



УДК: 517.925

MSC 2010: 37J60, 37J35, 70H45

Качение без верчения шара по плоскости: отсутствие инвариантной меры в системе с полным набором интегралов

А. В. Болсинов, А. В. Борисов, И. С. Мамаев

В работе исследуется модельная задача о качении без проскальзывания неоднородного шара со смещенным центром по плоскости. Показано, что в данном случае приведенная шестимерная система обладает четырьмя первыми интегралами и ее фазовое пространство

Получено 4 августа 2012 года
После доработки 19 октября 2012 года

Работа выполнена при поддержке гранта Правительства РФ для государственной поддержки научных исследований, проводимых под руководством ведущих ученых в российских образовательных учреждениях ВПО (11.G34.31.0039), ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» (2009-1.5-503-004-019). Работа А. В. Болсинова выполнена при поддержке гранта «Бигамильтоновы системы и особенности интегрируемых систем» ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» (02.740.11.5213).

Болсинов Алексей Викторович
A.Bolsinov@lboro.ac.uk
School of Mathematics, Loughborough University
United Kingdom, LE11 3TU, Loughborough, Leicestershire
Институт компьютерных исследований
Удмуртский государственный университет
426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, д. 1

Борисов Алексей Владимирович
borisov@rcd.ru
Мамаев Иван Сергеевич
mamaev@rcd.ru
Институт компьютерных исследований
Удмуртский государственный университет
426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, д. 1
Институт машиноведения им. А. А. Благонравова РАН
117334, Россия, г. Москва, ул. Бардина, д. 4
Институт математики и механики УрО РАН
620990, Россия, г. Екатеринбург, ул. Софьи Ковалевской, д. 16

расслаивается на двумерные инвариантные торы, причем это слоение эквивалентно лиувиллево слоению в случае Эйлера в динамике твердого тела. Тем не менее интегрируемость в квадратурах невозможна, так как система не допускает инвариантной меры, что доказано с помощью явного нахождения предельных циклов.

Ключевые слова: неголономная связь, лиувиллево слоение, инвариантный тор, инвариантная мера, интегрируемость

Содержание

Введение	606
1. Уравнения движения и первые интегралы	607
2. Топологическая эквивалентность случаю Эйлера	608
3. Отсутствие инвариантной меры и существование предельных циклов	611

Введение

Эта работа продолжает цикл недавних исследований [1, 7–9], посвященных исследованию динамики тела, катящегося по поверхности без проскальзывания и верчения (прокручивания). Для данной модели качения в работах [15, 17] предложено название — *rubber-rolling* («резиновое качение»), то есть, грубо говоря, качение тел с резиновым покрытием. Такая модель отличается от обычной классической неголономной задачи о качении тела по абсолютно шероховатой плоскости тем, что в дополнение к условию равенства нулю точки контакта требуется, чтобы проекция угловой скорости на нормаль к неподвижной поверхности также равнялась нулю. Кинематика такого качения исследовалась еще Адамаром [16] и Бегеном [14], их результаты с современных позиций разбираются в [7]. Для различных вопросов теории управления и робототехники ее использование упрощает исследования. Тем не менее проблемы динамики таких систем, как свободных, так и управляемых лишь начинают изучаться (первой работой, видимо, является [8]). Здесь мы приводим пример системы с «резиновым качением», которая обладает полным набором интегралов, необходимых для интегрируемости (отметим, что в данной задаче для интегрируемости по Эйлеру–Якоби необходимо указать еще один дополнительный интеграл и инвариантную меру), но тем не менее эта система не обладает аналитической инвариантной мерой.

Рассматриваемая в данной работе система — это частный случай задачи о качении по плоскости динамически несимметричного шара, центр масс которого смещен относительно геометрического центра, вектор смещения обозначим \mathbf{c} . При $\mathbf{c} = 0$ эта система обобщает известную задачу о шаре Чаплыгина на случай «резинового качения», ее интегрируемость показана в [6, 15] (в этом случае инвариантная мера существует и находится явно). Случай качения при $\mathbf{c} \neq 0$, но в отсутствие поля тяжести, рассматривается в данной работе, при этом мера пропадает, но необходимый для интегрируемости набор интегралов сохраняется. При $\mathbf{c} \neq 0$ и в поле тяжести, как показывают численные эксперименты, пропадает также дополнительный интеграл и при определенных значениях параметров в системе может возникнуть странный аттрактор. Согласно терминологии [15, 18] можно говорить о резиновом *rock-n-roller* — *rubber rock-n-roller*.

Как показано в данной работе, отсутствие инвариантной меры при наличии дополнительного интеграла приводит к регулярной системе, для которой слоение на инвариантные

торы эквивалентно классическому случаю Эйлера в динамике твердого тела. Тем не менее на отдельных торах могут встречаться предельные циклы и зависимость числа вращения на торах от параметра имеет вид канторовой лестницы. Этот пример демонстрирует не найденный ранее тип динамического поведения в иерархии динамики неголономных систем, введенной в [13], и связан с препятствиями к гамильтонизации, рассмотренными в [1].

