



УДК: 539.3; 531.37

MSC 2010: 70F40, 70F35, 70E18

О финальном движении цилиндрических тел по шероховатой плоскости

Д. В. Трещев, Н. Н. Ермакова, Т. Б. Иванова

Рассматривается задача о скольжении по горизонтальной плоскости однородного прямого цилиндра (шайбы) под действием сил сухого трения. Пятно контакта цилиндра с плоскостью совпадает с его основанием. Мы рассматриваем осесимметричные шайбы, то есть предполагается, что основание цилиндра симметрично относительно оси, лежащей в плоскости основания. Основное внимание уделено исследованию качественных свойств динамики шайб, опирающихся на шероховатую плоскость круглым основанием, треугольным основанием и тремя точками.

Ключевые слова: закон Амонтона–Кулона, трение, шайба, тренога, финальная динамика, устойчивость

Получено 15 августа 2012 года

После доработки 3 сентября 2012 года

Работа выполнена в ФГБОУ ВПО «УдГУ» в рамках гранта Правительства Российской Федерации для государственной поддержки научных исследований, проводимых под руководством ведущих ученых в российских образовательных учреждениях высшего профессионального образования, договор № 11.G34.31.0039, гранта Президента РФ поддержки ведущих научных школ НШ-2519.2012.1 «Динамические системы классической механики и проблемы управления».

Трещев Дмитрий Валерьевич

treschev@mi.ras.ru

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН

119991, Россия, г. Москва, ул. Губкина, д. 8

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

119899, Россия, г. Москва, Ленинские горы

Ермакова Надежда Николаевна

enn@rcd.ru

Иванова Татьяна Борисовна

tbsp@rcd.ru

Лаборатория нелинейного анализа и конструирования новых средств передвижения

Удмуртский государственный университет

426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, 1

1. Введение

Задача о движении твердого тела по неподвижной опорной поверхности является одной из классических задач динамики твердого тела. При постановке данной задачи очень важным моментом является выбор математической модели, описывающей взаимодействие между телом и опорной поверхностью в области контакта. Простейшей и наиболее известной из моделей сухого трения является классическая модель Амонтона–Кулона, которая хорошо описывает взаимодействие тела с опорной поверхностью при поступательном движении тела. При описании более общих движений модель Амонтона–Кулона приходится применять локально в каждой точке контакта, а затем интегрировать по пятну контакта. При этом возникает проблема определения плотности силы нормального давления на пятне контакта.

В работах [2, 10, 15] для случая шайбы с круглым основанием, а также с основанием в виде кольца, отмечено, что при наличии вращения центр масс в процессе движения отклоняется от прямолинейной траектории. Важно отметить, что этот эффект наблюдается лишь в случае, если высота шайбы отлична от нуля. Эти и другие наблюдаемые эффекты можно объяснить неравномерностью распределения нормальной нагрузки в области контакта.

С другой стороны, известно, что предположение об однородности распределения нормального давления (что может выполняться лишь для шайб нулевой высоты) приводит к выводу о том, что скольжение и вращение однородного диска радиуса R прекращаются одновременно, а отношение линейной и угловой скоростей в момент остановки не зависит от начальных условий и равно $k = 0.653R$ [3, 12, 14]. Экспериментальные результаты, приведенные в работах [6, 10, 15], дают частичное подтверждение этих предсказаний. Некоторый систематический анализ динамики осесимметричной шайбы на плоскости представлен в [9]. В частности, работа [9] содержит сравнительный анализ свойств движения круглой, осесимметричной и произвольной цилиндрических шайб.

Задача о движении диска, опирающегося тремя точками на шероховатую плоскую поверхность (тренога), была рассмотрена впервые, по-видимому, в [11] (1912 год), где для случая равнобедренного треугольного основания получены уравнения движения и представлены некоторые оценки для различных предельных случаев угловой и линейной скоростей. В работе [13] выполнены численные расчеты траекторий цилиндра, опирающегося на три точечные опоры, при условиях большого и малого отношения угловой и линейной скоростей, приведено сравнение полученных траекторий с траекториями шайбы, имеющей кольцевое основание. В [2] представлены уравнения движения треноги в общем случае, рассмотрены вопросы о распределении нормальной нагрузки в зависимости от сбалансированности треноги, условия поступательных (и близких к поступательным) и вращательных движений. В работе [8] для случая плоского тела, опирающегося на шероховатую плоскость тремя точками, получены частные интегралы уравнений движения. Отметим, что такое распределение нагрузки в основании шайбы является более простым для анализа.

В данной работе основное внимание уделено качественному анализу систем, описывающих финальные движения прямого цилиндра (далее шайбы) с основанием, являющимся плоской фигурой, симметричной относительно оси, расположенной в этой плоскости, в предположении о линейном распределении нормального давления тела на опорную плоскость. Рассмотрены шайбы, опирающиеся на шероховатую плоскость круглым основанием, треугольным основанием и тремя точками.

2. Основные предположения

Рассмотрим скольжение шайбы по горизонтальной плоскости под действием силы тяжести и сил сухого трения. Шайбу считаем абсолютно твердым телом цилиндрической формы. Основание цилиндра — ограниченная плоская фигура, симметричная относительно оси, лежащей в плоскости основания.

В работе используются следующие допущения.

- Н1.** *Пятно контакта D при любом движении шайбы совпадает с основанием тела.*
- Н2.** *Горизонтальная компонента силы взаимодействия элемента поверхности шайбы с плоскостью задается законом Амонтона–Кулона.*

Другими словами, малый участок ds пятна контакта шайбы с плоскостью создает силу трения

$$d\mathbf{F} = -f \frac{\mathbf{u}}{u} dN, \quad (2.1)$$

где f — коэффициент трения, \mathbf{u} — скорость участка пятна контакта (корректно определенная, когда участок ds стягивается в точку), $u = |\mathbf{u}|$, $dN = \sigma ds$ — модуль силы нормальной реакции, приходящейся на участок ds , σ — плотность нормального давления.

- Н3.** *Высота шайбы невелика, так что при любых движениях $\sigma > 0$ на пятне контакта.*

Для определения силы трения по закону (2.1) необходимо задать функцию σ . Для однородной шайбы на горизонтальной плоскости, на первый взгляд, естественно предположить, что функция $\sigma = \text{const}$. Но, как справедливо отмечено в [2, 5], распределенная таким образом нормальная реакция не могла бы скомпенсировать момент относительно центра масс шайбы, создаваемый силой трения. При скольжении по инерции тела с ненулевой высотой сила трения, лежащая в опорной плоскости, не может быть уравновешена силой тяжести и другими внешними силами, которые дают равнодействующую, приложенную к центру масс. Условия равновесия накладывают три ограничения на распределение нормальной нагрузки, то есть для динамически согласованной модели необходимо не менее трех параметров. Если предположить, что $\sigma(x, y)$ — линейная функция декартовых координат точки контакта, то в качестве таких параметров можно взять коэффициенты линейной функции $\sigma(x, y)$. В случае трехточечного контакта тела с опорной поверхностью (тренога) в качестве этих параметров можно взять нормальные реакции в точках контакта. При большем числе точек контакта возникает неопределенность, для устранения которой требуются дополнительные условия. Поэтому, как и в [2, 6, 9], мы вводим следующее предположение.

- Н4.** *Распределение давления — линейная функция декартовых координат:*

$$\sigma = a + bx + cy. \quad (2.2)$$

Коэффициенты a, b и c , вообще говоря, зависят от скорости центра масс шайбы и ее угловой скорости.

Будем также предполагать, что

- Н5.** *Распределение массы по высоте однородно.*

Итак, мы будем рассматривать *сбалансированные* шайбы, для которых распределение массы таково, что одна из главных осей инерции тела совпадает с нормалью к поверхности контакта с плоскостью [2, 8].

