т. 14. № 4. С. 788–790.
135. Родина Л.И., Тонков Е.Л. Статистически слабо инвариантные множества управляемых систем // Международная конференция, посвященная 70-летию ректора МГУ академика В. А. Садовничего. Тезисы докладов. М.: Изд-во МГУ, 2009. С. 333–334.
136. Родина Л.И., Тонков Е.Л. Статистически инвариантные множества управляемой системы, параметризованной динамической системой // Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам. Тезисы докладов. Суздаль, 2010. С. 161–162.
137. Родина Л.И., Тонков Е.Л. Статистически слабо инвариантные множества управляемых систем // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2011. Вып. 1. С. 67–86.
138. Родина Л.И., Тонков Е.Л. О существовании статистически инвариантных множеств управляемых систем со случайными параметрами // Международная конференция по математической теории управления и механике. Тезисы докладов. Суздаль, 2011. С. 174–177.
139. Розанов Ю.А. Стационарные случайные процессы. М.: Наука, 1990. 272 с.
140. Рохлин В.А. Избранные вопросы метрической теории динамических систем // Успехи математических наук. 1949. Т. 4. № 2. С. 57–128.

141. Рохлин В.А. Лекции по энтропийной теории преобразований с инвариантной мерой // Успехи математических наук. 1967. Т. 22. № 5. С. 3–56.
142. Сачков Ю.Л. Инвариантные области трехмерных билинейных систем // Вестник МГУ. Математика, механика. 1991. № 4. С. 23–26.
143. Сачков Ю.Л. Управляемость двумерных и трехмерных билинейных систем в положительном ортанте // Дифференциальные уравнения. 1993. Т. 29. № 2. С. 361–363.
144. Сачков Ю.Л. Инвариантные ортанты билинейных систем // Дифференциальные уравнения. 1995. Т. 31. № 6. С. 1094–1095.
145. Синай Я.Г. О слабом изоморфизме преобразований с инвариантной мерой // Математический сборник. 1964. Т. 63. № 1. С. 23–42.
146. Сиротин А.Н. О задаче ограниченной нуль-управляемости с вероятностью 1 для линейных автономных систем с дискретным временем и случайной переходной матрицей с конечным множеством спектров // Автоматика и телемеханика. 1996. № 11. С. 39–51.
147. Смирнов Е.Я. Некоторые задачи математической теории управления. Л.: Изд-во Ленинградского университета, 1981. 200 с.
148. Солодовников В.В. Статистическая динамика линейных систем автоматического управления. М.: Физматгиз, 1960. 470 с.
149. Субботин А.И. Монотонные относительно предпорядка траектории дифференциальных включений // Труды Института математики и механики УрО РАН. 1992. Т. 1. С. 138–146.
150. Субботин А.И., Субботина Н.Н., Третьяков В.Е. Стохастическое и детерминированное управление. Дифференциальные неравенства // Проблемы управления и теория информации. 1985. Т. 14. № 6. С. 1–15.
151. Субботин А.И., Ченцов А.Г. Оптимизация гарантии в задачах управления. М.: Наука, 1981. 286 с.
152. Субботина Н.Н. Метод характеристик для уравнений Гамильтона–Якоби и его приложения в динамической оптимизации // Современная математика и ее приложения. 2004. Т. 20. С. 1–133.
153. Толстоногов А.А. Дифференциальные включения в банаховом пространстве. М.: Наука, 1986. 297 с.
154. Толстоногов А.А. Свойства множеств достижимости эволюционных включений и управляемых систем субдифференциального типа // Сибирский математический журнал. 2004. Т. 45. № 4. С. 920–945.
155. Тонков Е.Л. Динамическая система сдвигов и вопросы равномерной управляемости линейной системы // Доклады АН СССР. 1981. Т. 256. № 2. С. 290–294.
156. Тонков Е.Л. Динамическая система сдвигов и вопросы глобальной управляемости линейной почти периодической системы // Успехи математических наук. 1981. Т. 36. № 4 (220). С. 226.
157. Тонков Е.Л. Вероятностные характеристики множества управляемости линейного дифференциального уравнения // Успехи математических наук. 1982. Т. 37. № 4. С. 121.
158. Тонков Е.Л. О множестве управляемости линейного уравнения // Дифференциальные уравнения. 1983. Т. 19. № 2. С. 269–278.
159. Тонков Е.Л. Канонический представитель линейной управляемой системы // Вестник Удмуртского университета. Математика. Ижевск. 2003. Вып. 1. С. 113–128.
160. Тонков Е.Л. Глобально управляемые линейные системы // Современная математика и ее приложения. 2005. Т. 23. С. 145–165.
161. Ушаков В.Н., Заварин А.Б. О выделении ядра выживаемости для дифференциального включения // Прикладная математика и механика. 2001. Т. 65. № 5. С. 831–842.
162. Ушаков В.Н., Латушкин Я.А. Дефект стабильности множеств в игровых задачах управления // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2006. Т. 12. № 2. С. 178–194.
163. Ушаков В.Н., Матвийчук А.Р., Лебедев П.Д. Дефект стабильности в игровой задаче о сближении в момент // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2010. Вып. 3. С. 87–103.
164. Ушаков В.Н., Малев Я.А. К вопросу о дефекте стабильности множеств в игровой задаче о сближении // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16. № 1. С. 199–222.
165. Ушаков В.Н., Зимовец А.А. Дефект инвариантности множеств относительно дифференциального включения // Вестник Удмуртского университа. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2011. Вып. 2. С. 98–111.
166. Филиппов А.Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью // Математический сборник. 1960. Т. 51 (93). № 1. С. 99–128.
167. Филиппов А.Ф. Классические решения дифференциальных уравнений с многозначной правой частью // Вестник Московского университета. Математика, механика. 1967. № 3. С. 16–26.
168. Филиппов А.Ф. О существовании решений многозначных дифференциальных уравнений // Математические заметки. 1971. № 19. С. 307–313.