1. Уравнения движения и первые интегралы

В работе [9] была рассмотрена неголономная система, описывающая качение тела со сферическим основанием по неподвижной сферической поверхности. Здесь мы рассмотрим предельный случай этой системы, когда кривизна опорной поверхности стремится к нулю, то есть шар, в общем случае динамически несимметричный и неуравновешенный, катится по плоскости без проскальзывания и верчения. В подвижной системе координат $Cxyz$ (см. рис. 1), связанной с шаром, уравнения движения, описывающие эволюцию угловой скорости шара ω и вектора нормали к плоскости в точке контакта \mathbf{n} , представляются в виде

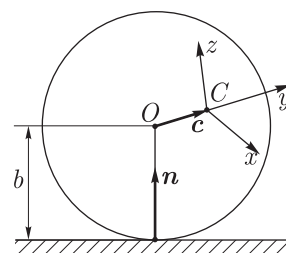


Рис. 1.

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{J}}\dot{\omega} &= (\tilde{\mathbf{J}}\omega) \times \omega - \frac{1}{2}\dot{\Lambda}\omega + \mathbf{n} \times \frac{\partial U(\mathbf{n})}{\partial \mathbf{n}} + \lambda \mathbf{n}, \quad \dot{\mathbf{n}} = \mathbf{n} \times \omega, \\ \tilde{\mathbf{J}} &= \mathbf{J} + \Lambda \mathbf{E}, \quad \mathbf{J} = \mathbf{I} + m(b^2 + c^2)\mathbf{E} - m\mathbf{c} \otimes \mathbf{c}, \quad \Lambda = 2mb(\mathbf{c}, \mathbf{n}), \\ \lambda &= -\frac{\left((\tilde{\mathbf{J}}\omega) \times \omega - \frac{1}{2}\dot{\Lambda}\omega + \mathbf{n} \times \frac{\partial U}{\partial \mathbf{n}}, \tilde{\mathbf{J}}^{-1}\mathbf{n} \right)}{(\mathbf{n}, \tilde{\mathbf{J}}^{-1}\mathbf{n})}, \end{aligned} \tag{1.1}$$

где m, \mathbf{I}, b — масса, тензор инерции и радиус шара, \mathbf{c} — вектор смещения центра масс относительно геометрического центра, $U(\mathbf{n})$ — потенциал внешних сил, \mathbf{E} — единичная матрица.

ЗАМЕЧАНИЕ. При качении шара в поле тяжести по горизонтальной плоскости $U(\mathbf{n}) = mg(\mathbf{c}, \mathbf{n})$.

Неопределенный множитель λ в этих уравнениях подобран таким образом, чтобы выполнялось уравнение связи

$$(\omega, \mathbf{n}) = 0,$$

выражающее отсутствие верчения. Как можно проверить, функция $F_0 = (\omega, \mathbf{n})$ является в этом случае первым интегралом данной системы. Помимо этого система (1.1) допускает геометрический интеграл:

$$F_1 = \mathbf{n}^2 = 1,$$

и на уровне $(\omega, \mathbf{n}) = 0$ интеграл энергии:

$$E = \frac{1}{2}(\omega, \tilde{\mathbf{J}}\omega) + U(\mathbf{n}). \tag{1.2}$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Таким образом исходная шестимерная система (1.1) всегда обладает парой глобальных интегралов F_0, F_1 и одним частным интегралом E .



В дальнейшем мы, как правило, будем рассматривать ограничение системы (1.1) на четырехмерное многообразие

$$\mathcal{M}^4 = \{(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{n}) \mid \mathbf{n}^2 = 1, (\boldsymbol{\omega}, \mathbf{n}) = 0\}, \quad (1.3)$$

которое диффеоморфно касательному расслоению двумерной сферы TS^2 .

При $\mathbf{c} = 0$ и $U(\mathbf{n}) = 0$, как показано в [6], система (1.1) изоморфна системе Веселовой [10], она обладает инвариантной мерой

$$(\mathbf{n}, \mathbf{J}^{-1}\mathbf{n}) d\boldsymbol{\omega} d\mathbf{n},$$

и дополнительным квадратичным интегралом

$$F_2 = \frac{1}{2}(\mathbf{n} \times \mathbf{J}\boldsymbol{\omega}, \mathbf{n} \times \mathbf{J}\boldsymbol{\omega}).$$

Следовательно в этом случае система интегрируема по теореме Эйлера–Якоби и является конформно гамильтоновой [1].

При $\mathbf{c} \neq 0$ и $U(\mathbf{n}) = 0$, в работе [8] также найден дополнительный квадратичный интеграл

$$F_2 = \frac{1}{2}(\mathbf{n} \times \tilde{\mathbf{J}}\boldsymbol{\omega}, \mathbf{n} \times \tilde{\mathbf{J}}\boldsymbol{\omega}) - \Lambda E,$$

где E — интеграл энергии (1.2), но не указана инвариантная мера.

При $U = 0$ здесь мы покажем что:

1. при произвольном \mathbf{c} интегралы E , F_2 задают лиувиллево слоение многообразия (1.3) на инвариантные торы, которое эквивалентно лиувиллеву слоению в случае Эйлера в динамике твердого тела с неподвижной точкой;
2. при $\mathbf{c} \neq 0$ система не допускает инвариантной меры и обладает предельными циклами на торах.