3. Уравнения движения и τ -устойчивость

3.1. Уравнения движения

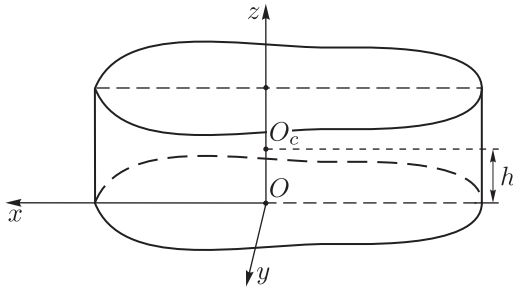


Рис. 1. Шайба на плоскости.

Согласно **Н5**, введем систему координат $Oxyz$, жестко связанную с цилиндрическим телом (рис. 1), где O — проекция центра масс тела O_c на его основание, ось Oz перпендикулярна плоскости движения, оси Ox и Oy параллельны главным осям инерции и лежат в плоскости, совпадающей с основанием цилиндра. Предположение об осесимметричности шайбы пока существенным не является. Если оно все-таки выполняется, будем считать, что ось симметрии основания есть Ox . В данной координатной системе выполняются соотношения

$$\iint_D x \, dx \, dy = \iint_D y \, dx \, dy = \iint_D xy \, dx \, dy = 0. \quad (3.1)$$

Пусть $\boldsymbol{\omega} = \omega \mathbf{e}_z$ — угловая скорость тела, \mathbf{v}_c — скорость центра масс тела, $v_c = |\mathbf{v}_c|$, J_z — момент инерции цилиндра относительно оси Oz , m — масса цилиндра.

Уравнения движения произвольного цилиндрического тела имеют вид

$$m\dot{\mathbf{v}}_c + m[\boldsymbol{\omega}, \mathbf{v}_c] = \mathbf{F} + \mathbf{N} - mge_z, \quad J_z\dot{\omega} = M_z, \quad (3.2)$$

где \mathbf{F} — полная сила трения, \mathbf{N} — реакция опоры, mge_z — сила тяжести, M_z — момент сил относительно вертикальной оси Oz .

Согласно предположениям **Н1–Н4**, сила трения \mathbf{F} и реакция опоры \mathbf{N} имеют вид

$$\mathbf{F} = -f \iint_D \sigma \frac{\mathbf{v}}{v} \, dS, \quad \mathbf{N} = \iint_D \sigma \mathbf{e}_z \, dS, \quad (3.3)$$

где $\mathbf{v} = \mathbf{v}_c + [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}]$ — скорость точки пятна контакта, $\mathbf{r}(x, y)$ — радиус-вектор точки пятна контакта.

Необходимыми условиями безотрывного движения твердого тела по плоскости являются, во-первых, условие компенсации горизонтальных составляющих моментов сил

$$\mathbf{M}_{xy}^F + \mathbf{M}_{xy}^N = 0, \quad (3.4)$$

во-вторых, сумма проекций сил на ось Oz должна равняться нулю:

$$\mathbf{N} - mge_z = 0. \quad (3.5)$$

Проекции моментов сил трения \mathbf{M}^F и реакции опоры \mathbf{M}^N относительно точки центра масс O_c на ось Oz и плоскость Oxy определяются следующими выражениями:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_z^F = [\mathbf{r}, \mathbf{F}] &= -f \iint_D \sigma \frac{[\mathbf{r}, \mathbf{v}]}{v} dS, & \mathbf{M}_{xy}^F = [-h\mathbf{e}_z, \mathbf{F}] &= -f \iint_D \sigma \frac{[-h\mathbf{e}_z, \mathbf{v}]}{v} dS, \\ \mathbf{M}_z^N &= \iint_D [h\mathbf{e}_z, \sigma\mathbf{e}_z] dS = 0, & \mathbf{M}_{xy}^N &= \iint_D [\mathbf{r}, \sigma\mathbf{e}_z] dS, \end{aligned} \tag{3.6}$$

где h — координата z центра масс (половина высоты тела). Умножая (3.4) векторно на \mathbf{e}_z , получим дополнительное условие для силы трения:

$$\mathbf{F} = -\frac{1}{h} \iint_D \sigma \mathbf{r} dS. \tag{3.7}$$

Выражения (3.3), (3.5) и (3.7) определяют полную систему уравнений для вычисления коэффициентов a, b, c в (2.2).

Для упрощения дальнейшего исследования динамики цилиндрического тела сделаем следующую сферическую замену в уравнениях (3.2):

$$\begin{cases} v_c^x = Q \cos \varphi \cos \psi, \\ v_c^y = Q \cos \varphi \sin \psi, \\ l\omega = Q \sin \varphi, \end{cases} \tag{3.8}$$

где $l = \sqrt{J_z/m}$ — радиус инерции, $Q = \sqrt{v_c^2 + l^2 \omega^2}$ — величина, связанная с кинетической энергией T соотношением $2T = mQ^2$, $\psi \bmod 2\pi$ — угол между осью Ox и вектором скорости центра масс \mathbf{v}_c , угол $\varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ определяет соотношение между линейной и угловой скоростями шайбы

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{l\omega}{v_c}.$$

(значение $\varphi = 0$ соответствует поступательному движению, $\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$ — вращательному).

Из закона Амонтона–Кулона следует, что σ не зависит от Q . Плотность σ является функцией переменных φ, ψ, x, y , и для вычисления требуются дополнительные предположения о ее структуре (в данном случае линейности по x, y).

Введем единичные векторы \mathbf{e}_\parallel и \mathbf{e}_\perp , направленные вдоль $\psi = 0$ и $\psi = \frac{\pi}{2}$ соответственно:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_\parallel &= \mathbf{e}_x \cos \psi + \mathbf{e}_y \sin \psi, \\ \mathbf{e}_\perp &= -\mathbf{e}_x \sin \psi + \mathbf{e}_y \cos \psi. \end{aligned}$$

Проекции силы трения на соответствующие орты имеют вид

$$\begin{aligned} F_\parallel &= F_x \cos \psi + F_y \sin \psi = (\mathbf{F}, \mathbf{e}_\parallel), \\ F_\perp &= -F_x \sin \psi + F_y \cos \psi = (\mathbf{F}, \mathbf{e}_\perp). \end{aligned} \tag{3.9}$$



С учетом введенных обозначений получим следующую систему уравнений для Q, φ, ψ :

$$\begin{aligned} m\dot{Q} &= F_{\parallel} \cos \varphi + \frac{M_z}{l} \sin \varphi, \\ mQ\dot{\varphi} &= -F_{\parallel} \sin \varphi + \frac{M_z}{l} \cos \varphi, \\ mQ\dot{\psi} \cos \varphi &= F_{\perp} - \frac{m}{l} Q^2 \sin \varphi \cos \varphi. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Отметим несколько простых свойств решений системы (3.10).

Свойство 1. Если угловая скорость шайбы в начальный момент времени равна нулю, то движение будет поступательным.

Свойство 2. Знак угловой скорости ω постоянен на любых движениях шайбы.

Это свойство является следствием свойства 1 и теоремы существования и единственности.

Отметим, что свойства 1 и 2 верны для произвольного распределения давления. Более того, они верны и для неоднородных шайб. Доказательства свойств приведены в [9]. Для случая сбалансированной треноги свойство 1 также приводится в [2].