169. Филиппов А.Ф. Условия устойчивости однородных систем с произвольными переключениями режимов // Автоматика и телемеханика. 1980. № 8. С. 48–55.
170. Филиппов А.Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985. 223 с.
171. Филиппов А.Ф. Введение в теорию дифференциальных уравнений. М.: Едиториал УРСС, 2004. 240 с.
172. Флеминг У., Ришел Р. Оптимальное управление детерминированными и стохастическими системами. М.: Мир, 1978. 316 с.
173. Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1970. 720 с.
174. Хасьминский Р.З. Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров. М.: Наука, 1969. 367 с.
175. Чаплыгин С.А. Новый метод приближенного интегрирования дифференциальных уравнений // Избранные труды. Механика жидкости и газа. Математика. М.: Наука, 1976. С. 307–362.
176. Ченцов А.Г. К игровой задаче наведения // Доклады АН СССР. 1976. Т. 226. № 1. С. 73–76.
177. Ченцов А.Г. Об игровой задаче сближения в заданный момент времени // Математический сборник. 1976. Т. 99. № 3. С. 394–420.
178. Ченцов А.Г. Приложения теории меры к задачам управления. Свердловск: Средн.-Урал. книжное изд-во, 1985. 128 с.
179. Ширяев А.Н. Вероятность. М.: Наука, 1989. 640 с.
180. Arnold L. Random dynamical systems. Berlin–Heidelberg: Springer–Verlag, 1998. 586 p.
181. Aubin J.P. Viability theory. Boston: Birkhäuser, 1991. 543 p.
182. Aubin J.P., Cellina A. Differential inclusions. Set-valued maps and viability theory. Berlin–Heidelberg–New York–Tokyo: Springer–Verlag, 1984. 342 p.
183. Aubin J. P., Da Prato G. Stochastic viability and invariance // Annali Scuola Normale di Pisa. 1990. № 27. P. 595–694.
184. Aubin J.P., Frankowska H. Heavy viable trajectories of controlled systems // Annales de l'Institut Heanri-Poincare. Analyse Non Lineaire. 1985. № 2. P. 371–395.
185. Basile G., Marro G. Controlled and conditional invariant subspaces in linear system theory // J. Optim. Theory Appl. 1969. № 3. P. 296–315.
186. Bensoussan A., Lions J.L. Applications of variational inequalities in stochastic control. Amsterdam–New York–Oxford: North-Holland Publishing Company, 1982. 564 p.
187. Booton R.C. Nonlinear control systems with random inputs // Trans. IRE. 1954. CT-1. P. 9–18.
188. Bressan A. Upper and lower semicontinuous differential inclusions: a unified approach // Nonlinear controllability and optimal control, Monogr. Textbooks Pure Appl. Math. Dekker. New York. 1990. Vol. 133. P. 21–31.
189. Brockett R. On the reachable set for bilinear systems // Variable Structure Systems, Lecture Notes in Economics and Math. Systems. Springer–Verlag. 1971. № 111. P. 54–63.
190. Chang A. An algebraic characterization of controllability // IEEE Trans. Autom. Control. 1965. Vol. 10. № 1. P. 112–114.
191. Clarke F.H. Generalized gradients and applications // Trans. Amer. Math. Soc. 1975. Vol. 205. № 2. P. 247–262.
192. Clarke F.H., Ledyaev Yu.S., Stern R.J., Wolenski P.R. Nonsmooth analysis and control theory. New York: Springer, 1998. 296 p.
193. Colonius F., Jonson R. Local and global null controllability of time varying linear control systems // Control, Optimisation and Calculus of Variations. 1997. Vol. 2. P. 329–341.
194. Conti R. Linear differential equations and control. London: Academic Press, 1976. 174 p.
195. Crandall M.G. A generalisation of Peano's existence theorem and flow invariance // Proc. Amer. Math. Soc. 1972. Vol. 36. № 1. P. 151–155.
196. Davy J.L. Properties of the solution set of a generalized differential equations // Bull. Austral. Math. Soc. 1972. Vol. 6. P. 379–398.
197. De Farias D.P., Geromel J.C., Do Val J.B.R., Costa O.L.V. Output feedback control of Markov jump linear systems in continuous-time // IEEE Trans. Autom. Control. 2000. Vol. 45. № 5. P. 944–949.
198. Deimling K. Multivalued differential equations. Berlin–New York: Walter de Gruyter, 1992. 260 p.
199. Fleming W.H., Soner H.M. Controlled Markov processes and viscosity solutions. New York: Springer–Verlag, 2005. 448 p.
200. Frankowska H. Local controllability of control systems with feedbacks // Journal of Optimization Theory and Applications. 1989. № 60. P. 277–296.
201. Galperin E.A. Some generalization of Lyapunov's approach to stability and control // Nonlin. Dynam. and Syst. Theory. 2002. Vol. 2. № 1. P. 1–24.