2. Топологическая эквивалентность случаю Эйлера

Сначала дадим более четкую и строгую формулировку утверждения, которое мы собираемся доказать.

Напомним (см. подробнее [3, 5]), что случай Эйлера в динамике твердого при нулевой постоянной площадей можно рассматривать как гамильтонову систему с двумя степенями свободы на четырехмерном многообразии $\tilde{\mathcal{M}}^4$, заданном в шестимерном пространстве $\mathbb{R}^6(\mathbf{M}, \boldsymbol{\gamma})$ двумя уравнениями, а именно

$$\tilde{\mathcal{M}}^4 = \{(\mathbf{M}, \boldsymbol{\gamma}) \in \mathbb{R}^6 \mid \boldsymbol{\gamma}^2 = 1, (\mathbf{M}, \boldsymbol{\gamma}) = 0\}$$

Как мы видим, это $\tilde{\mathcal{M}}^4$ в точности совпадает с многообразием (1.3), на котором задана изучаемая нами динамическая система (1.1).

Гамильтониан и дополнительный интеграл в случае Эйлера имеют вид

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2}(\mathbf{A}\mathbf{M}, \mathbf{M}) = \frac{1}{2}(A_1 M_1^2 + A_2 M_2^2 + A_3 M_3^2), \\ F &= \frac{1}{2}(\mathbf{M}, \mathbf{M}) = \frac{1}{2}(M_1^2 + M_2^2 + M_3^2). \end{aligned} \quad (2.1)$$

Функции H и F задают слоение M^4 на инвариантные торы Лиувилля, которое разумеется, имеет некоторые особые слои. Его структура хорошо известна и изучена в деталях [3, 12] (см. также [2, 11, 19]). В определенном смысле оно является одним из простейших модельных слоений для интегрируемых гамильтоновых систем на сфере с квадратичными интегралами и встречается во многих известных задачах.

ЗАМЕЧАНИЕ. Тензор \mathbf{A} равен обратному тензору инерции тела относительно неподвижной точки. Считать \mathbf{A} диагональным в этих формулах совсем необязательно, важно лишь то, что он симметричен и не зависит от γ , то есть является постоянным. В этом, в частности, его существенное отличие от оператора $\tilde{\mathbf{J}}$, коэффициенты которого зависят от \mathbf{n} .

В рассматриваемой нами задаче о качении шара слоение на инвариантные торы также задается двумя квадратичными по ω функциями, но гораздо более сложного вида, а именно

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}(\omega, \tilde{\mathbf{J}}\omega), \\ F_2 &= \frac{1}{2}(\mathbf{n} \times \tilde{\mathbf{J}}\omega, \mathbf{n} \times \tilde{\mathbf{J}}\omega) - \Lambda E, \end{aligned} \tag{2.2}$$

где $\tilde{\mathbf{J}}$ и Λ задаются формулами (1.1).

Наша цель — показать, что несмотря на существенные различия между парами функций (2.1) и (2.2), задаваемые ими слоения совершенно одинаковы в следующем смысле:

Теорема 1. *Существует диффеоморфизм $\Phi: M^4 \rightarrow \tilde{M}^4$ (его можно понимать как регулярную замену переменных $(\omega, \mathbf{n}) \mapsto (M, \gamma)$) который переводит функции E, F_2 в интеграл F и гамильтониан H случая Эйлера. В частности, Φ является послойным диффеоморфизмом между слоениями.*

Доказательство. Прежде всего воспользуемся тем фактом, что вектор ω перпендикулярен вектору \mathbf{n} , то есть принадлежит касательной плоскости T_n к единичной сфере $\mathbf{n}^2 = 1$ в точке \mathbf{n} . Перепишем формулы для энергии E и дополнительного интеграла F_2 в терминах этой касательной плоскости. Обозначим через $\tilde{\mathbf{J}}_0$ линейный оператор, являющийся композицией оператора $\tilde{\mathbf{J}}$ и проекции на касательную плоскость T_n (оператор $\tilde{\mathbf{J}}_0$, разумеется, существенно зависит от точки \mathbf{n} , см. рис. 2). Тогда, очевидно, что

$$E = \frac{1}{2}(\omega, \tilde{\mathbf{J}}_0\omega) \quad \text{для } \omega \in T_n.$$

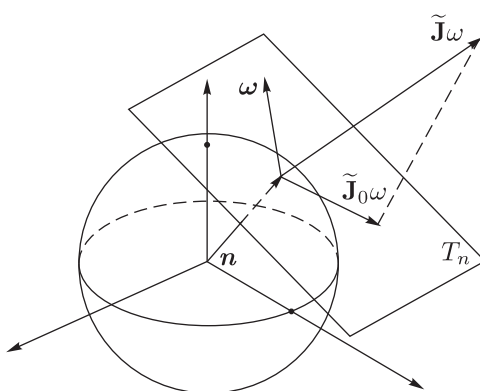


Рис. 2.