В случае осесимметричного основания угол ψ естественно отсчитывать от оси симметрии Ox . Тогда симметрия задачи дает тождество

$$\sigma(-\varphi, -\psi, x, y) = \sigma(\varphi, \psi, x, -y). \quad (3.11)$$

В частности, из (3.11) следует, что

$$F_{\parallel}(-\varphi, -\psi) = F_{\parallel}(\varphi, \psi), \quad F_{\perp}(-\varphi, -\psi) = -F_{\perp}(\varphi, \psi), \quad M_z(\varphi, \psi) = -M_z(-\varphi, -\psi).$$

3.2. Регуляризация и τ -устойчивость

Далее всегда считаем шайбу симметричной.

Сделаем в системе уравнений (3.10) замену времени

$$mQ d\tau = dt, \quad d/d\tau = ()', \quad (3.12)$$

Получим:

$$\begin{aligned} Q' &= Q \left(F_{\parallel} \cos \varphi + \frac{M_z}{l} \sin \varphi \right), \\ \varphi' &= -F_{\parallel} \sin \varphi + \frac{M_z}{l} \cos \varphi, \\ \psi' \cos \varphi &= F_{\perp} - \frac{m}{l} Q^2 \sin \varphi \cos \varphi. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Уравнения (3.13) сохраняют вид при замене

$$(\varphi, \psi) \mapsto (-\varphi, -\psi). \quad (3.14)$$

Таким образом, уравнения движения шайбы сводятся к трем обыкновенным дифференциальным уравнениям в трехмерном фазовом пространстве $P = \mathbb{R}_+ \times S^2$. Здесь \mathbb{R}_+ — положительная вещественная полуось с координатой Q , а S^2 — двумерная сфера. Система диссипативна, поэтому за конечное время на любом решении Q превращается в нуль и движение прекращается. Однако после замены времени (3.12) проекция задающего динамику

векторного поля на сферу S^2 (последние два уравнения (3.13)) при $Q \rightarrow 0$ теряет зависимость от Q и, более того, не стремится к нулю. Полученное таким образом предельное векторное поле U на S^2 несет ответственность за динамику шайбы при небольших значениях энергии.

Многие важные режимы движения шайбы отвечают особым точкам поля U . Такими являются, в частности, особые движения: поступательные движения и чистые вращения шайбы. Устойчивость по Ляпунову траекторий векторного поля U мы называем τ -устойчивостью соответствующих динамических режимов.

Поскольку любое движение шайбы заканчивается за конечное время, все движения устойчивы по Ляпунову (в исходном времени) по теореме о непрерывной зависимости решения от начальных условий. Свойство τ -устойчивости более тонкое: с механической точки зрения, τ -устойчивость характеризует тенденции финальной динамики, а именно, приближаются ли близкие траектории к исследуемому режиму или уходят от него.

4. Устойчивость поступательного движения

Воспользуемся уравнениями движения (3.13) и исследуем τ -устойчивость поступательного движения тел, скользящих по шероховатой плоскости. Такие движения в координатах (Q, φ, ψ) имеют вид

$$Q = Q_0 - gft, \quad \varphi = 0, \quad \psi = \text{const}, \quad t \leq Q_0/gf.$$

Свойство τ -устойчивости для поступательного движения означает, что при малых возмущениях движения при приближении t к моменту остановки $\omega R/v_c \rightarrow 0$.

4.1. Плоское основание

Из условия нормировки (3.5) с учетом предположения (2.2)

$$N = \iint_D 2h\rho g dS = \iint_D \sigma dS = \iint_D (a + bx + cy) dx dy = \iint_D a dS,$$

где ρ — плотность, получим $a = 2h\rho g$.

Утверждение 1. Уравнения движения (3.13) для шайбы с плоским основанием в окрестности экватора сферы $\{\varphi = 0\}$ приводятся к виду

$$\varphi' = K(\psi)\varphi, \quad \psi' = -C\varphi, \tag{4.1}$$

где

$$K(\psi) = \frac{fg}{l^2} (-I_{xx} \sin^2 \psi - I_{yy} \cos^2 \psi + \Lambda + m(h^2 f^2 + l^2)), \quad C = \frac{m}{l} ghf^2, \tag{4.2}$$

$$\Lambda = -2f^3 \rho m h^2 \iint_D \left(\frac{\cos^3 \psi}{I_{yy}} x^3 + \frac{\sin^3 \psi}{I_{xx}} y^3 + \frac{\cos \psi \sin \psi}{I_{yy} I_{xx}} (\cos \psi (2I_{xx} + I_{yy}) x^2 y + \sin \psi (2I_{yy} + I_{xx}) x y^2) \right) dS, \tag{4.3}$$

$$I_{xx} = \iint_D 2h\rho y^2 dS, \quad I_{yy} = \iint_D 2h\rho x^2 dS. \tag{4.4}$$



Доказательство данного утверждения приведено в приложении А.

Так как постоянная $C > 0$, интервалы, на которых $K(\psi) < 0$, соответствуют областям экспоненциального τ -устойчивого поступательного движения.

Для круглой однородной шайбы $\Lambda = 0$, $l^2 = \frac{R^2}{2}$, $I_{xx} = I_{yy} = \frac{mR^2}{4}$ (R — радиус основания шайбы). Тогда в окрестности экватора $\{\varphi = 0\}$ уравнения движения имеют вид (4.1), где для любого ψ

$$K = \frac{fgm(4h^2f^2 + R^2)}{4l^2} > 0, \quad C = \frac{2mghf^2}{R^2} > 0.$$

Из этого следует, что любая точка экватора, которая по свойству 1 является положением равновесия, τ -неустойчива.

Необходимо отметить, что при чисто поступательном движении круглой шайбы (например, вдоль оси Ox) плотность нормального давления σ возрастает в направлении скольжения и имеет минимальное значение при $x = -R$, $y = 0$, $\psi = 0$:

$$\sigma = 2h\rho \left(1 - \frac{4hf}{R}\right).$$

Тогда условие неотрицательности нормального давления (безотрывности движения) имеет вид (аналогичное указано в [2])

$$4fh/R \leq 1. \quad (4.5)$$

Для осесимметричной однородной шайбы в общем случае $\Lambda \neq 0$ и является функцией от ψ . Так как функция $K(\psi)$ является периодической и гладкой, будем искать минимумы этой функции, удовлетворяющие следующим условиям

$$\left. \frac{dK(\psi)}{d\psi} \right|_{\psi^*} = 0, \quad \left. \frac{d^2K(\psi)}{d\psi^2} \right|_{\psi^*} > 0, \quad K(\psi^*) < 0. \quad (4.6)$$

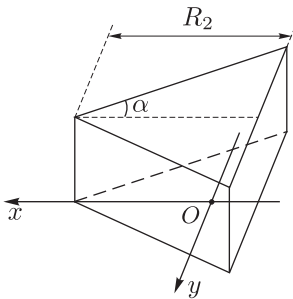


Рис. 2. Треугольная шайба на плоскости.

Рассмотрим динамику поступательного движения однородной шайбы, в основании которой лежит равнобедренный треугольник (треугольная шайба, см. рис. 2), и продемонстрируем зависимость областей τ -устойчивого поступательного движения от параметров системы (массы шайбы m , высоты центра масс шайбы h , коэффициента трения f) и геометрии основания шайбы (высоты основания вдоль оси симметрии R_2 и угла α).

Для треугольной шайбы выражения I_{xx} , I_{yy} , Λ , l имеют вид

$$I_{xx} = \frac{5}{18}mR_2^2\text{tg}^2\alpha, \quad I_{yy} = \frac{55}{324}mR_2^2, \quad l = \frac{\sqrt{5}R_2}{18}\sqrt{11 + 18\text{tg}^2\alpha},$$

$$\Lambda = -\frac{f^3hmR_2\cos\psi}{6600}(936\sin^2\psi\text{tg}^2\alpha + 2729\cos^2\psi + 1144).$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Области τ -устойчивого поступательного движения, соответствующие решениям (4.6), будем отмечать графически на плоскости $(f, \text{tg}\alpha)$ при прочих фиксированных параметрах.