202. Guseinov H.G., Subbotin A.I., Ushakov V.N. Derivatives for multivalued mappings with applications to game theoretical problems of control // Probl. Contr. Inform. Theory. 1985. Vol. 14. № 3. P. 155–167.
203. Haddad G. Monotone trajectories of differential inclusions and functional-differential inclusions with memory // Izrael J. Math. 1981. Vol. 39. № 1. P. 83–100.
204. Hartman P. On invariant sets and on a theorem of Wazewski // Proc. Amer. Math. Soc. 1972. № 32. P. 511–520.
205. Hilmy H. Sur les centres d'attraction minimaux dans les systemes dynamiques // Comp. Math. 1936. Vol. 3. № 2. P. 187–204.
206. Himmelberg C.G. van Vleck F.S. Existence of solutions for generalized differential equations with unbounded right-hand side // J. Differential Equations. 1986. Vol. 61. № 3. P. 295–320.
207. Hu S., Papageorgiou N.S. Handbook of multivalued analysis. Vol. I. Theory. Kluwer: Dordrecht, 1997. 980 p.
208. Hu S., Papageorgiou N.S. Handbook of multivalued analysis. Vol. II. Applications. Kluwer: Dordrecht, 2000. 918 p.
209. Ibrir S., Boukas E.K. A constant-gain nonlinear estimator for linear switching systems // Nonlin. Dynam. and Syst. Theory. 2005. Vol. 5. № 1. P. 49–59.
210. Kalman R.E. Contribution to the theory of optimal control // Boletin de la Sociedad Matematika Mexicana. 1960. Vol. 5. № 1. P. 102–119.
211. Kalman R.E., Ho Y.C., Narendra K.S. Controllability of linear dynamical systems // Contr. Different. Equat. 1963. Vol. 1. P. 189–213.
212. Khasminsky R.Z. Limit theorem for a solution of the differential equation with a random right part // Prob. Theor. and its Applic. 1966. Vol. 11. № 3. P. 444–462.
213. Krylov N.M., Bogolyubov N.N. La theorie generale de la mesure et son application a letude des systemes dynamiques de la mechanique non lineaire // Annals of Mathematics. 1937. Vol. 1. № 38. P. 65–113.
214. Kurzhanski A.B., Filippova T.F. Dynamics of the set of viable trajectories to a differential inclusion: the evolution equation // Probl. Contr. Inform. Theory. 1988. Vol. 17. № 3. P. 137–144.
215. Kurzhanski A.B., Filippova T.F. Pertubation technicues for viability and control // Lect. Notes in Control, Inform. Sci. 1992. Vol. 180. P. 394–403.
216. La Salle J.P. Time optimal control systems // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 1959. Vol. 1. № 45. P. 4–13.
217. Marchaud A. Sur les champs de demi-cones et equations differentielles du premier ordre // Bull. Soc. Math. France. 1934. Vol. 62. P. 1–38.
218. Marchaud A. Sur les champs de demi-cones convexes // Bull. Sci. Math. 1938. Vol. 62. P. 229–240.
219. Masterkov Yu.V., Rodina L.I. The Sufficient conditions of local controllability for linear systems with random parameters // Nonlin. Dynam. and Syst. Theory. 2007. № 7 (3). P. 303–314.
220. Nagumo M. Über die Laga der integralkurven gewöhnlicher differential Gleichungen // Proc. Phys. Math. Japan. 1942. Vol. 24. P. 399–414.
221. Quincampoix M. Differential inclusions and target problems // SIAM J. Control and Optimizat. 1992. Vol. 30. № 2. P. 324–335.