С другой стороны, вектор $\mathbf{n} \times \tilde{\mathbf{J}}\boldsymbol{\omega}$ геометрически может быть охарактеризован как вектор, лежащий в касательной плоскости $T_{\mathbf{n}}$ и полученный из $\tilde{\mathbf{J}}_0\boldsymbol{\omega}$ поворотом на 90° вокруг нормали \mathbf{n} . Скалярный квадрат этого вектора, очевидно, равен скалярному квадрату вектора $\tilde{\mathbf{J}}_0\boldsymbol{\omega}$. Отсюда заключаем, что

$$F_2 = \frac{1}{2}(\tilde{\mathbf{J}}_0\boldsymbol{\omega}, \tilde{\mathbf{J}}_0\boldsymbol{\omega}) - \frac{1}{2}\Lambda(\boldsymbol{\omega}, \tilde{\mathbf{J}}_0\boldsymbol{\omega}).$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Данные соотношения можно также получить, воспользовавшись проектором

$$\mathbf{P}_n = \mathbf{E} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n},$$

для которого справедливы соотношения

$$\tilde{\mathbf{J}}_0 = \mathbf{P}_n \tilde{\mathbf{J}}, \quad \tilde{\mathbf{J}}_0 = \mathbf{P}_n \tilde{\mathbf{J}}_0 \mathbf{P}_n, \quad \mathbf{P}_n \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}, \quad \mathbf{n} \times \mathbf{P}_n \mathbf{a} = \mathbf{n} \times \mathbf{a},$$

где \mathbf{a} — произвольный трехмерный вектор.

Заметим теперь, что оператор $\tilde{\mathbf{J}}_0: T_{\mathbf{n}} \rightarrow T_{\mathbf{n}}$ симметричен и положительно определен (он фактически задает кинетическую энергию). Отсюда следует, что из него можно извлечь квадратный корень. Полученный оператор по-прежнему будет симметричным и положительно определенным. Тем самым, замена переменных $\mathbf{M} = \sqrt{\tilde{\mathbf{J}}_0}\boldsymbol{\omega}$, где $\boldsymbol{\omega}, \mathbf{M} \in T_{\mathbf{n}}$, является регулярной. Отметим, что эта замена существенно зависит от \mathbf{n} (можно сказать так: эта замена линейна в смысле $\boldsymbol{\omega}$, но матрица этой замены сложным, нелинейным образом зависит от \mathbf{n}).

В новых переменных гамильтониан и интеграл принимают вид

$$E = \frac{1}{2}(\mathbf{M}, \mathbf{M}), \quad F_2 = \frac{1}{2}(\tilde{\mathbf{J}}_0 \mathbf{M}, \mathbf{M}) - \frac{1}{2}\Lambda(\mathbf{M}, \mathbf{M}).$$

Используя тот факт, что вектор \mathbf{M} лежит в касательной плоскости $T_{\mathbf{n}}$, мы можем теперь от оператора $\tilde{\mathbf{J}}_0$ снова вернуться к $\tilde{\mathbf{J}}$ и, воспользовавшись (1.1), получим:

$$F_2 = \frac{1}{2}(\tilde{\mathbf{J}}\mathbf{M}, \mathbf{M}) - \frac{1}{2}\Lambda(\mathbf{M}, \mathbf{M}) = \frac{1}{2}(\mathbf{M}, \mathbf{J}\mathbf{M}).$$

Остается заметить, что оператор \mathbf{J} — постоянный, то есть никак не зависит от точки \mathbf{n} , тем самым он вполне аналогичен оператору \mathbf{A} в формулах (2.1) для случая Эйлера.

Таким образом, мы видим, что замена

$$\mathbf{M} = \sqrt{\tilde{\mathbf{J}}_0}\boldsymbol{\omega}, \quad \boldsymbol{\gamma} = \mathbf{n}$$

переводит функции E и F_2 в интеграл F и гамильтониан H случая Эйлера соответственно и, в частности, преобразует интегральные поверхности нашей задачи в интегральные поверхности случая Эйлера. Матрица \mathbf{A} в формулах (2.1) будет при этом равна матрице

$$\mathbf{J} = \mathbf{I} + m(b^2 + c^2)\mathbf{E} - m\mathbf{c} \otimes \mathbf{c},$$

которая также постоянна, что и требовалось. ■

Этот результат показывает, что *никаких препятствий на уровне слоений для существования инвариантной меры и гамильтонизации нет*. Однако такие препятствия обнаруживаются при более подробном исследовании поведении траекторий на инвариантных торах.

Отметим, что описанная конструкция позволяет выбрать естественную систему координат на сфере $S^2 = \{\mathbf{n}^2 = 1\}$ аналогичную разделяющим переменным. В этих переменных, уравнения полностью *не разделяются*, но существенным образом упрощаются. Чтобы это сделать, следует сначала диагонализировать постоянную матрицу \mathbf{J} , и взять соответствующую сфероконическую систему координат. Ниже это будет сделано для частного случая, когда центр масс смещен вдоль оси симметрии.