Для определенности рассмотрим один из корней (4.6) $\psi_1 = 0$, который соответствует поступательному движению шайбы вдоль оси симметрии.

На рисунке 3 представлена область τ -устойчивого поступательного движения пайбы вдоль оси симметрии при $\psi_1 = 0$ в зависимости от значений коэффициента трения f и угла α при заданных $R_2 = 1, h = 0.1$ и $m = 1$. Из графика видно, что поступательное движение равносторонней треугольной пайбы ($\text{tg}\alpha = 1/\sqrt{3}$) вдоль оси симметрии τ -неустойчиво при значениях коэффициента трения $f < 1.22$ (то есть для большинства пар контактирующих материалов).

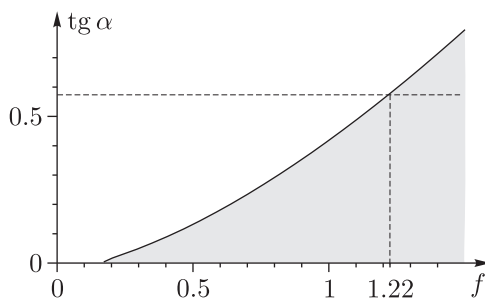


Рис. 3. Область τ -устойчивого поступательного движения треугольной пайбы с параметрами $h = 0.1, R_2 = 1, m = 1$ (обозначена серым цветом). Горизонтальная пунктирная линия соответствует пайбе, опирающейся на плоскость равносторонним треугольным основанием ($\text{tg}\alpha = 1/\sqrt{3}$).

Зафиксируем значения $f = 0.5$ и $\text{tg}\alpha = 0.1$ (соответствующие *сильно вытянутому вдоль оси симметрии треугольнику*) из найденной области существования устойчивого поступательного движения пайбы (рис. 3). На рисунке 4 представлен график функции $K(\psi)$, из которого видно, что τ -устойчивому поступательному движению соответствует интервал значений угла $-0.11 < \psi < 0.11$ в направлениях, близких к оси симметрии пайбы. На рисунке 5 представлены траектории движения этой системы в фазовом пространстве (ψ, φ) вблизи экватора, и обозначена область τ -устойчивого поступательного движения.

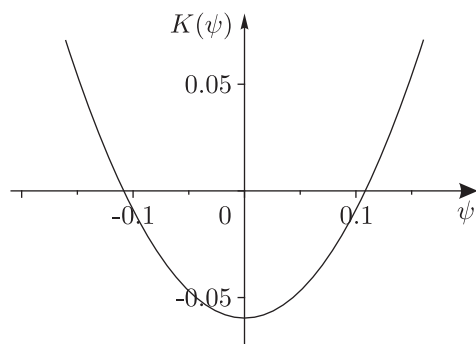


Рис. 4. График функции $K(\psi)$ треугольной пайбы ($h = 0.1, R_2 = 1, m = 1, f = 0.5, \text{tg}\alpha = 0.1, g = 10$). При $K(\psi) < 0$ поступательное движение τ -устойчиво.

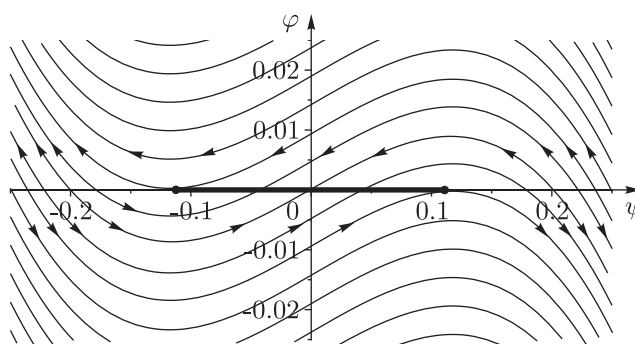


Рис. 5. Фазовый портрет и область τ -устойчивого поступательного движения треугольной пайбы ($h = 0.1, R_2 = 1, m = 1, f = 0.5, \text{tg}\alpha = 0.1, g = 10$)

4.2. Опора на три точки

Рассмотрим задачу об определении областей τ -устойчивого поступательного движения твердого тела, опирающегося на плоскость тремя точками (тренога), лежащими в вершинах равностороннего треугольника (см. рис. 6). Параметрами системы являются высота центра

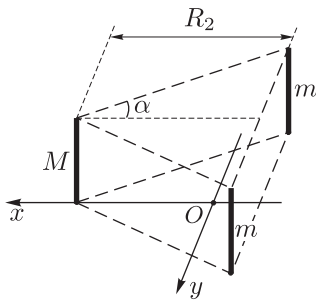


Рис. 6. Тренога на плоскости.

масс треноги h , высота треугольного основания треноги R_2 и угол α , а также, в отличие от рассмотренной выше треугольной шайбы, вводится коэффициент отношения масс точечных опор $\mu = M/m$, который задает неравномерность распределения массы в любом слое, перпендикулярном оси Oz , при этом остаются справедливыми допущение **Н5** и соотношения (3.1). При выполнении условий $\mu = 1$ и $\operatorname{tg} \alpha = 1/\sqrt{3}$ геометрический центр и центр масс треноги совпадают.

Плотность нормального давления для такой системы определяется с помощью δ -функций:

$$\sigma = \sum_{i=1}^3 (a + bx + cy) \delta(x - x_i) \delta(y - y_i), \quad (4.7)$$

где (x_i, y_i) — координаты точечных опор треноги. Такой вид функции σ при интегрировании по площади контакта соотношений (3.3) приведет к появлению отдельных слагаемых, каждое из которых будет равно силе трения или реакции опоры, создаваемых в точке опоры.

Утверждение 2. Уравнения движения (3.13) для треноги в окрестности экватора сферы $\{\varphi = 0\}$ приводятся к виду (4.1), где

$$\begin{aligned} K(\psi) &= \frac{mfg}{l^2} (hfR_2 \cos \psi ((\operatorname{tg}^2 \alpha \sin^2 \psi - \cos^2 \psi)(2 + \mu) + 2\mu) - \\ &\quad - \frac{2R_2^2}{2 + \mu} (\operatorname{tg}^2 \alpha \sin^2 \psi (2 + \mu) + \mu \cos^2 \psi) + (f^2 h^2 - l^2)(2 + \mu)), \\ C &= \frac{m(2 + \mu)}{l} hf^2 g. \end{aligned}$$

Доказательство данного утверждения приведено в приложении В.

Константа $C > 0$ для любого ψ , следовательно, знакопеременность функции $K(\psi)$ определяет характер динамики треноги, для τ -устойчивого поступательного движения которой должны выполняться условия (4.6). Аналогично случаю треугольной шайбы, первое уравнение (4.6) для случая треноги имеет три корня: $\psi_1 = 0$, соответствующий поступательному движению треноги вдоль оси симметрии, и $\psi_{2,3} = \pm \psi^*$.

1. Случай $\psi_1 = 0$.

На рисунке 7 на плоскости параметров $(f, \operatorname{tg} \alpha)$ обозначены области τ -устойчивого поступательного движения треноги при различных значениях μ и фиксированных $h = 0.1$, $R_2 = 1$. Проведенные исследования показали, что при уменьшении значения параметра μ область τ -устойчивости поступательного движения увеличивается, при увеличении h (при фиксированном μ) область τ -устойчивости уменьшается. Горизонтальная пунктирная линия на рисунке 7 соответствует $\operatorname{tg} \alpha = 1/\sqrt{3}$ (равносторонний треугольник). Таким образом, видно, что τ -устойчиво вдоль оси симметрии могут двигаться только треноги с точками опоры в углах сильно вытянутых треугольников.