222. Quincampoix M., Buckdahn R., Rainer C. and Teichman J. Another proof for the equivalence between invariance of closed sets with respect to stochastic and deterministic systems // Bulletin des Sciences Mathematiques. 2010. Vol. 134. P. 207–214.
223. Rockafellar R.T. Generalized directional derivatives and subgradients of nonconvex functions // Can. J. Math. 1980. № 32. P. 157–180.
224. Rockafellar R.T., Wets R.J.-B. Variational analysis. New York: Springer–Verlag, 1998. 348 p.
225. Rodina L.I. Conditions of total controllability of linear nonstationary systems in the critical case // The International Conference on Applied Mathematics Dedicated to the 65-th Anniversary of B.N. Pshenichnyi (1937-2000). Abstracts. Kyiv. Ukraine, 2002. P. 72.
226. Rodina L.I., Tonkov E.L. The Statistical invariant sets of controllable systems // Preprints of IFAC Workshop on Control Applications of Optimisation. University of Jyvaskyla. Finland, 6–8 May 2009.
227. Roxin E. Stability in general control systems // Journal of Dif. Equat. 1965. Vol. 1. № 2. P. 115–150.
228. San Martin L.A.B. Invariant control sets on flag manifolds // Math. Control Signals Systems. 1993. Vol. 6. P. 41–61.
229. Stepanoff W. Sur une extension du theoreme ergodique // Comp. Math. 1936. № 3. P. 68–85.
230. Tsarkov Ye. Asymptotic methods for stability analysis of Markov impulse dynamical systems // Nonlin. Dynam. and Syst. Theory. 2002. Vol. 2. № 1. P. 103–115.
231. Zaremba S.K. Sur une extension de la notion déquation differentielle // C. R. Acad. Sci. Paris. 1934. Vol. 199. № 10. P. 545–548.
232. Zaremba S.K. Sur les equations au paratingent // Bull. Sci. Math. 1936. Vol. 60. № 2. P. 139–160.

Поступила в редакцию 10.09.2012

L. I. Rodina

Invariant and statistically weakly invariant sets of control systems

The paper deals with the expansion of the concept of the set invariance with respect to control systems and differential inclusions. Said expansions that statistically invariant and statistically weakly invariant sets are studied. The sufficient conditions for existence of invariant (in the specified sense) sets, which are formulated in terms of the Hausdorff–Bebutov metric, Lyapunov functions and the Clarke derivative, of the given functions are obtained. The work covers both determined systems and the systems with random parameters, for which the concept of statistical invariance with probability one is investigated. The problems about complete controllability of time-varying linear system and about the existence of non-predicting control for linear system with random parameters are considered, too.

Keywords: control systems, dynamical systems, differential inclusions, statistically invariant sets.

Mathematical Subject Classifications: 34A60, 37N35, 49J15

Родина Людмила Ивановна, д.ф.-м.н., доцент, Удмуртский государственный университет, 426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1. E-mail: box0589@udmnet.ru

Rodina Lyudmila Ivanovna, Doctor of Physics and Mathematics, Associate Professor, Udmurt State University, 426034, Russia, Izhevsk, ul. Universitetskaya, 1