3. Отсутствие инвариантной меры и существование предельных циклов

Исследуем подробнее частный случай системы (1.1), когда центр масс расположен на одной из главных осей, выбрав подходящую систему координат в теле, получим $\mathbf{I} = \text{diag}(I_1, I_2, I_3)$ и $J_1 = I_1 + mb^2$, $J_2 = I_2 + m(b^2 + c_1^2)$, $J_3 = I_3 + m(b^2 + c_1^2)$

Для определенности положим

$$I_1 < I_2 < I_3, \quad \mathbf{c} = (c_1, 0, 0),$$

при этом также выполнены неравенства $J_1 < J_2 < J_3$.

Интегралы E , F_2 вследствие однородности по $\boldsymbol{\omega}$ задают на многообразии M^4 пару квадратичных форм по скоростям и могут быть одновременно диагонализированы. В данном случае для этого необходимо выбрать сфероконические координаты (u, v) на сфере $\mathbf{n}^2 = 1$, которые определяются соотношениями

$$n_1 = \sin u \sqrt{1 - \frac{J_3 - J_2}{J_3 - J_1} \sin^2 v}, \quad n_2 = \cos u \cos v, \quad n_3 = \sin v \sqrt{1 - \frac{J_2 - J_1}{J_3 - J_1} \sin^2 u},$$

$$u \in [-\pi, \pi], \quad v \in (-\pi/2, \pi/2).$$

Пользуясь связью $(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{n}) = 0$, найдем из уравнений (1.1) угловую скорость в виде

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\mathbf{n}} \times \mathbf{n},$$

и выразим интегралы E , F_2 через координаты u, v и их скорости \dot{u}, \dot{v} :

$$E = \frac{4J_1 g(u, v)}{\varkappa} \left(\frac{\Phi_1(u, v)}{\alpha \cos^2 u + 1} \dot{u}^2 + \frac{\Phi_2(u, v)}{\cos^2 v + \alpha} \dot{v}^2 \right),$$

$$F_2 = \frac{4J_1^2 g(u, v)}{\varkappa^2} \left(\frac{(\varkappa + \alpha + \cos^2 v) \Phi_1(u, v)}{\alpha \cos^2 u + 1} \dot{u}^2 + \frac{(\varkappa + \alpha \sin^2 u) \Phi_2(u, v)}{\cos^2 v + \alpha} \dot{v}^2 \right),$$

$$g(u, v) = \alpha \cos^2 u + \cos^2 v, \tag{3.1}$$

$$\Phi_1(u, v) = \varkappa + \alpha + \cos^2 v + 2\mu \sin u \sqrt{\alpha + \cos^2 v},$$

$$\Phi_2(u, v) = \varkappa + \alpha \sin^2 u + 2\mu \sin u \sqrt{\alpha + \cos^2 v}$$

$$\alpha = \frac{J_2 - J_1}{J_3 - J_2}, \quad \varkappa = \frac{J_1}{J_3 - J_2}, \quad \mu = \frac{mbc_1}{\sqrt{(J_3 - J_1)(J_3 - J_2)}}.$$



Вследствие положительной определенности кинетической энергии, функции Φ_1, Φ_2 также положительно определены при физических значениях параметров.

Зафиксируем постоянные h, δ , которые связаны с величинами первых интегралов следующим образом

$$E = h, \quad F_2 = J_1 h \frac{\alpha + \varkappa + \delta}{\varkappa}, \quad (3.2)$$

где $-\alpha \leq \delta \leq 1$. Разрешая уравнения (3.1) относительно \dot{u}, \dot{v} , после замены времени $d\tau = \frac{\varkappa h}{4J_1 g^2(u, v)} dt$ получим

$$\left(\frac{du}{d\tau}\right)^2 = \frac{(\alpha \cos^2 u + 1)(\alpha \cos^2 u + \delta)}{\Phi_1(u, v)}, \quad \left(\frac{dv}{d\tau}\right)^2 = \frac{(\cos^2 v + \alpha)(\cos^2 v - \delta)}{\Phi_2(u, v)}, \quad (3.3)$$

в дальнейшем производные по τ будем обозначать u', v' .

При данном выборе постоянных h, δ значениям $\delta = -\alpha, \delta = 0, \delta = 1$ соответствуют *критические периодические решения* [3]. Они отвечают таким движениям шара, при которых постоянный в неподвижных осях вектор угловой скорости направлен вдоль одной из главных осей и параллелен опорной плоскости.

ЗАМЕЧАНИЕ. Мы видим, что согласно (3.3) при $\delta \neq -\alpha$ и $\delta \neq 1$ всюду $g(u, v) > 0$, следовательно замена времени $dt \rightarrow d\tau$ не содержит особенностей.

Согласно доказанной в предыдущем разделе теореме 1 и известным результатом о ливилевом слоении в случае Эйлера [3], заключаем, что

если $\delta \notin \{-\alpha, 0, 1\}$, то всякая компонента связности неособой поверхности уровня первых интегралов данной системы диффеоморфна двумерному тору.