Замечание 2. Система неравенств (4.6) при $\psi_1 = 0$ имеет решения только при $\mu < 2$, то есть при значениях отношения масс $\mu \geq 2$ поступательное движение в направлении оси симметрии τ -неустойчиво при любых значениях f и $\operatorname{tg} \alpha$.

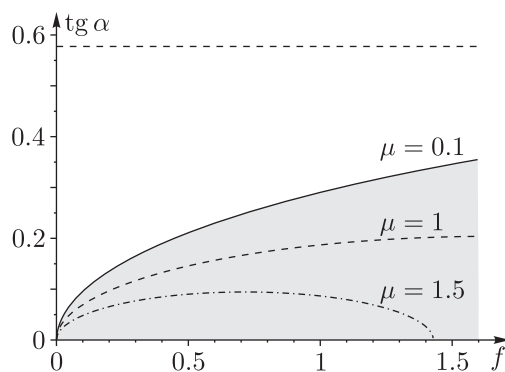


Рис. 7. Области τ -устойчивого поступательного движения треноги вблизи оси симметрии при $\mu = 0.1, 1.0, 1.5$ и фиксированных $R_2 = 1, h = 0.1$ (выделены серым цветом под соответствующими кривыми).

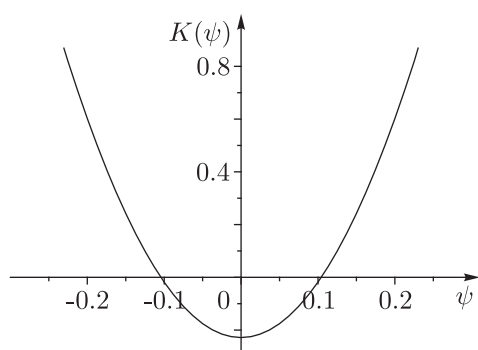


Рис. 8. График функции $K(\psi)$ треноги ($h = 0.1, R_2 = 1, \mu = 1.5, f = 0.5, \text{tg } \alpha = 0.09, g = 10$). При выполнении условия $K(\psi) < 0$ поступательное движение τ -устойчиво.

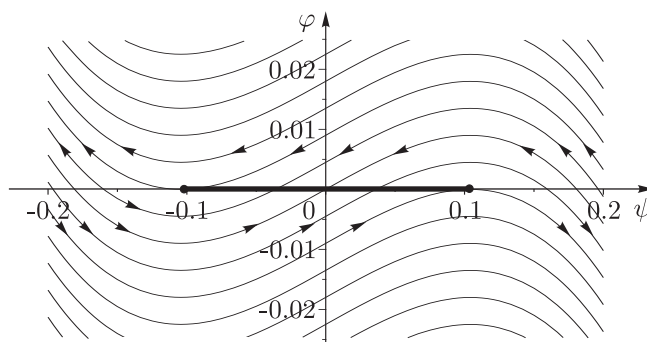


Рис. 9. Фазовый портрет и область τ -устойчивого поступательного движения треноги $\varphi = 0, -0.104 < \psi < 0.104$ при фиксированных $h = 0.1, R_2 = 1, \mu = 1.5, f = 0.5, \text{tg } \alpha = 0.09, g = 10$.

На рисунке 8 представлен график функции $K(\psi)$ при $\mu = 1.5, f = 0.5, \text{tg } \alpha = 0.09$ (сильно вытянута вдоль оси симметрии тренога), из которого видно, что при $-0.104 < \psi < 0.104$ поступательное движение рассматриваемой треноги τ -устойчиво. На рисунке 9 представлены траектории движения треноги в фазовом пространстве (ψ, φ) вблизи экватора $\{\varphi = 0\}$ и выделена область τ -устойчивого поступательного движения вблизи оси симметрии.

II. Случай $\psi_{2,3} = \pm\psi^* \neq 0$.

Анализ (4.6) показал, что интервалы τ -устойчивого поступательного движения в направлениях, близких к $\pm\psi^*$, возникают при значительном увеличении угла α (сплюснутая вдоль оси симметрии тренога).

На рисунке 10 на плоскости параметров $(f, \text{tg } \alpha)$ обозначены области τ -устойчивого поступательного движения треноги с точками опоры в углах равнобедренного треугольника при $\mu = 0.1, 1.0, 5.0$ при фиксированных $h = 0.1, R_2 = 1$. Горизонтальная прямая на рис. 10 соответствует треноге с точками опоры в углах равностороннего треугольника. Таким образом, только сплюснутые вдоль оси симметрии треноги могут двигаться τ -устойчиво поступательно вдоль направлений около $\psi^* \neq 0$.



На графике функции $K(\psi)$ (рис. 11) при фиксированных $\mu = 1, f = 3, \text{tg } \alpha(f) = 5$ видны интервалы $1.615 < |\psi| < 1.935$, соответствующие направлениям τ -устойчивого поступательного движения шайбы около ψ^* . На рисунке 12 представлены траектории движения треноги в фазовом пространстве (ψ, φ) и выделена область τ -устойчивого поступательного движения в интервале $1.615 < \psi < 1.935$.

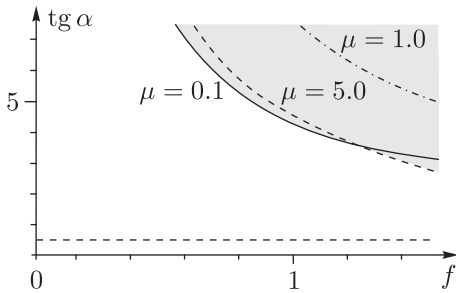


Рис. 10. Области τ -устойчивого поступательного движения треноги при $\mu = 0.1, 1.0, 5.0$ и фиксированных $R_2 = 1, h = 0.1$ (выделены серым цветом над соответствующими кривыми).

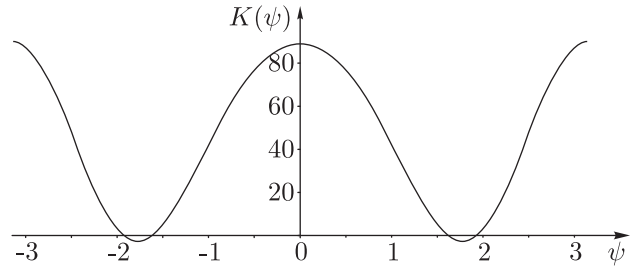


Рис. 11. График функции $K(\psi)$ треноги ($h = 0.1, R_2 = 1, \mu = 1, f = 3, \text{tg } \alpha = 5$). При выполнении условия $K(\psi) < 0$ поступательное движение τ -устойчиво.

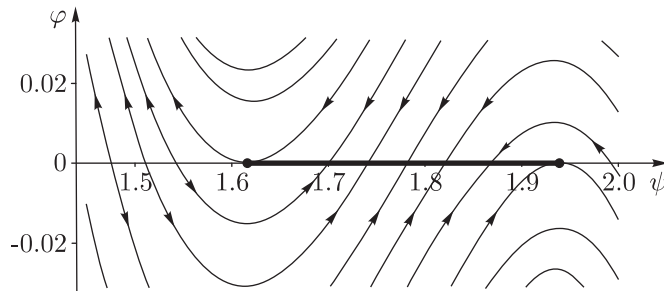


Рис. 12. Фазовый портрет вблизи области τ -устойчивого поступательного движения треноги $\varphi = 0, 1.615 < \psi < 1.935$ при фиксированных $h = 0.1, R_2 = 1, \mu = 1, f = 3, \text{tg } \alpha = 5, g = 10$.