Рассмотрим подробнее семейство торов, для которого выполнено:

$$0 < \delta < 1, \quad u \in [0, 2\pi), \quad v \in [-v_*, v_*],$$

где v_* — корень уравнения $\cos^2 v = \delta$ на интервале $(0, \pi/2)$ и введем на них угловые переменные $(u, V) \bmod 2\pi$. Абсолютная величина V находится из соотношения

$$(1 - \delta) \cos^2 V = \cos^2 v - \delta,$$

а знак выбирается таким образом, что

$$\begin{aligned} \sqrt{\cos^2 v - \delta} &= \sqrt{1 - \delta} \cos V, & V \in [0, \pi], \\ -\sqrt{\cos^2 v - \delta} &= \sqrt{1 - \delta} \cos V, & V \in [-\pi, 0]. \end{aligned}$$

В новых переменных траектория на торе задается дифференциальным уравнением

$$\begin{aligned} \left(\frac{dV}{du}\right)^2 &= \frac{(1 - \delta)\varphi(V)(\alpha + \varphi(V))(\varkappa + \alpha + \varphi(V) + 2\mu \sin u \sqrt{\alpha + \varphi(V)})}{(1 + \psi(u))(\delta + \psi(u))(\varkappa + \alpha - \psi(u) + 2\mu \sin u \sqrt{\alpha + \varphi(V)}), \\ \varphi(V) &= \frac{1}{2}(1 + \delta + (1 - \delta) \cos 2V), \quad \psi(u) = \frac{\alpha}{2}(1 + \cos 2u). \end{aligned} \quad (3.4)$$

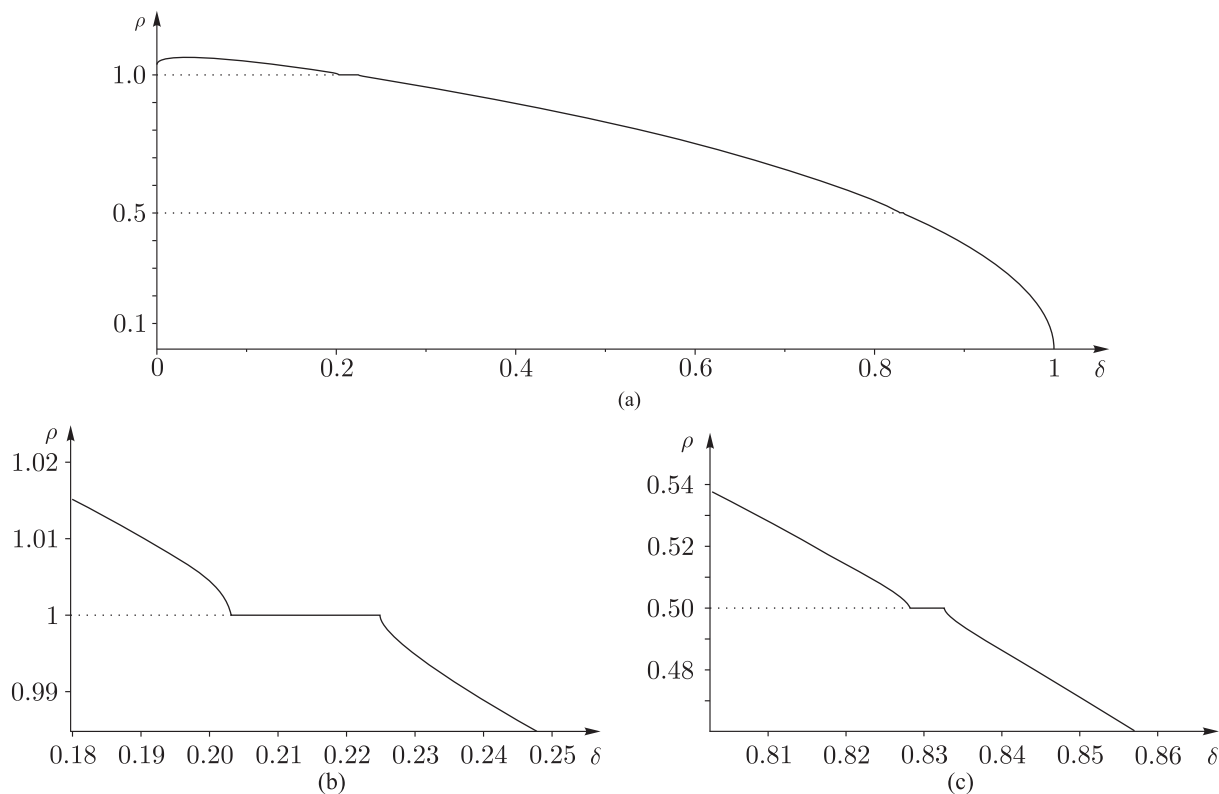


Рис. 3. График зависимости числа вращения системы (3.4) от параметра δ при $\varkappa = 3$, $\alpha = 2/3$, $\mu = 0.95$. На рис. (b), (c) увеличены фрагменты вблизи значений $\rho = 1$ и $\rho = 1/2$.

Напомним (см., например, [20]), что для потока на торе существует инвариант — число вращения. В данном случае для системы (3.4) число вращения может быть вычислено по формуле

$$\rho = \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{V(u) - V_0}{u - u_0},$$

где u_0, V_0 — начальная точка траектории. Если векторное поле на семействе торов допускает гладко зависящую от параметров инвариантную меру (интегральный инвариант), то число вращения также гладко зависит от параметров (см., например, [1]). В противном случае график зависимости числа вращения от параметров представляет собой канторову лестницу, горизонтальные участки этой лестницы соответствуют торах, на которых имеется один или несколько притягивающих циклов.