5. Качественный анализ динамики редуцированной системы

Качественный анализ динамики системы (3.13) при $Q \rightarrow 0$ в сущности сводится к изображению и анализу фазовых портретов редуцированных систем при малых энергиях для различных значений параметров. Рассмотрим случаи движения однородной круглой шайбы и твердого тела, опирающегося на плоскость тремя точками (треноги). Траектории движения будем строить на верхней полусфере $\{\varphi \in [0, \pi/2], \psi \bmod 2\pi\}$, поскольку на нижней полусфере динамика аналогична вследствие дискретной симметрии (3.14).

5.1. Динамика круглой однородной шайбы

Для круглой однородной шайбы в силу центральной симметрии выражения для $F_{||}, F_{\perp}, M_z$, определенные из соотношений (3.3), (3.5), (3.7), и уравнения движения редуцированной системы (φ', ψ') не зависят от ψ и являются функциями только угла φ и параметров

системы:

$$\begin{aligned} \varphi' &= p(\varphi, R, h, \mu, f), \\ \psi' &= q(\varphi, R, h, \mu, f). \end{aligned}$$

Численное исследование графиков функций $p(\varphi), q(\varphi)$ показало, что $q(\varphi) \leq 0$ при всех φ (см. также [6]), следовательно, знакопеременность функции $p(\varphi)$ определяет динамику системы, а корни уравнения $p(\varphi) = 0$ при остальных фиксированных параметрах системы определяют значение угла φ_0 , который задает отношение угловой и линейной скоростей при финальном движении:

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{R\omega}{\sqrt{2}v_c}. \tag{5.1}$$

На рисунках 13 и 14 приведены характерные графики функций $p(\varphi)$ при разных значениях высоты шайбы $h = 0.1, 0.5$ и коэффициента трения $f = 0.1, 0.5$, из которых видно, что система со временем выходит на τ -устойчивые режимы движения, при которых угол φ_0 перестает меняться во времени (углу φ_0 соответствует точка пересечения $p(\varphi)$ с осью абсцисс). Кроме того, видно, что значение φ_0 зависит от высоты шайбы и коэффициента трения в отличие от случая равномерного распределения давления ($\sigma = \text{const}$). Широко известный результат [12, 15] предельного отношения линейной v и угловой ω скоростей движения диска радиуса R по плоскости $k = \frac{v}{R\omega} = 0.653$ согласуется с полученным результатом, если положить в (2.2) коэффициенты $b = c = 0$. Значению $k = 0.653$ в этом случае согласно (5.1) соответствует $\varphi_0 = 0.839$ рад (см. рис. 13).

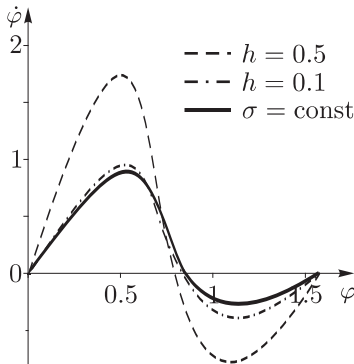


Рис. 13. Графики функции $p(\varphi)$ при $h = 0.1, 0.5$ при фиксированных $M = 1, f = 1, R = 1$.

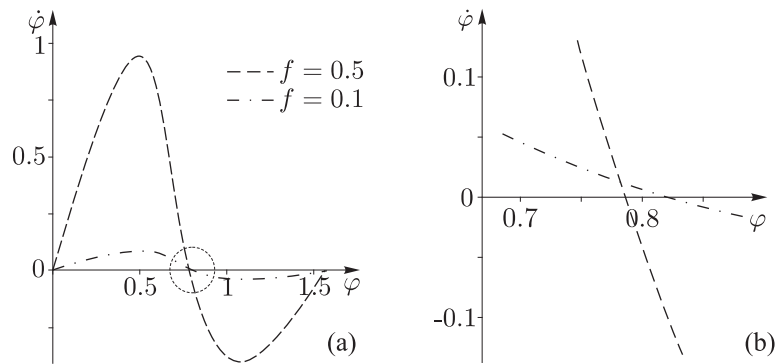


Рис. 14. (а) Графики функции $p(\varphi)$ при $f = 0.1, 0.5$ при фиксированных $M = 1, h = 1, R = 1$. (б) Увеличенная область пересечения $p(\varphi)$ с осью абсцисс.

Для определенности, с учетом (4.5), рассмотрим произвольные движения круглой однородной шайбы на плоскости при значениях $R = 1, M = 1, h = 0.1, f = 0.5$. На рисунке 15 представлены результаты численного построения траекторий данной системы, выделена траектория τ -устойчивого движения шайбы, при котором угол $\varphi_0 \approx 0.825$ не меняется во времени. Точка полюса $\varphi = \frac{\pi}{2}$ и точки экватора $\varphi = 0$ являются точками τ -неустойчивого вращательного и поступательного движений соответственно.

5.2. Динамика треноги

На рисунке 16 представлен результат численного построения траекторий движения треноги, точки опоры которой находятся в углах равностороннего треугольника при $h = 1$,



$\mu = 1$. Точка полюса $\varphi = \frac{\pi}{2}$ и точки экватора $\varphi = 0$ являются точками τ -неустойчивого вращательного и поступательного движений соответственно (аналогично случаю однородной круглой шайбы). Непрерывное семейство $\{\varphi = \varphi_0, \psi \bmod 2\pi\}$ положений равновесия для круглой однородной шайбы (см. рис. 15) исчезает, и от него остаются три неподвижные точки, соответствующие τ -устойчивому движению системы, и три гиперболические неподвижные точки.

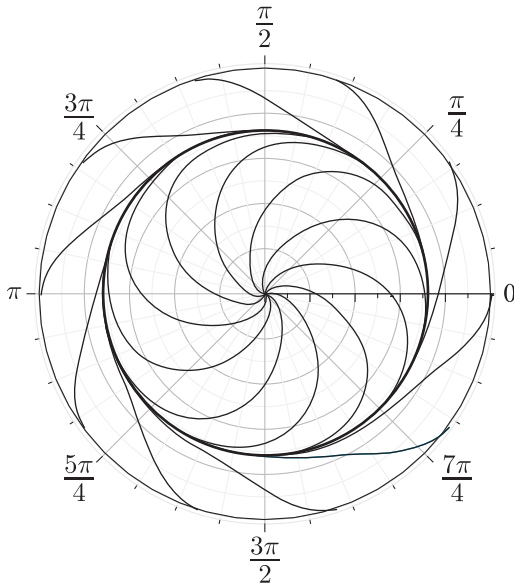


Рис. 15. Траектории движения редуцированной системы круглой однородной шайбы при $R = 1$, $M = 1$, $h = 0.1$, $f = 0.5$.

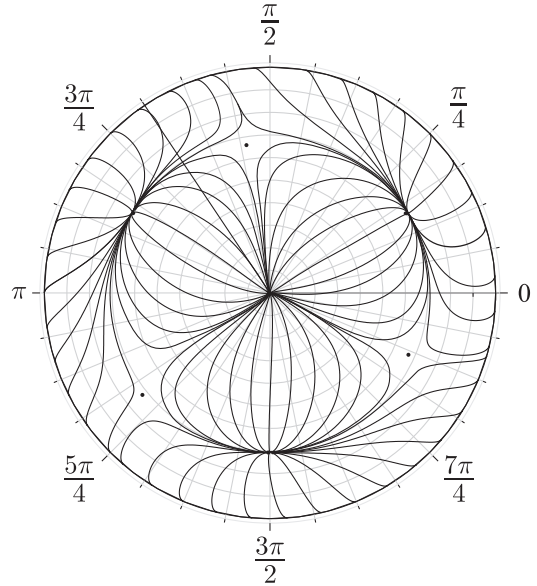


Рис. 16. Траектории движения треноги, в основании которой лежит равносторонний треугольник ($h = 1$, $\mu = 1$).

При изменении массы в вершине треугольника, лежащей на оси симметрии, происходит смещение всех неподвижных точек системы, кроме экваториальных (см. рис. 17). Полюс сферы $\varphi = \pi/2$ перестает быть неподвижной точкой, и, следовательно, в такой системе не наблюдается чисто вращательного движения.

При уменьшении угла α основания треноги (см. рис. 6) (*вытягивании треноги вдоль оси симметрии*), помимо τ -устойчивых поступательных режимов движения в направлениях, близких к оси симметрии (вблизи $\varphi = 0$, $\psi = 0$), подробно исследованных в параграфе 4.2, имеются дополнительные точки, соответствующие τ -устойчивому движению системы. Точки экватора, за исключением выделенной пунктиром области вблизи $\varphi = 0$, $\psi = 0$, являются точками τ -неустойчивого поступательного движения (см. рис. 18). В системе не наблюдается чисто вращательного движения.

При увеличении угла α основания треноги (см. рис. 6) (*сплющивании треноги вдоль оси симметрии*) фазовый портрет усложняется. Точки экватора, за исключением областей, подробно описанных в параграфе 4.2, являются точками τ -неустойчивого поступательного движения (см. рис. 19). В системе не наблюдается чисто вращательного движения. На фазовом портрете имеются точки τ -устойчивых и τ -неустойчивых смешанных движений системы.

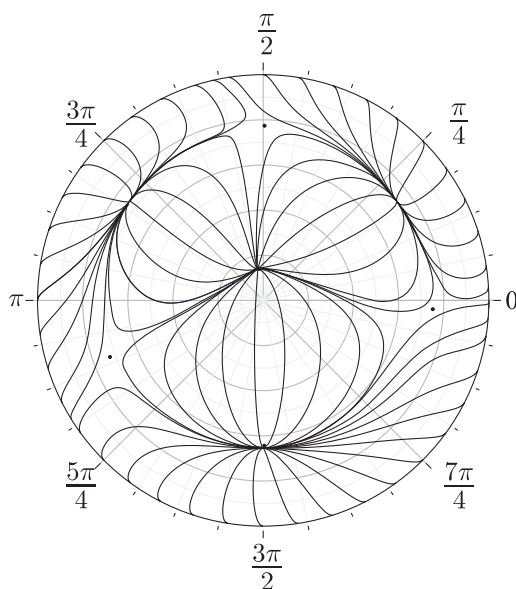


Рис. 17. Траектории движения треноги, в основании которой лежит равносторонний треугольник с неравномерным распределением масс в его вершинах ($h = 1, \mu = 1.5$).

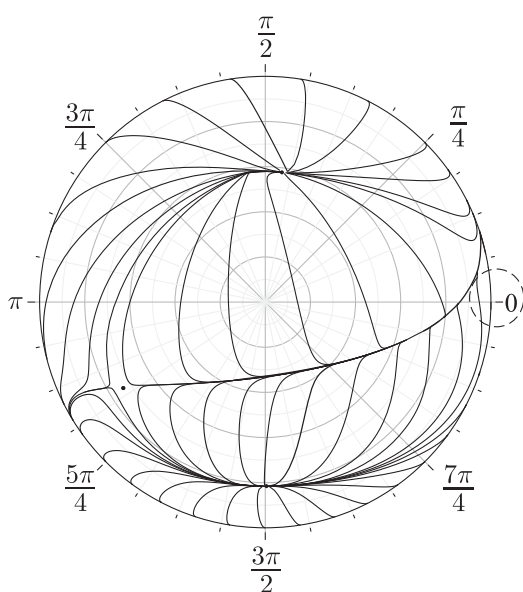


Рис. 18. Траектории движения треноги, в основании которой лежит треугольник, вытянутый вдоль оси симметрии ($h = 1, \mu = 1, \text{tg } \alpha = 0.05$). Выделенная пунктиром область τ -устойчивого поступательного движения вблизи ($\varphi = 0, \psi = 0$) подробно исследована в параграфе 4.2 (рис. 8, рис. 9).

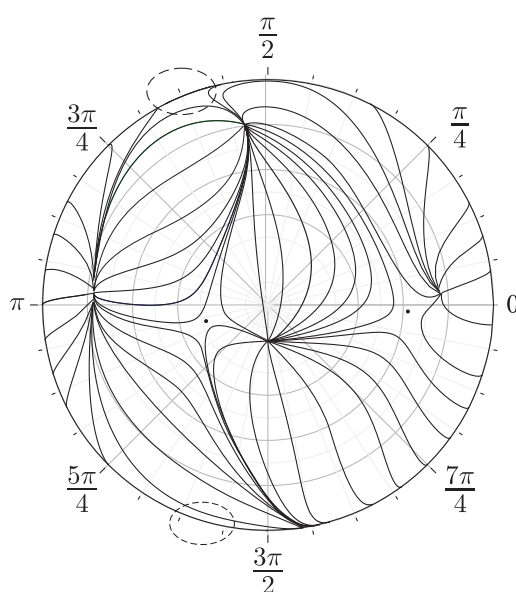


Рис. 19. Траектории движения треноги, в основании которой лежит треугольник, сплюснутый вдоль оси симметрии ($h = 1, \mu = 1, \text{tg } \alpha = 5$). Выделенные пунктиром области τ -устойчивого поступательного движения подробно исследованы в параграфе 4.2 (рис. 11, рис. 12).

6. Заключение

Качественное соответствие особенностей поступательного движения треугольной шайбы и треноги вблизи $\psi^* = 0$ позволяет предположить о таком же соответствии результатов качественного анализа динамики треноги (особенности фазовых портретов) и динамики шайбы с плоским треугольным основанием.

Для сравнения качественных динамических свойств круглой однородной шайбы и цилиндрических тел с осевой симметрией в основании полученные результаты удобно представить в виде таблицы.

В таблице приведем некоторые утверждения, подробно рассмотренные выше. В частности, выделим свойства для круглой шайбы, обладающей радиальной симметрией, для шайбы, в основании которой есть ось симметрии (основание с группой симметрии C_2), а также выделим шайбы с основаниями, которые обладают группой симметрии $C_n, n > 2$.

Круглое основание	Основание с группой симметрии $C_n, n > 2$	Основание с группой симметрии C_2
Поступательное движение τ -неустойчиво	Поступательное движение в рассмотренных примерах τ -неустойчиво	Поступательное движение может быть τ -устойчиво*
Существует чисто вращательное движение, которое в рассмотренных примерах τ -неустойчиво		Чисто вращательного движения, как правило, не существует
Решение может выйти на τ -устойчивый режим движения, при котором отношение модуля скорости центра масс к угловой скорости постоянно (предельный цикл при $\varphi \neq 0$)	Имеется по крайней мере n τ -устойчивых и n гиперболических режимов, возникших при распаде семейства τ -устойчивых неподвижных точек шайбы с круглым основанием	Имеются неподвижные точки, соответствующие τ -устойчивому режиму движения

*Для тел, вытянутых вдоль оси симметрии, — в направлении оси симметрии $\psi = 0$; для сплюснутых тел — вдоль направлений, сильно отклоненных от оси симметрии.