График числа вращения системы (3.4) в зависимости от параметра δ (при фиксированных остальных параметрах) изображен на рисунке 3. Здесь хорошо заметны горизонтальные участки, отвечающие резонансам $\rho = 1$ и $\rho = 1/2$ (при $\mu = 0$, то есть $c = 0$, эти участки исчезают).

Для того чтобы показать, что поток на резонансных торах, отвечающих плоским участкам на рисунке 3, имеет предельный цикл, рассмотрим на отдельном торе, соответствующем заданной величине δ , сечение Пуанкаре плоскостью $u = 0 \pmod{2\pi}$, которое определяет отображение окружности на себя

$$\Theta_\delta(V): S^1 \rightarrow S^1.$$

На рисунке 4 приведено отклонение этого отображения (либо его второй итерации) от тождественного, то есть функция

$$\Delta\Theta_{\delta}^{(1)}(V) = \Theta_{\delta}(V) - V \bmod 2\pi \quad (\text{либо } \Delta\Theta_{\delta}^{(2)}(V) = \Theta_{\delta}(\Theta_{\delta}(V)) - V \bmod 2\pi).$$

Корни функции $\Delta\Theta_{\delta}^{(k)}(V)$ соответствуют циклам на торе (закрывающимся через k оборотов по переменной u), те из корней, для которых первая производная больше нуля, отвечают неустойчивым циклам, а те, где меньше нуля, — устойчивым. Любопытно отметить, что в окрестности резонансных торов для отображения Θ_{δ} (либо его итераций) максимальное отклонение от тождественного не превышает 1 %.

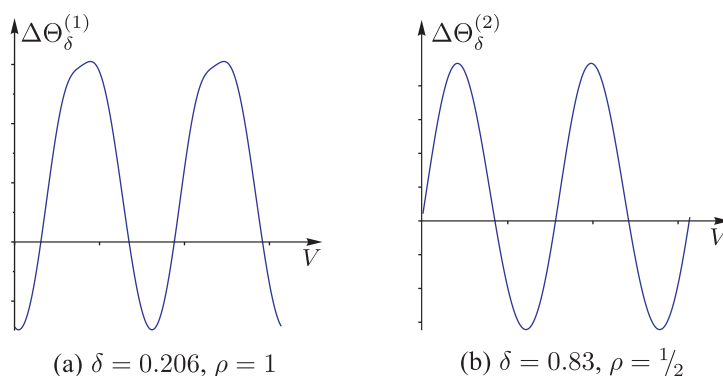


Рис. 4. Отклонение от тождественного отображения Пуанкаре на окружности и его второй итерации для двух различных торов с числами вращения $\rho = 1$ и $\rho = 1/2$ соответственно ($\alpha = 2/3$, $\kappa = 3$, $\mu = 0.95$).

Приведенные графики показывают, что на рассматриваемых торах имеется четыре предельных цикла, два из которых устойчивы и два — неустойчивы. Это означает, что в системе отсутствует гладкая инвариантная мера.

Авторы выражают благодарность Д. В. Трещеву за полезные замечания и обсуждение.

Список литературы

- [1] Болсинов А. В., Борисов А. В., Мамаев И. С. Гамильтонизация неголономных систем в окрестности инвариантных многообразий // *Нелинейная динамика*, 2010, т. 6, № 4, с. 829–854. *См. также*: Bolsinov A. V., Borisov A. V., Mamaev I. S. Hamiltonization of Nonholonomic Systems in the Neighborhood of Invariant Manifolds // *Regul. Chaotic Dyn.*, 2011, vol. 16, no. 5, pp. 443–464.
- [2] Болсинов А. В., Матвеев В. С., Фоменко А. Т. Двумерные римановы метрики с интегрируемым геодезическим потоком: Локальная и глобальная геометрия // *Матем. сб.*, 1998, т. 189, № 10, с. 5–32.
- [3] Болсинов А. В., Фоменко А. Т. Интегрируемые гамильтоновы системы: Геометрия, топология, классификация: В 2-х тт. Ижевск: УдГУ, 1999. 444 с.; 448 с.
- [4] Борисов А. В., Килин А. А., Мамаев И. С. Как управлять шаром Чаплыгина при помощи роторов // *Нелинейная динамика*, 2012, т. 8, № 2, с. 289–307. *См. также*: Borisov A. V., Kilin A. A., Mamaev I. S. How to control Chaplygin's sphere using rotors // *Regul. Chaotic Dyn.*, 2012, vol. 17, nos. 3–4, pp. 258–272.
- [5] Борисов А. В., Мамаев И. С. Динамика твердого тела. 2-е изд. М.–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2005. 576 с.