Приложение А. Уравнения движения для шайбы с плоским основанием

Запишем уравнения движения (3.13) в явном виде в линейном приближении в окрестности экватора на сфере $\{\varphi = 0\}$. Пользуясь (3.1), выражениями для скорости центра масс и угловой скорости (3.8), с точностью до линейных членов по φ , получим:

$$v_x = Q \left(\sin \psi + \frac{\varphi x}{l} \right), \quad v_y = Q \left(\cos \psi - \frac{\varphi y}{l} \right), \quad v = Q \left(1 - \frac{\varphi x}{l} \sin \psi + \frac{\varphi y}{l} \cos \psi \right)^{-1}.$$

Тогда

$$F_x = -f \iint_D \sigma \frac{(\mathbf{v}, \mathbf{e}_x)}{v} dS = -f \iint_D \left(a \cos \psi - b\varphi \frac{x^2 \cos \psi \sin \psi}{l} - c\varphi \frac{y^2 \sin^2 \psi}{l} \right) dx dy,$$

$$F_y = -f \iint_D \sigma \frac{(\mathbf{v}, \mathbf{e}_y)}{v} dS = -f \iint_D \left(a \sin \psi + b\varphi \frac{x^2 \cos^2 \psi}{l} + c\varphi \frac{y^2 \cos \psi \sin \psi}{l} \right) dx dy.$$

С другой стороны, из условия компенсации моментов (3.7) с учетом (3.1) и (2.2) получим

$$F_x = -\frac{1}{h} \iint_D \sigma x dx dy = -\frac{1}{h} \iint_D b x^2 dx dy, \quad F_y = -\frac{1}{h} \iint_D \sigma y dx dy = -\frac{1}{h} \iint_D c y^2 dx dy,$$

откуда

$$b = \frac{2mgh^2 f \rho}{I_{yy} l} (l \cos \psi - \varphi h f \sin \psi), \quad c = \frac{2mgh^2 f \rho}{I_{xx} l} (l \sin \psi + \varphi h f \cos \psi).$$

С учетом введенных обозначений (4.3), (4.4) получаем выражения для момента силы трения (3.6):

$$M_z = \varphi \frac{fg}{l} (-I_{xx} \sin^2 \psi - I_{yy} \cos^2 \psi + \Lambda + mh^2 f^2).$$

Подставляя полученные соотношения в (3.13), при $Q \rightarrow 0$ получим уравнения движения в виде (4.1). ■

Приложение В. Уравнения движения для шайбы, опирающейся на плоскость тремя точками

Значения коэффициентов a , b , c могут быть определены из условий нормировки и компенсации моментов (3.3), (3.5), (3.7):

$$a = \frac{mg}{lR_2} \left((\mu - 1)fh(-hf\varphi \sin \psi + l \cos \psi) + \frac{R_2(\mu^2 + 2)l}{2 + \mu} \right),$$

$$b = \frac{mg}{2R_2^2 l} (3fh(2 + \mu)(-hf\varphi \sin \psi + l \cos \psi) + 2lR_2(\mu - 1)),$$

$$c = \frac{mgfh(2 + \mu)}{2lR_2^2 \text{tg}^2 \alpha} (fh\varphi \cos \psi + \sin \psi l).$$

При интегрировании (3.6) получим выражение для M_z :

$$M_z = \frac{mfg\varphi}{l} (f^2 h^2 (2 + \mu) + hfR_2 \cos \psi ((\text{tg}^2 \alpha \sin^2 \psi - \cos^2 \psi)(2 + \mu) + 2\mu) - \frac{2R_2^2}{2 + \mu} (\text{tg}^2 \alpha \sin^2 \psi (2 + \mu) + \mu \cos^2 \psi)).$$

Проекции силы трения на орты e_{\parallel} и e_{\perp} (3.9) имеют вид

$$F_{\parallel} = -mgf(2 + \mu), \quad F_{\perp} = -\frac{2 + \mu}{l}mgf^2h\varphi.$$

Подставляя полученные соотношения в (3.13), при $Q \rightarrow 0$ получим уравнения движения в виде (4.1). ■

Список литературы

- [1] Андронов В. В., Журавлёв В. Ф. Сухое трение в задачах механики. М.–Ижевск: НИЦ «РХД», Инст. компьютерн. исслед., 2010. 184 с.
- [2] Иванов А. П. Динамически совместная модель контактных напряжений при плоском движении твердого тела // ПММ, 2009, т. 73, № 2, с. 189–203.
- [3] Ишлинский А. Ю., Соколов Б. Н., Черноушко Ф. Л. О движении плоских тел при наличии сухого трения // МТТ, 1981, № 4, с. 17–28.
- [4] Киреев А. А. О движении однородного вращающегося диска по плоскости в условиях комбинированного трения // МТТ, 2002, № 1, с. 60–67.
- [5] Мак-Миллан В. Д. Динамика твердого тела. М.: ИЛ, 1951. 468 с.
- [6] Сальникова Т. В., Трещев Д. В., Галлямов С. Р. Движение свободной шайбы по шероховатой горизонтальной плоскости // Нелинейная динамика, 2012, т. 8, № 1, с. 83–101.
- [7] Самсонов В. А. О трении при скольжении и верчении тела // Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем. Механ., 1981, № 2, с. 76–78.
- [8] Розенблат Г. М. Об интегрировании уравнений движения тела, опирающегося на шероховатую плоскость тремя точками // Докл. РАН, 2010, т. 435, № 4, с. 475–478.
- [9] Трещев Д. В., Бурлаков Д. С., Сеславина А. А. О движении цилиндрической шайбы по горизонтальной плоскости // Вестн. УдГУ. Матем. Механ. Компьютерн. науки, 2012 (принято в печать).
- [10] Farkas Z., Bartels G., Unger T., Wolf D. Frictional coupling between sliding and spinning motion // Phys. Rev. Lett., 2003, vol. 90, no. 24, 248302, 4 pp.
- [11] Field P. On the motion of a disc with three supports on a rough plane // Phys. Rev. (Series I), 1912, vol. 35, pp. 177–184.
- [12] Goyal S., Ruina A., Papadopoulos J. Planar sliding with dry friction: P. 2. Dynamics of motion // Wear, 1991, vol. 143, pp. 331–352.
- [13] Shegelski M. R. A., Goodvin G. L., Booth R., Bagnall P., Reid M. Exact normal forces and trajectories for a rotating tripod sliding on a smooth surface // Can. J. Phys., 2004, vol. 82, pp. 875–890.
- [14] Voyerli K., Eriksen E. On the motion of an ice hockey puck // Amer. J. Phys., 1985, vol. 53, pp. 1149–1153.
- [15] Weidman P. D., Malhotra Ch. P. On the terminal motion of sliding spinning disks with uniform Coulomb friction // Phys. D, 2007, vol. 233, no. 1, pp. 1–13.

On the final motion of cylindrical solids on a rough plane

Dmitrii V. Treschev¹, Nadezhda N. Erdakova², Tatyana B. Ivanova³

¹Steklov Mathematical Institute, Russian Academy of Sciences

Gubkina st. 8, Moscow, 119991, Russia

M. V. Lomonosov Moscow State University

Vorob'evy gory, Moscow, 119899, Russia



^{2,3}Udmurt State University
Institute of Computer Science
Universitetskaya st. 1, Izhevsk, 426034, Russia
¹treschev@mi.ras.ru, ²enn@rcd.ru, ³tbesp@rcd.ru

The problem of a uniform straight cylinder (disc) sliding on a horizontal plane under the action of dry friction forces is considered. The contact patch between the cylinder and the plane coincides with the base of the cylinder. We consider axisymmetric discs, i.e. we assume that the base of the cylinder is symmetric with respect to the axis lying in the plane of the base. The focus is on the qualitative properties of the dynamics of discs whose circular base, triangular base and three points are in contact with a rough plane.

MSC 2010: 70F40, 70F35, 70E18

Keywords: Amontons–Coulomb law, dry friction, disc, final dynamics, stability

Received August 15, 2012, accepted September 3, 2012

Citation: *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2012, vol. 8, no. 3, pp. 585–603 (Russian)