- [6] Борисов А. В., Мамаев И. С. Изоморфизм и гамильтоново представление некоторых неголомомных систем // Сиб. матем. журн., 2007, т. 48, № 1, с. 33–45.
- [7] Борисов А. В., Мамаев И. С. Качение неоднородного шара по сфере без верчения и кручения // Нелинейная динамика, 2006, т. 2, № 4, с. 445–452. *См. также:* Borisov A. V., Mamaev I. S. Rolling of a non-homogeneous ball over a sphere without slipping and twisting // Regul. Chaotic Dyn., 2007, vol. 12, no. 2, pp. 153–159.
- [8] Борисов А. В., Мамаев И. С. Законы сохранения, иерархия динамики и явное интегрирование неголомомных систем // Нелинейная динамика, 2008, т. 4, № 3, с. 223–280. *См. также:* Borisov A. V., Mamaev I. S. Conservation laws, hierarchy of dynamics and explicit integration of nonholonomic systems // Regul. Chaotic Dyn., 2008, vol. 13, no. 5, pp. 443–490.
- [9] Борисов А. В., Мамаев И. С., Трещев Д. В. Качение твердого тела без проскальзывания и верчения: Кинематика и динамика // Нелинейная динамика, 2012, т. 8, № 4.
- [10] Веселова Л. Е. Новые случаи интегрируемости уравнений движения твердого тела при наличии неголомомной связи // Геометрия, дифференциальные уравнения и механика: Сб. ст. / В. В. Козлов, А. Т. Фоменко (ред.). М.: МГУ, 1986. С. 64–68.
- [11] Нгуен Тьен Зунг, Полякова Л. С., Селиванова Е. Н. Топологическая классификация интегрируемых геодезических потоков с дополнительным квадратичным или линейным по импульсам интегралом на двумерных ориентируемых римановых многообразиях // Функци. анализ и его прил., 1993, т. 27, № 3, с. 42–56.
- [12] Харламов М. П. Топологический анализ интегрируемых задач динамики твердого тела. Л.: ЛГУ, 1988. 200 с.
- [13] Borisov A. V., Mamaev I. S. The rolling motion of a rigid body on a plane and a sphere. Hierarchy of dynamics // Regul. Chaotic Dyn., 2002, vol. 7, no. 2, pp. 177–200.
- [14] Beghin H. Sur les conditions d'application des équations de Lagrange à un système non holonome // Bulletin de la S.M.F., 1929, vol. 57, pp. 118–124.
- [15] Ehlers K. M., Koiller J. Rubber Rolling: Geometry and Dynamics of 2-3-5 Distributions // Proceedings of the IUTAM Symposium on Hamiltonian Dynamics, Vortex Structures, Turbulence (Moscow, 25–30 August, 2006) / A. V. Borisov et al. (Ed.). Springer, 2008. P. 469–480.
- [16] Hadamard J. Sur les mouvements de roulement // Mémoires de la Société des sciences physiques et naturelles de Bordeaux, 4e série, 1895, pp. 397–417.
- [17] Koiller J., Ehlers K. M. Rubber rolling over a sphere // Regul. Chaotic Dyn., 2007, vol. 12 no. 2, pp. 127–152.
- [18] Lynch P., Bustamante M. D. Precession and recession of the rock'n'roller // J. Phys. A: Math. Theor., 2009, vol. 42, 425203, 25 pp.
- [19] Oshemkov A. A. Fomenko invariants for the main integrable cases of the rigid body motion equations // Topological classification of integrable systems / A. T. Fomenko (Ed.). (Adv. Soviet Math., vol. 6.) Providence, RI: AMS, 1991. P. 67–146.
- [20] Walsh J. A. The dynamics of circle homeomorphisms: A hands-on introduction // Math. Mag., 1999, vol. 72, no. 1, pp. 3–13.

Rolling without spinning of a ball on a plane: absence of an invariant measure in a system with a complete set of first integrals

Alexey V. Bolsinov¹, Alexey V. Borisov², Ivan S. Mamaev³

¹School of Mathematics, Loughborough University
United Kingdom, LE11 3TU, Loughborough, Leicestershire

^{1,2,3}Institute of Computer Science

Udmurt State University

Universitetskaya 1, Izhevsk, 426034 Russia



^{2,3}A. A. Blagonravov Mechanical Engineering Research Institute of RAS
Bardina str. 4, Moscow, 117334, Russia

Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of RAS
S. Kovalevskaja str. 16, Ekaterinburg, 620990, Russia

¹A.Bolsinov@lboro.ac.uk, ²borisov@rcd.ru, ³mamaev@rcd.ru

In the paper we consider a system of a ball that rolls without slipping on a plane. The ball is assumed to be inhomogeneous and its center of mass does not necessarily coincide with its geometric center. We have proved that the governing equations can be recast into a system of six ODEs that admits four integrals of motion. Thus, the phase space of the system is foliated by invariant 2-tori; moreover, this foliation is equivalent to the Liouville foliation encountered in the case of Euler of the rigid body dynamics. However, the system cannot be solved in terms of quadratures because there is no invariant measure which we proved by finding limit cycles.

MSC 2010: 37J60, 37J35, 70H45

Keywords: non-holonomic constraint, Liouville foliation, invariant torus, invariant measure, integrability

Received August 4, 2012, accepted October 19, 2012

Citation: *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2012, vol. 8, no. 3, pp. 605–616 (Russian)